



Monographies de géométrie constructive. Simplex stables dans les systèmes constructifs

David-Georges Emmerich

► To cite this version:

David-Georges Emmerich. Monographies de géométrie constructive. Simplex stables dans les systèmes constructifs. [Rapport de recherche] 685/90, Ministère de l'équipement, du logement, des transports et de la mer / Bureau de la recherche architecturale (BRA); Ministère de la recherche et de la technologie; Ecole nationale supérieure d'architecture de Paris-La Villette. 1990. <hal-01910267>

HAL Id: hal-01910267

<https://hal.science/hal-01910267v1>

Submitted on 31 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



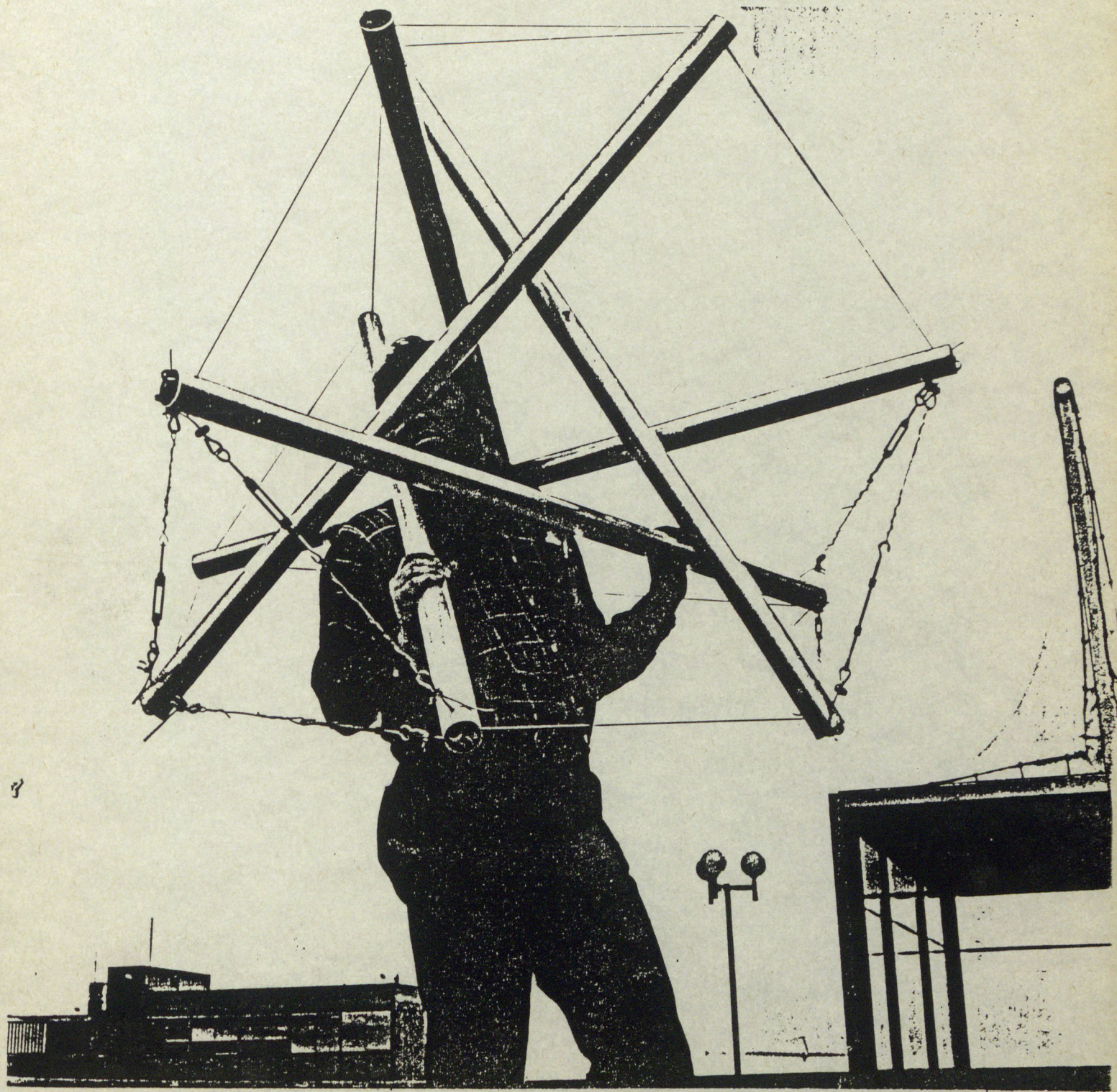
HAL Authorization

MONOGRAPHIES DE GEOMETRIE CONSTRUCTIVE

685

SIMPLEX STABLES

DANS LES SYSTEMES CONSTRUCTIFS

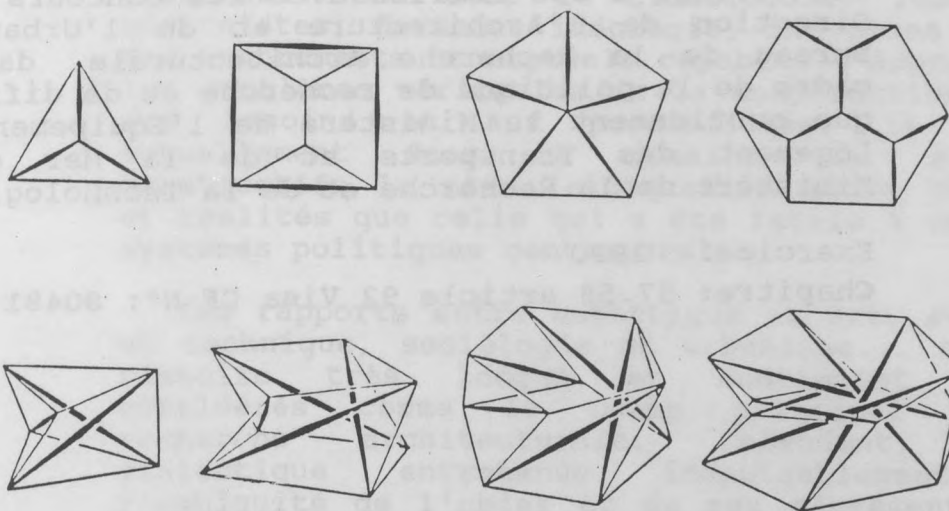


DAVID GEORGES EMMERICH

Ecole d'Architecture de Paris la Villette

PREFACE

**SIMPLEX STABLES
DANS LES SYSTEMES CONSTRUCTIFS**



DAVID GEORGES EMMERICH

Cet ouvrage a été réalisé avec les concours de la Direction de l'Architecture et de l'Urbanisme, Bureau de la Recherche Architecturale, dans le cadre de la politique de recherche et de diffusion que soutiennent le Ministère de l'Équipement, du Logement des Transports et de la Mer et le Ministère de la Recherche et de la Technologie.

Exercice: 1990

Chapitre: 57.58 article 92 Visa CF N°: 80481

Tous droits réservés par l'auteur © 1990

PREFACE

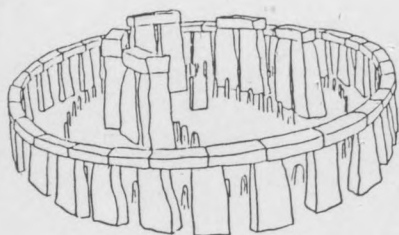
Après la grande rupture de l'avant-garde constructiviste avec le classicisme, les idées modernistes, devenues idéologie, ont cessé d'être des instruments conceptuels capables d'appréhender les problèmes véritables de la construction. Face aux besoins et aux possibilités, il existe actuellement dans le domaine des systèmes constructifs la même inadéquation entre théories et réalités que celle qui a été fatale à certains systèmes politiques contemporains.

Les rapports entre esthétique et art, ethnique et technique, sociologie et urbanisme... ont une histoire très longue et continuent d'être considérés comme le champ principal de la recherche architecturale. Cependant, cette dialectique entretenue inépuisablement par l'ambiguïté de l'objet et de ses représentations est loin de constituer le cadre approprié à une réflexion sur le devenir de l'architecture.

Après une longue période de stagnation, de manque de créativité et même de retour en arrière, il n'est plus possible aujourd'hui de penser l'art de bâtir comme un reflet multiple de la société, de l'économie ou de la mode. Il faut enfin se rendre à l'évidence que les systèmes constructifs ont leur propre vérité, obéissent à leur propre logique et que la création architecturale est, d'abord, la création de formes constructives nouvelles: objet du présent ouvrage.

INTRODUCTION

A LA RESISTANCE DES FORMES



Construire comme l'indique le préfixe est une activité d'assemblage. Une construction est, par définition, le contraire du monolithe. C'est une multitude d'éléments liés en un système d'un seul tenant: un ensemble nécessairement articulé.

Sous l'effet des efforts, les divers types de combinaisons structurales, qu'on peut considérer comme autant de simplex autonomes, peuvent être déformables ou indéformables. L'architecture s'intéresse à ces derniers, les stables.

La stabilité de ces motifs répétitifs, désormais omniprésents dans l'architecture - composée de plus en plus de pièces détachées industrialisées et assemblées à sec avec des joints mécaniques - dépend essentiellement de l'indéformabilité géométrique de leur forme et non seulement de la résistance physique de leurs matériaux.

Les connaissances morphologiques et satiques du compositeur - architecte ou ingénieur, peu importe - contribuent donc autant à la stabilité, voire à l'économie d'un édifice, que les propriétés des matériaux, puisque c'est lui qui choisit la forme. Ce choix n'est, certes, pas arbitraire mais fondé sur des critères rationnels: sorte de "secrets des bâtisseurs" qu'il convient de percer et rendre accessibles.

Cependant, la plupart des manuels de construction présentent les structures porteuses selon des méthodes assez discutables. Certains traitent le sujet, à base de critères fonctionnels, par exemple, la même charpente en arc croisillonné en tant que halle de marché, gare de chemin de fer, salle d'expositions... avec autant d'anecdotes érudites: sur leur date de construction, les incidents de fabrication ou de mise en oeuvre, etc. Détails fort utiles pour l'historien mais plutôt redondants pour un concepteur de structures.

D'autres, tout aussi nombreux, en usage surtout dans les écoles d'ingénieurs, suivent des critères fondés sur les matériaux de construction. Cette fois on retrouve, par exemple, la même ferme triangulée réalisée: en profilé de fer, en tube d'acier, en bois massif ou en lamellé collé, ou même en béton précontraint. Là encore, les détails d'exécution escamotent les problèmes de conception de la forme structurale.

Une troisième sorte de manuels, pas très différents finalement des précédents, en usage surtout dans les écoles d'architecture, se contente de cataloguer les éléments de construction comme des organes isolés - poteaux, poutres, planchers... - sans se préoccuper de leur assemblage dans un ensemble structural cohérent.

Cette inadéquation des diverses méthodes d'approche des solutions structurales dans les ouvrages de référence expliquerait peut-être le sous développement certain de la pensée constructive dans le milieu du bâtiment qui se traduit actuellement par un appauvrissement indéniable du langage morphologique, du côté des architectes; par une lourdeur d'exécution malgré l'invention des matériaux de plus en plus résistants, du côté des ingénieurs; et par des opinions arbitraires et contradictoires sur les réalisations récentes, du côté des critiques qui portent souvent au pinacle des structures à la fois banales et illogiques.

Les structures sont ce qu'elles sont: tout d'abord des formes résistantes dont l'essence est indépendante aussi bien de leur destination fonctionnelle que de leurs matériaux de réalisation. Par conséquent, ce sont les critères morphologiques, ou topologiques, qui sont capables de les caractériser, inventorier ou classifier.

Les systèmes constructifs, cependant, même s'ils sont d'abord des pures formes, définissables en tant qu'êtres géométriques, sont aussi des mécanismes, le plus souvent bloqués, mais parfois mobiles. De ce fait, il convient de différencier ces formes par des caractéristiques supplémentaires, notamment suivant leur comportement statique et le travail provoqué dans leurs composants pour résister aux déformations. C'est l'étude de la rigidité, celle de la "résistance des formes".

CLASSIFICATION DES FORMES

CONSTRUCTIVES

Pour pouvoir classer les structures selon les critères morphologiques, il convient de rappeler les entités topologiques suivant leur ordre hiérarchique: point, ligne, surface, volume. C'est, en effet, l'énumération la plus sommaire des composants spatiaux. Appliqués dans un ordre inverse pour la construction, ces termes correspondent respectivement à quatre catégories:

Masses monolithiques pleines ou creuses.

Enveloppes à parois continues.

Ossatures composées de pièces oblongues.

Sommets ou joints d'assemblage.

A la première catégorie appartiennent les maçonneries monolithiques, à la seconde les voiles rigides et les membranes souples. Ces deux catégories sont en dehors de notre sujet, alors que les deux dernières composent le domaine dans un sens large dont s'occupe notre étude.

Dans un sens large car la notion de pièce oblongue inclue, en effet, des membrures non rectilignes. De même que celle des joints s'étend sur les liaisons encastrées, ce qui en fait contredit le caractère ponctuel de ce composant et rétablit le monolithisme: l'opposé de l'articulé.

Notre sujet se restreint donc exclusivement à l'étude de structures composées de segments rectilignes - tendus ou comprimés - et assemblées par des joints virtuellement ponctuels, condition d'ailleurs pratiquement indispensable pour établir des articulations mobiles.

Il est possible d'élaborer d'une manière quasi généalogique une classification du domaine restreint des structures articulées à composants droits. Elles se divisent tout d'abord en configurations planaires ou non planaires, c'est à dire spatiales.

Les configurations planaires contiennent tous les graphes qu'on peut situer sur un espace de support plan: chaînes, arborescences, polygones, tessellations.... Dans cette liste, seules les formes fermées - polygones et leurs assemblages, les tessellations - sont intéressantes. Les autres, étant des figures ouvertes, ne sont pas stabilisables par des joints mobiles.

Les configurations spatiales rectilignes les plus simples sont des solides convexes: pyramides, bipyramides, prismes, antiprismes et leurs composés pyramidés; ainsi que les polyèdres réguliers ou semi-réguliers. Ces formes servent de schémas pour des simplex spatiaux élaborés ici. Il existe, évidemment, d'autres corps convexes - les deltoèdres non sphériques, les duals des polyèdres précédents ainsi que leurs troncatures, etc. - qui sont utilisables également pour créer d'autres simplex stables.

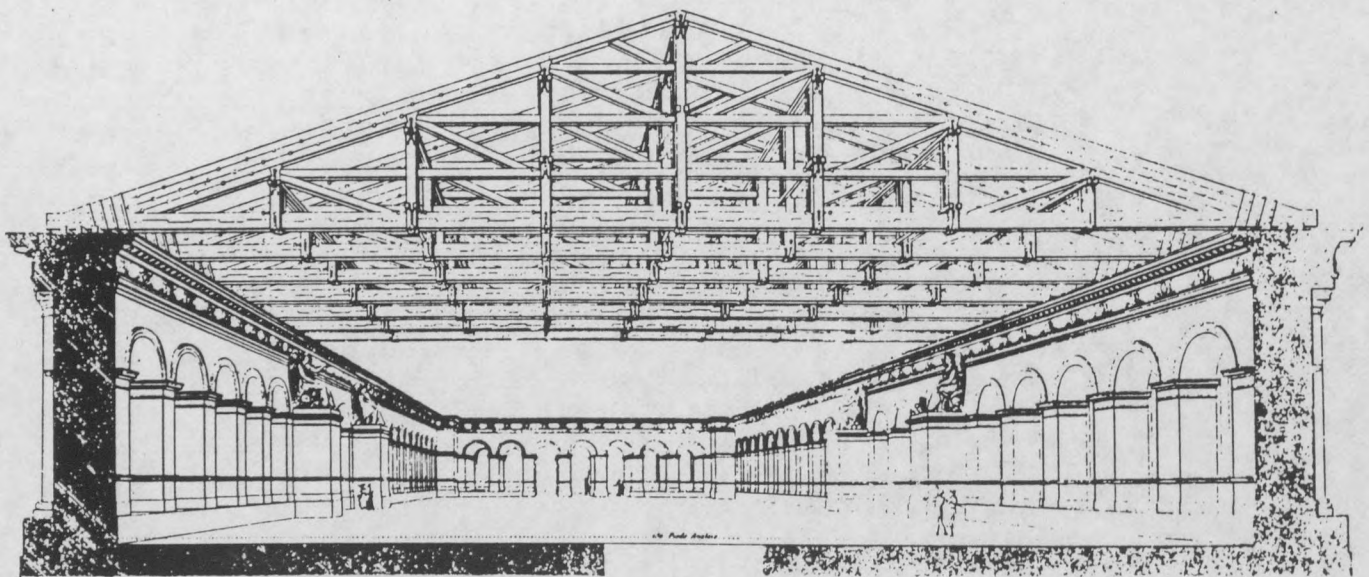
Les possibilités d'assemblage de ces véritables molécules constructives sont pratiquement innombrables et outrepassent de toute façon le cadre de cet essai. On se contente ici de mentionner que la juxtaposition - en ligne et en surface, droites ou courbes, ou en empilement - des précédents volumes produit des réseaux en forme de mât, de tore, de double nappe, ou d'arrangements remplissant tout l'espace et leurs variantes élaguées: les espaces spongieux non compacts. Des structures encore plus complexes peuvent être obtenues par l'assemblage non-congruent - interpénétré ou entrelacé - des volumes.

Des descriptions précises concernant ces configurations stéréométriques et leurs assemblages se trouvent dans la série "Monographies de Géométrie Constructive - Morphologie" éditée par l'auteur, dans les trois volumes parus sous le titre: Equipartitions I -II "Tessellations et Réseaux planaires" - "Polyèdres et empilements" et "Structures tendues et autotendantes"

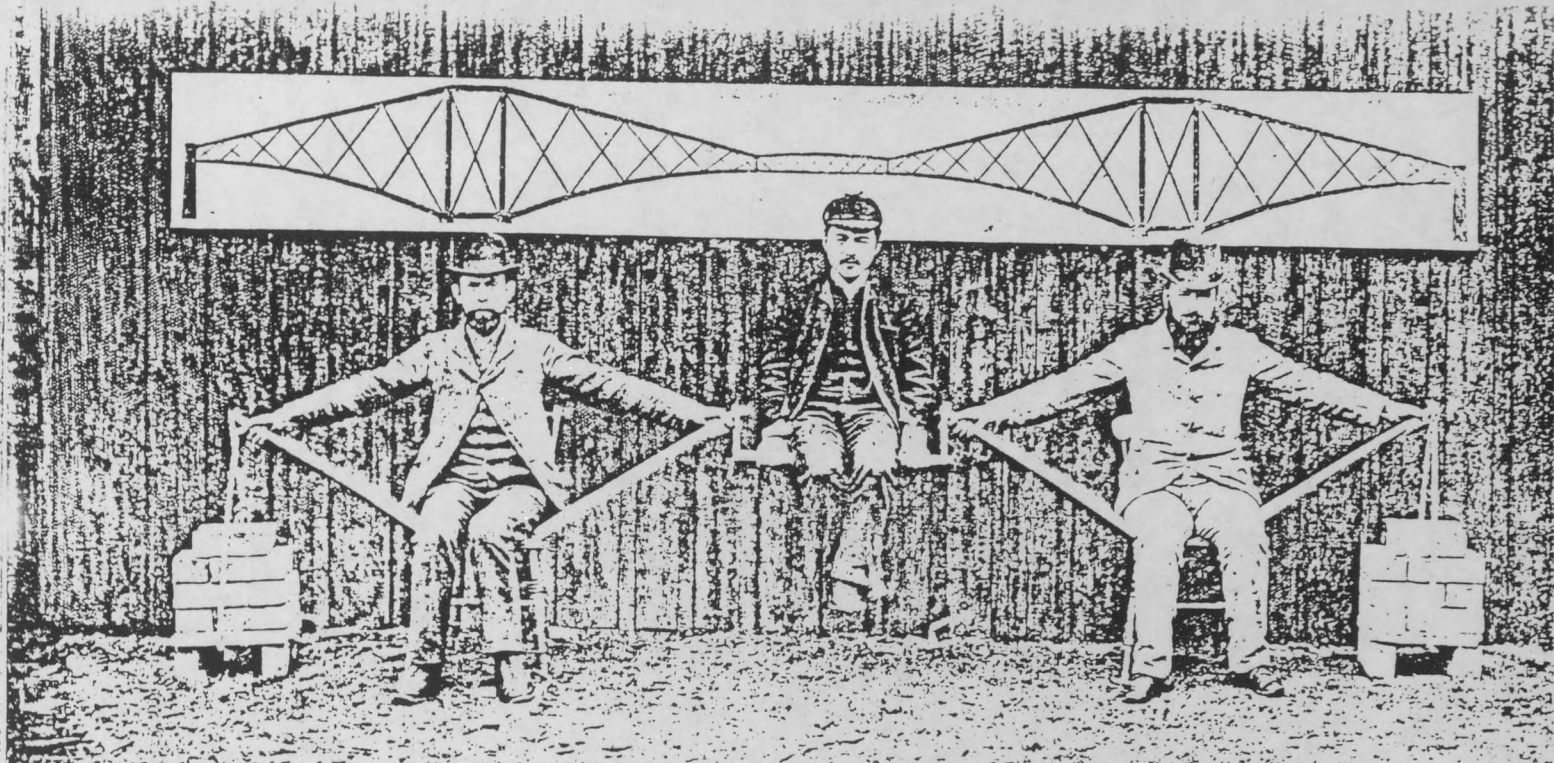
CLASSIFICATION DES SYSTEMES PORTEURS

Quelle que soit la forme géométrique initiale d'un système porteur articulé, chaque configuration, une fois qu'elle est transformée en structure stable, peut être caractérisée par la nature et le comportement de ses composants: selon qu'ils travaillent de manière indifférenciée aussi bien à la traction qu'à la compression alternativement; ou bien d'une manière différenciée soit à la compression, soit à la tension uniquement. Ce qui permet de les classer d'emblée en deux grandes catégories.

Les structures indifférenciées, du fait de l'alternance du sens des sollicitations, doivent se composer entièrement de barres rigides. Donc, bien que le renversement des efforts rende chaque fois une moitié des membrures tendues, ces structures ont l'inconvénient d'être constituées en totalité d'éléments dimensionnés pour subir le flambage provenant de la compression, elles sont donc considérablement plus lourdes.



Manège. Moscou. Bettencourt 1817



Tension-compression

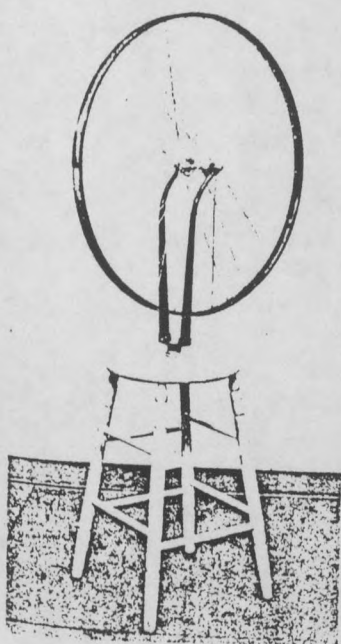
Forth Bridge

Les structures différenciées de diverses classes remédient à cet inconvénient, en introduisant dans des proportions variables des éléments travaillant exclusivement à la traction. En principe, on peut subdiviser cette catégorie en trois classes:

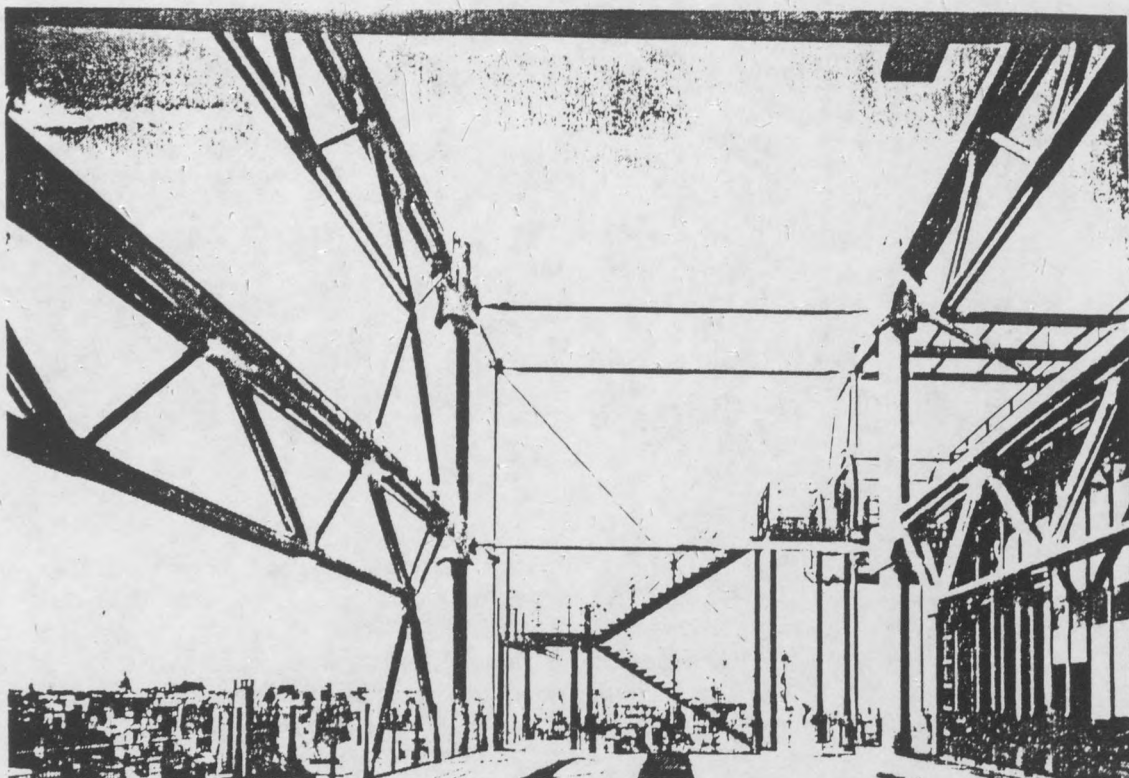
Les structures tendues ordinaires où les membrures sont en permanence soit comprimées soit tendues, les barres comprimées de même que les tendues formant des réseaux continus. Telles les poutres sous-bandées, fermes Polonceau.

Les structures semi-autotendantes, où les membrures ont un travail différencié, les barres comprimées étant partiellement dissociées dans un réseau continu ou partiellement dissocié de tirants. Telle la roue de bicyclette.

Les structures autotendantes à membrures différenciées où toutes les barres comprimées sont dissociées et comme suspendues sans aucun contact entre elles dans un réseau continu de tirants.



Les structures à barres isolées dans un discontinuum de tirants étant un non-sens, ces trois classes de structures forment par ordre croissant des gammes de plus en plus économiques du point de vue de la légèreté et donc de la performance constructive. La dernière classe étant évidemment la plus avantageuse, la proportion des barres comprimées par rapport aux tirants pouvant descendre dans ce cas à un rapport de un à quatre.

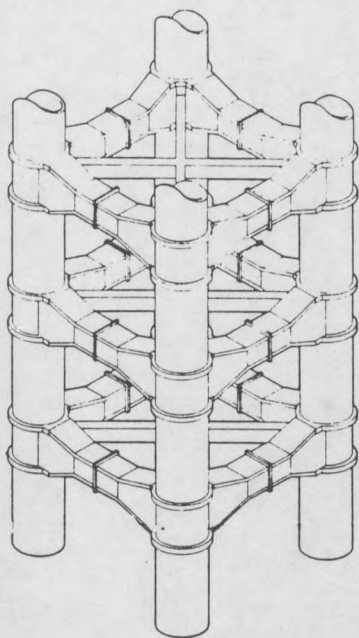


Centre Beaubourg

Pour recouper avec l'actualité, il est intéressant de remarquer que pour aussi nouveaux qu'ils paraissent, les réseaux double nappe, dits tridimensionnels, appartiennent encore à la catégorie non différenciée. Quant aux structures tendues qu'on voit de plus en plus souvent, elles ne sont que les rééditions des poutres sous-bandées planaires faisant parti de la première classe des systèmes différenciés.

Avant de commencer de façon systématique et par ordre de complexité croissante du point de vue morphologique le traitement des divers simplex stables, il convient donc de se préoccuper du problème d'évolution et aussi d'évaluation. A base de quel critère rationnel peut-on qualifier une structure de plus ou moins évoluée et donc l'apprécier par rapport à une hiérarchie de valeurs.

Tel bâtiment, exhibant des poutres triangulées et pourtant encastrées, comme le Centre Beaubourg, ou tel gratte ciel, magnifiant des poutres-échelles à croisillons monolithiques, à Hong Kong, par exemple, valent-ils le Crystal Palace ou la chocolaterie Meunier du point de vue de la conception structurale? Quels sont au fond dans ce domaine les critères de la primitivité ou de la complexité?

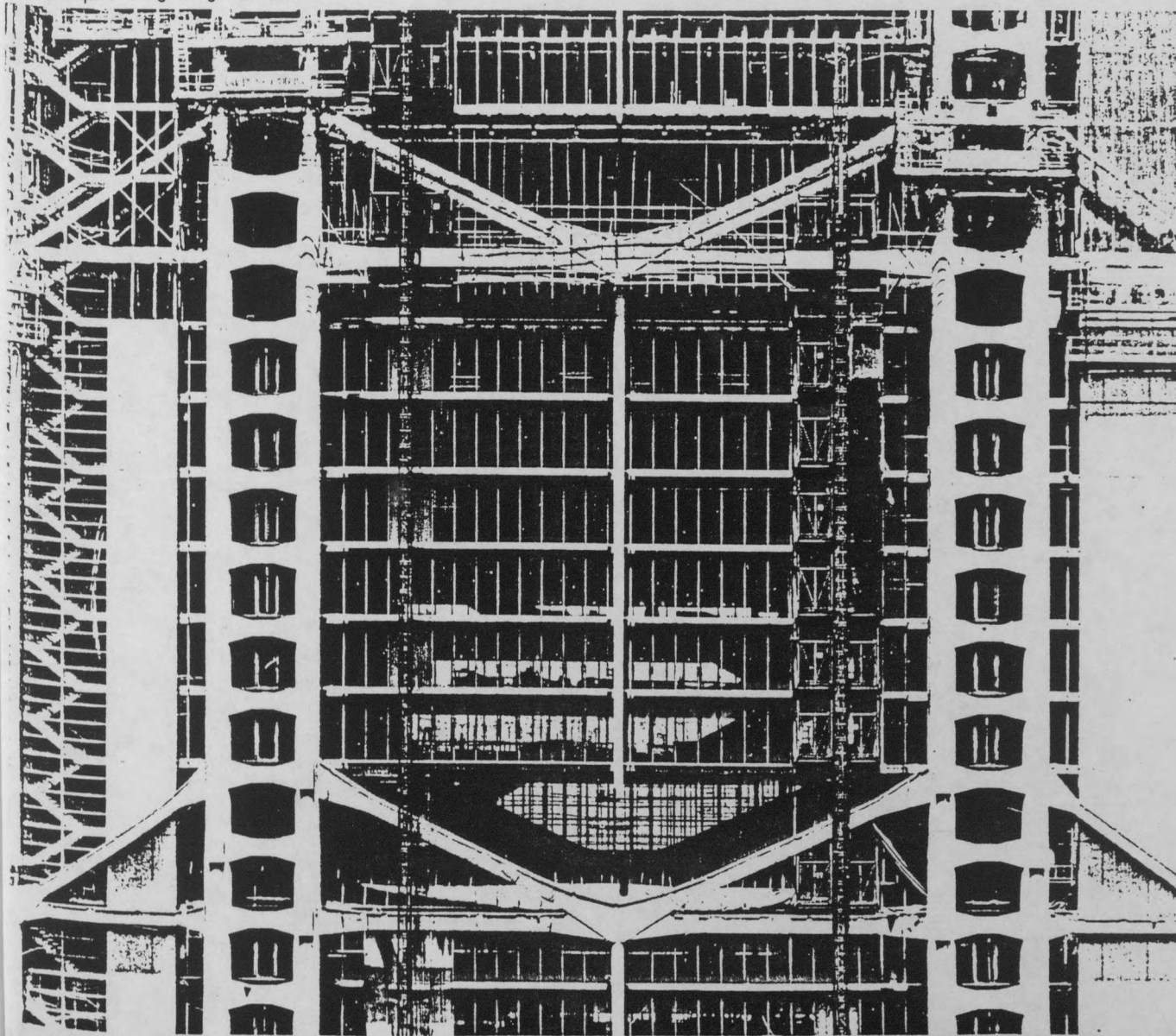


Ainsi, au delà de l'établissement d'un vocabulaire constructif plus large des simplex stables qui grâce à leur symétrie sont facilement assemblables dans des ensembles de plus en plus complexes, le but de cet essai est d'esquisser aussi une échelle de référence, sinon de valeur, permettant d'apprécier selon une certaine logique le niveau de développement d'une oeuvre construite.

Cette réflexion sur la conception structurale peut s'exercer, en effet, sur trois niveaux qui concernent respectivement: les qualités morphologiques des simplex, le degré de différenciation des composants et la complexité de leurs assemblages dans les ouvrages architectoniques.

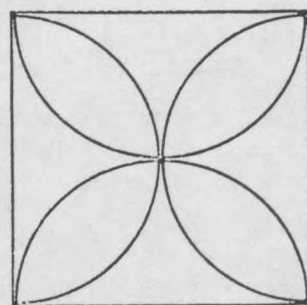
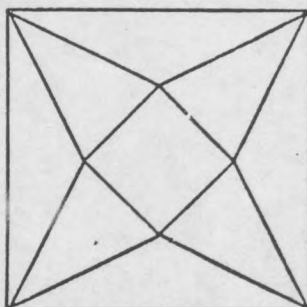
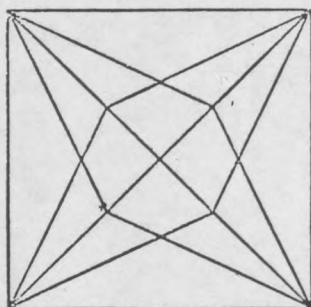
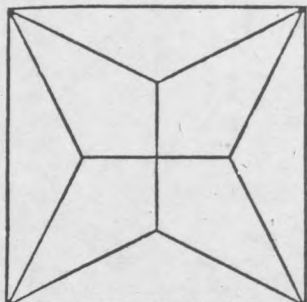
Les palmes de ces jugements de valeur rationnels devraient être attribuées, évidemment, aux structures qui s'approchent au plus près de l'ultime objectif qui consiste à construire le maximum d'espace, avec le minimum de matière.

Banque. Hong-Kong. Foster



SIMPLEX STABLES DANS LES SYSTEMES

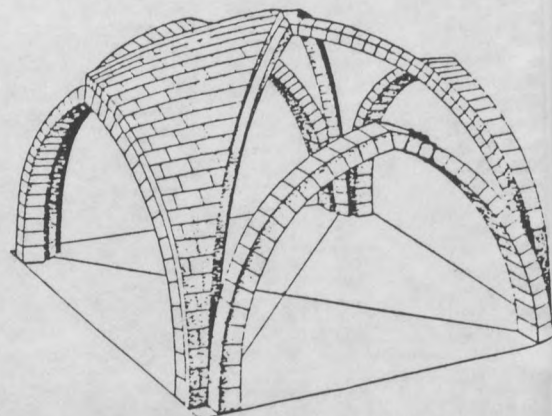
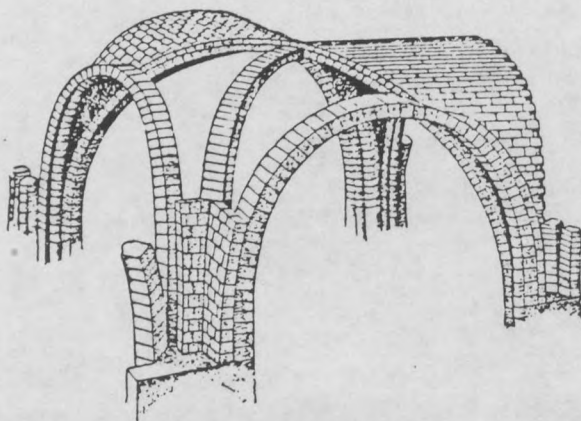
ARTICULES

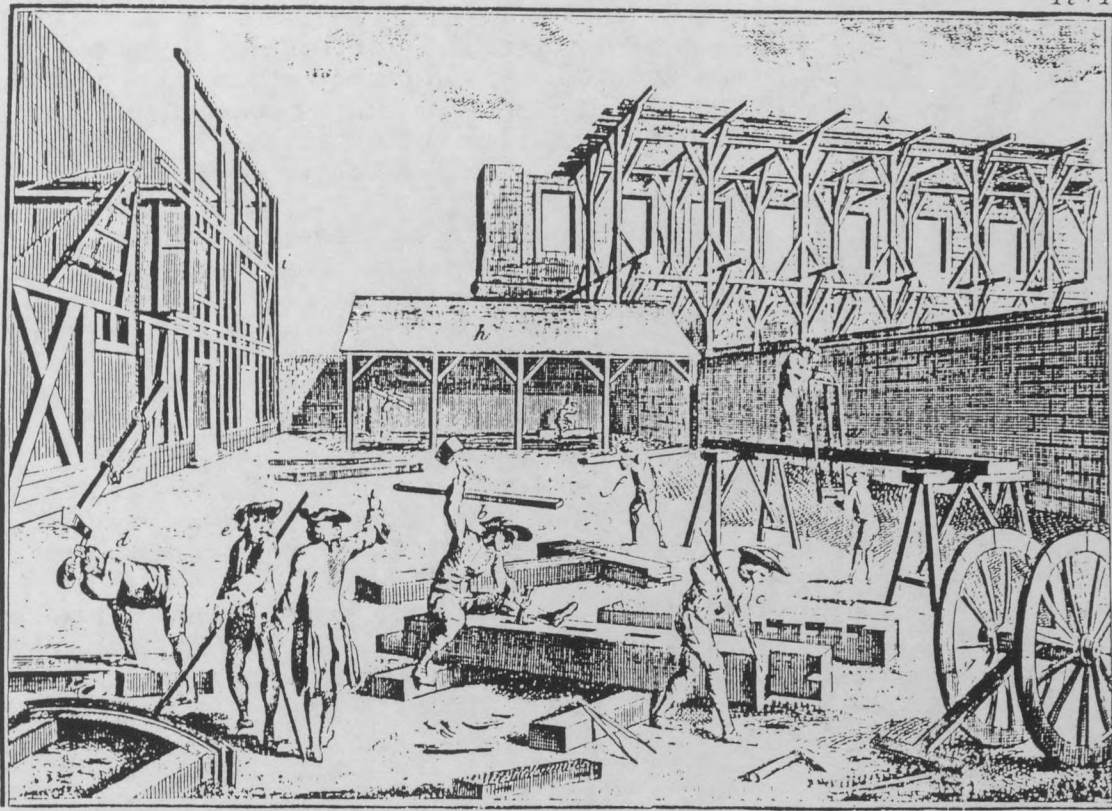


Le simplex stable est un sous-ensemble autonome qui se maintient en équilibre comme une entité indéformable dans un système constructif non monolithique, donc composé essentiellement de barres comprimées ou tendues qui sont assemblées par des articulations mobiles.

Considérant les constructions anciennes, on retrouve dans un sens plus large ces entités statiques qui sont caractéristiques de l'architecture des diverses époques, les styles. Ainsi, au delà des détails décoratifs, les ordonnancements classiques de colonne-architrave ont tous pour motif constructif une baie composée de deux montants et une traverse. Au fond, le même que dans un dolmen. Dans l'architecture romaine l'entité dominante sera l'arc puis la voûte croisée. L'art roman et parallèlement le byzantin se fondent sur l'utilisation d'entités composées de parois cylindriques ou sphériques.

Mais, c'est surtout dans les diverses phases de l'évolution de l'architecture gothique, quand progressivement la maçonnerie s'affine en une quasi charpente, variant le tracé des travées élémentaires depuis la simplicité de l'intersection diagonale jusqu'aux dessins intriqués de la période flamboyante, que la présence du simplex constructif, le motif caractéristique, juxtaposable ou composable comme dans une symphonie musicale, devient évidente.

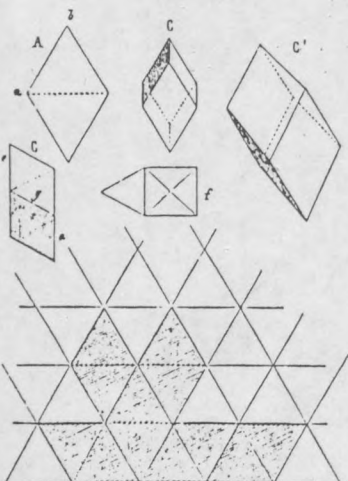
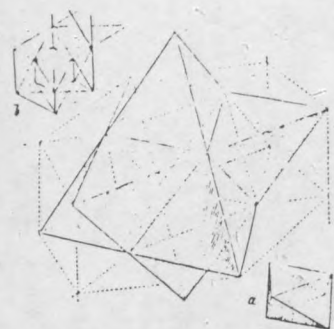




Charpente à goussets triangulaires

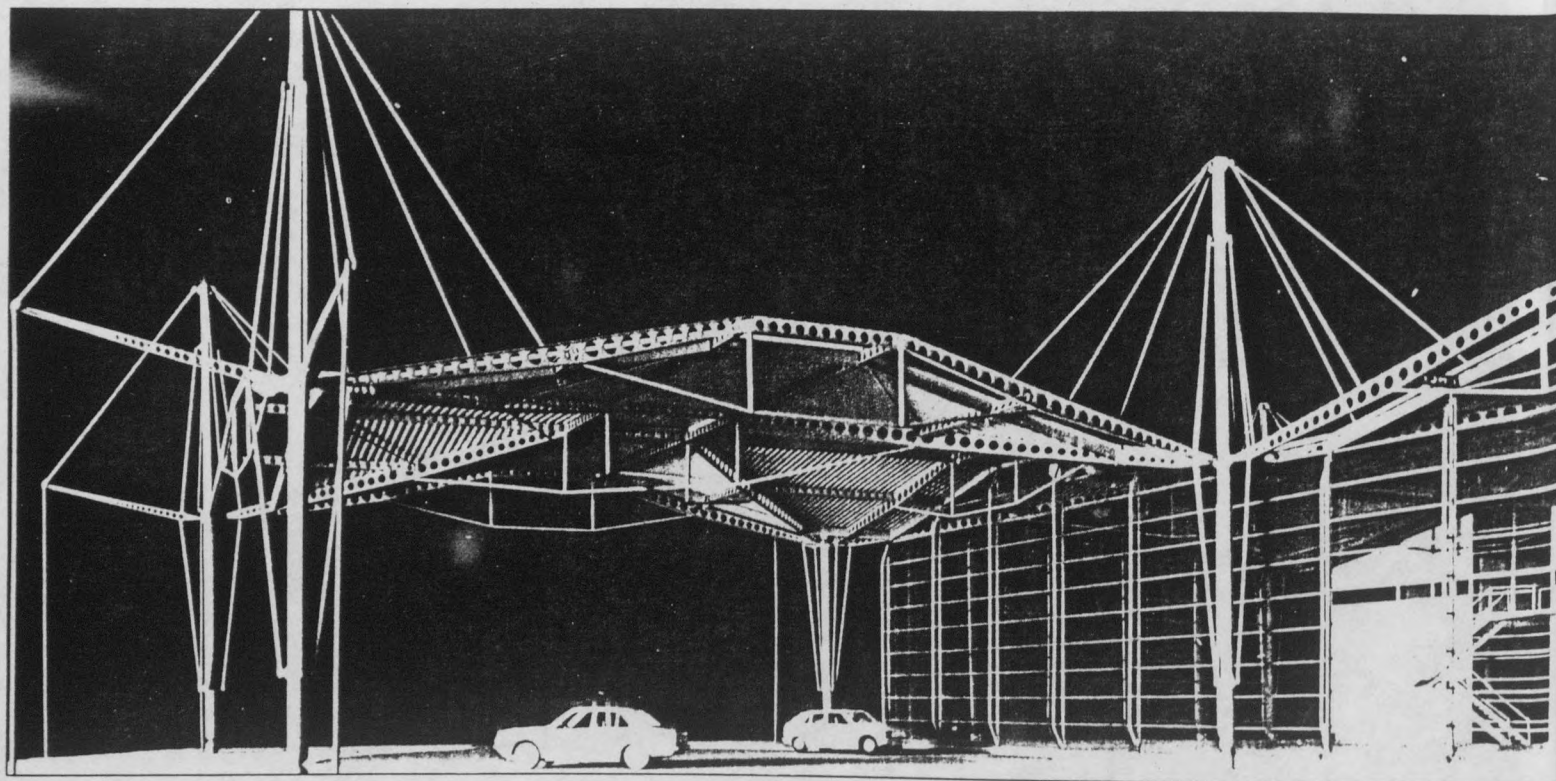
Dans les charpentes anciennes, qui coexistaient avec la maçonnerie depuis toujours, à moins de la précéder, on peut discerner également certaines configurations élémentaires reconnues et utilisées comme organes de stabilisation ou de contreventement. Tels sont les goussets triangulaires des charpentes en bois, les diagonales ou les croix de Saint André des ossatures en colombage, et plus tard les croisillons tendus des structures métalliques. Ces simplex stables, presque toujours planaires, étaient très peu nombreux et l'art de construire s'en contentait jusqu'à maintenant.

Quand on ouvre un manuel de construction, ou un ouvrage traitant de la charpente, même chez les auteurs les plus connus, les compositions structurales montrées à titre d'exemples de calcul sont presque exclusivement des configurations planaires triangulées. Il n'est donc pas étonnant qu'en même temps les formules encore en usage vérifiant la rigidité d'une charpente, quelle qu'elle soit, même volumique et non triangulée, soient issues également de l'a priori de l'omniprésence du triangle en tant que simplex stable.

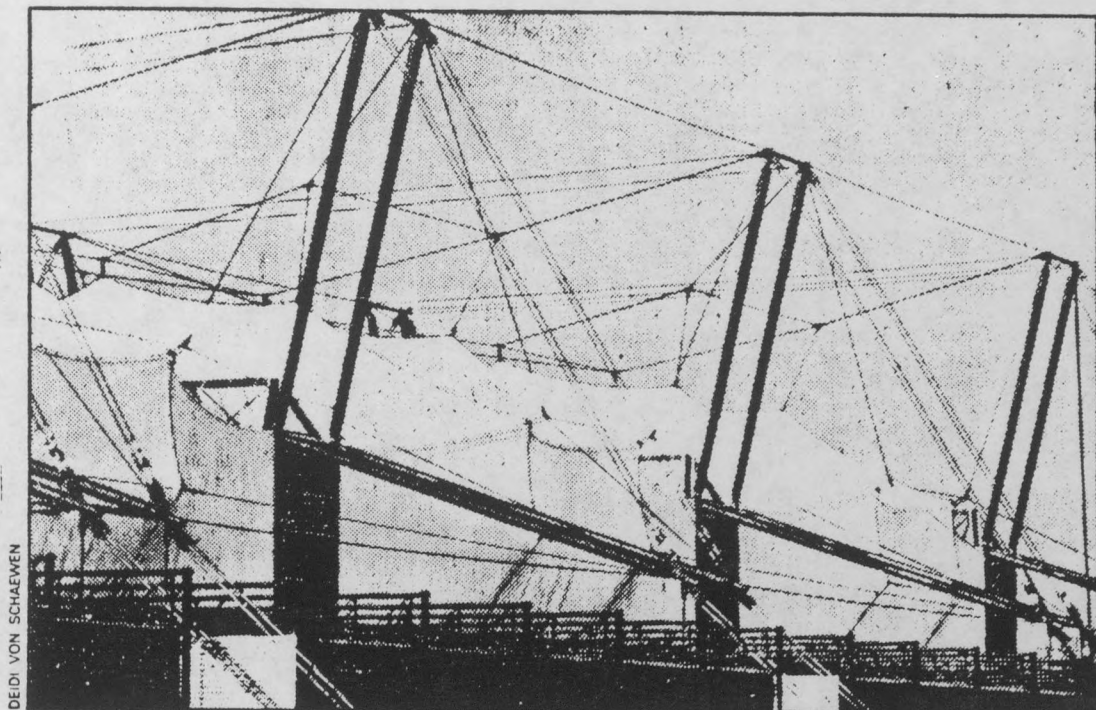


Cependant, depuis quelques décades, mais longtemps après les suggestions de Viollet le Duc, A. Graham Bell, suite aux recherches de R. Le Ricolais, R.B. Fuller et d'autres, les structures spatiales, c'est à dire fondées sur des motifs élémentaires volumiques formant des réseaux cristallographiques, sont devenues de plus en plus fréquentes. Mais là encore les simplex volumiques les plus utilisés sont les deltoèdres réguliers, autrement dit les polyèdres convexes triangulés: tétra-, octa- et icosaèdres.

Aujourd'hui, que la construction tend à devenir de plus en plus légère et spatiale, voir l'engouement récent pour les structures haubannées, et souvent composées un peu n'importe comment, il y a lieu de réexaminer les règles régissant le contrôle de la rigidité des configurations articulées puis, c'est l'objet du présent essai, élargir la liste des simplex stables pouvant entrer dans la composition des systèmes porteurs rigides.



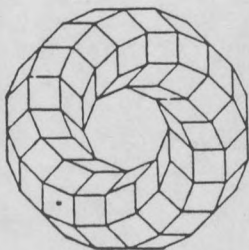
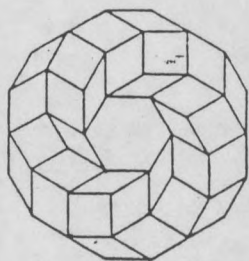
Usine Renault. Swindon. Foster



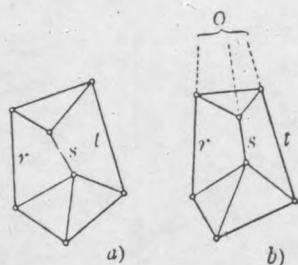
DEIDI VON SCHAEWEN

STATION DE RECHERCHE A CAMBRIDGE, DE MICHAEL HOPKINS.

Dans un article déjà ancien, paru sous le titre "Principes Edifiants" dans le journal professionnel "Techniques et Architecture" N°2-1966, qui est reproduit intégralement en annexe, on a eu déjà l'occasion de critiquer les idées reçues et également la validité des équations en usage chez les constructeurs pour vérifier l'indéformabilité d'une configuration: notamment, la fameuse formule $A = 3S - 6$ définissant la relation entre le nombre des arêtes (A) et celui des sommets articulés (S), mais qui n'est valable que pour les triangulations continues formant une configuration plane ou convexe, donc sans hiatus polygonal.

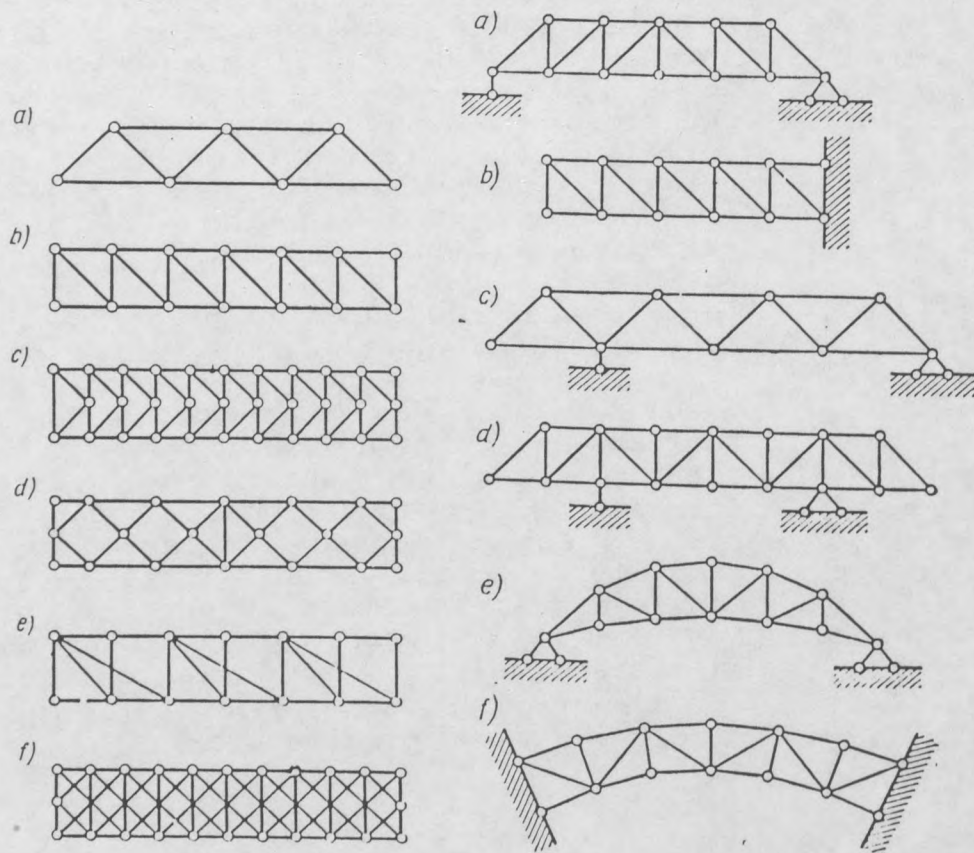


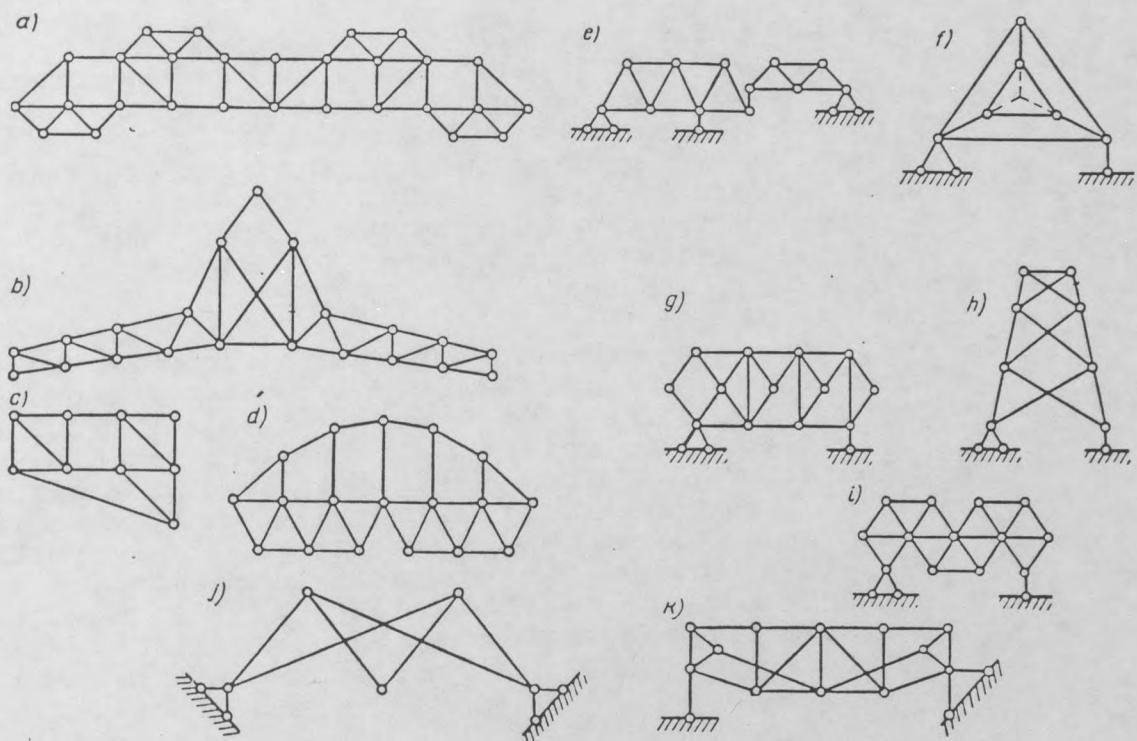
Dans le cas des compositions non convexes ou toriques, il convient donc de remplacer la formule d'Euler accréditée aussi à Descartes, par la formule de Ky-Fan Fréchet, tenant compte des hiatus. Ce qui donne finalement comme formule générale de contrôle dans le cas de triangulation continue mais incomplète d'une forme, l'équation : $A = 3S - 6K$, (K) étant le nombre de connexions de la surface enveloppante de la configuration, même si la surface est annulaire ou spongieuse, c'est à dire, avec un ou plusieurs trous.



Cependant, au delà de cette amélioration qui ne concerne que les systèmes triangulés, il existe des compositions stables qui ne sont ni triangulées, ni même construites d'un continuum d'éléments rigides. Depuis peu la rigidité de ces ensembles qu'on peut appeler atypiques et ensuite la notion de rigidité dans le sens général est devenue la grande actualité de la recherche structurale produisant de nombreuses publications lors des congrès de spécialistes et dans les revues professionnelles.

Ces études analytiques sont établies le plus souvent avec un lourd symbolisme algébrique en vue de trouver la ou les formules vérifiant l'indéformabilité des systèmes articulés quels qu'ils soient. Il semble, cependant, que pour le moment ce n'est pas par ces moyens abstraits et non géométriques qu'on puisse aborder le mieux le problème de la rigidité des systèmes complexes, vu la difficulté d'arriver à un résultat utilisable. Apparemment, la rigidité des configurations plus évoluées n'est pas quantifiable aussi facilement que celle des structures continues et monolithiques qui constituent le domaine de la résistance des matériaux. En fait, on devrait parler plutôt de la résistance des formes.





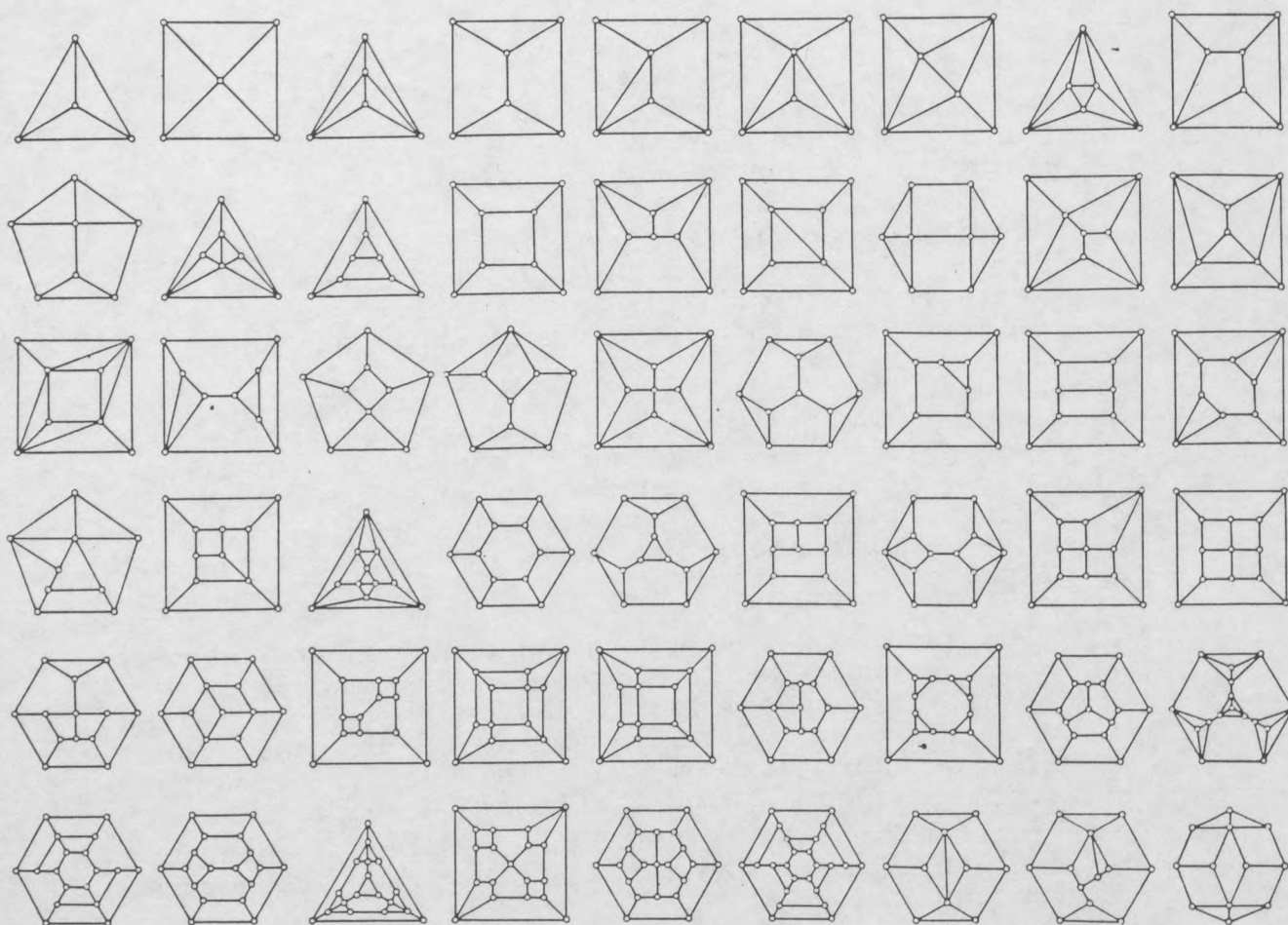
Cette résistance des formes, non pas en face des efforts mais des mouvements, puisqu'il s'agit d'une propriété intrinsèque à certaines figures géométriques de résister à des déformations mécaniques, relève en réalité du domaine de la cinétique; ou plus précisément du domaine de l'anti- ou non-cinétique. Ce qui intéresse plus exactement le constructeur ce sont les formes tout justement non-cinétiques, appelées isostatiques.

Quand on regarde un schéma de structure dans un manuel de construction ou de charpente, on trouve chaque fois un diagramme composé de segments droits formant un contour polygonal convexe ou concave, oblongue ou ramassée. Triangulée ou non, cette figure schématique peut être assimilée à un graphe.

On constate également l'extrême pauvreté des formes proposées comme exemples de conception et de calcul, en contraste avec l'extraordinaire fécondité de cette nouvelle branche des mathématiques dans le domaine de la création morphologique. D'où l'idée évidente de l'introduire et d'appliquer ses méthodes combinatoires exhaustives dans la recherche structurale.

En effet, l'étude combinatoire des graphes permet d'établir des séries de formes créées in abstracto sans aucun a priori structural. Le nombre des formes engendrées par cette méthode serait, évidemment, infini sans l'intervention de la symétrie et de la régularité. La plupart des séries morphologiques se composent grâce à cette simplification d'un nombre fini d'éléments, c'est à dire de graphes.

Ceci est valable aussi par extrapolation pour les figures volumiques ou polytopes spatiaux, dont les polyèdres et les réseaux réguliers. D'ailleurs, en raison de l'industrialisation dans les structures dites spatiales, la standardisation des éléments et la régularité des assemblages donnent encore plus d'importance à la symétrie. Bref, le nombre des formes arbitrairement choisi étant infini, l'invention et l'inventaire systématique des simplex stables seraient impossibles sans l'introduction du critère de régularité.



Rigidité des graphes polygonaux. Baracs

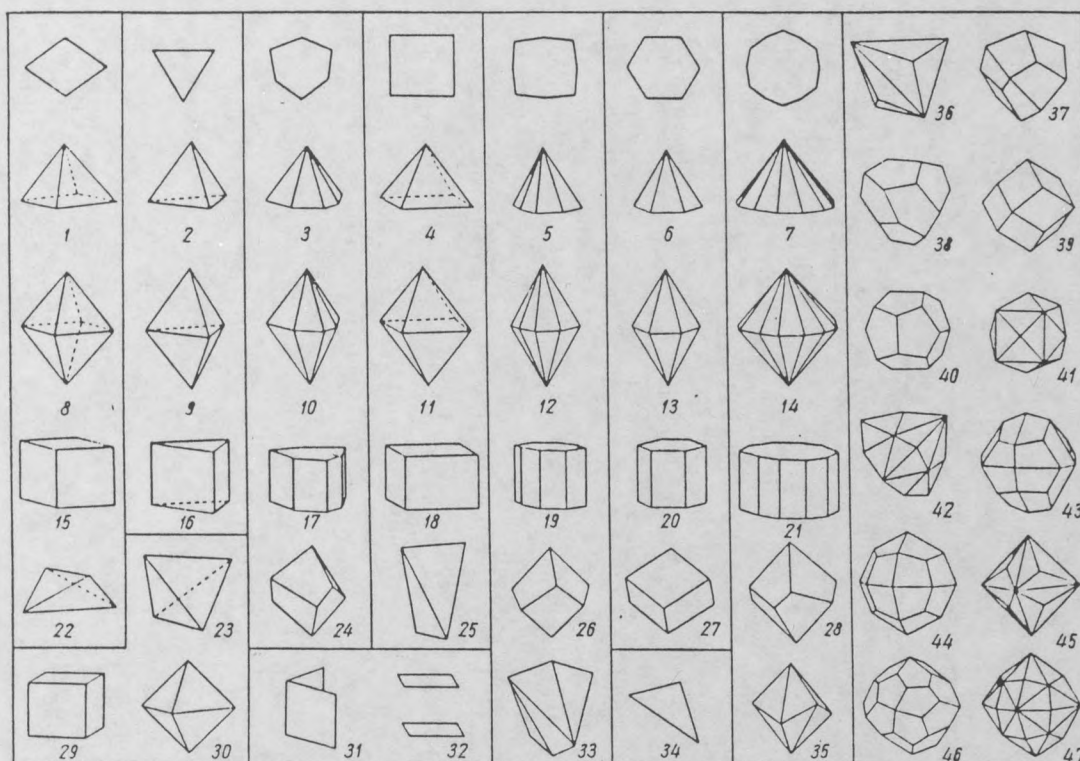
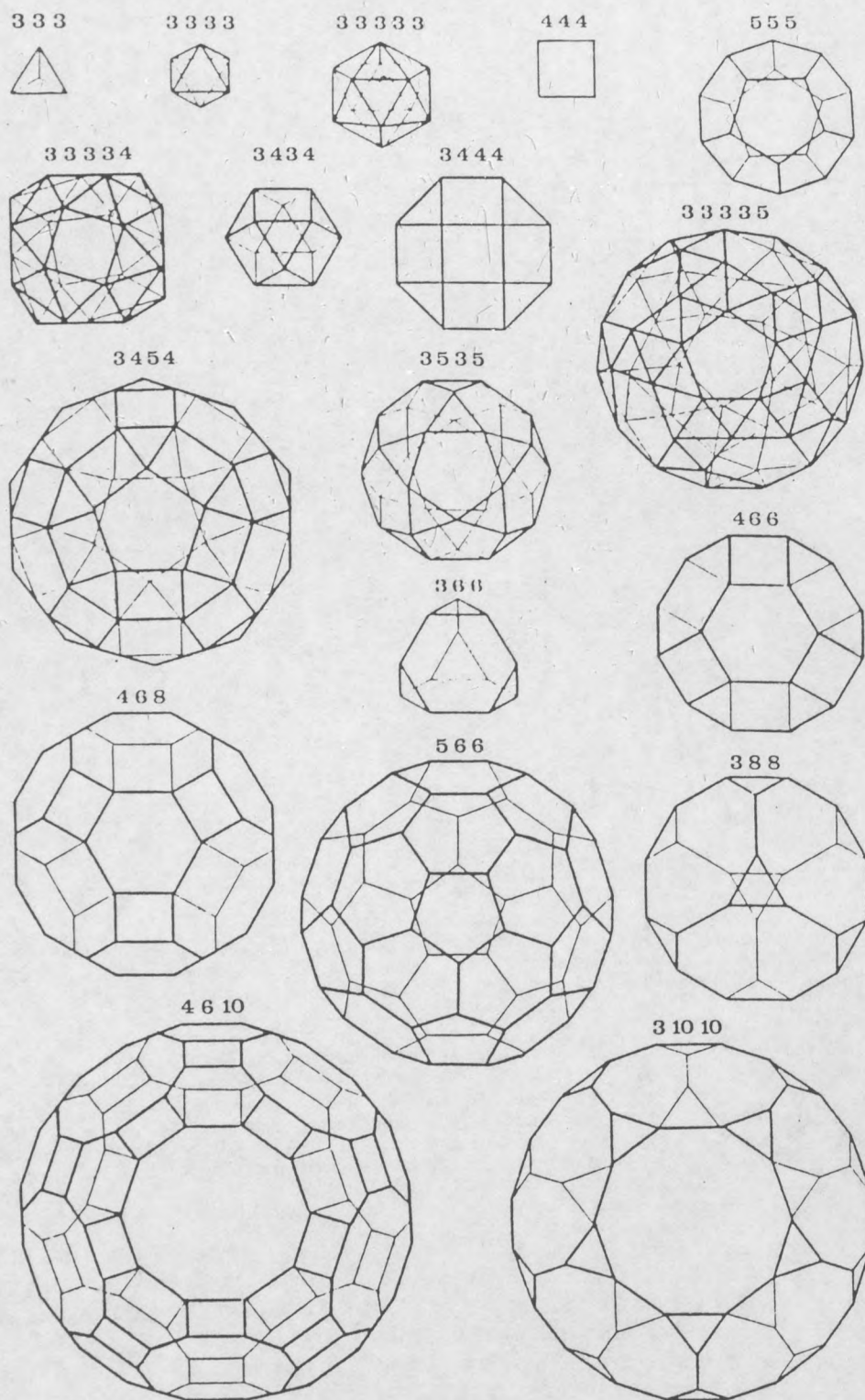


Fig. 141. Formes simples des cristaux:

1 — pyramide rhombique, 2 — pyramide trigonale, 3 — pyramide ditrigonale, 4 — pyramide tétragonale, 5 — pyramide ditétragonale, 6 — pyramide hexagonale, 7 — pyramide dihexagonale, 8 — dipyramide rhombique, 9 — dipyramide trigonale, 10 — dipyramide ditrigonale, 11 — dipyramide tétragonale, 12 — dipyramide ditétragonale, 13 — dipyramide hexagonale, 14 — dipyramide dihexagonale, 15 — prisme rhombique, 16 — prisme trigonal, 17 — prisme ditrigonal, 18 — prisme tétragonal, 19 — prisme ditétragonal, 20 — prisme hexagonal, 21 — prisme dihexagonal, 22 — tétraèdre rhombique, 23 — tétraèdre, 24 — trapézoèdre trigonal, 25 — tétraèdre tétragonal, 26 — trapézoèdre tétragonal, 27 — rhomboèdre, 28 — trapézoèdre hexagonal, 29 — cube, 30 — octaèdre, 31 — dièdre, 32 — pinacoïde, 33 — scalénoèdre tétragonal, 34 — monoèdre, 35 — scalénoèdre ditrigonal, 36 — trigonétritétraèdre, 37 — tétra-gonétritétraèdre, 38 — pentagonétritétraèdre, 39 — rhombododécaèdre, 40 — pentagonedo-décaèdre, 41 — tétrahexaèdre, 42 — hexatétraèdre, 43 — didodécaèdre, 44 — tétra-gonétri-octaèdre, 45 — trigonétri-octaèdre, 46 — pentagonétri-octaèdre, 47 — hexoctaèdre.

Dans ce cas il est, en effet, plus aisé de prendre les graphes les uns après les autres par ordre croissant, partant du triangle qui est le sous-ensemble constructif rectiligne le plus simple, le simplex le plus primaire, et d'examiner les polygones puis les polyèdres de plus en plus riches en articulations, allant vers les configurations spatiales les plus complexes. Le but est évidemment de les transformer par addition d'éléments supplémentaires et tout juste nécessaires pour obtenir des systèmes rigides isostatiques ou selon certains auteurs: critiques ou surcritiques.

Au lieu de se restreindre à la création ou à l'application d'une terminologie qui se contente d'étiqueter des configurations parfois très différentes sous le même nom, on propose donc une



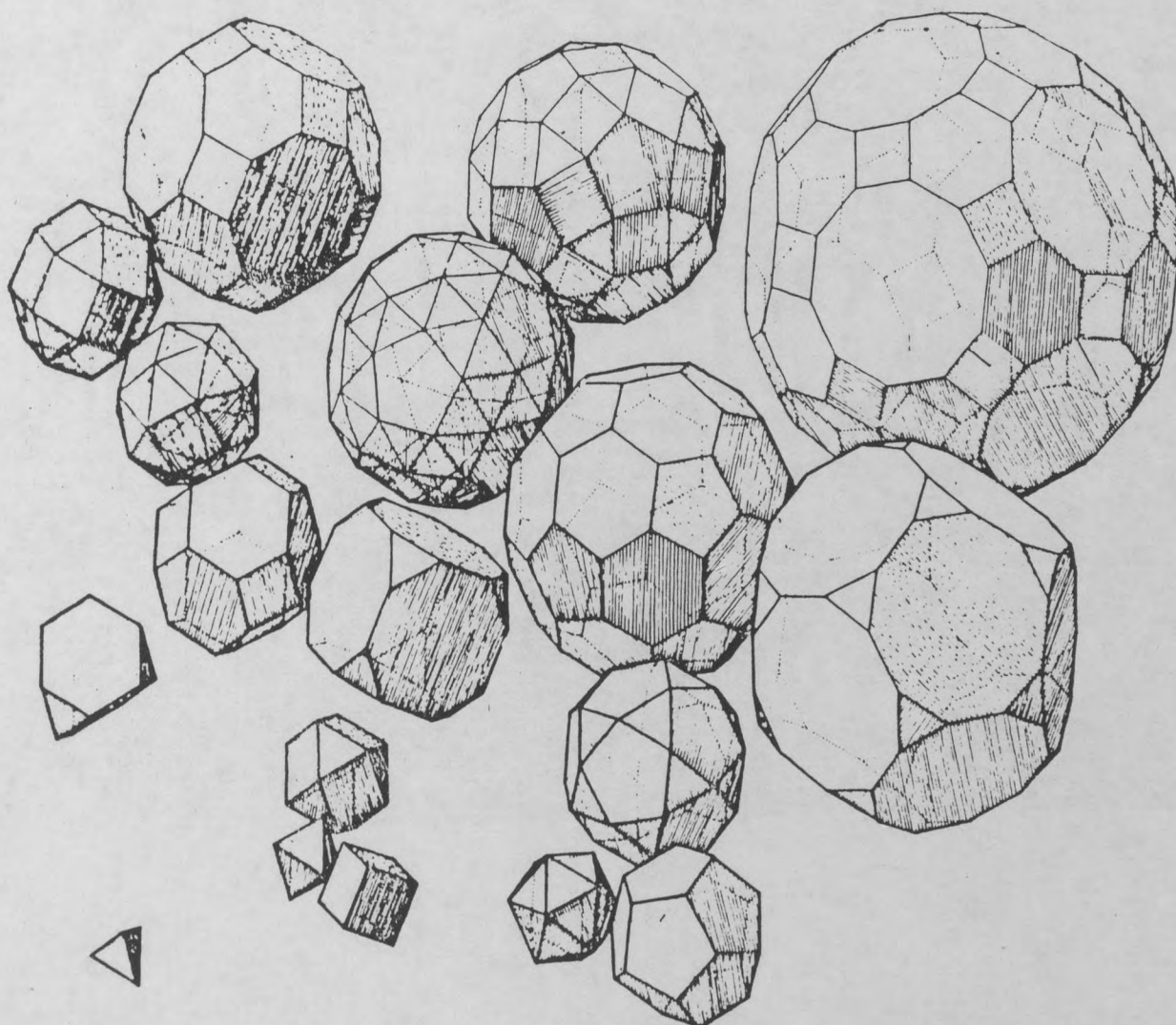
sous-ensembles convexes

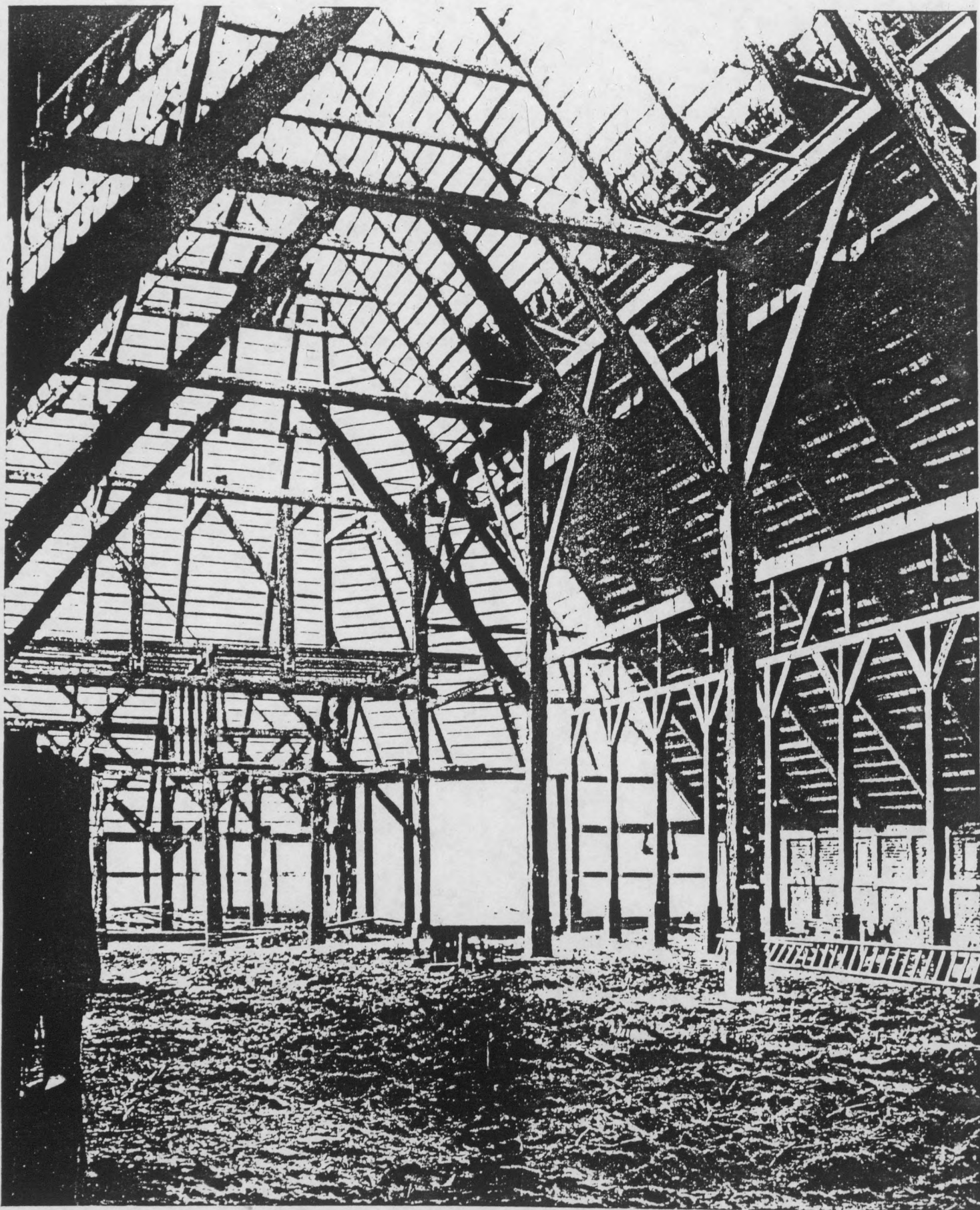
		Code	G	V	P
Réguliers	Tétraèdre	3 3 3	3	6	4
	Octaèdre	3 3 3 3	4	8	5
	Icosaèdre	3 3 3 3 3	5	10	6
	Cube	4 4 4	3	9	7
	Dodécaèdre	5 5 5	3	12	10
Semi-réguliers	Cube adouci	3 3 3 3 4	5	11	7
	Cuboctaèdre	3 4 3 4	4	10	7
	Petit rhombicubocta	3 4 4 4	4	11	8
	Dodécaèdre adouci	3 3 3 3 5	5	12	8
	Petit rhombicosidodéca	3 4 5 4	4	12	9
	Icusi-dodécaèdre	3 5 3 5	4	12	9
	Tétraèdre tronqué	3 6 6	3	12	10
	Tétrakaïdédcaèdre	4 6 6	3	13	11
	Icosaèdre tronqué	5 6 6	3	14	12
	Gr. rhombicubocta	4 6 8	3	15	13
	Cube tronqué	3 8 8	3	16	14
	Gr. rhombicosidodéca	4 6 10	3	17	15
	Dodécaèdre tronqué	3 10 10	3	20	18

méthode combinatoire qui les énumère et les classe systématiquement. Cette méthode est en même temps expérimentale, les figures pouvant être modélisées facilement. Mais, surtout, elle se passe d'un codage algébrique lourd et pédant qui rend souvent les études actuelles sur la rigidité des systèmes plutôt rébarbatives pour les autres pratiquants de la recherche structurale et à plus forte raison pour les constructeurs praticiens.

En somme, notre méthode consiste à prendre un graphe, ayant à l'origine une géométrie variable, plus ou moins réglée, puis par addition de nouveaux éléments et la manipulation de la nature de ses membrures - tendues ou comprimées - à le transformer en un simplex stable en provoquant un conflit quelconque dans le déplacement relatif des membrures jusqu'au blocage complet du mécanisme; en quelque sorte en mettant un bâton, ou une corde, dans les rouages.

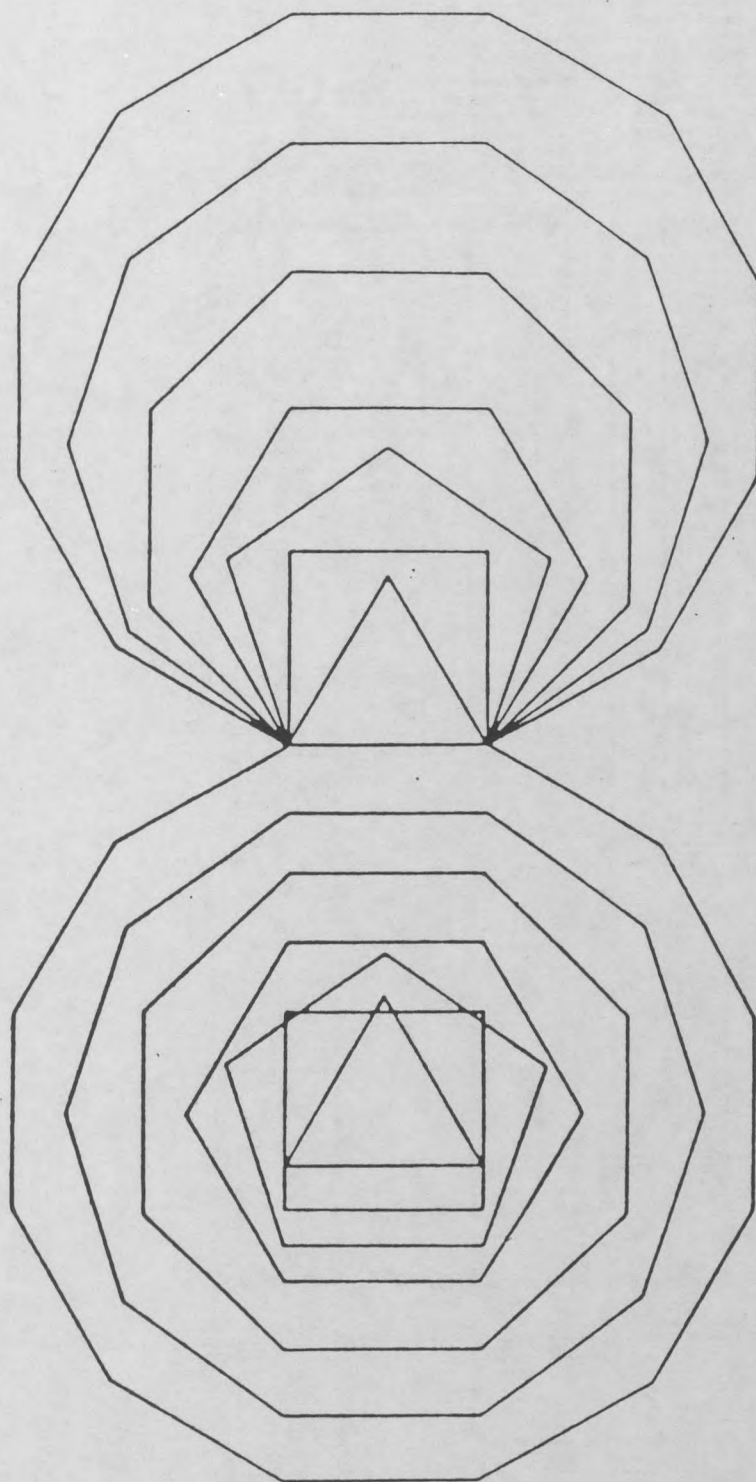
L'ensemble de ces maillons élémentaires stables peut être divisé en deux grands chapitres: les structures planaires essentiellement polygonales et les structures spatiales de formes polyédriques convexes.

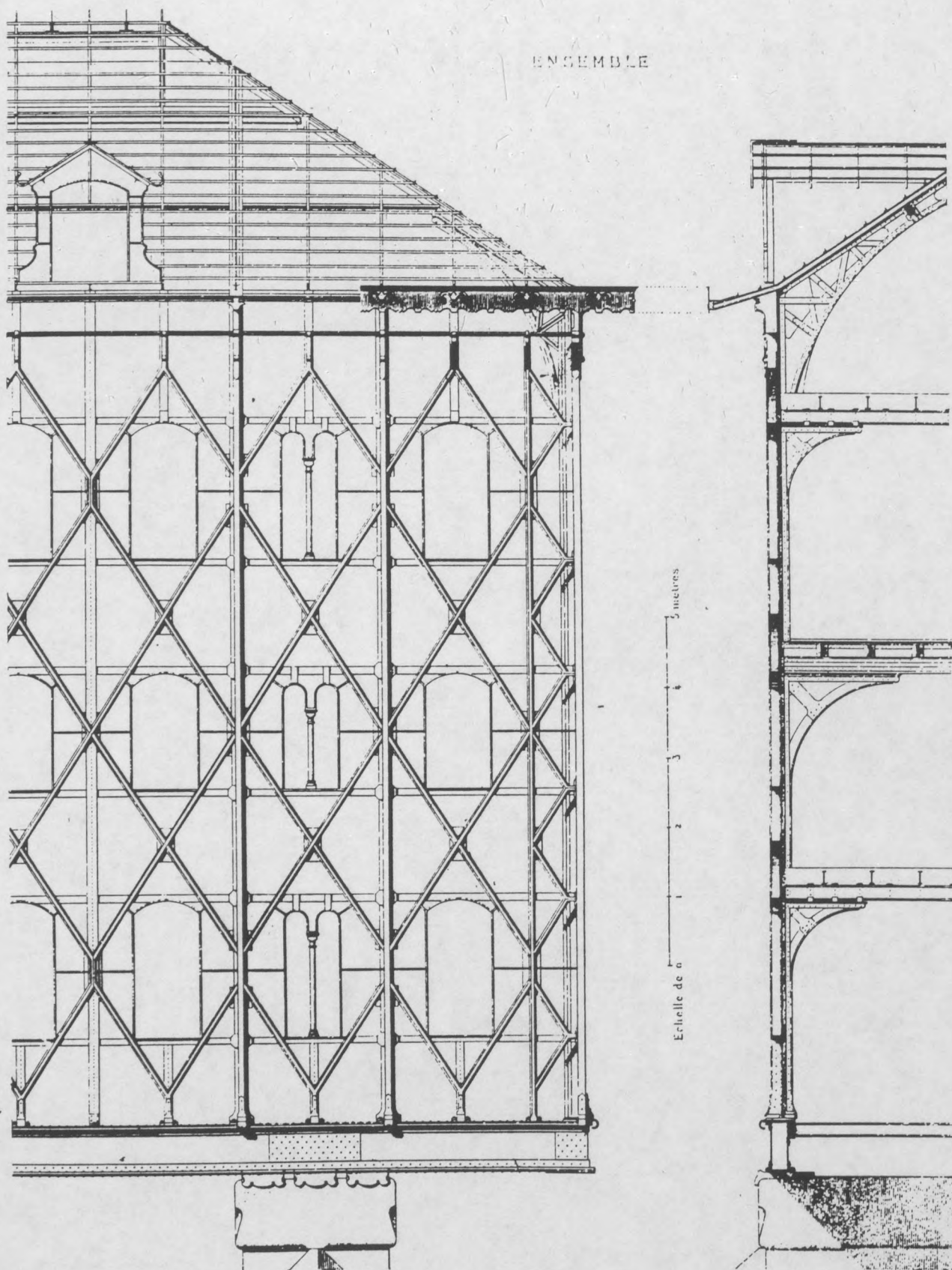




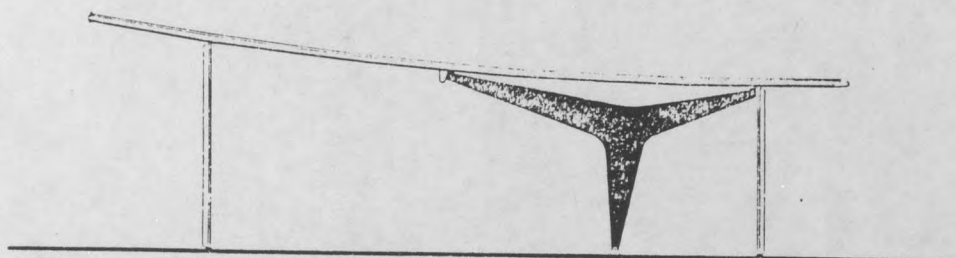
Ossature de grange

SIMPLEX PLANAIRES





Chocolaterie Menier 1871



SIMPLEX PLANAIRES

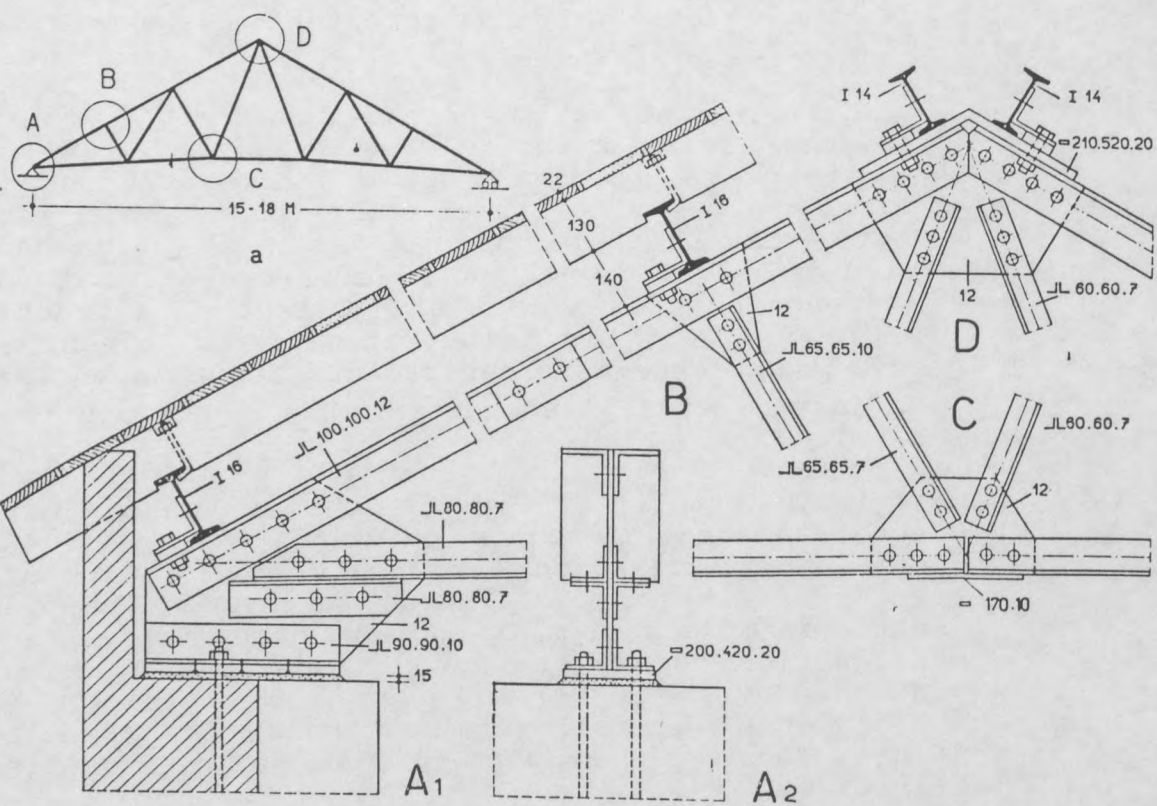
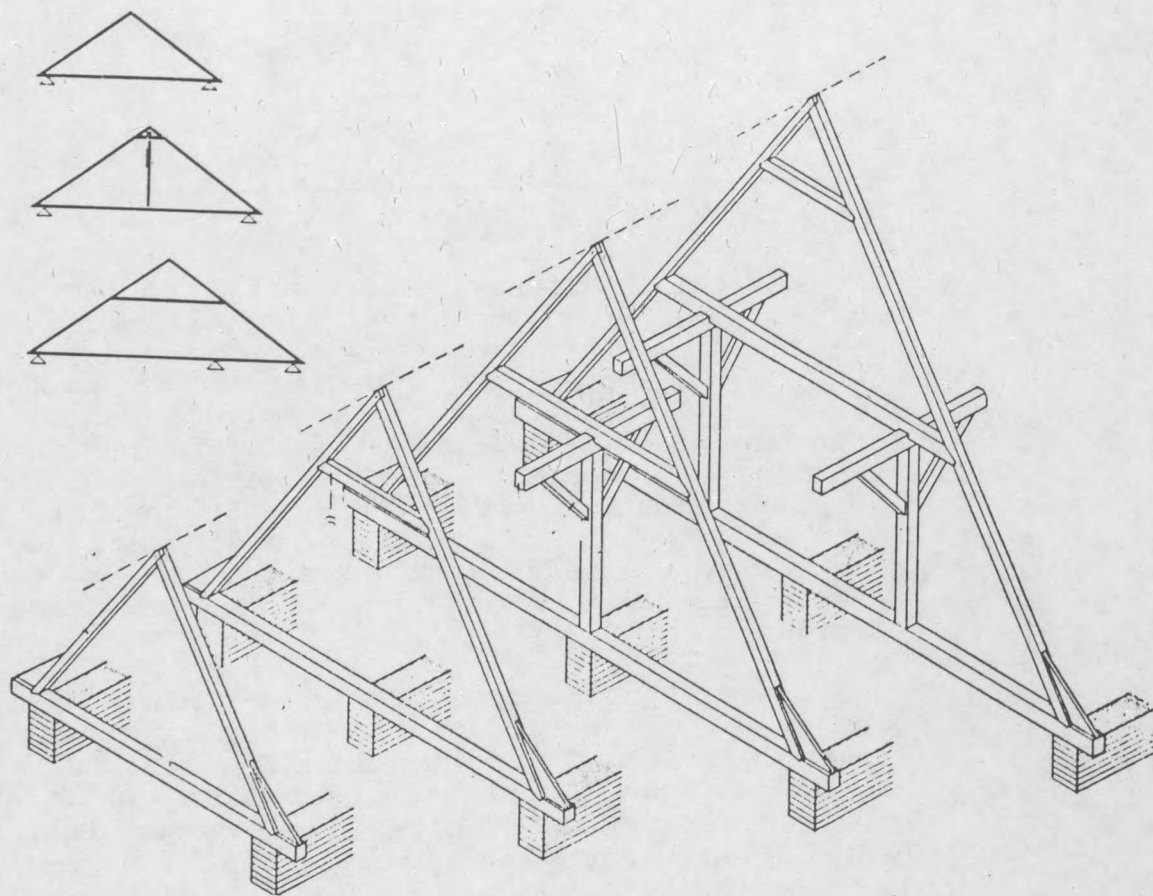
Buvette. Evian. Prouvé

Les figures ouvertes - segments, stellations, arborescences - ne peuvent être réalisées en tant que structures stables sans encastrement. Elles sont donc composées de consoles ou de porte-à-faux. Bien qu'entraînant le monolithisme, ces solutions étaient appliquées de préférence aussi bien dans la conception du mobilier que dans celle du système porteur des immeubles. En général, que leurs oeuvres soient en bois, en métal, ou en béton armé, les modernes d'une époque encore toute récente les "stylisaient" en mettant en évidence l'encastrement.

D'un effet plastique robuste, car plus épais et plus lourd, l'encastrement n'avait cependant sa véritable raison d'être que dans les constructions en béton armé. Quoiqu'il en soit, dans les structures ouvertes stables, de même que dans les cadres contreventés par encastrement, du fait de la continuité obligatoire des membrures, il s'établit un monolithisme qui les exclut d'emblée de ces études qui se rapportent uniquement aux structures articulées.

Notre sujet se restreint donc à l'étude des figures fermées comme une boucle ayant un périmètre polygonal ou des ensembles composés de polygones. Les membrures elles-mêmes sont, soit des cames ou des barres rigides travaillant aussi bien à la traction qu'à la compression, soit des élingues ou des tirants travaillant à la traction seulement. Sur les illustrations qui suivent les premières sont indiquées par des segments en forme de fuseau, et les seconds par des lignes continues simples.

Pour simplifier on a choisi des figures équilatérales. Ce choix coïncide avec l'exigence de standardisation propre aux structures industrialisées. Ces figures, évidemment, peuvent être déformées par opération homéomorphe, avec dilatation ou rétrécissement mais sans déchirure ni recouvrement - en une forme affine. Les propriétés de celle-ci resteront, en principe, inchangées par rapport à la figure régulière initiale.



Ferme triangulée en bois et acier

TRIANGLES

Le premier et le plus simple de tous les polygones planaires est le triangle construit de barres rectilignes rigides (Fig.1). Universellement employé comme simplex stable, il ne pose apparemment aucun problème étant stable non seulement dans le plan mais également dans l'espace. De ce fait, il est transférable comme une entité autoportante. Son indéformabilité "naturelle" est obtenue par le blocage mutuel de deux barres mobiles, comme deux fléaux fixés aux extrémités d'une troisième barre, se déplaçant sur des trajectoires circulaires opposées.

La parcellisation du triangle d'emblée stable en compartiments de triangles isocèles à l'aide de barres rigides n'a apparemment pas de sens, l'opération étant pléonastique (Fig.2). On peut admettre, cependant, que la redondance augmente l'indéformabilité dans le plan.

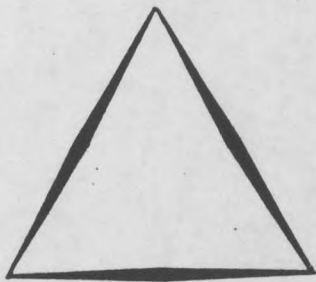


Fig.1

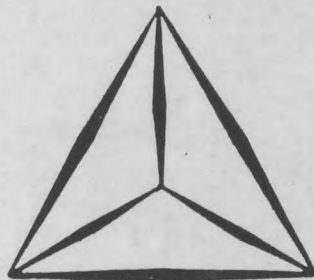


Fig.2

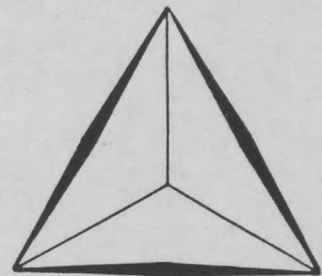
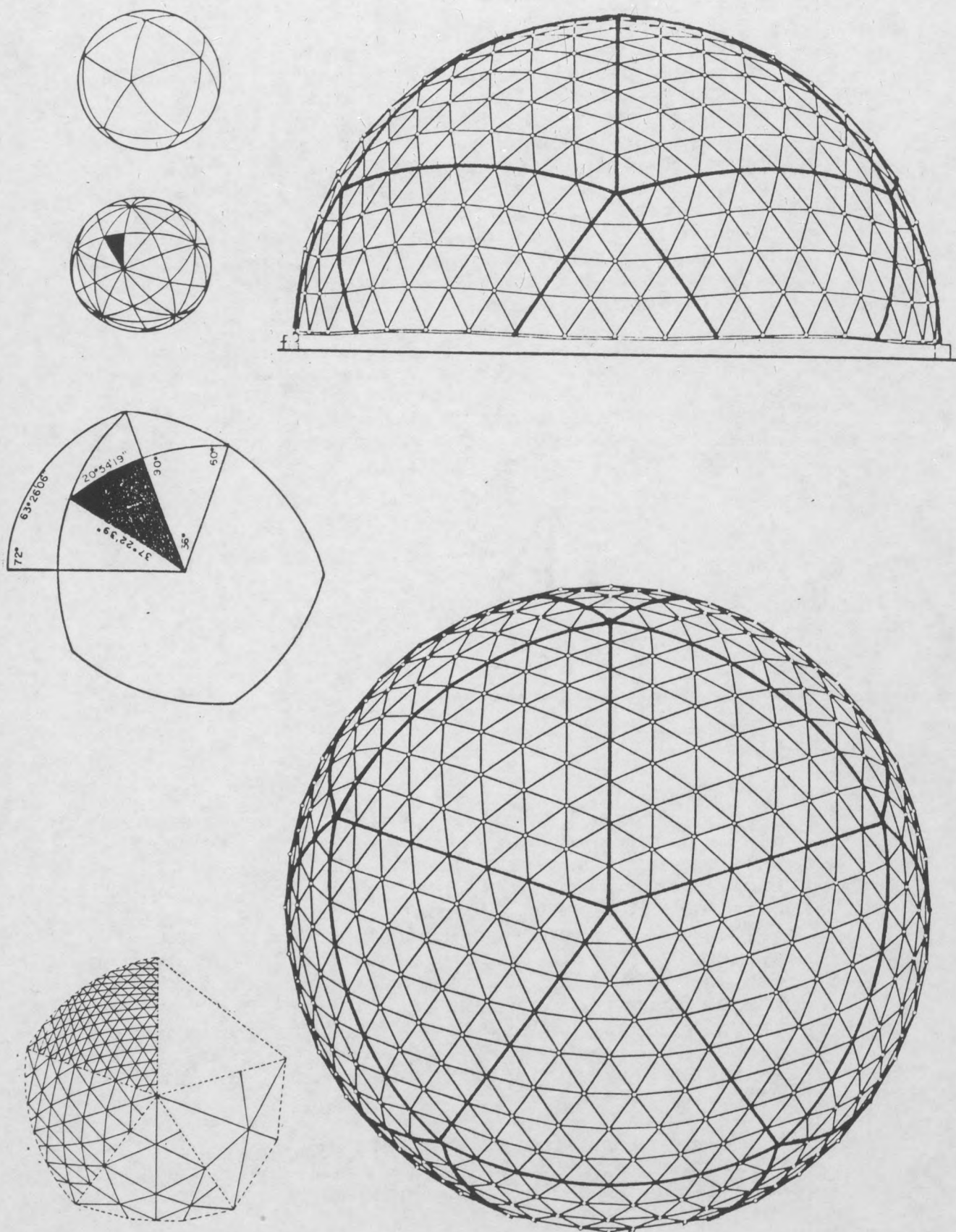


Fig.3

Dès qu'on différencie le travail des membrures dans la forme compartimentée, des phénomènes intéressants se produisent. En remplaçant les trois membrures intérieures par des tirants, il est possible de précontraindre le triangle (Fig.3). La même possibilité existe pour le système vectoriel inverse où la stellation interne est comprimée et la ceinture triangulaire est tendue (Fig.4). En général, l'inversion du sens du travail dans un système en équilibre permet d'obtenir une autre structure également en équilibre, principe qui sera fréquemment utilisé ici.

Ce dernier simplex est stable dans le plan, mais étant sujet à déversement, il est déformable dans l'espace. Le déversement est dû au fait qu'il



Dôme à triangulation géodésique. Fuller

y a une, ou plusieurs, ligne de pliage au long de laquelle on ne rencontre que des joints articulables ou des membrures souples, les barres rigides étant traversées axialement. Evidemment, quand il existe une ligne, dite de clivage, qui ne coupe pas une barre rigide en un point intermédiaire, la ligne se comporte comme une charnière. Dans le cas contraire, bien que planaire, la structure est indéformable spatialement. Certes, cette indéformabilité est relative, car elle dépend de la résistance à la flexion des barres, ne mettant en jeu que la hauteur structurale de l'élément même.

Le réseau planaire assemblé de simplex étoilés suivant une tessellation triangulaire est stable dans le plan, même en laissant vide la moitié des cases (Fig.4a). Mais tout comme ses sous-ensembles, il sera sujet à déversement.

Partant de la parcellisation initiale composées uniquement de barres rigides (Fig.2), en enlevant la barre surabondante, on trouve un simplex équilatéral constitué de deux triangles isocèles (Fig.5). Son assemblage donne un treillis indéformable dans le plan malgré un hiatus hexagonal équivalent à la moitié de son étendue (Fig.5a).

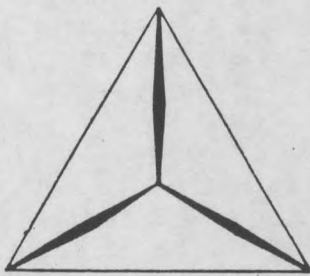


Fig.4

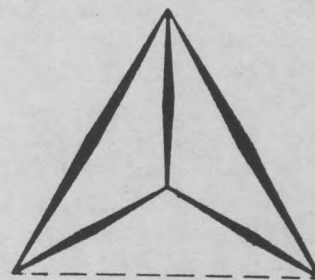


Fig.5

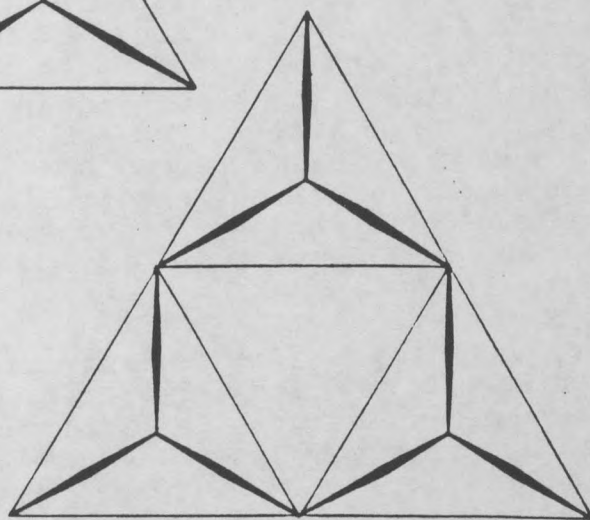


Fig.4a

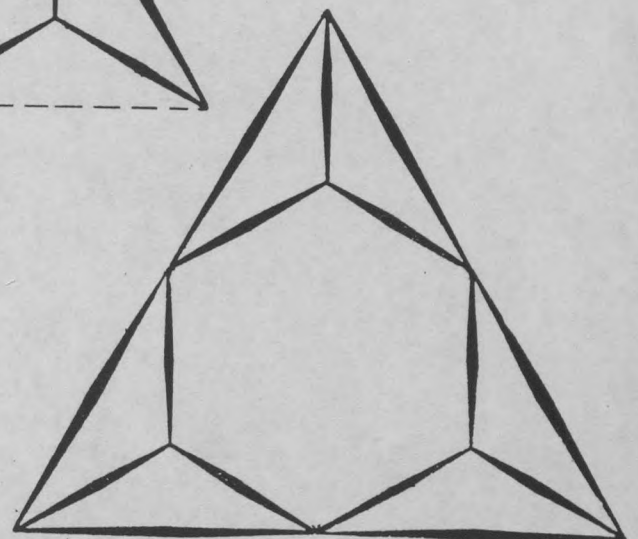


Fig.5a

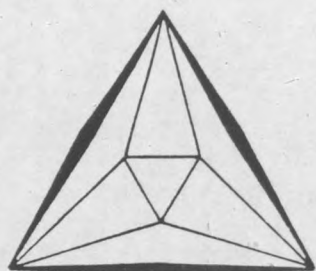


Fig.6

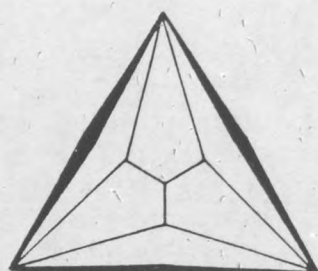


Fig.7



Fig.8



Fig.9

Comme tout graphe, le diagramme Schlegel, ou homéogramme, de certains polyèdres peut également servir de modèles pour l'enrichissement du champ triangulaire. Ainsi, du graphe de l'octaèdre dérive le simplex tripartite à compartiments triangulaires (Fig.6) et du graphe du cube tronqué d'un seul sommet, un autre simplex similaire composé de deltoïdes (Fig.7).

La substitution du centre de la stellation simple par un triangle mène à une partition composée de trois trapèzes et d'un triangle, réalisable soit avec des barres rigides intérieures comprimées par une ceinture tendue, (Fig.8), soit inversement: avec des tirants internes dans un cadre triangulaire rigide (Fig.9).

Partant de la configuration précédente, il est possible de dissocier ce cadre rigide, c'est à dire supprimer les contacts entre les barres, en embranchant les barres diagonalement dans les champs trapézoïdaux, le graphe initial étant entièrement tendu. Le résultat produit le premier simplex autotendant où, bien que la structure soit planaire, les éléments rigides sont isolés et écartés entre eux tout en étant solidarisés par un continuum de tirants flexibles. Le simplex n'a pas de ligne de clivage ou de charnière, donc il est spatialement et non seulement planairement stable. La configuration dispose d'une symétrie rotatoire; de ce fait il existe une variante gauche ou lévogyre (Fig.10) et son contraire droit ou dextrogyre (Fig.10a).

La composition de ces simplex autotendants dans la tessellation triangulaire régulière crée un réseau planaire tendu, où malgré le caractère discontinu des sous-ensembles, les barres se rencontrent à nouveau (Fig.10b). Ce réseau peut être qualifié de semi-autotendant où un continuum

de tirants est tendu par des groupes de barres de compression formant des stellations. En utilisant des simplex de rotation opposée, on obtient un réseau inverse ou énantiomorphe. Bien que composé de sous-ensembles stables même dans l'espace, ce réseau est sujet à déversement, la tessellation triangulaire étant pliable.

Cet inconvénient peut être éliminé par l'emploi d'une tessellation à sommets "coulissants" dite automorphe où les précédents simplex autotendants sont disposés avec un décalage autour d'un hiatus hexagonal de sorte que leur sommets ne se rencontrent pas. De ce fait, le résultat sera une résille planaire également autotendante (Fig.10c).

Dans ce réseau, les simplex employés sont alternativement lévogyres et dextrogyres, donnant une structure "racémique", ou à rotation compensée, conséquence de l'emploi simultané de sous-ensembles énantiomorphes. Du fait du décalage coulissant des motifs triangulaires, il n'existe pas de ligne de charnière, par conséquent le réseau est stable non seulement dans le plan mais aussi dans l'espace. En principe, il n'y a pas de déversement, certes, limité par la résistance à la flexion des barres rigides.

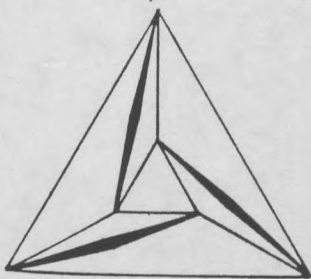


Fig.10

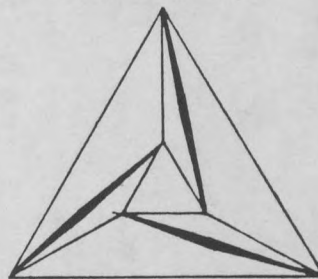


Fig.10a

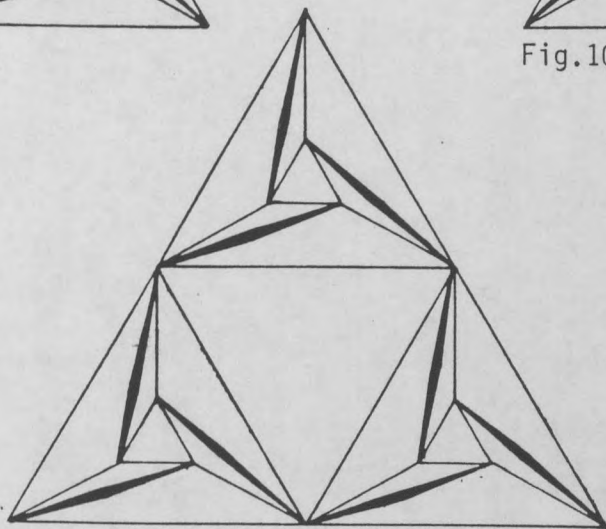


Fig.10b

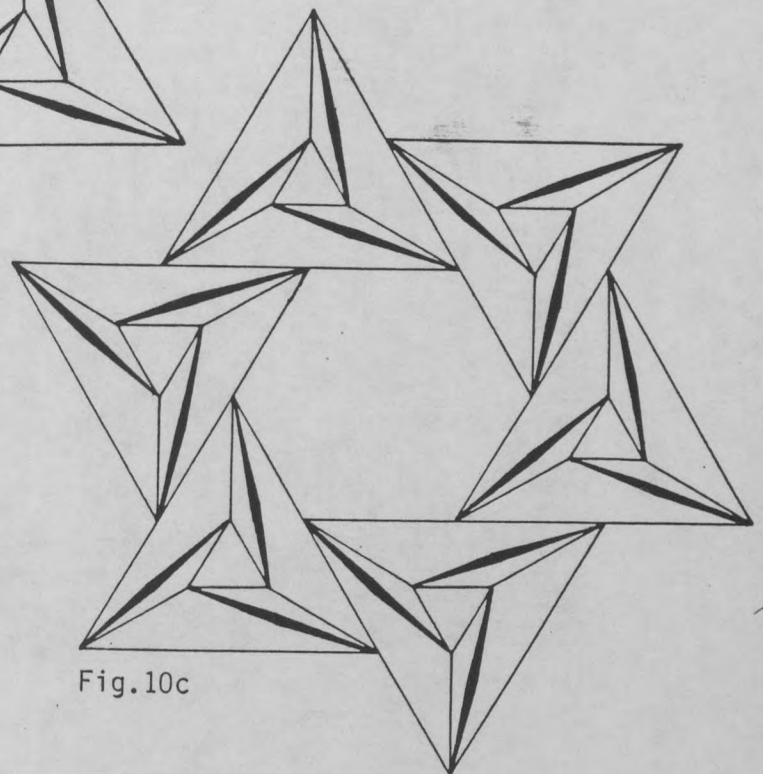
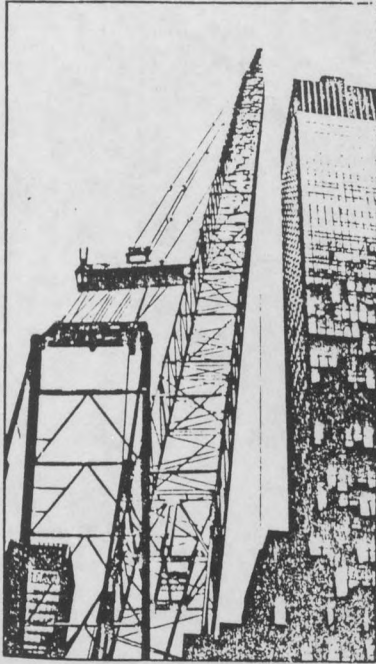


Fig.10c



Crystal Palace. Londres 1851. Paxton

QUADRANGLES



Un carré, de même que tout quadrangle - losange, trapèze, deltoïde, etc. - composé de quatre barres rigides avec des joints articulés, peut être stabilisé dans le plan par une barre diagonale rigide, ce qui le transforme en deux triangles rigides (Fig.11).

Le contreventement du carré peut être obtenu également par deux tirants diagonaux se croisant en forme de croix de Saint André (Fig.12). Ces tendeurs, cependant, ne travaillent pas simultanément, mais seulement alternativement en fonction du renversement de la direction des forces tendant à déformer le système; ils sont donc nécessaires mais à tour de rôle inutiles.

Ce système vectoriel est également réversible, produisant un croisillon de barres comprimées à l'intérieur d'une ceinture tendue (Fig.13).

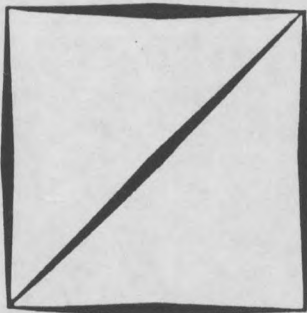


Fig.11

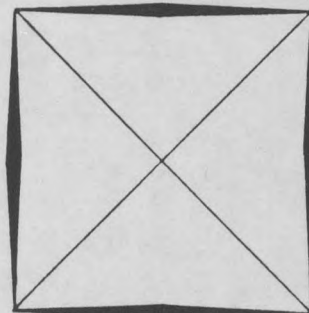


Fig.12

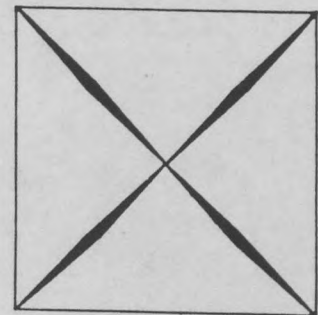


Fig.13

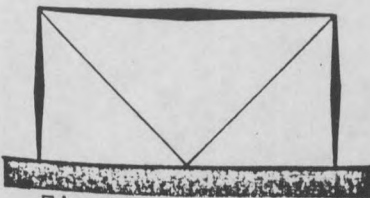


Fig.14

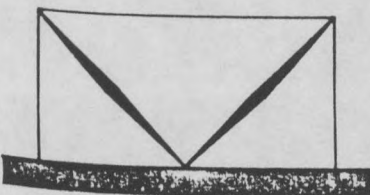
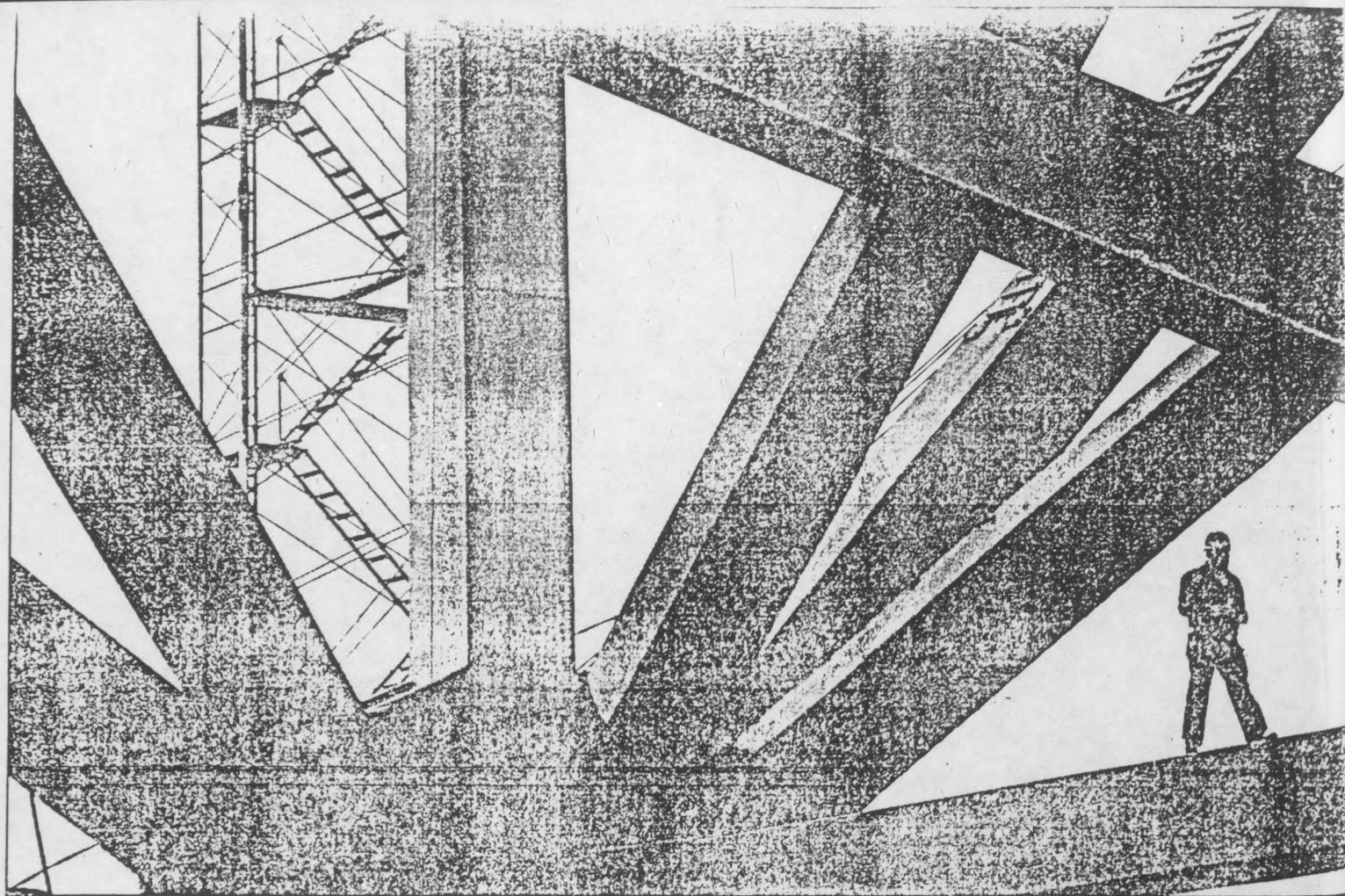
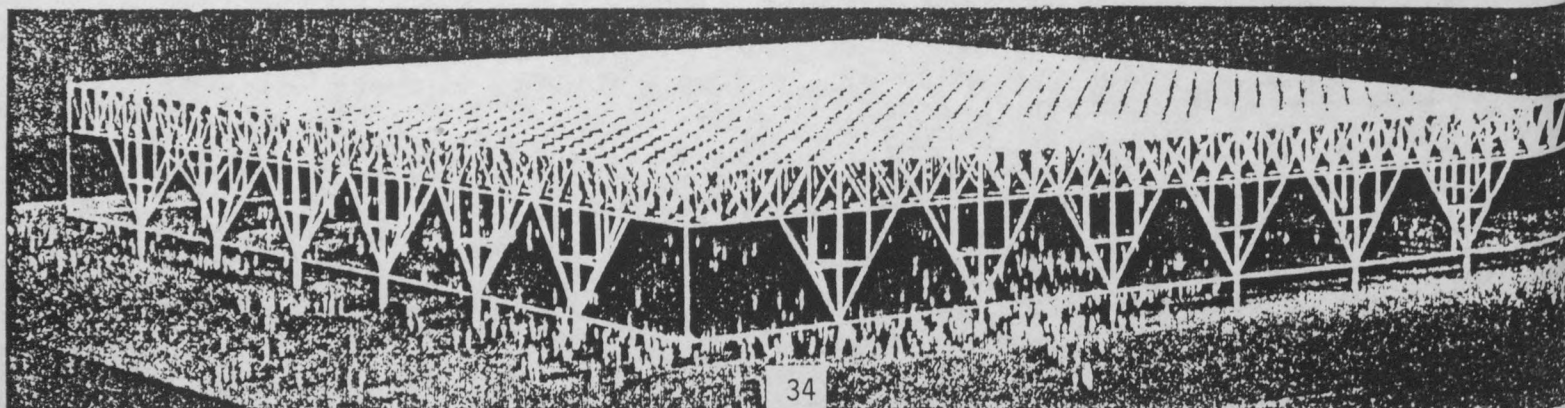
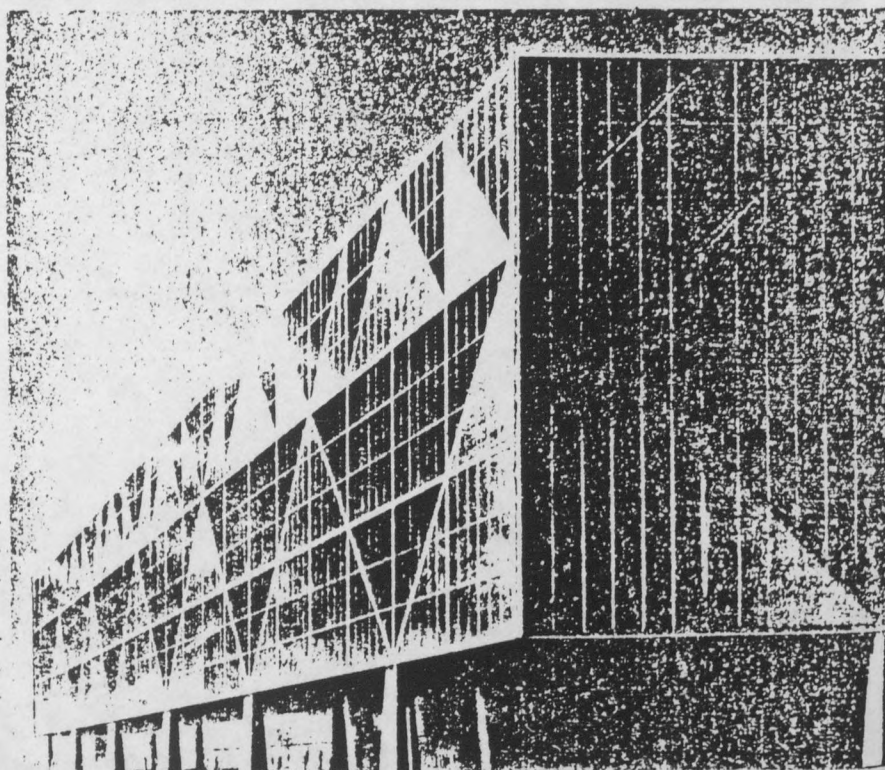
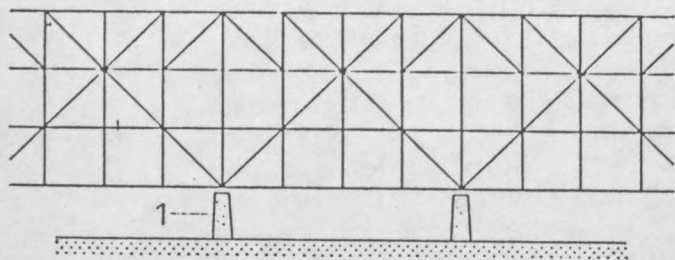
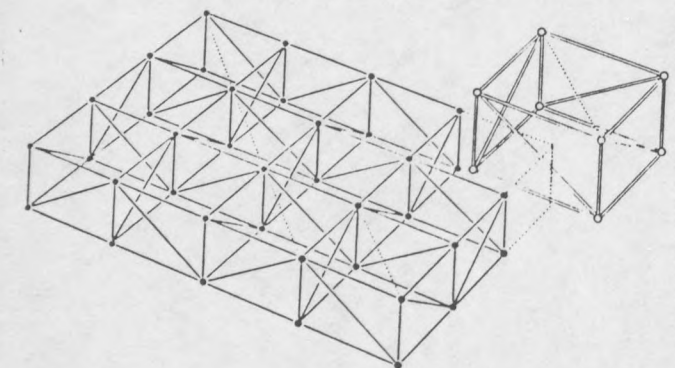


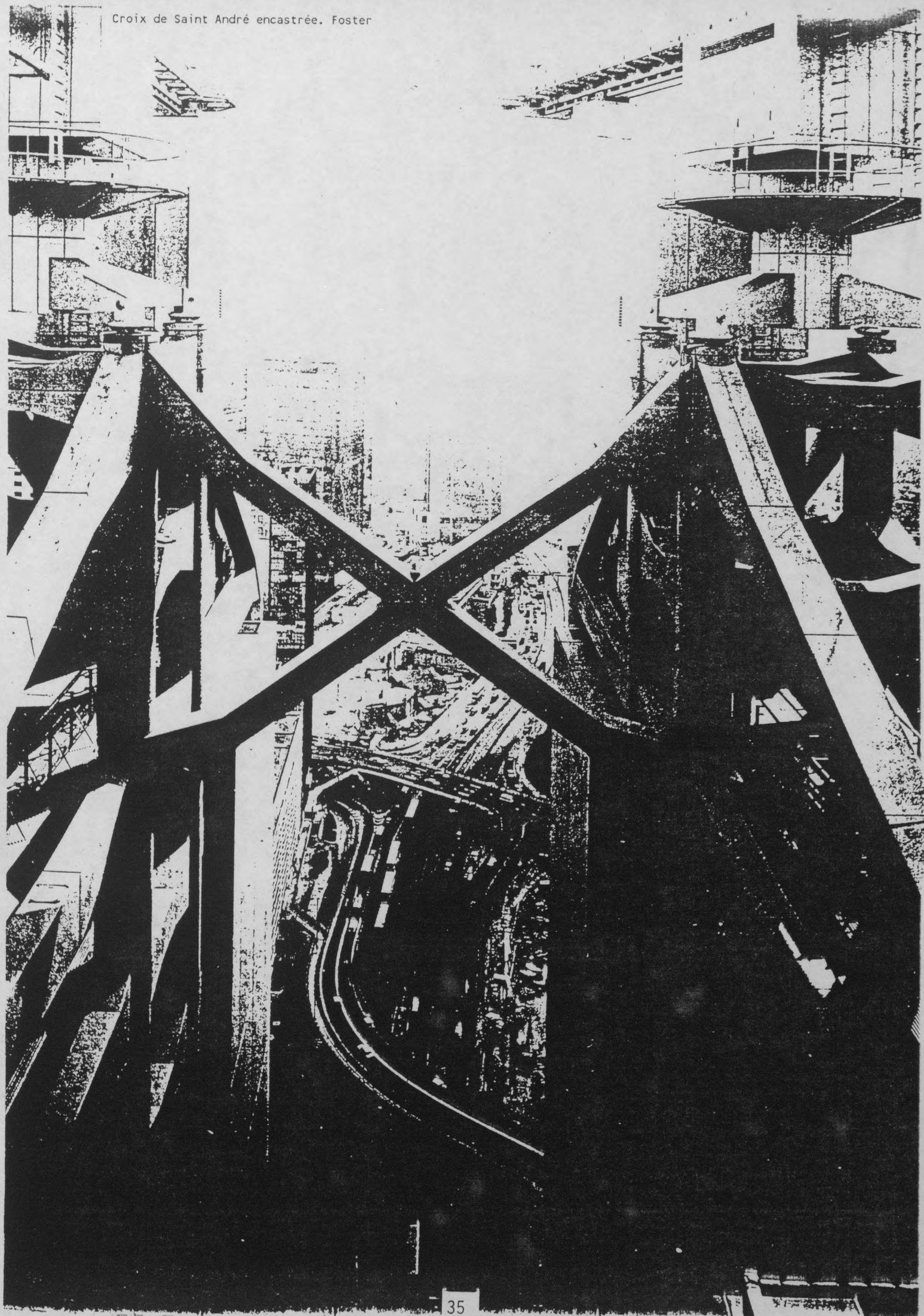
Fig.15

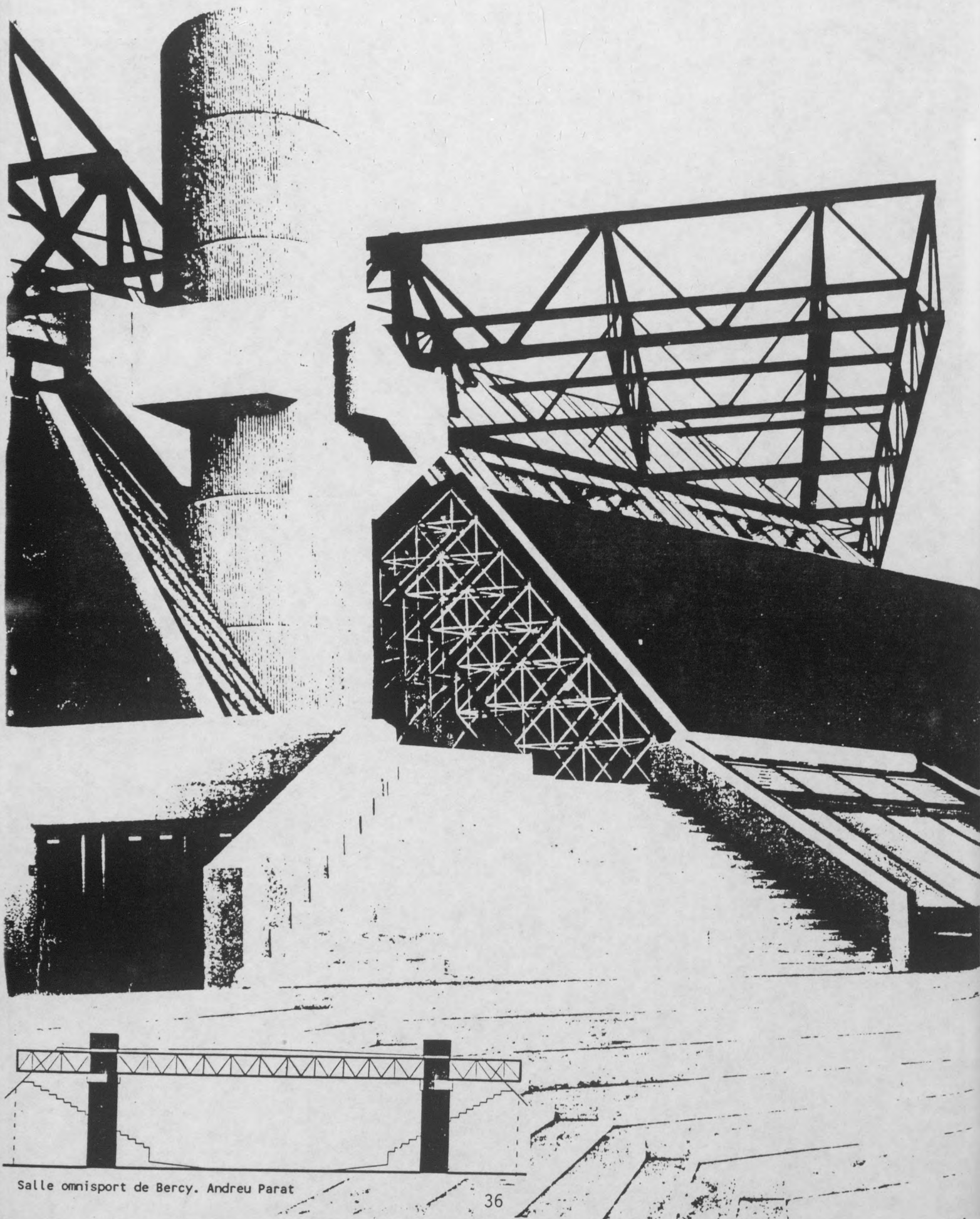
Cette stellation, tout comme la précédente, peut être employée partiellement, la partie manquante étant substituée par le sol ou une poutre continue. Considérés en tant que simplex partiels, la stabilité de maints sous-ensembles déjà classiques s'explique sous un nouvel éclairage. La dissection des deux stellations inverses par une coupure parallèle au contour produit deux demi-simplex de type "K", sorte de portiques: l'un avec un pourtour rigide stabilisé par un "V" interne tendu (Fig.14); l'autre inversement avec des haubans périphériques comprimant un "V" rigide, utilisé surtout comme engin de levage (Fig.15).



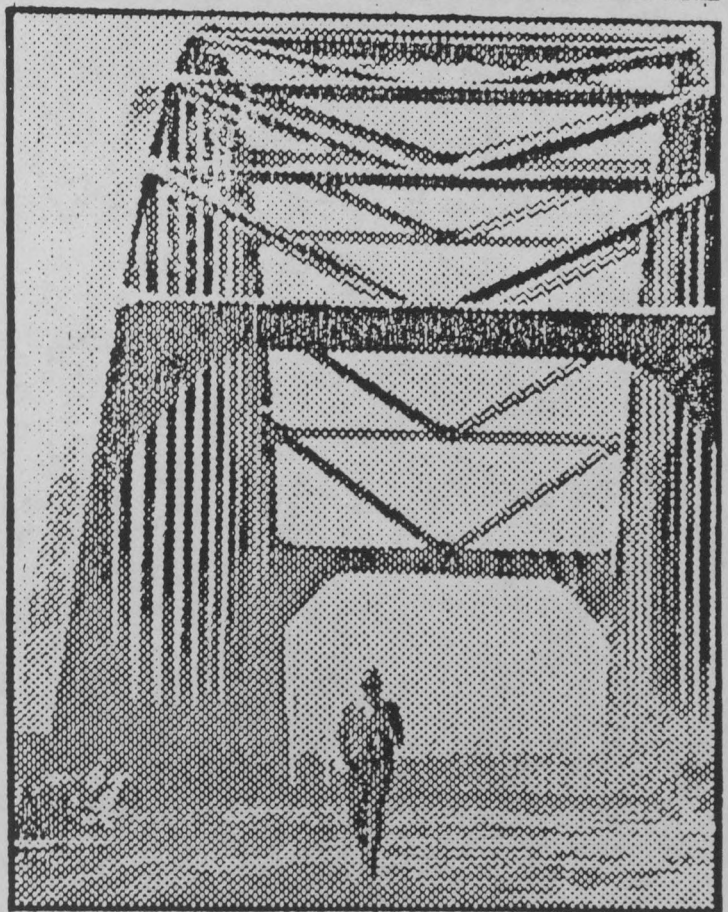
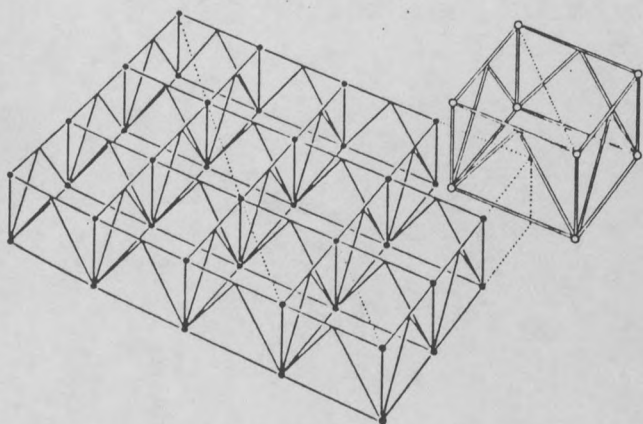
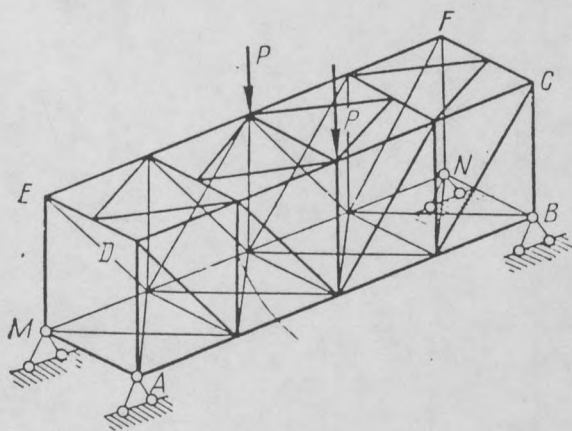
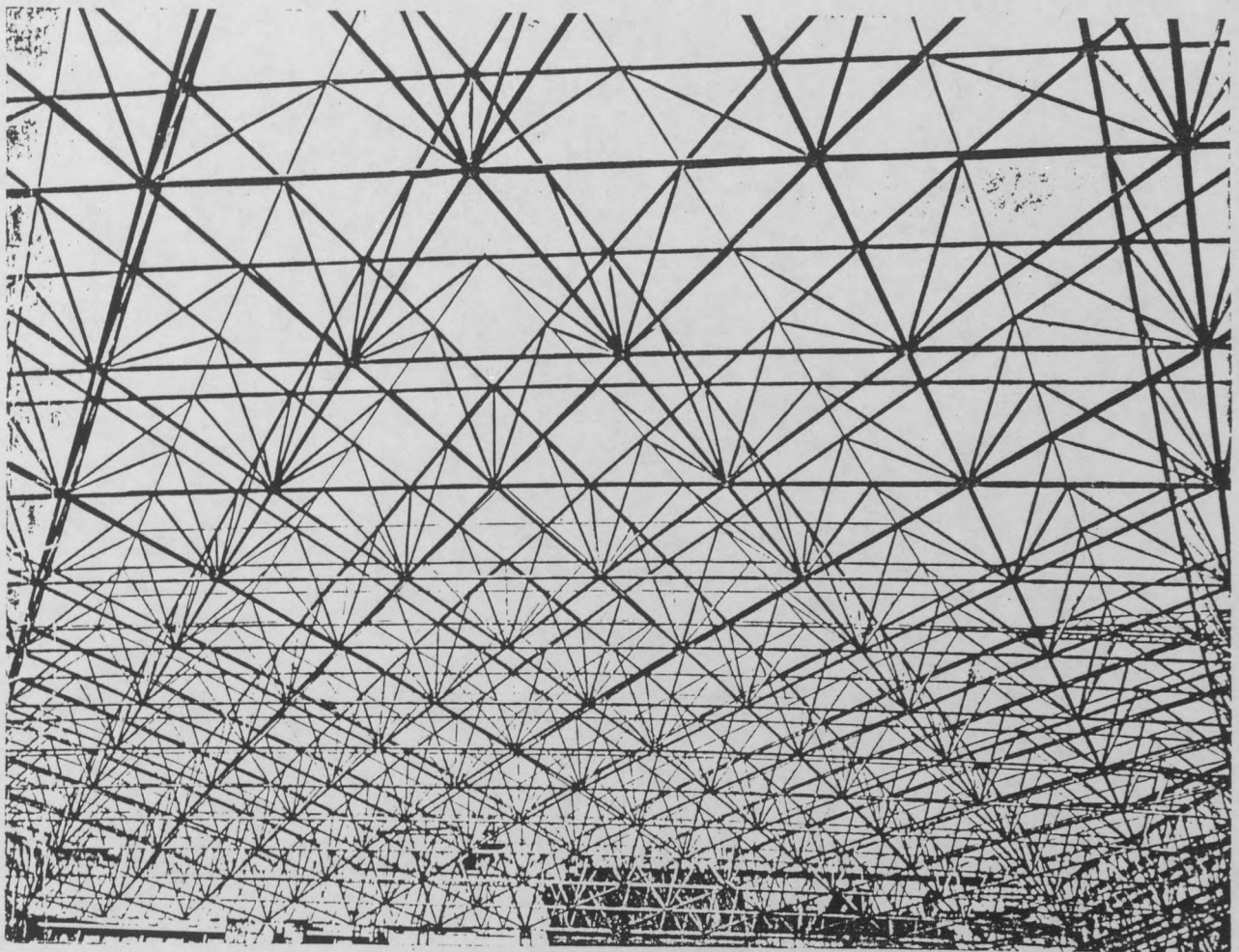
Coliseum Chicago. 213 m. Mies





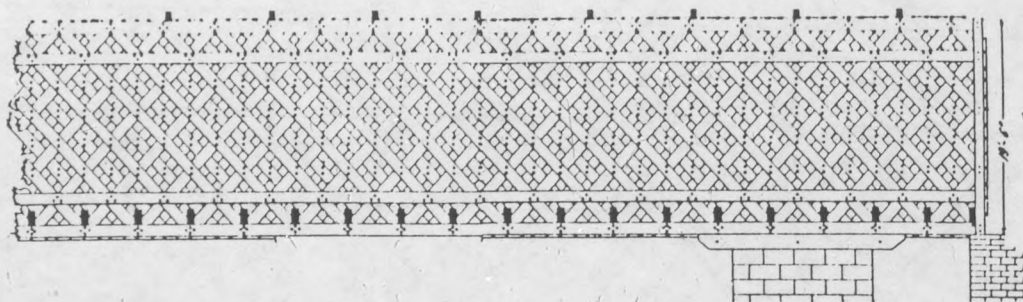


Salle omnisport de Bercy. Andreu Parat

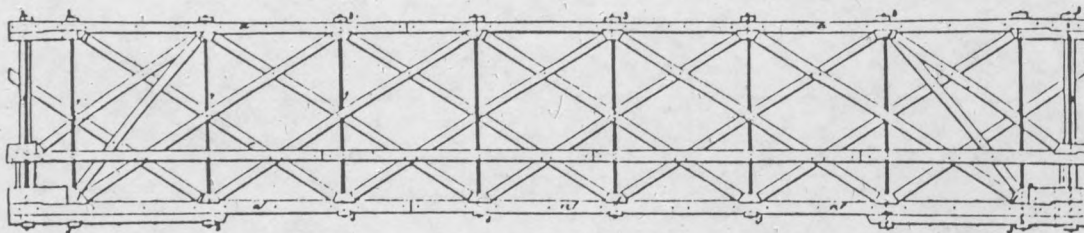


Charpente à simplex "K"

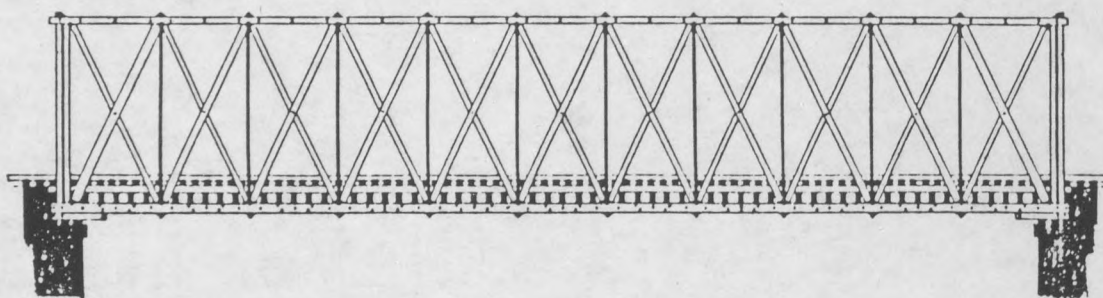
Town 1820



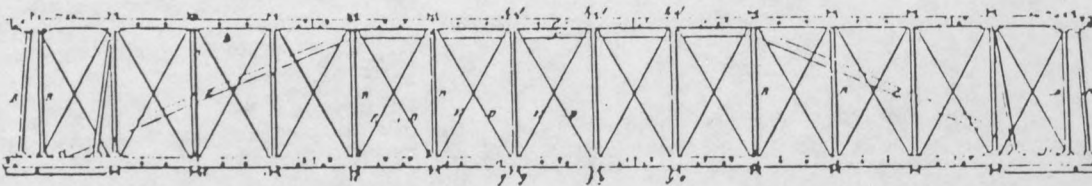
Howe 1840



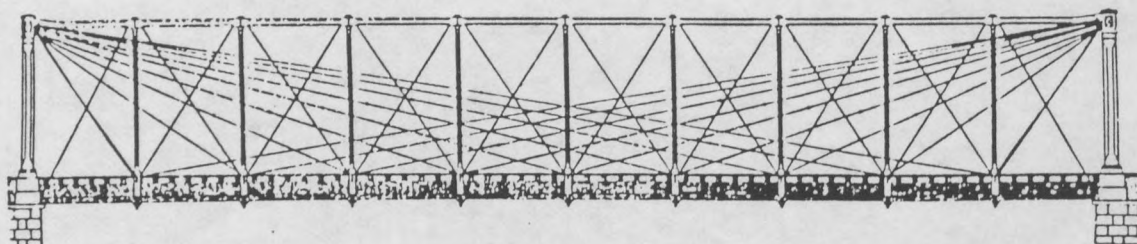
Howe-Stone 1841



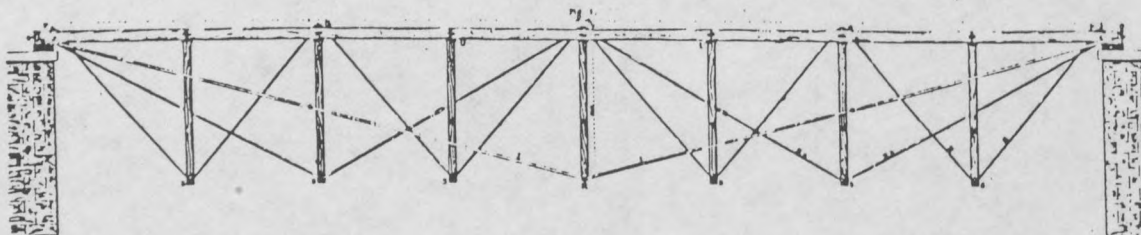
Pratt 1842



Bollmann 1850



Fink 1851



Pont-Poutres

La dissection du même simplex par une coupure diagonale produit le mât haubané simple, indéformable dans le plan (Fig.16). Cette figure élémentaire est depuis longtemps à la base de toute une série connue de fermes dont le comportement statique ne peut être interprété sans le concept du demi-simplex, voir les ponts-poutres développés par divers inventeurs du XIXème siècle.

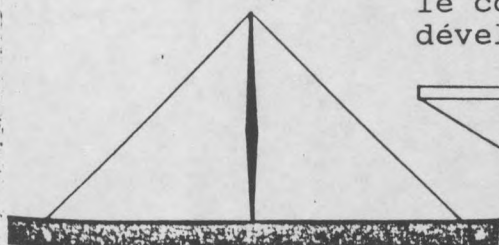


Fig.16

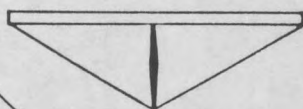


Fig.16a

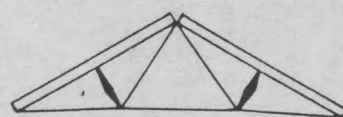


Fig.16c

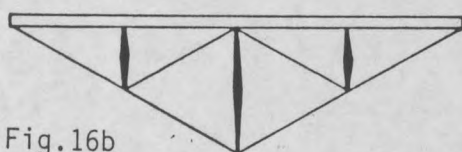


Fig.16b

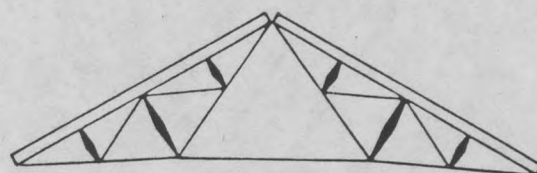
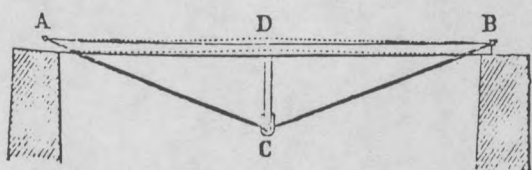
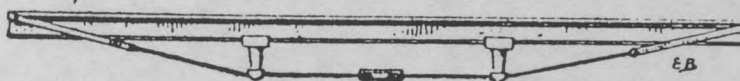


Fig.16d

Ainsi, en substituant à la diagonale, ou au sol, une poutre continue - donc fléchiée, et en principe en dehors du champ de notre sujet, mais admettons cette parenthèse - on redécouvre la poutre sous-tendue, ou appelée sous-bandée par les auteurs anciens (Fig.16a). De la poutre sous-tendue simple et de sa variante composée hiérarchiquement avec deux longueurs de bielles comprimées (Fig.16b), dérivent la ferme Polonceau simple à deux bielles (Fig.16c) ou à six bielles de deux longueurs, appelées respectivement "Queenpost" et "Kingpost" (Fig.16d). Il convient de signaler que ces deux fermes ne sont pas globalement indéformables, les arbalétriers sous-tendus le sont séparément, mais soulevés ensemble, ils se referment comme un compas.

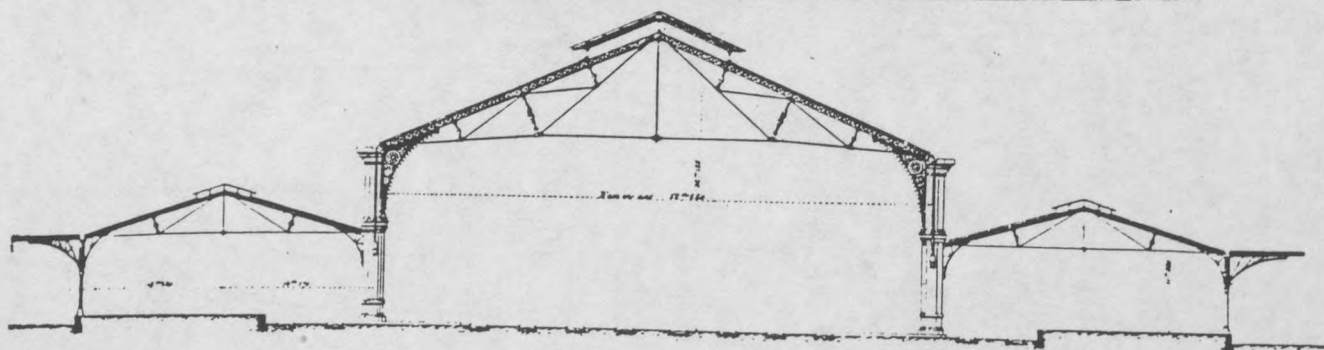
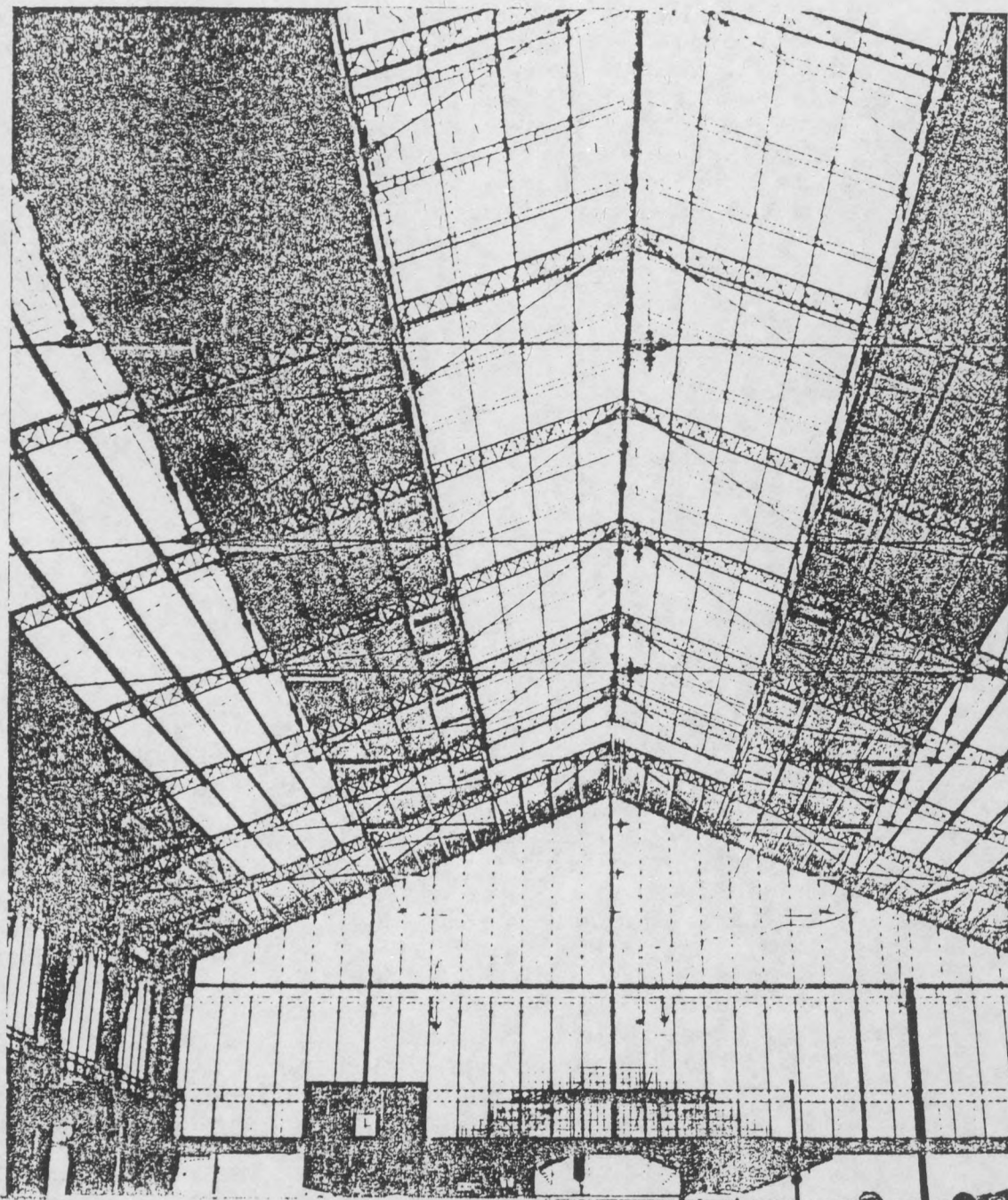


Palladio

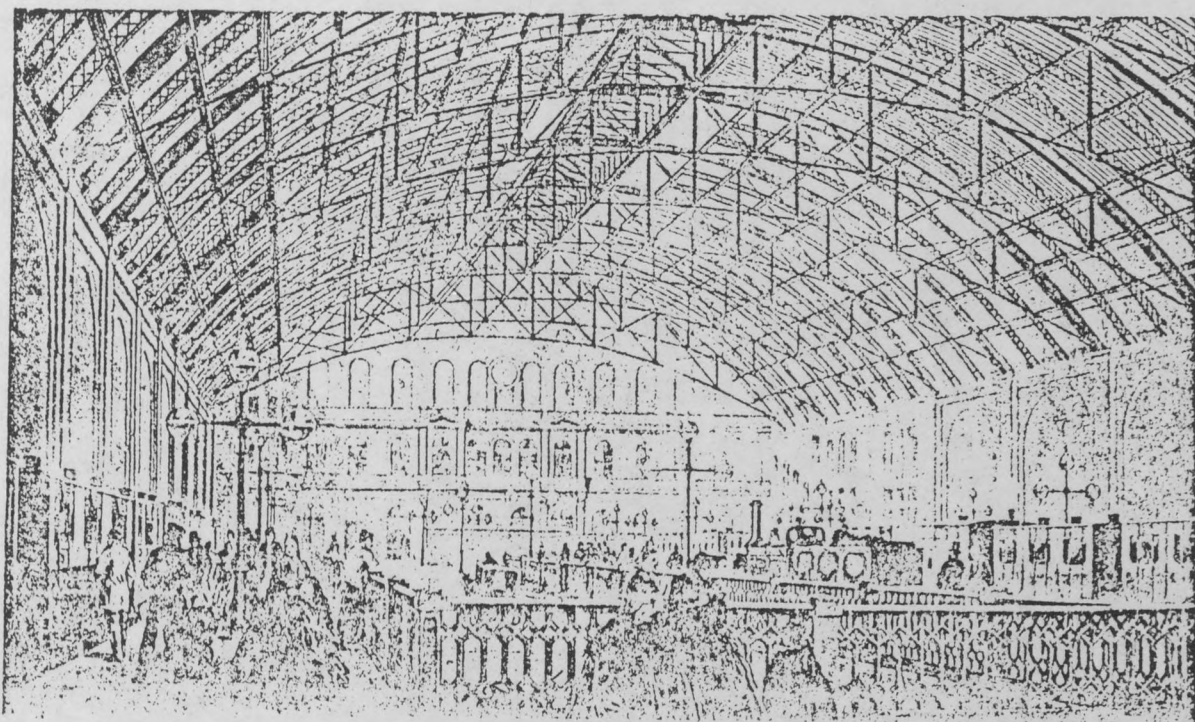


Poutres sous-bandées. Barberot

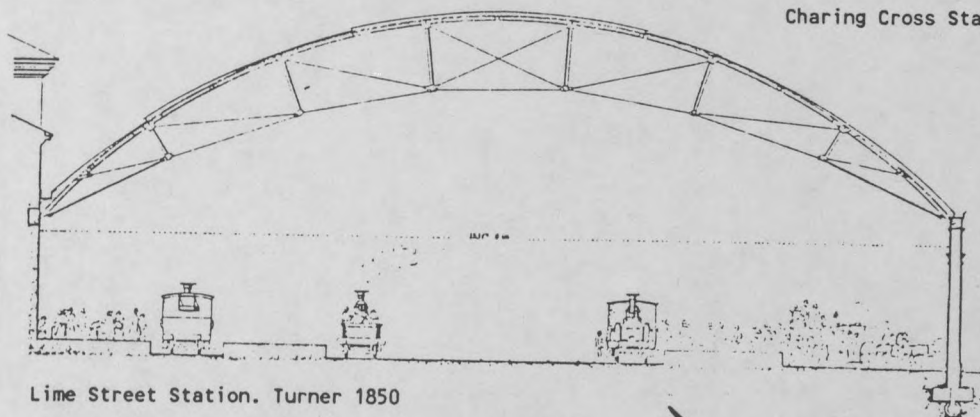




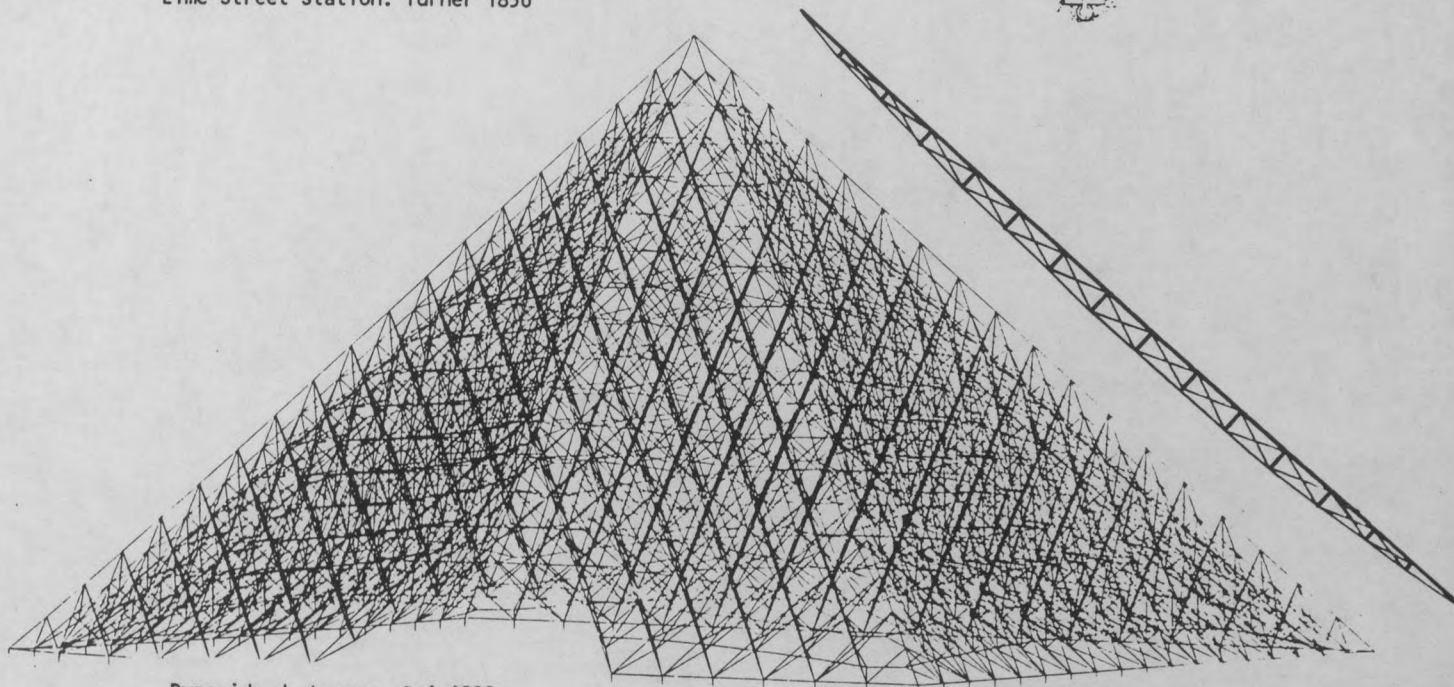
Gare Saint Lazare. Ferme Polonceau. Paris



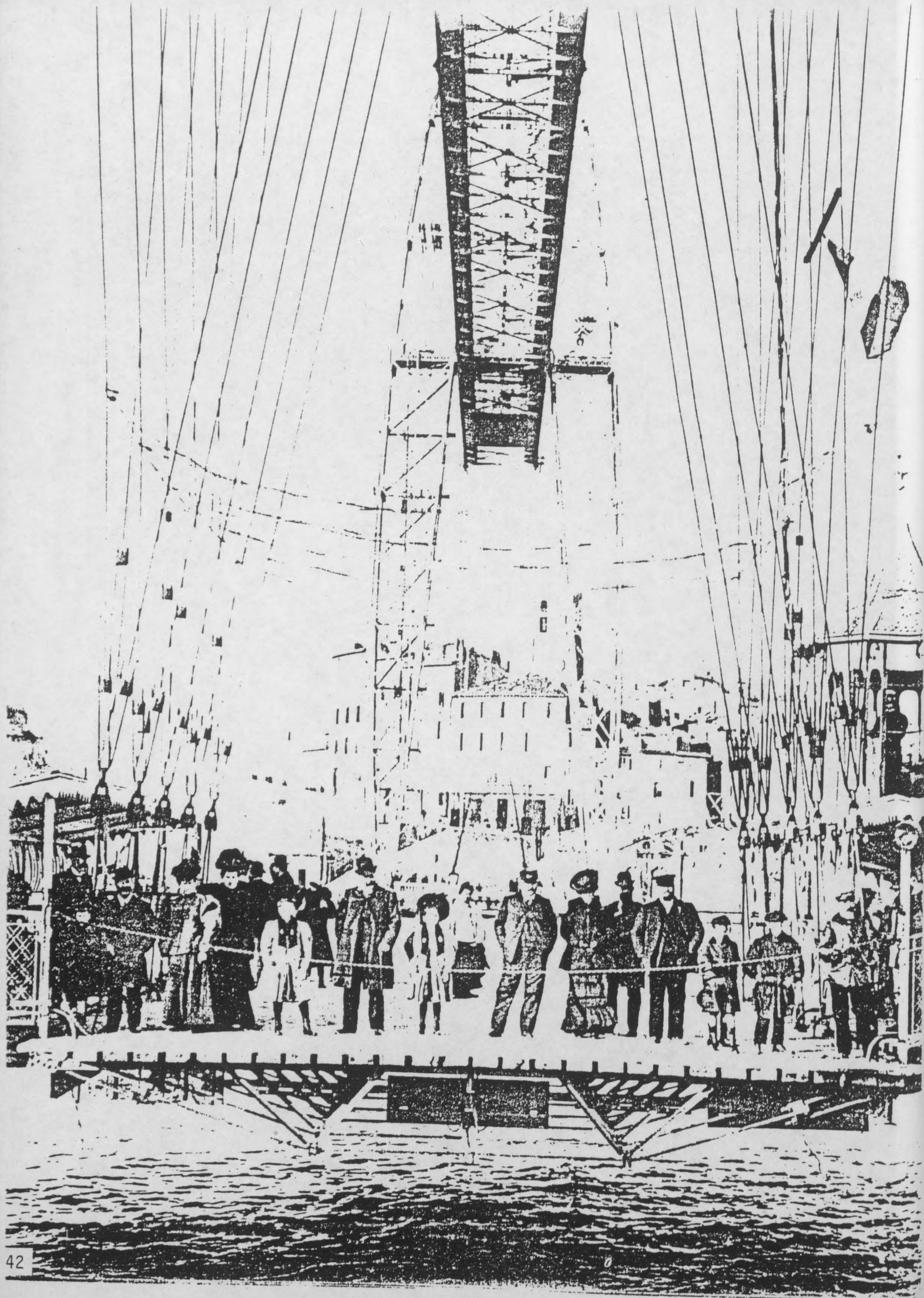
Charing Cross Station. Hawkshaw 1862



Lime Street Station. Turner 1850



Pyramide du Louvre. Pei 1989



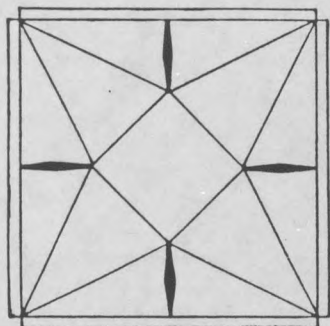


Fig.16e

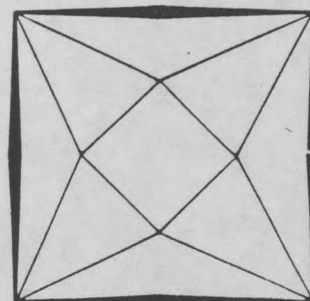


Fig.17

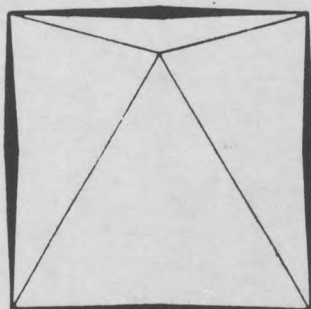


Fig.18

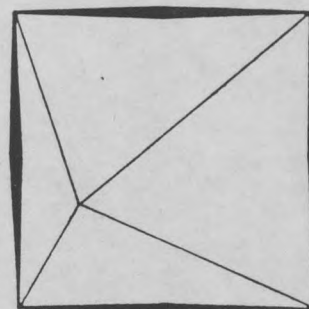
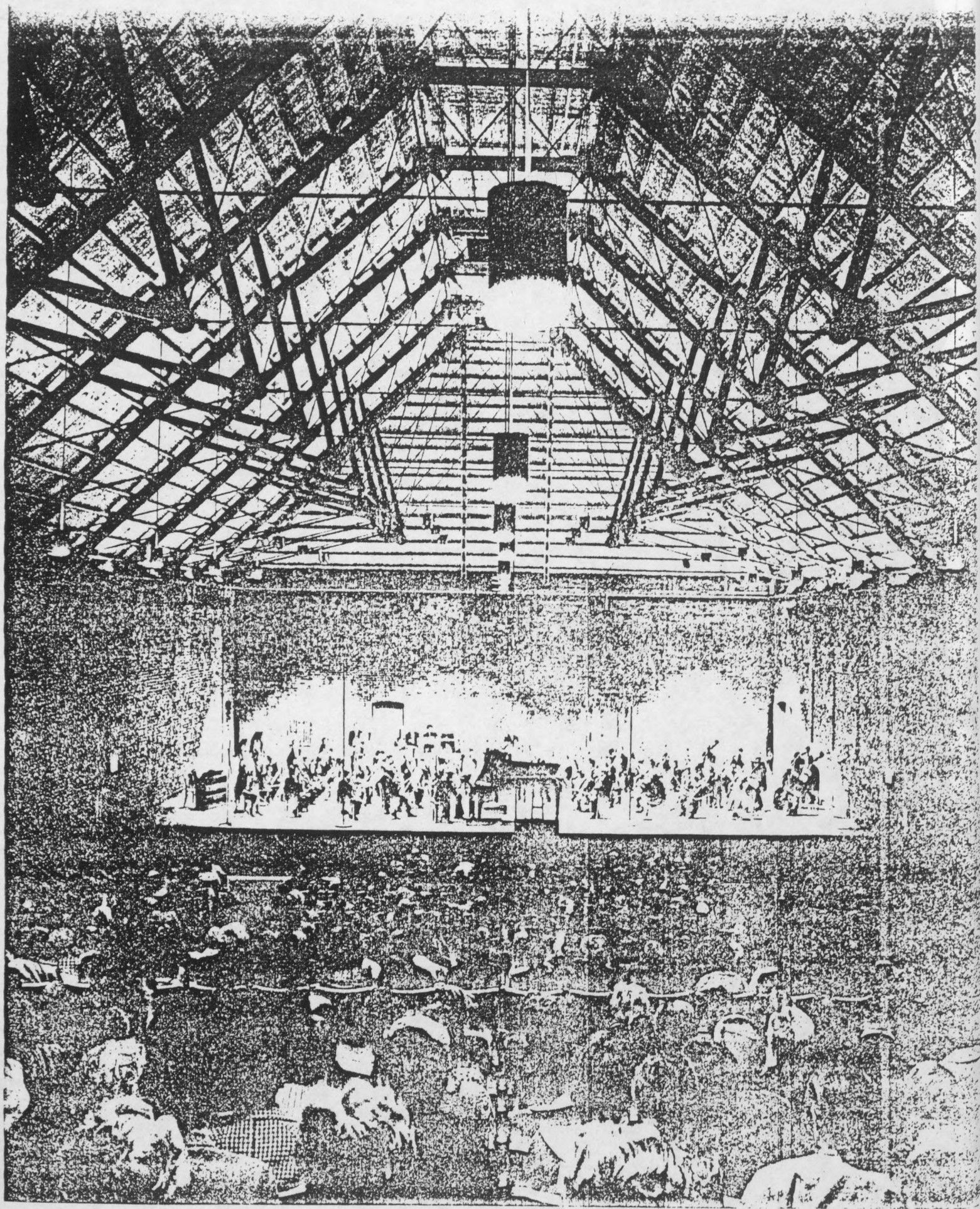


Fig.19

En reconstituant un simplex complet par l'assemblage de deux fermes Polonceau, on obtient à nouveau un carré rigide avec quatre bielles perpendiculaires aux rives (Fig.16e). Cette configuration reste indéformable même après la suppression des bielles comprimées, donnant un nouveau simplex stable (Fig.17), l'équivalent enrichi du croisillon tendu, où le centre était dissocié et remplacé par quatre nouveaux sommets.

Le croisillon régulier étant un partage du carré en quatre compartiments égaux, on peut aussi choisir une division inégale. Toute déformation symétrique (Fig.18) ou totalement asymétrique (Fig.19) du croisillon simple reste stable et même plus stable que sa forme centrée et régulière.

Quatre autres simplex carrés stables à barres rigides peuvent être obtenus à partir des deux variantes de la "machine" de Peaucellier, inventées en 1864, la simple (Fig.20) et la double (Fig.21). Dans ces mécanismes utilisés encore comme des inverseurs, le déplacement des sommets internes décrit une ligne droite et le mouvement



Ferme sous-bandée. Ove Arup

peut être bloqué par une seule barre supplémentaire. Dans chaque cas, le blocage est possible en deux positions. Ainsi, de la machine simple dérivent deux simplex (Fig.20a et 20b) et de la machine double deux autres systèmes rigides (Fig.21a et 21b). Cet exemple illustre bien notre approche qui consiste à partir d'un mécanisme réglé donc tout juste déformable, pour arriver par l'addition d'une membrure à une configuration bloquée donc indéformable.

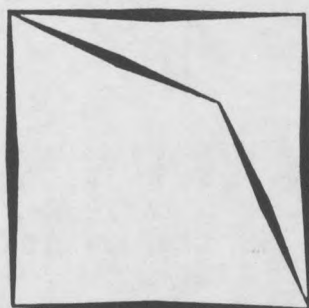


Fig.20

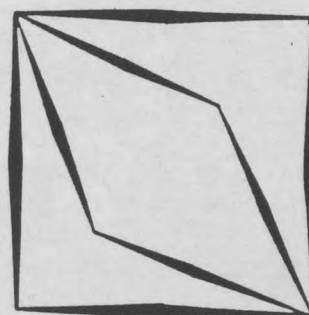


Fig.21

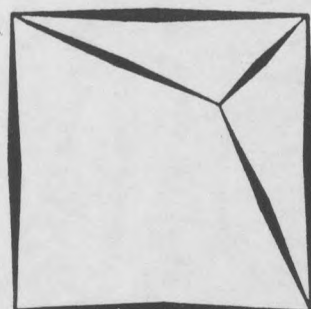


Fig.20a

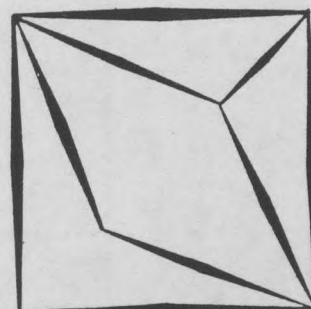


Fig.21a

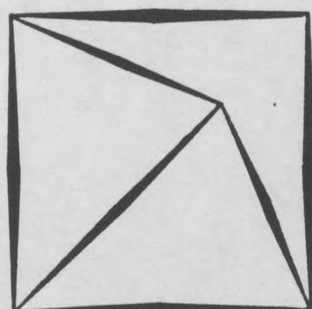


Fig.20b

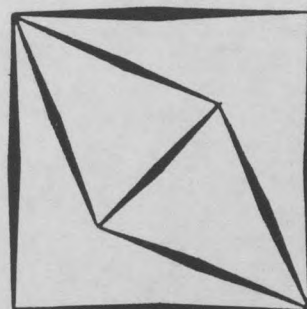
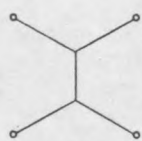
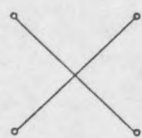


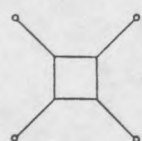
Fig.21b



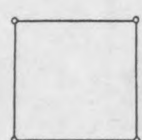
2,74 α



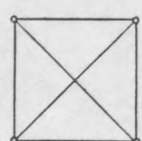
2,83 α



3,42 α



4,0 α



6,83 α

Une méthode d'approche différente pour composer une résille de tirants indéformable raidissant le carré, et les polygones en général, est fondée sur l'utilisation de graphes minimaux. D'après les calculs, confirmés également par des expériences sur des membranes à base de liquides savonneux, ces graphes ont la forme d'une arborescence ayant des sommets tripartitionnés avec des angles d'incidence de 120° uniquement. Située dans un cadre articulé de barres rigides, une résille minimale tendue résiste à la déformation du système. Toute tendance au déplacement dans le plan provoque, en effet, la distension de la configuration des tirants qui, de ce fait, est bloquée, donc rigide.

Le graphe minimal du carré est un double "Y", composé de deux triangles isocèles et de deux trapèzes, avec des angles d'incidence de 120° , aboutissant à un simplex stable (Fig.22). Le système vectoriel inverse ayant une ceinture périphérique tendue et un double "Y" comprimé est également stable (Fig.23).

Fig.22

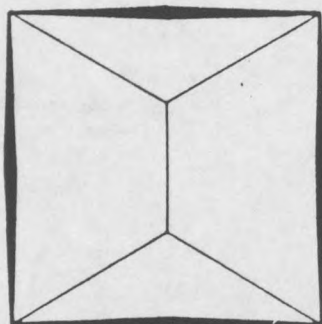
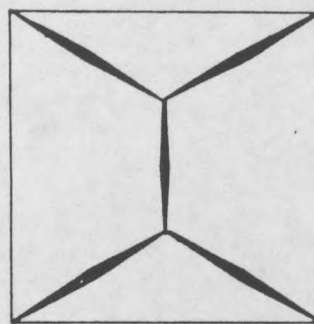


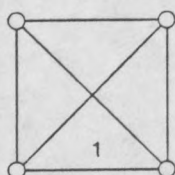
Fig.23



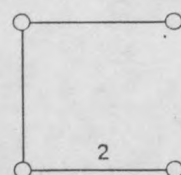
LE PLUS COURT CHEMIN ENTRE PLUSIEURS POINTS

On sait depuis l'antiquité que le plus court chemin d'un point à un autre est la ligne droite. Mais il y a tout juste un siècle que l'on sait trouver le trajet le plus court entre plusieurs points tracés sur un plan.

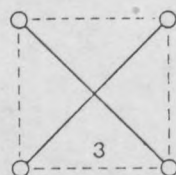
Le plus petit réseau routier permettant de joindre 4 villes ensemble ne peut être déterminé par le calcul. La solution la plus complète (1) est la plus longue. On peut la raccourcir en (2) et plus encore en (3).



1



2

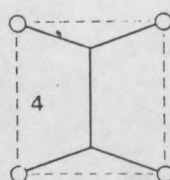


3

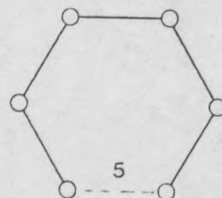
Mais en plongeant un cadre portant 4 axes disposés en carré dans un bain savonneux, on arrive



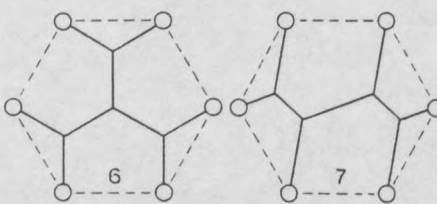
directement au dessin du plus court trajet possible ; comme le montre notre photo, c'est celui du dessin (4).



4



5

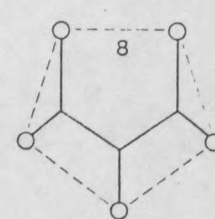


6

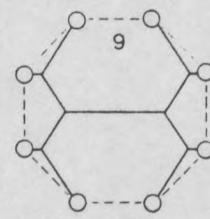
7

Avec 6 villes disposées en hexagone, il existe plusieurs liaisons minimales possibles. Mais tous

les réseaux gardant cette propriété essentielle que les intersections de routes sont toujours à 120° .



8

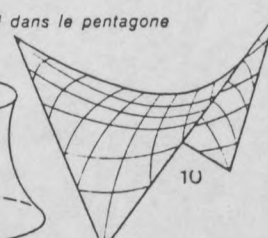


9

Le réseau minimal dans le pentagone et l'octogone.



11



10

Parmi les rares surfaces minimales susceptibles d'être déterminées, à grand peine, par le calcul des variations, on trouve celle qui s'appuie sur un quadrilatère gauche, et celle qui joint deux cercles co-axiaux genre armature d'abat-jour. □

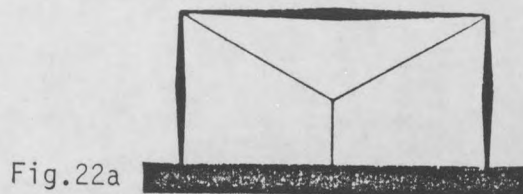


Fig. 22a

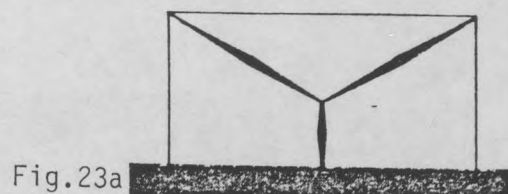


Fig. 23a

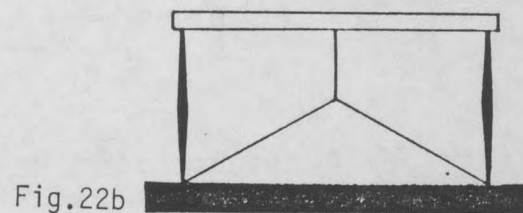


Fig. 22b

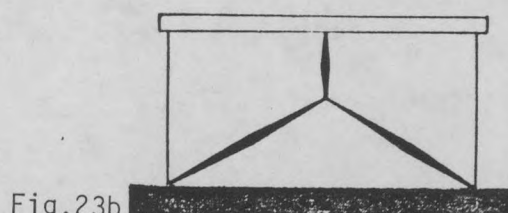
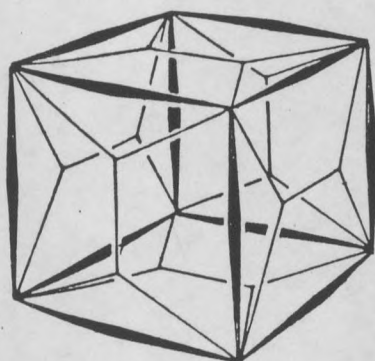
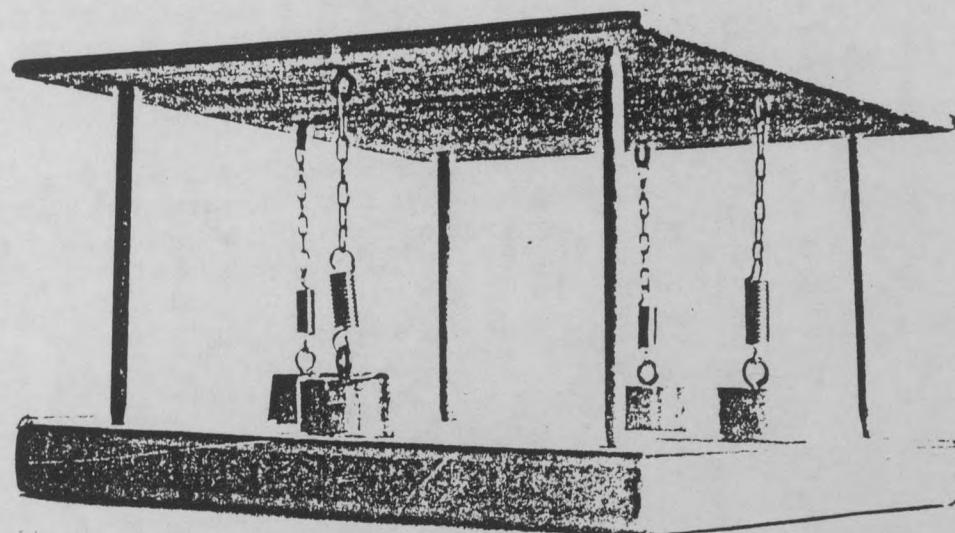


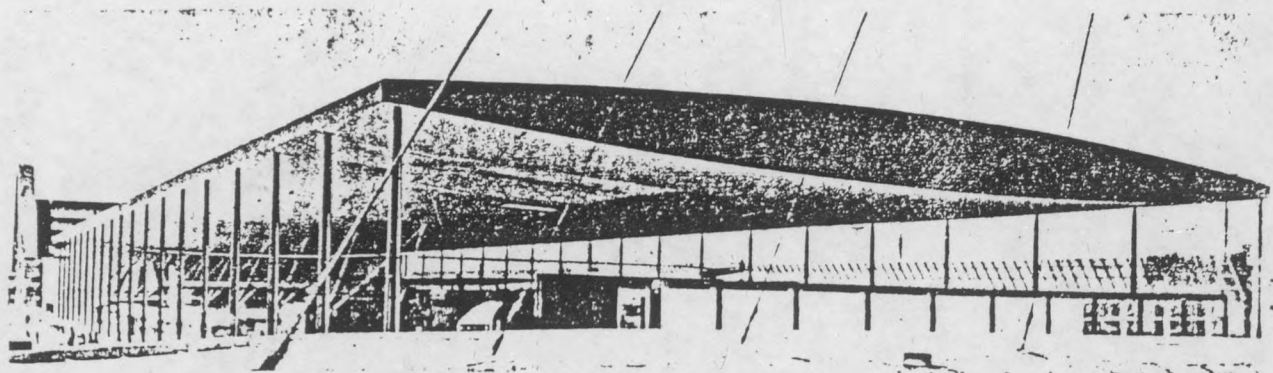
Fig. 23b



En divisant ces simplex en deux dans le sens coupant le tirant axial, on obtient deux configurations inverses composées de deux trapèzes et d'un triangle isocèle. En les assujettissant à une plate-forme solide, on crée deux portiques indéformables: le premier, composé de trois barres rigides, est contreventé par un "Y" tendu (Fig. 22a) le deuxième, constitué de trois tendeurs, est raidi par un "Y" comprimé (Fig. 23a).

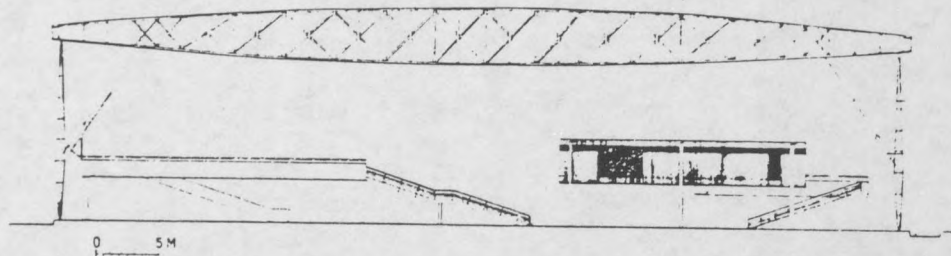
Les mêmes demi-simplex en position inverse et assujettis à la fois au sol et à une poutre continue produisent deux autres configurations stables (Fig. 22b et Fig. 23b). De la première dérive une stabilisation de travée particulièrement astucieuse où un tirant vertical attaché à une rotule surélevée contrevente un système sans aucun élément diagonal, voir le modèle photographié. Dans ce cas, l'effet minima peut être interprété par l'incompatibilité de déformation simultanée des deux trapèzes opposés, provoquant un conflit donc la stabilité.





Pavillon des Transports. Bruxelles 1958. Lipski

Dans le carré, la configuration minimale complète peut être disposée avec une rotation de 90° , la barre axiale étant horizontale, mais le simplex étant un ensemble autonome, ce changement d'orientation ne donne pas un simplex différent. Par contre, en coupant le simplex à travers la barre centrale on peut développer d'autres systèmes de haubanage ou de contreventement inédits, dont un dérivé a inspiré A. Lipski, lors de la construction du pavillon des transports de l'Exposition Universelle, en 1958, à Bruxelles.



En superposant deux configurations minimales complètes avec un décalage de 90° , on obtient en toute logique un simplex doublement stable, bien que construit de quatre triangles non contigus et de quatre quadrangles deltoïdes, en démenti formel vis à vis des règles de la rigidité en cours (Fig.24). Le remplacement de la croix par un carré oblique équivalent donne un simplex stable semblable au schéma de la (Fig.17) et dont la rigidité est de ce fait prouvée.

La transformation duale des graphes engendre des schémas nouveaux apparentés aux graphes initiaux par une isomorphie polaire. L'opération duale consiste, en effet, à substituer aux sommets initiaux les centres de chaque compartiment préexistant; les nouveaux sommets reliés formant

un nouveau graphe. Ainsi, la transformation duale du simplex précédent aboutit à un nouveau simplex statique, dont le dessin coïncide avec le diagramme Schlegel du cuboctaèdre (Fig.25). Ces schémas étaient fréquemment employés pendant la dernière période de l'architecture gothique pour définir les systèmes de nervures raidissant les voussures étoilées.

La variante la plus simplifiée de ces dernières figures, ne garde que le carré central et quatre trapèzes; en fait, elle peut être considérée comme une variante complexe de la croix de Saint André dont le centre serait dissocié, et qui en même temps coïncide avec le diagramme Schlegel du cube (Fig.26). Dans ce simplex la stabilité est assurée par un système de contreventement construit entièrement de quadrilatères!

La configuration vectorielle inverse composée de huit barres de compression tendant une ceinture, donne également un simplex stable dans le plan, qui a , cependant, une tendance à vriller, c'est à dire à se déformer, par rotation (Fig.27).

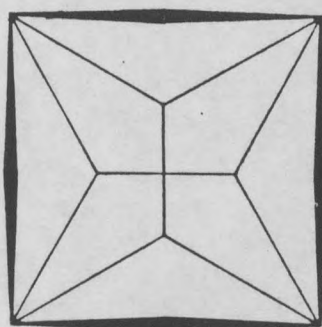


Fig.24

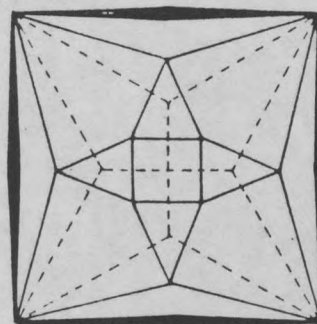


Fig.25

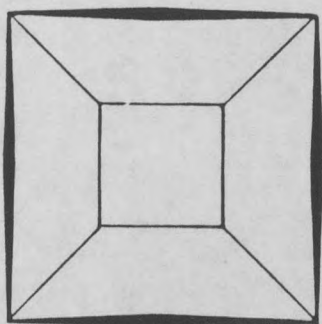


Fig.26

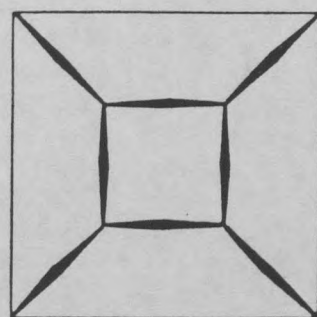


Fig.27

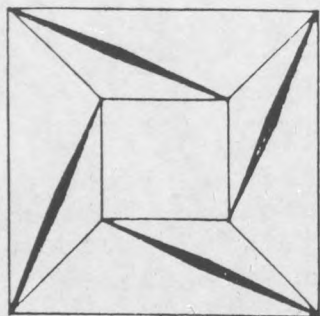


Fig.28

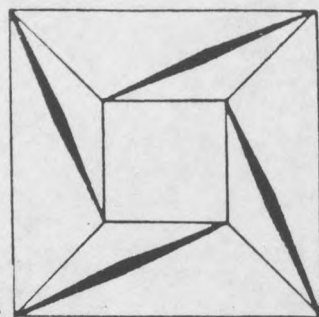


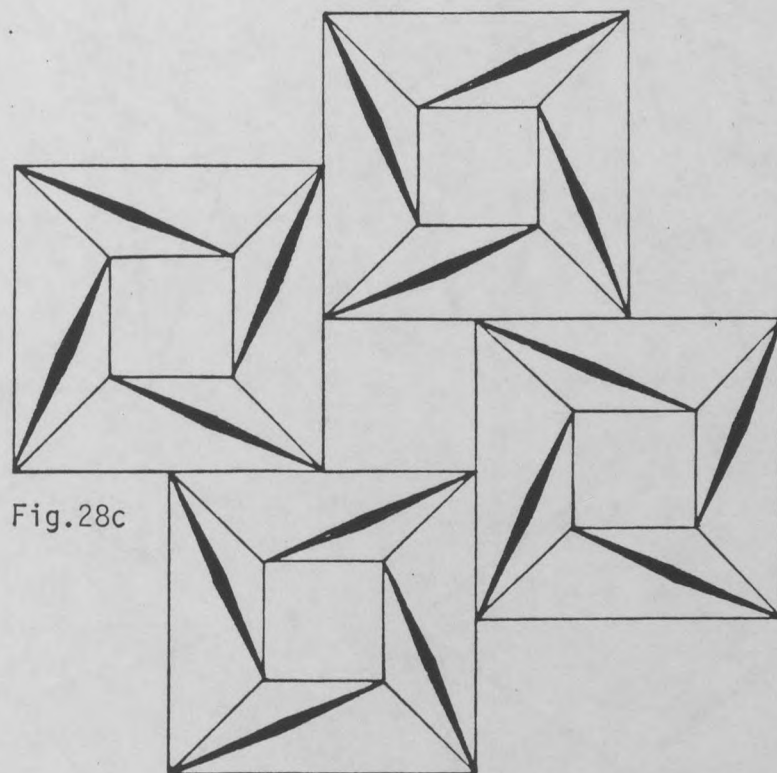
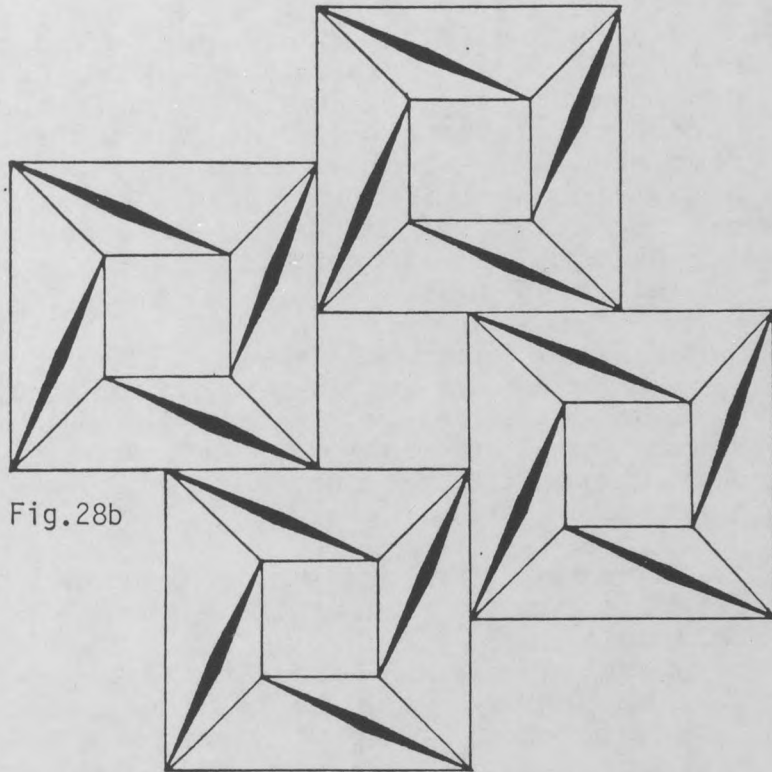
Fig.28a

Cet inconvénient peut être éliminé, tout en gardant la ceinture tendue, en remplaçant les huit barres par une résille tendue de même configuration dont les maillons trapézoïdaux reçoivent quatre barres de compression imbriquées diagonalement. Ayant des charnières, le résultat est un simplex autotendant stable seulement dans le plan. Cette configuration, tout comme sa soeur triangulaire, a une symétrie rotatoire et existe donc en deux variantes énantiomorphes: lévogyre (Fig.28) et dextrogyre (Fig.28a).

Leur assemblage selon un schéma orthogonal provoque, évidemment, la rencontre des barres de compression, groupées en stellation quatre par quatre, s'il s'agit d'un arrangement saturé; ou deux par deux, s'il est élagué, tel l'échiquier. Les simplex employés pouvant être soit à rotation identique soit à rotation opposée, il existe au moins quatre réseaux planaires semi-autotendants orthogonaux qui sont tous sujets à déversement.

L'assemblage des simplex autotendants carrés dans un réseau qui reste également autotendant n'est possible qu'à base d'une tessellation automorphe à motifs coulissants, qui a elle même une symétrie rotatoire. Cette propriété augmente considérablement le nombre des arrangements possibles selon qu'on utilise des simplex lévogyres ou dextrogyres dans une tessellation à rotation identique ou opposée, ainsi que des simplex de rotation alternativement gauche et droite dans une tessellation lévogyre ou dextrogyre.

Les deux réseaux autotendants présentés à titre d'exemple sont construits à base de la même tessellation autotendante bi-carrée lévogyre. Le premier utilise des simplex à rotation opposée à celle de la tessellation qui est donc lévogyre (Fig.28b). Le deuxième, constitué de simplex à rotation alternativement gauche ou droite, est appelé compensé ou racémique (Fig.28c). Bien que planaires, ces réseaux ont une certaine tenue stable dans l'espace du fait de l'absence de lignes de charnière.



PENTAGONES

Plus grand est le nombre de barres composant un polygone, plus grande est sa déformabilité. Cependant, les polygones ayant un nombre impair de côtés, tel le pentagone, ne peuvent pas être pliés complètement et réduits en un faisceau de segments parallèles comme les polygones ayant un nombre pair de côtés tel le carré. Quel que soit le mode de pliage, l'empaquetage final aboutit à un triangle résiduel.

Dans un simplex impair, il est aussi plus facile de créer des configurations sans ligne de clivage ou charnière du fait de la disparallélité des barres. Un assemblage d'ordre impair possède donc une certaine supériorité statique par rapport aux configurations d'ordre pair.

La stabilisation du pentagone est obtenue aisément par sa subdivision en trois compartiments triangulaires à l'aide de deux barres de compression diagonales (Fig.29). En créant, en quelque sorte, deux barres composées chacune de deux triangles, on peut transformer également le pentagone en un triangle complexe lequel, malgré la présence d'un compartiment pentagonal irrégulier, est évidemment stable (Fig.30).

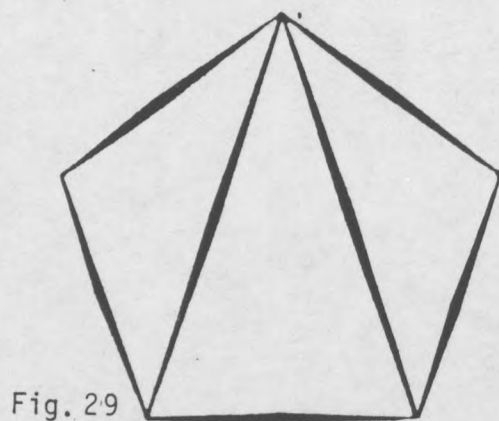


Fig. 29

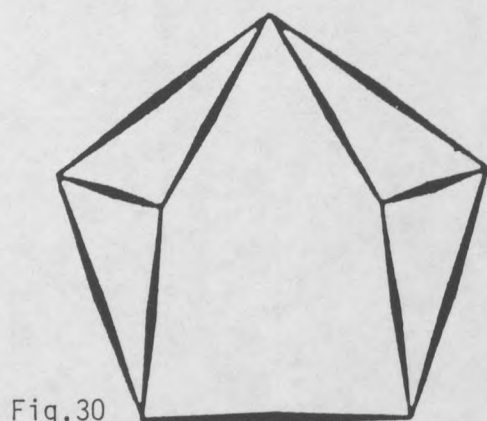


Fig. 30

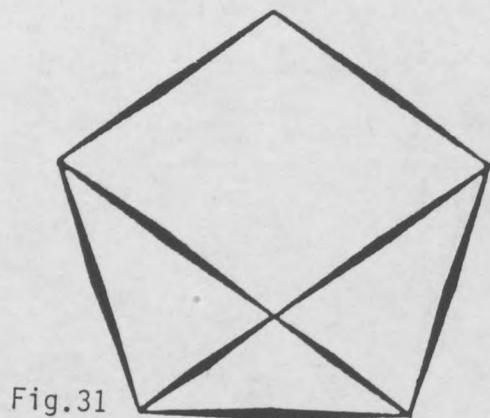


Fig. 31

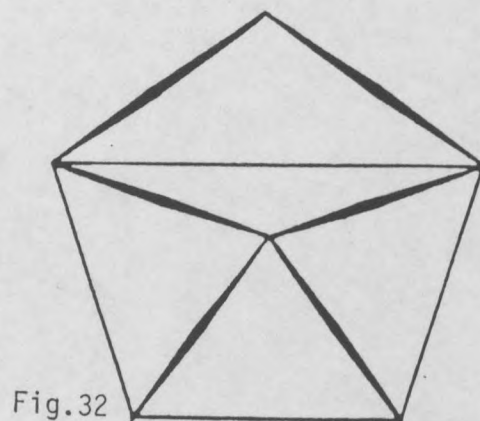


Fig. 32

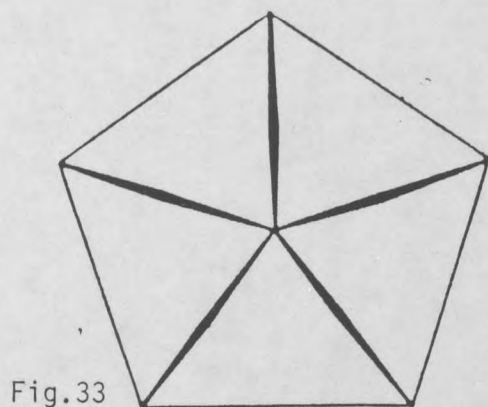


Fig.33

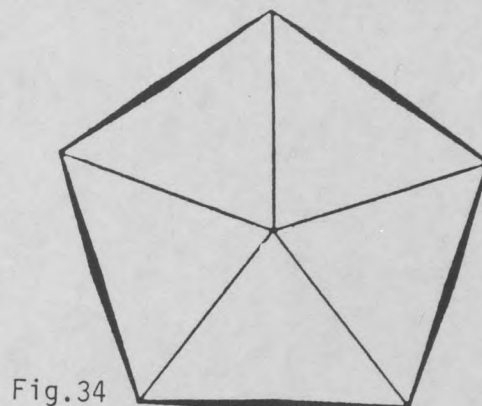


Fig.34

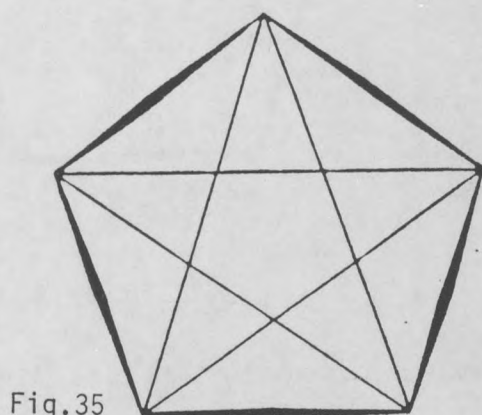


Fig.35

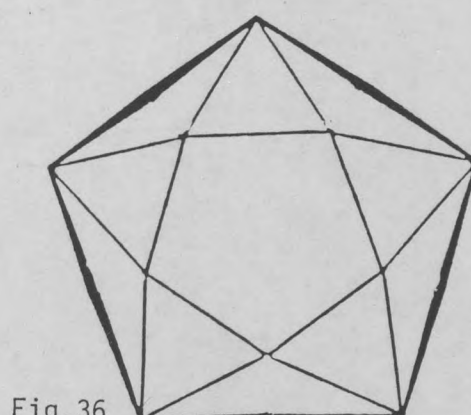
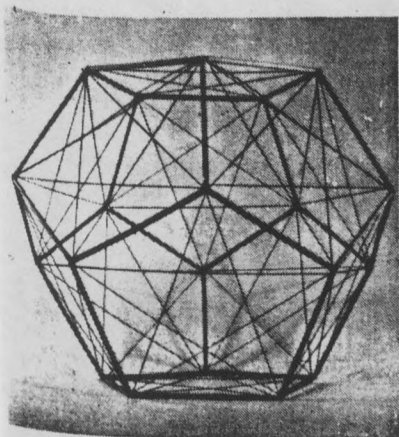


Fig.36

On procède par le même raisonnement pour créer à l'aide de trois triangles contigus un continuum rigide qui sert de base aux deux côtés restants d'un triangle, l'ensemble formant un pentagone stable malgré un champs quadrangulaire (Fig.31). Partant du schéma précédent, un simplex stable partiellement tendu, donc différencié, peut être obtenu par l'introduction d'une stellation trapézoïdale à la place du continuum triangulé; transformation qui se contente de six barres rigides (Fig.32).

La stellation peut être directement appliquée à l'intérieur d'une ceinture pentagonale tendue donnant un simplex stable composé seulement de cinq barres rigides (Fig.33). La forme inverse, comprenant une stellation tendue, l'équivalent de la croix Saint André du carré, et un pourtour pentagonal constitué de barres rigides, produit un simplex également stable dans le plan (Fig.34).



Deux variantes enrichies de ce dernier système sont obtenues par des haubanages internes plus complexes. La première utilise un pentagone étoilé à lignes entrecroisées (Fig.35), la deuxième une modification du précédent schéma créant cinq triangles équilatéraux permettant la standardisation des longueurs des tirants formant cinq triangles équilatéraux contigus (Fig.36).

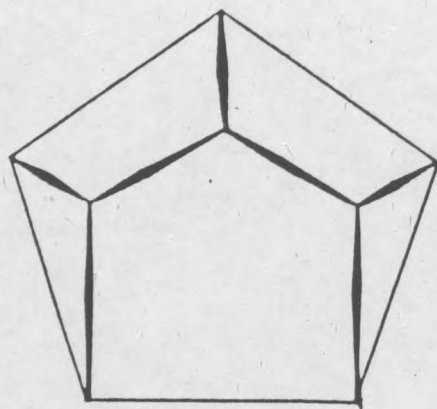


Fig.37

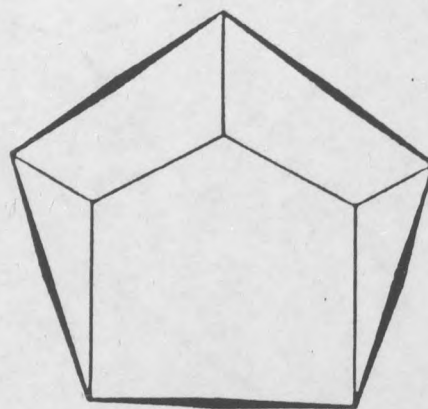
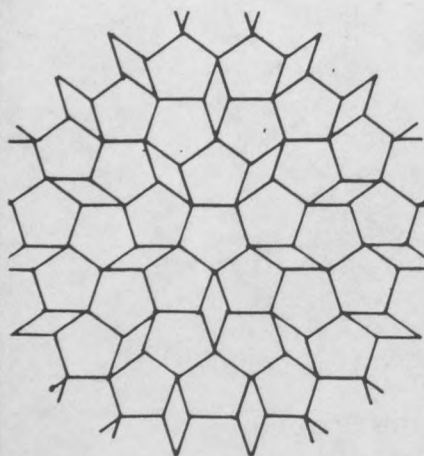


Fig.38

La méthode du graphe minimal, reliant les cinq sommets du pentagone par le chemin le plus court, produit là aussi deux simplex stables intéressants du fait de l'ouverture réservée dans le champ polygonal. Le premier simplex comporte une arborescence composée de barres rigides qui tend la ceinture périphérique (Fig.37); le second inversement, est constitué d'un pourtour articulé de barres rigides tendues par une arborescence, dont les angles d'incidence sont de 120° uniformément (Fig.38).

Une modification symétrique du précédent système aboutit à une configuration composée autour d'un pentagone central à cinq compartiments hexagonaux. La variante avec un contreventement tendu n'est guère différente des autres haubanages produisant un simplex stable (Fig.39). La forme inverse, également stable, est composée d'une série de barres rigides, qui peuvent être de longueurs égales, et d'une ceinture tendue. Ce simplex est stable, mais a tendance à vriller comme son homologue quadrangulaire (Fig.40).



Le haubanage de chaque trapèze par un tirant diagonal ne bloque la dérotation de l'ensemble que dans une seule direction (Fig.41). Par contre, en imbriquant dans chaque case trapézoïdale de la configuration initiale entièrement tendue cinq barres diagonales rigides, on obtient un simplex autotendant stable (Fig.42) qui, ayant une symétrie, rotatoire existe sous deux formes énantiomorphes gauche et droite.

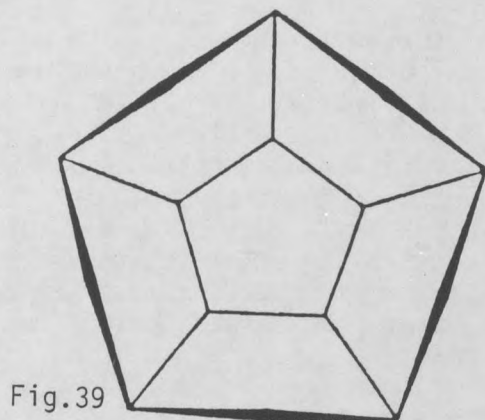


Fig.39

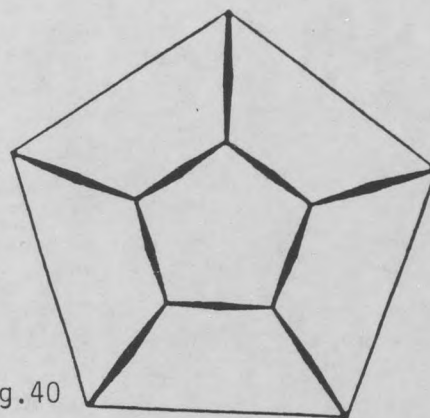


Fig.40

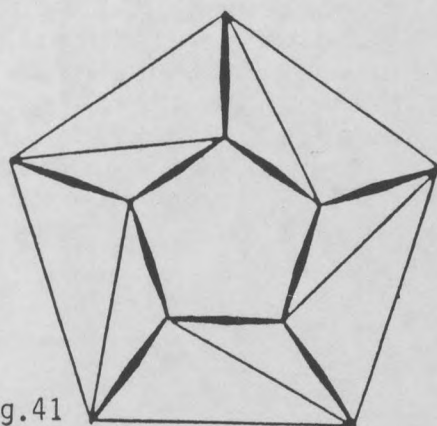


Fig.41

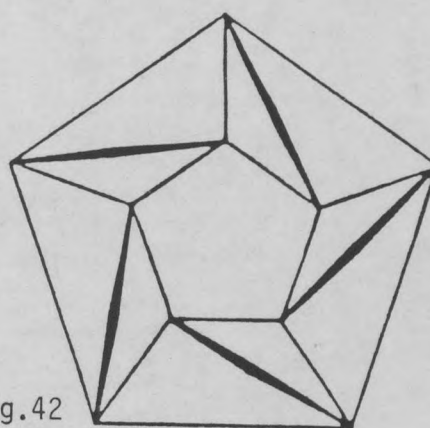
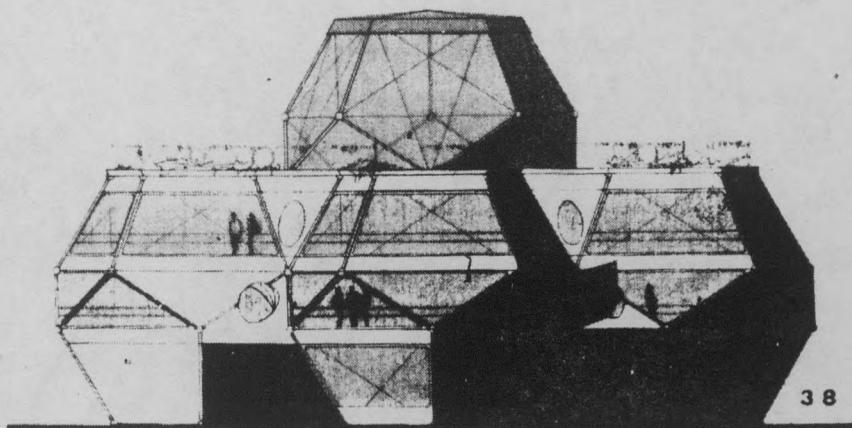
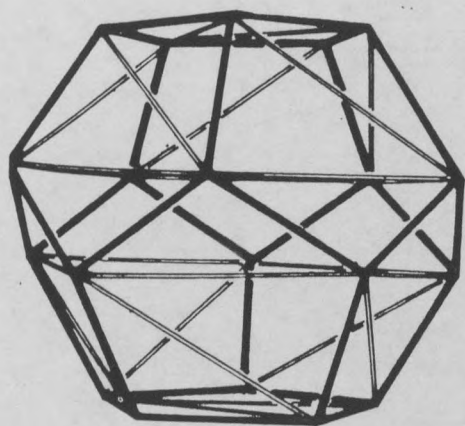


Fig.42

L'assemblage de pentagones réguliers dans les tessellations uniformes, autrement dit, en une équipartition pentagonale planaire, étant impossible pour des raisons géométriques, l'utilité de ces simplex est plus évidente pour construire des solides réguliers à faces pentagonales, tel le dodécaèdre.



38

Travaux d'élèves

HEXAGONES

L'hexagone étant un polygone à côtés deux à deux parallèles et composé d'un nombre pair d'éléments, sa stabilisation dans le plan est d'emblée plus difficile. Quelle que soit la division choisie, on ne peut éviter la création d'une ou plusieurs lignes de clivage, ce qui rend les simplex déformables dans l'espace par déversement. L'hexagone est, cependant, le polygone le plus souvent présent aussi bien dans la composition des tessellations que dans celle des solides réguliers.

Le mode le plus simple de stabilisation de l'hexagone s'opère par triangulation, qu'on peut créer de plusieurs manières. En inscrivant un triangle équilatéral rigide à l'intérieur d'un hexagone rigide, créant en fait un hypertriangle construit avec trois autres triangles isocèles, on obtient un simplex stable (Fig.43). Une autre subdivision par six triangles équilatéraux de barres rigides crée également un ensemble stable (Fig.44) qu'on peut qualifier de même que le précédent, d'indifférencié.

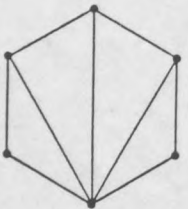
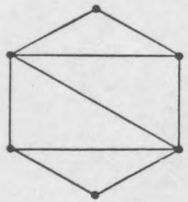
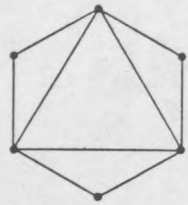


Fig.43

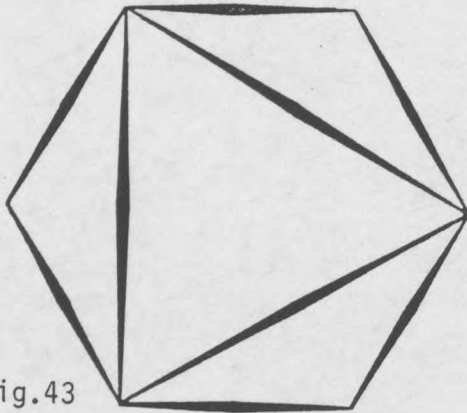


Fig.44

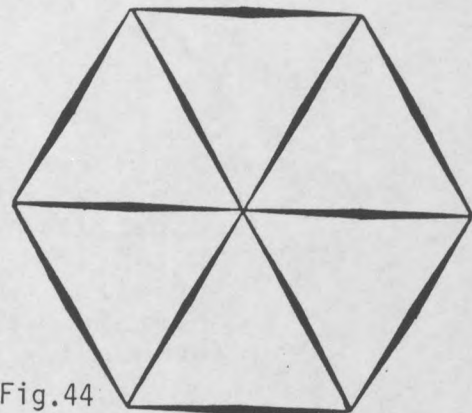


Fig.45

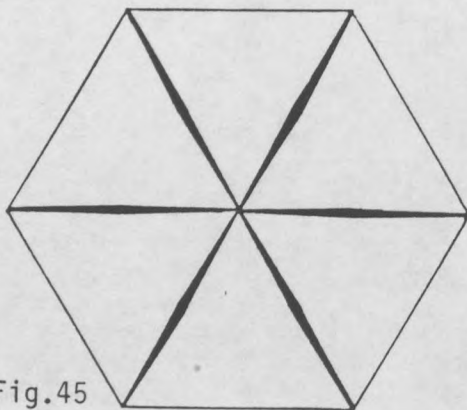
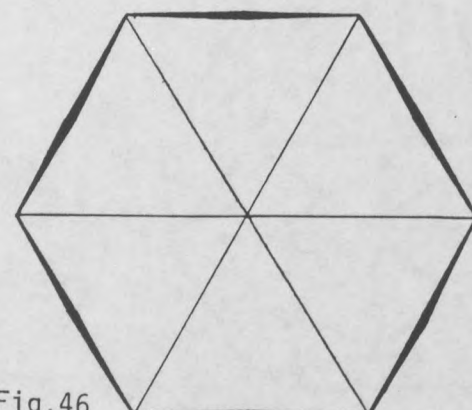


Fig.46



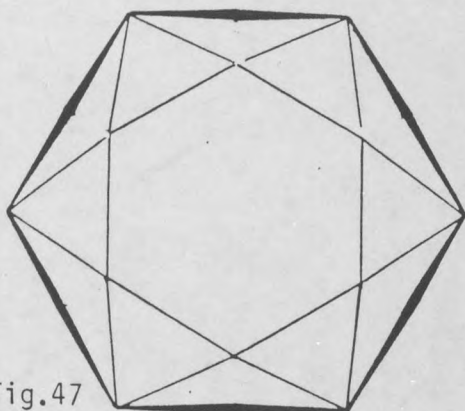


Fig. 47

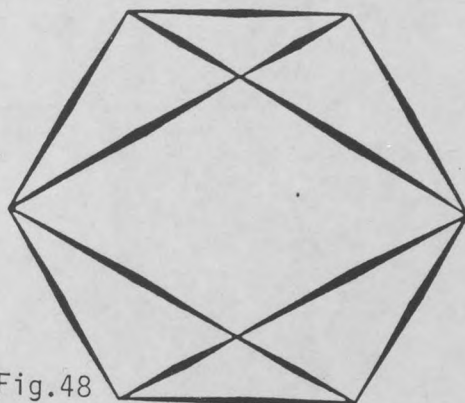


Fig. 48

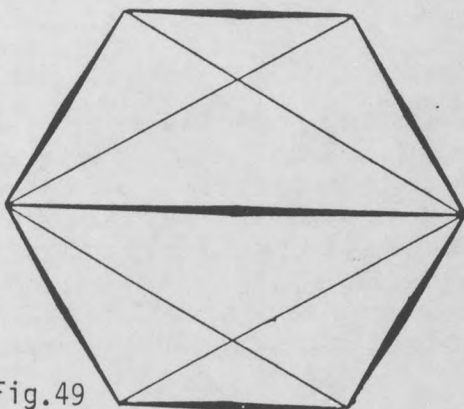


Fig. 49

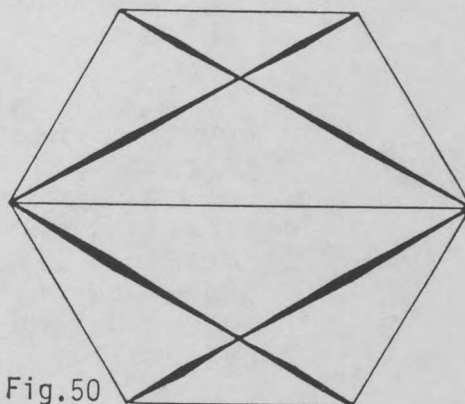


Fig. 50

Cette dernière configuration donne naissance par la différenciation du travail des membrures à deux structures plus évoluées. La première est composée de six barres de compression formant, une stellation, sollicitée par une ceinture hexagonale tendue (Fig. 45). La deuxième, sorte de roue de bicyclette planaire, est inversement composée d'un rayonnage tendu et d'un pourtour comprimé rigide (Fig. 46). Chacun de ces deux simplexes réduit de moitié le nombre des barres comprimées.

D'autres contreventements tendus sont également possibles: sous forme d'étoile de David ou de ses dérivés de même qu'un grand nombre de subdivisions triangulées moins régulières (Fig. 47). En composant avec des barres rigides deux portiques triangulés, on peut réserver une ouverture en forme de losange (Fig. 48).

Cette configuration peut servir de base à deux autres structures différenciées. La première décompose l'hexagone par la division du losange en deux quadrangles trapézoïdaux chacun contreventé par une croix de Saint André tendue (Fig. 49). L'autre est le système inverse ou deux stellations comprimées tendent deux maillons trapézoïdaux contigus (Fig. 50).

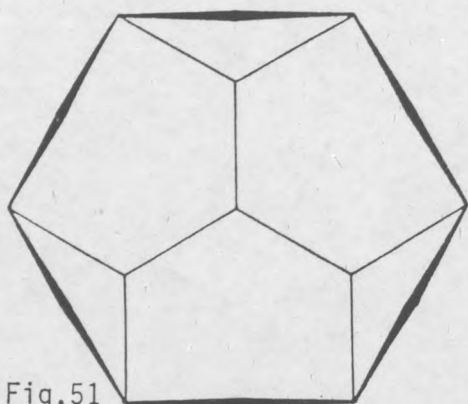


Fig.51

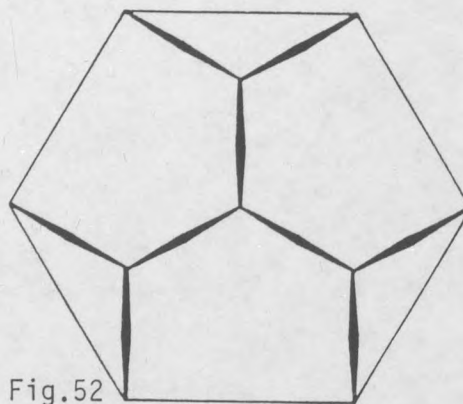


Fig.52

L'arborescence minimale, correspondant au plus court chemin reliant les six sommets de l'hexagone, est également applicable et donne lieu à l'invention de deux nouvelles variantes. L'une est composée d'un réseau tendu contreventant une ceinture comprimée (Fig.51). Dans l'autre, inversement, une arborescence assemblée de barres comprimées pousse une ceinture tendue périphérique (Fig.52).

Par la translation du schéma réticulaire minimal, on réinvente une autre subdivision composée d'un hexagone central entouré de six trapèzes, où ne subsiste plus donc aucune trace d'une triangulation quelconque. Mais, tout comme dans le schéma précédent, les angles d'incidence sont de 120° et les éléments ont une longueur identique. Cette partition hexa-trapézoïdale correspond en fait au diagramme Schläfli d'un prisme hexagonal. La première variante avec un réseau tendu interne dans un périmètre comprimé est un simplex stable (Fig.53). L'inverse construit avec un réseau intérieur de barres rigides et avec un périmètre comprimé présente, tout en étant rigide, une tendance à la dérotation (Fig.54).

Cette tendance peut être éliminée par l'introduction de croix de Saint André tendues contreventant chaque compartiment trapézoïdal de la précédente configuration à réseau interne comprimé (Fig.55). Enfin la variante entièrement tendue peut être rendue indéformable à l'aide de six barres comprimées imbriquées diagonalement dans chaque maillon trapézoïdal. Le simplex obtenu est de classe autotendante, ayant une symétrie rotatoire donc réalisable avec une variante gauche ou droite (Fig.56)

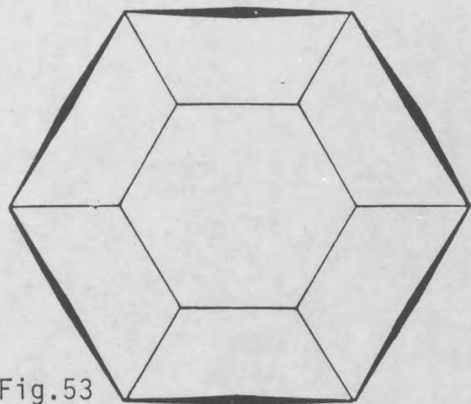


Fig. 53

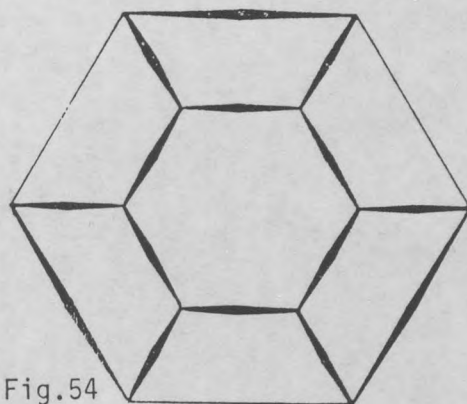


Fig. 54

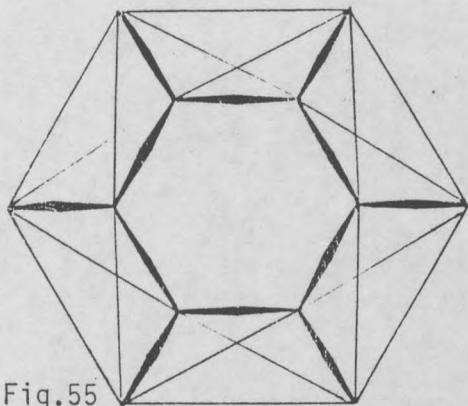


Fig. 55

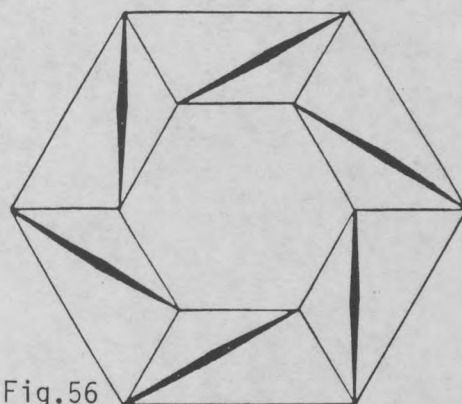
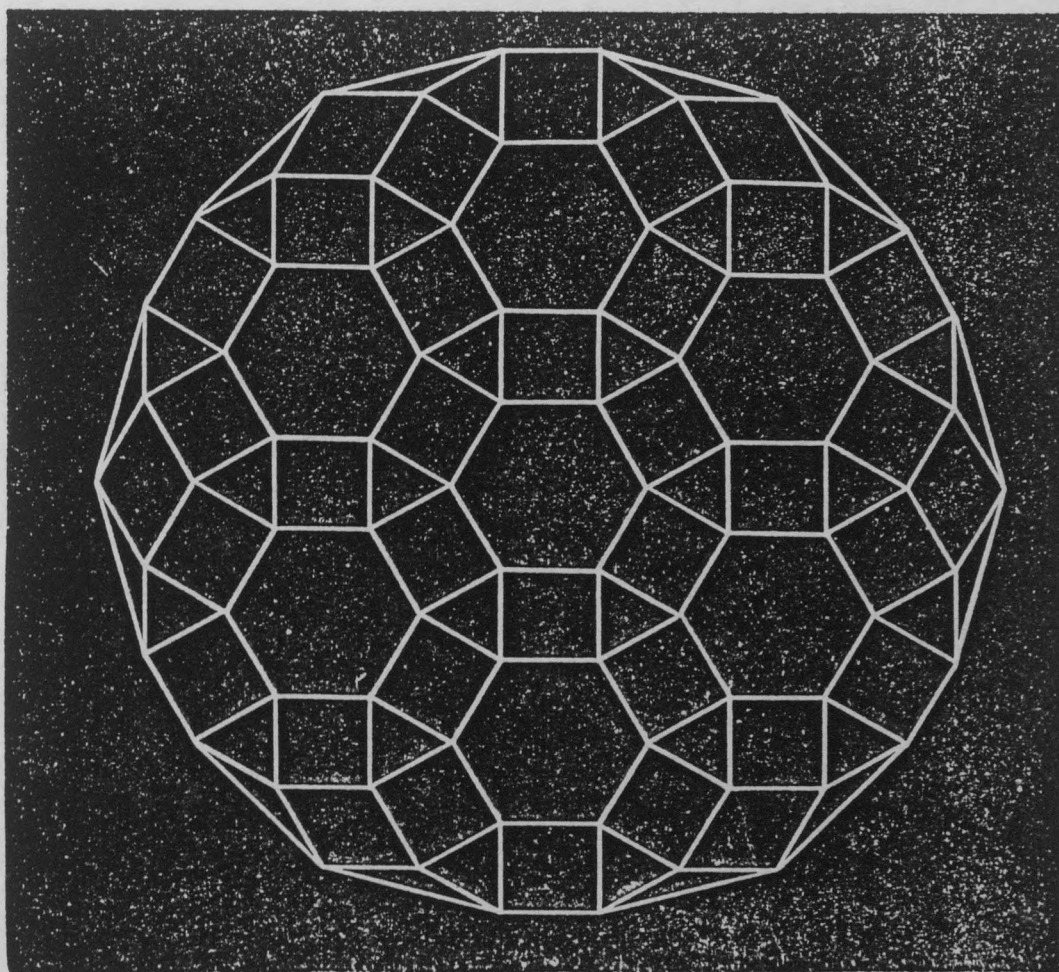
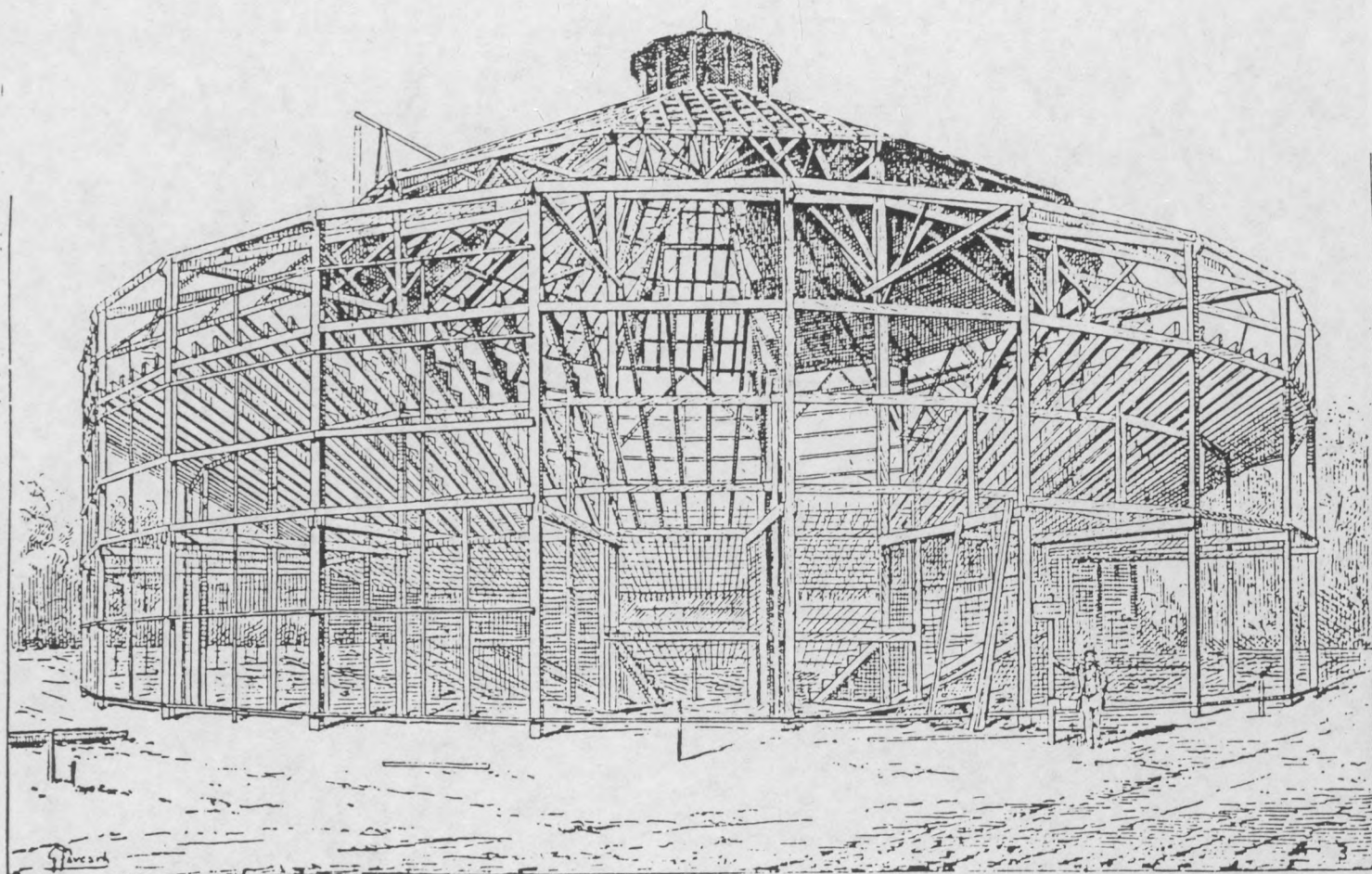


Fig. 56

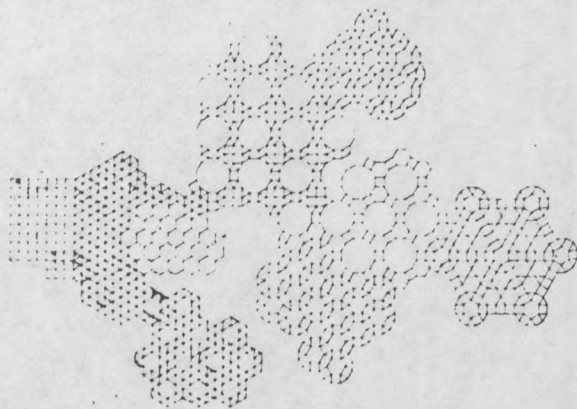


Tessellation.
La pierre de Nîmes

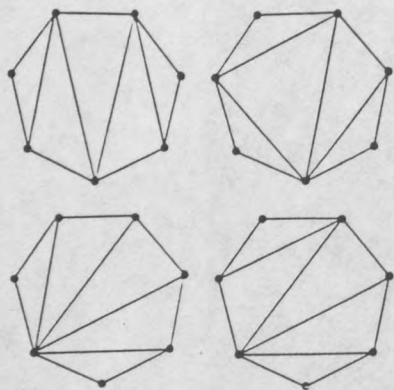


LE CIRQUE DE LA SAINT-LAZARE

La plus vaste construction est probablement celle de la place Saint-Michel à Marseille, montée chaque été à l'occasion de la foire de Saint-Lazare pour une durée de quarante jours. L'architecte Bord l'a dessinée pour 5 000 spectateurs.

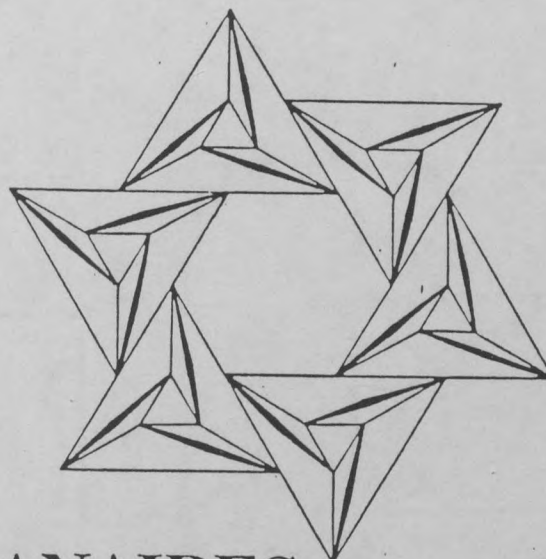
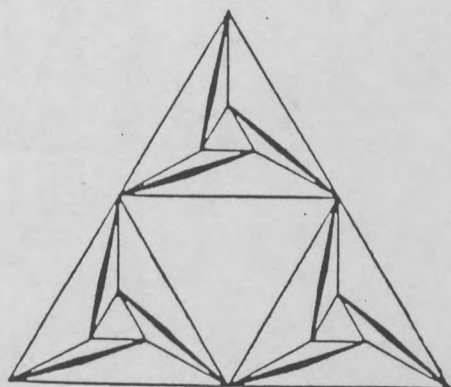
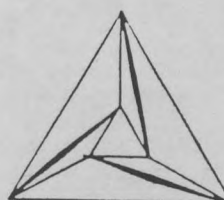
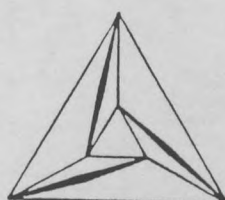
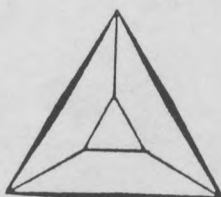
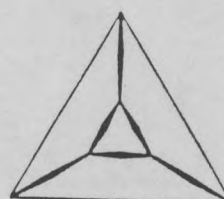
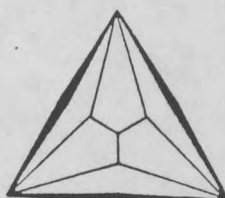
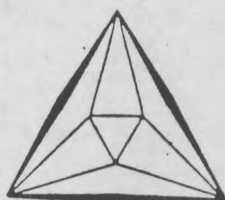
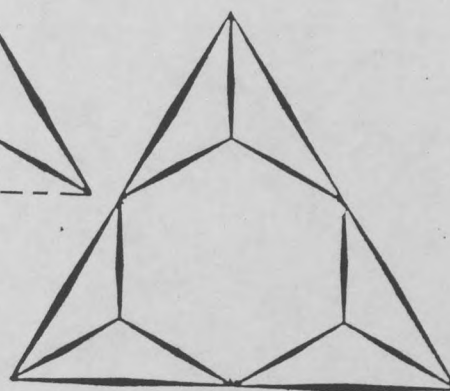
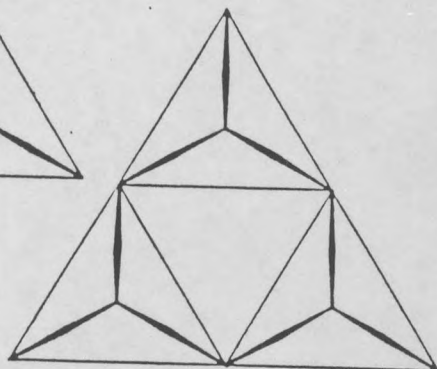
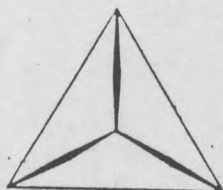
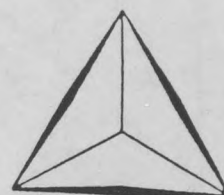
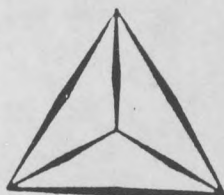


POLY GONES



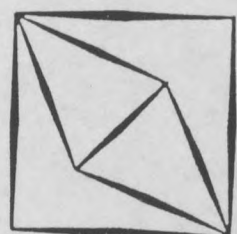
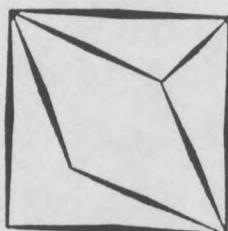
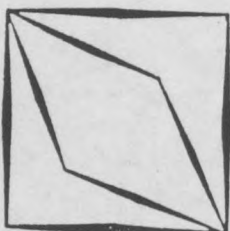
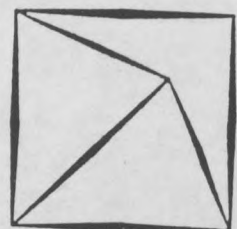
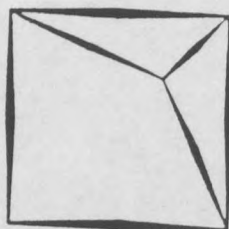
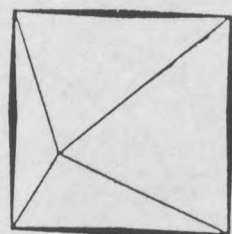
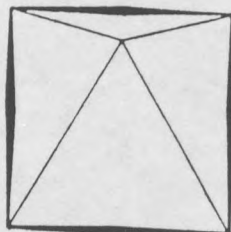
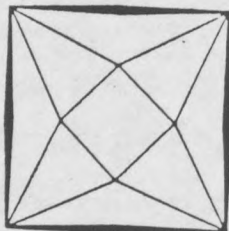
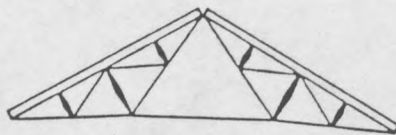
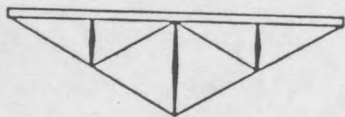
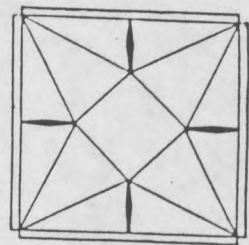
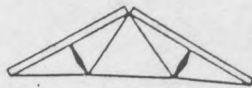
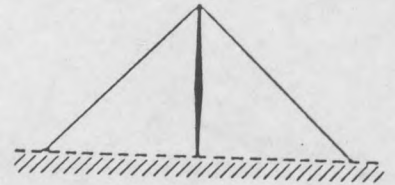
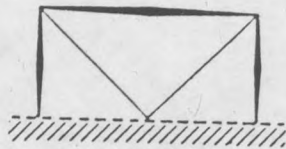
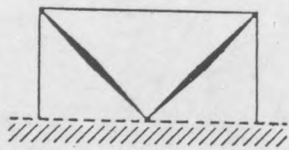
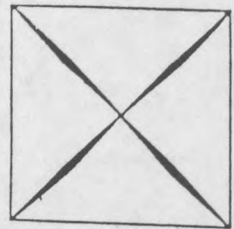
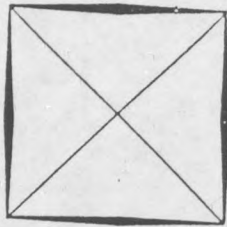
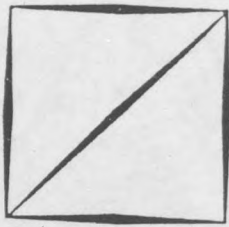
En étendant cette méthode de recherche aux polygones à n côtés, suivant l'accroissement du nombre n , on trouve un nombre exponentiellement plus grand de graphes segmentant la région interne de chaque polygone. Cette recherche pourrait être poursuivie plus particulièrement sur les graphes polygonaux à 8, 10 et 12 côtés qui entrent également dans la construction des tessellations ou des solides réguliers.

TRIANGLES

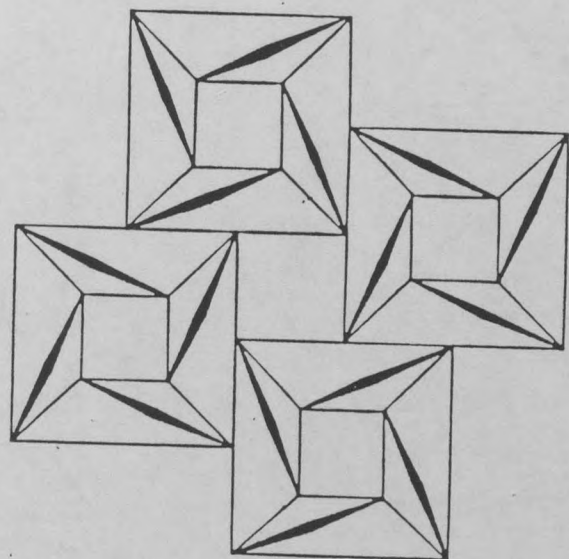
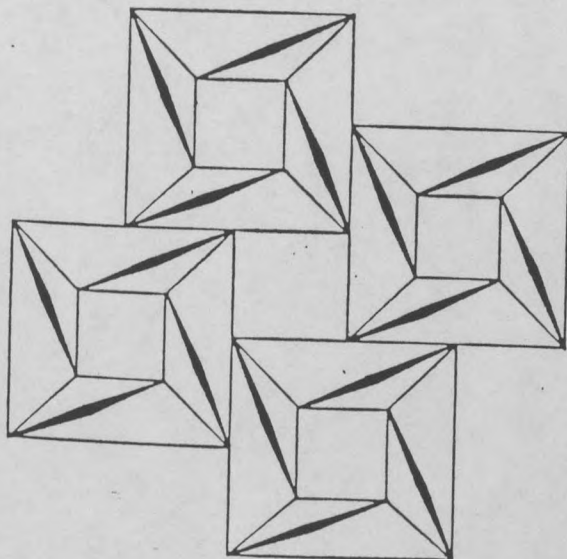
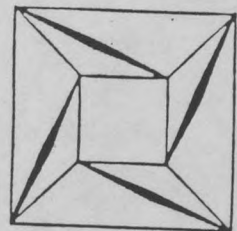
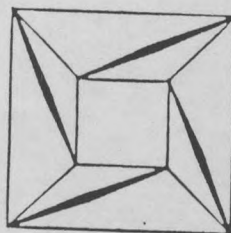
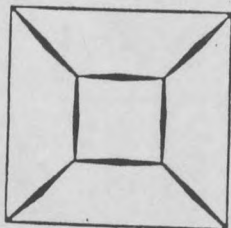
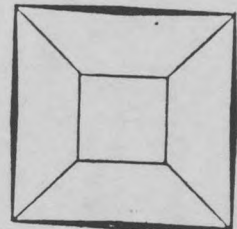
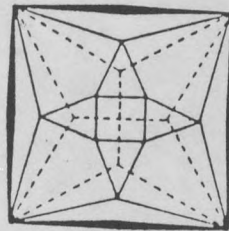
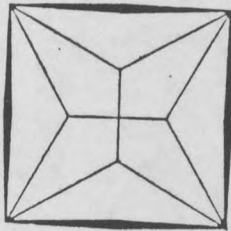
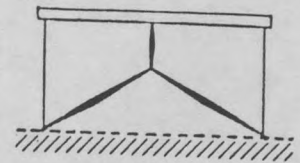
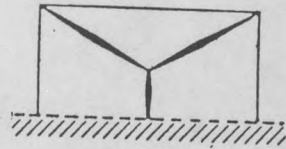
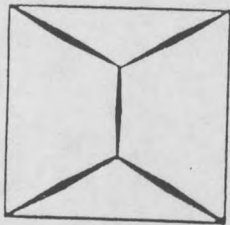
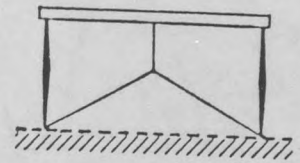
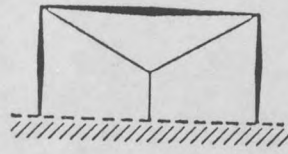
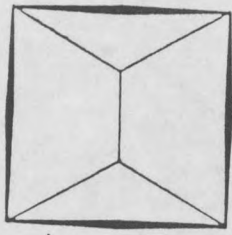


SIMPLEX PLANAIRES

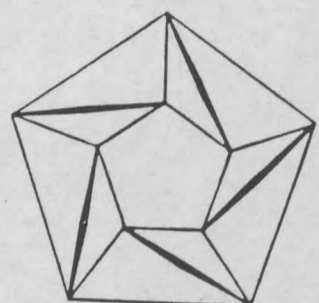
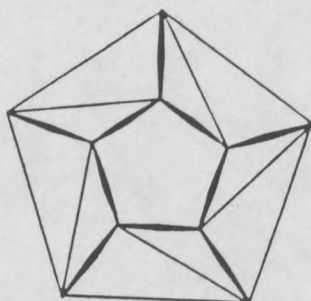
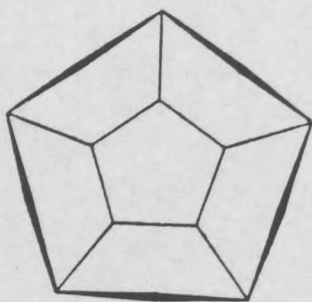
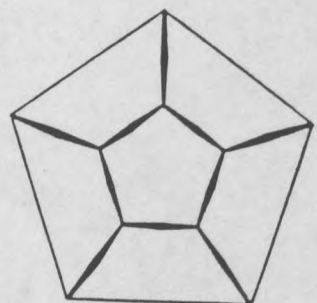
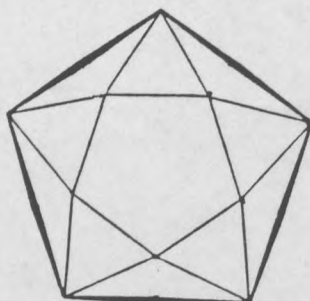
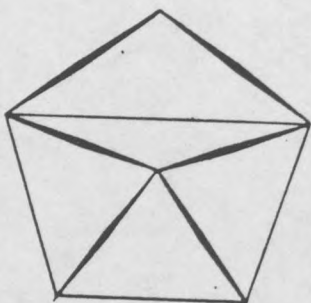
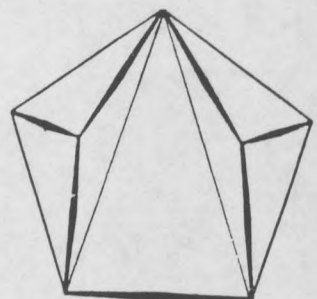
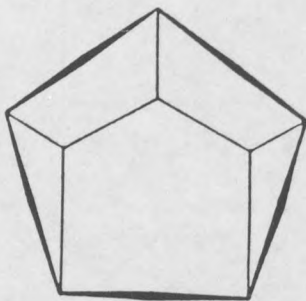
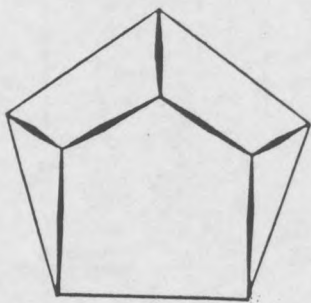
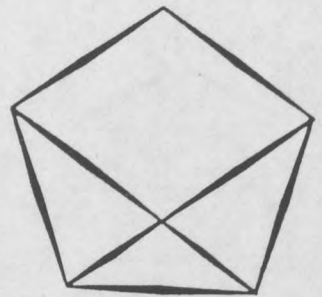
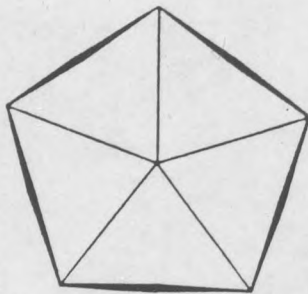
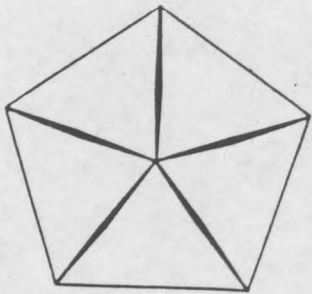
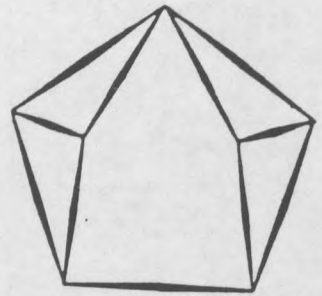
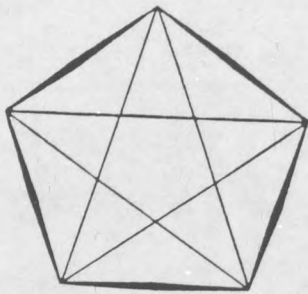
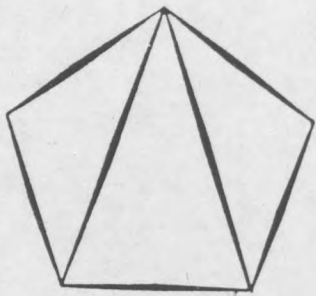
QUADRANGLES



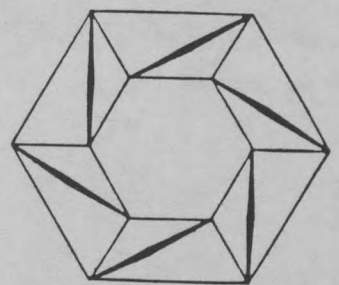
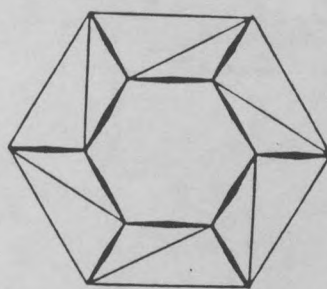
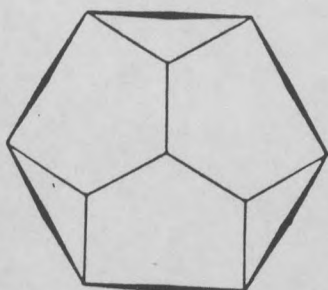
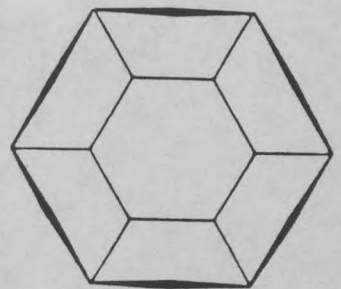
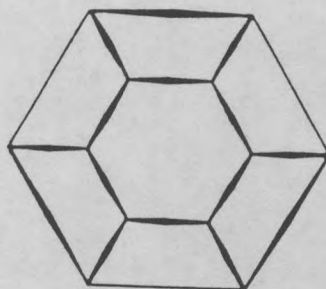
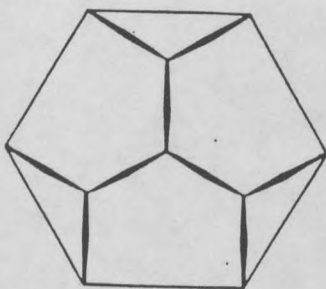
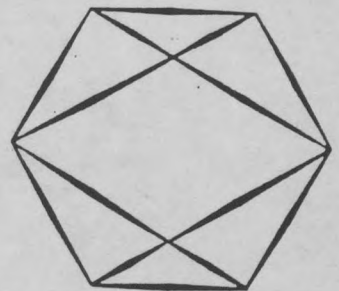
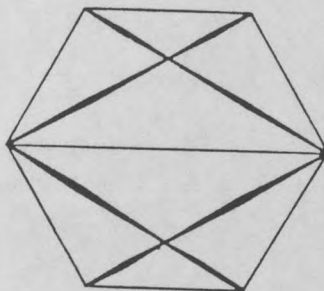
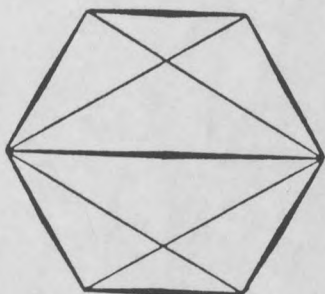
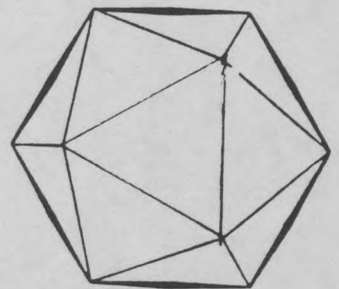
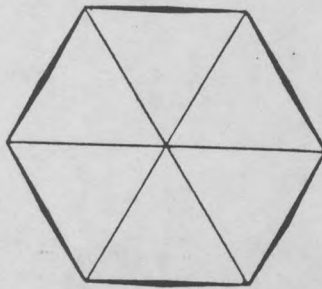
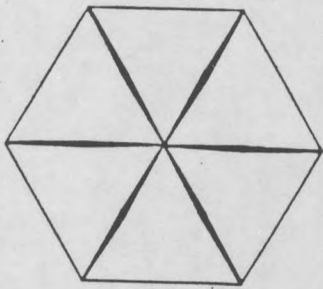
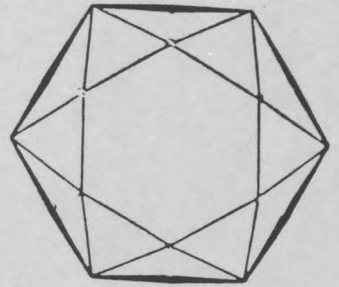
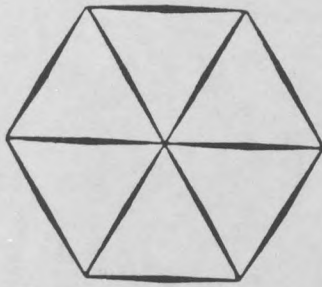
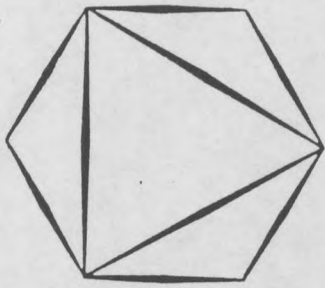
QUADRANGLES

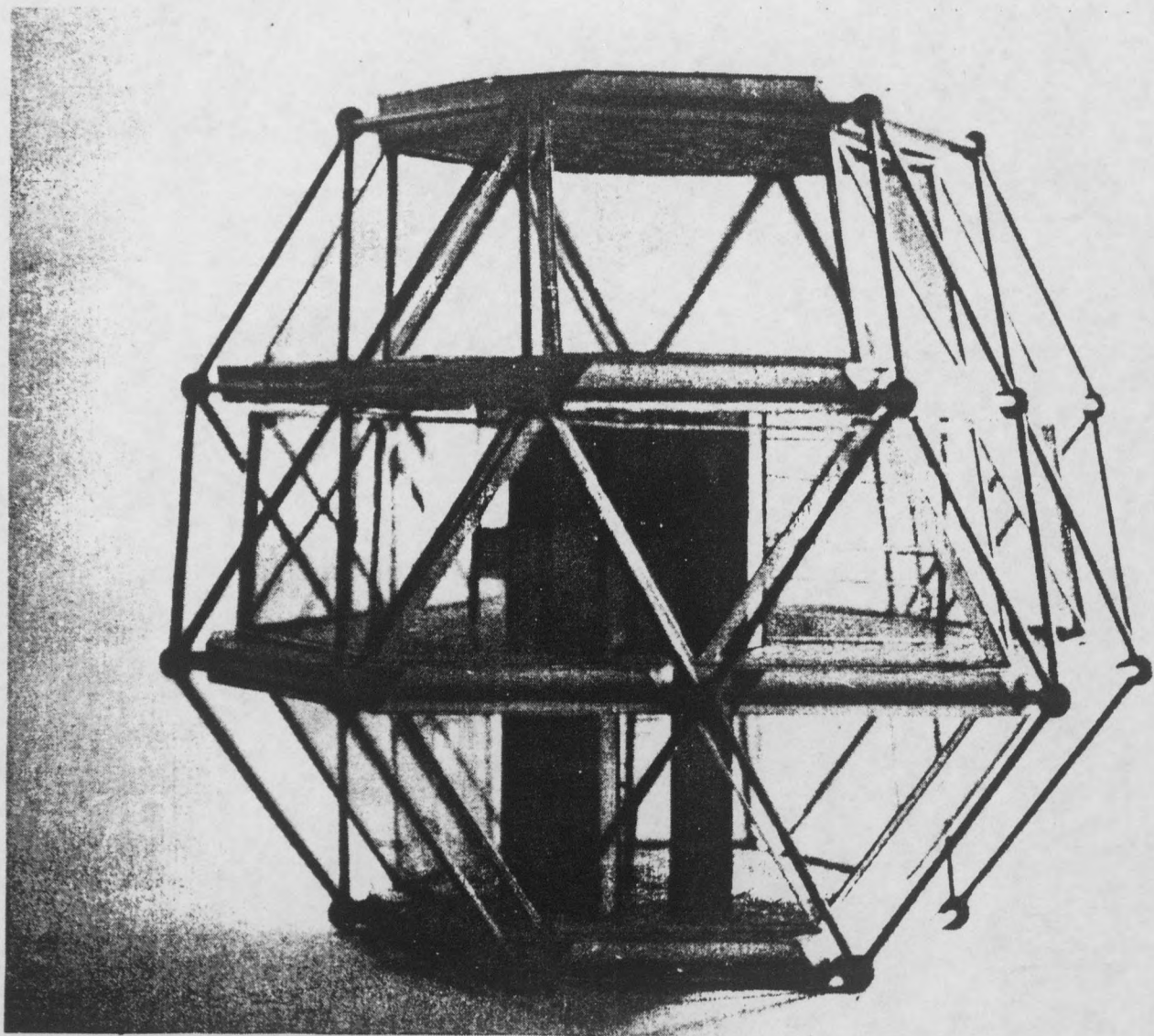


PENTAGONES



HEXAGONES

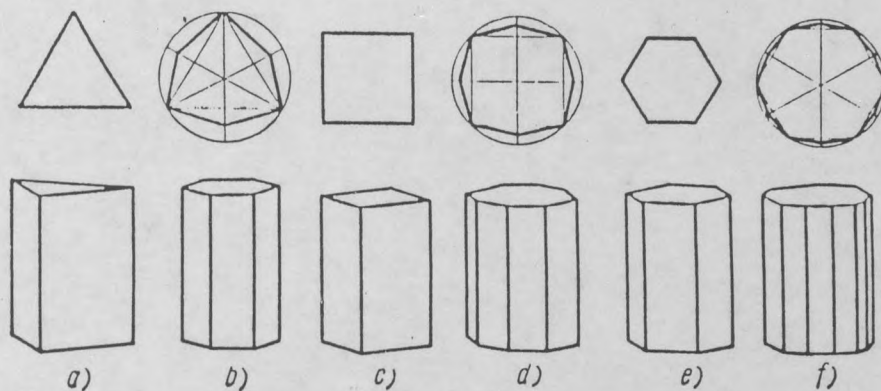




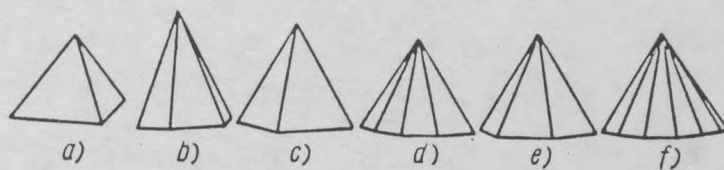
Tétrakaïdécaèdre triangulé

Travaux d'élèves

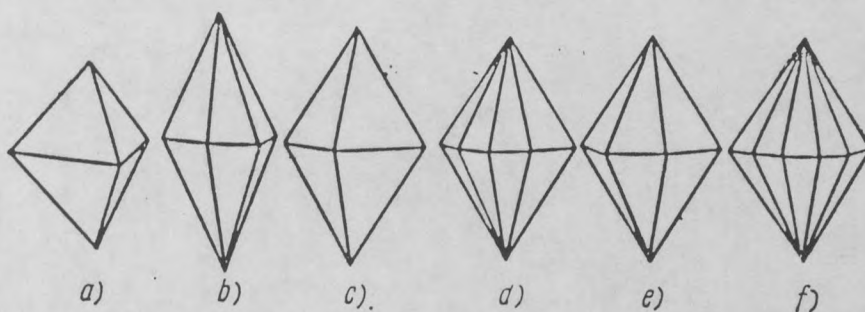
SIMPLEX SPATIAUX



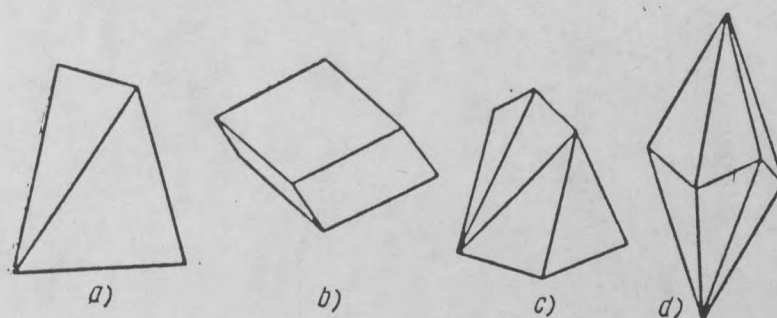
Prismes



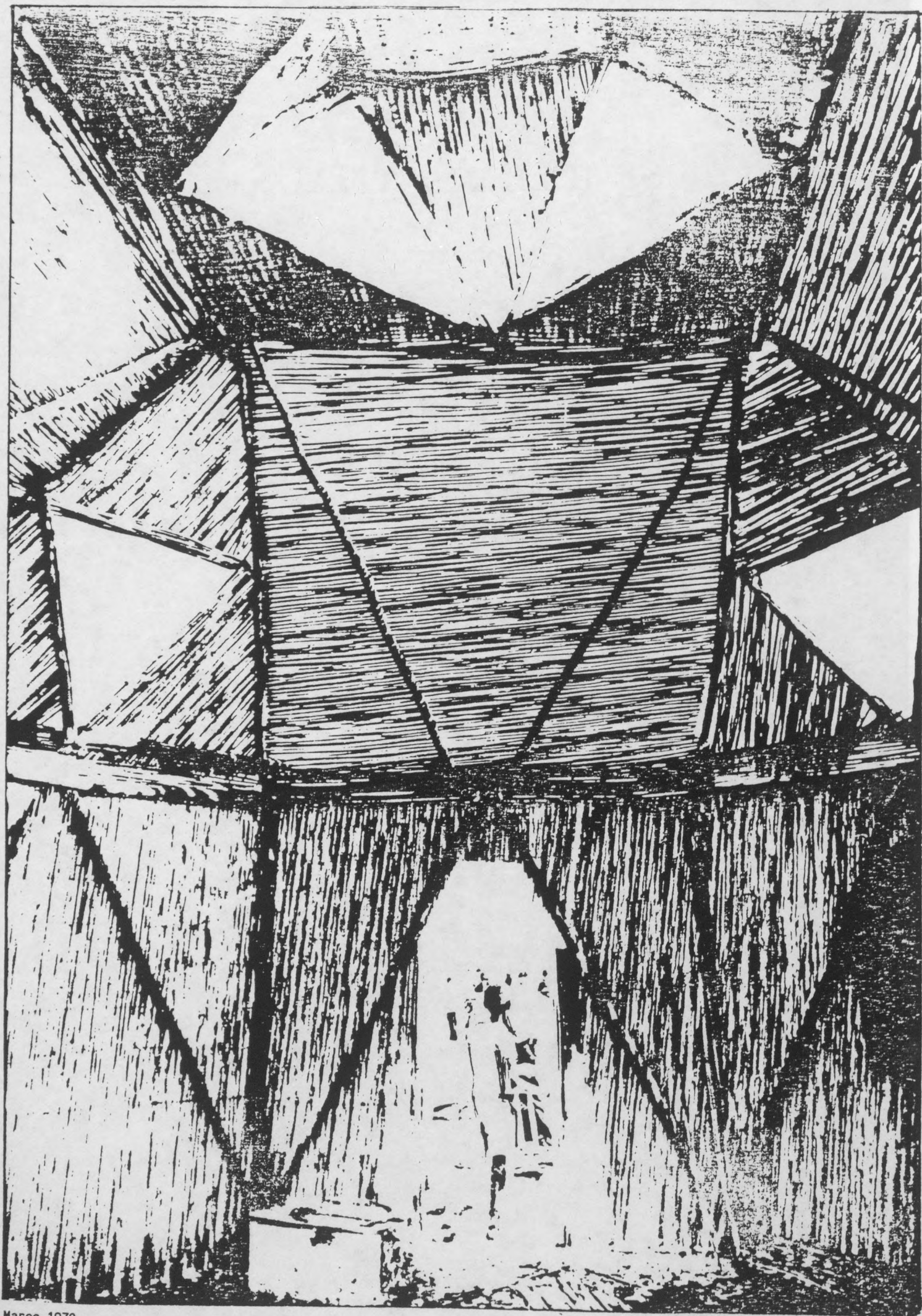
Pyramides



Bipyramides



Tétraèdre tétragonal, rhomboèdre, scalénoèdres.



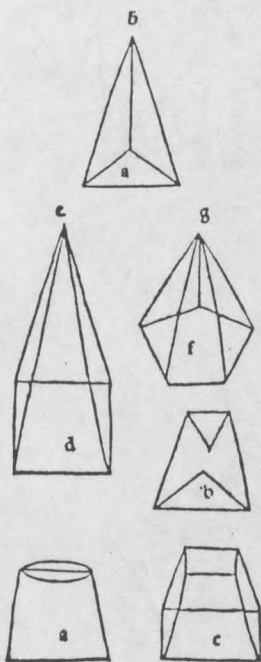
Maroc 1970

SIMPLEX SPATIAUX

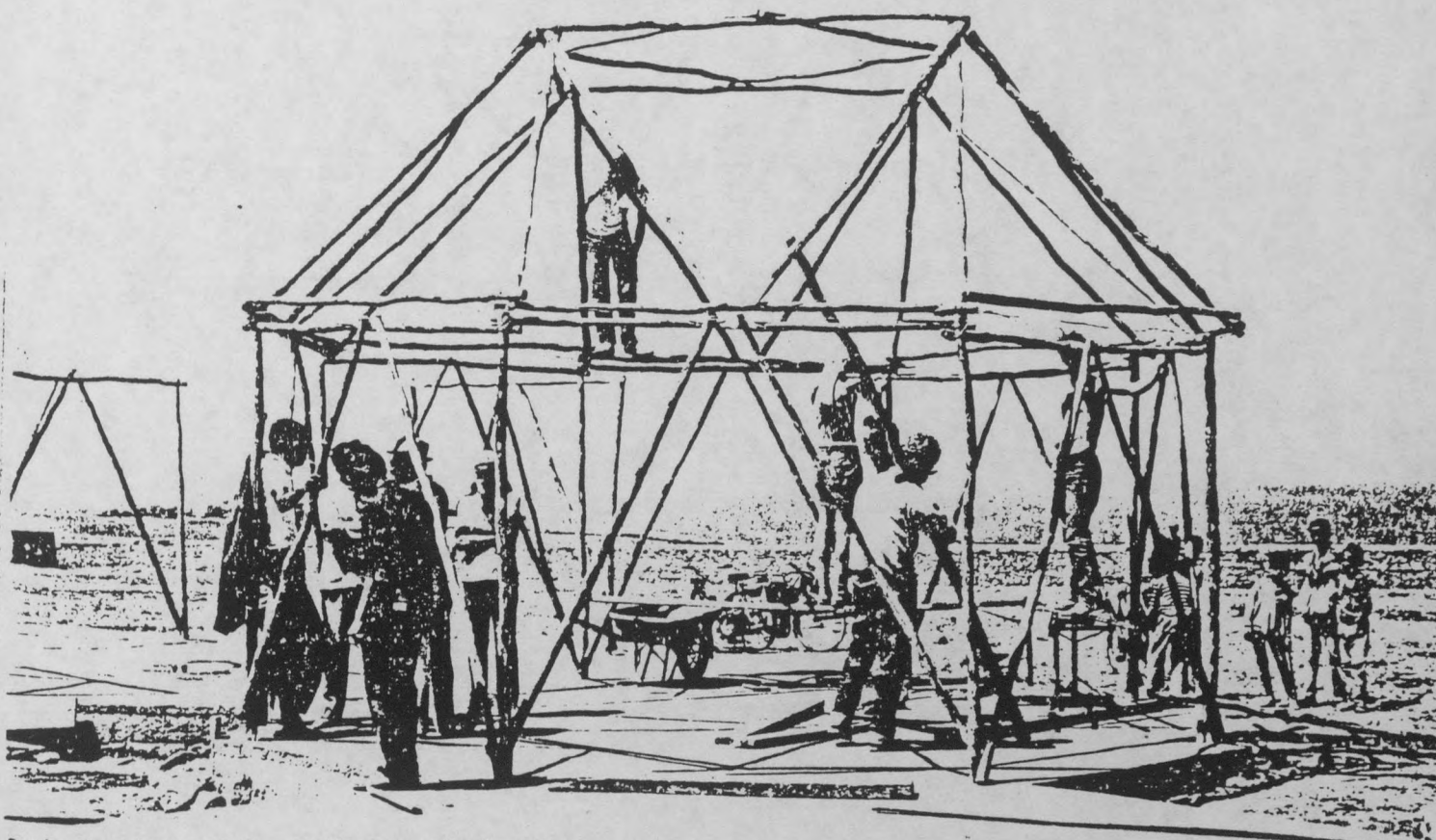
Les polyèdres réguliers, les solides, représentent pour l'espace tridimensionnel les mêmes maillons répétitifs élémentaires que les polygones pour l'espace bidimensionnel. Cependant, les polyèdres dont les arêtes sont matérialisées par des barres rigides et avec des noeuds articulés ne sont pas, malgré leur appellation de "solides", tous stables.

D'après Cauchy (1812), seuls les polyèdres avec des faces indéformables sont indéformables. Donc, en tant que systèmes articulés, seuls sont stables les volumes constitués de triangles rigides: parmi les réguliers le tétraèdre, l'octaèdre et l'icosaèdre; parmi les semi-réguliers le cube et le dodécaèdre adoucis ayant une suite continue de triangles; et les deltoédres en général, dont les bipyramides, antiprismes bipyramidés, etc.

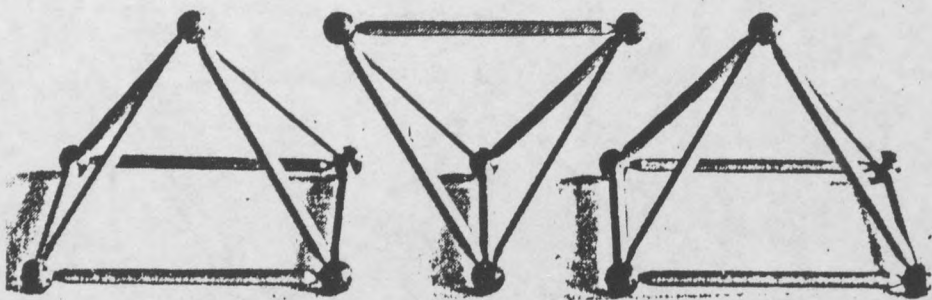
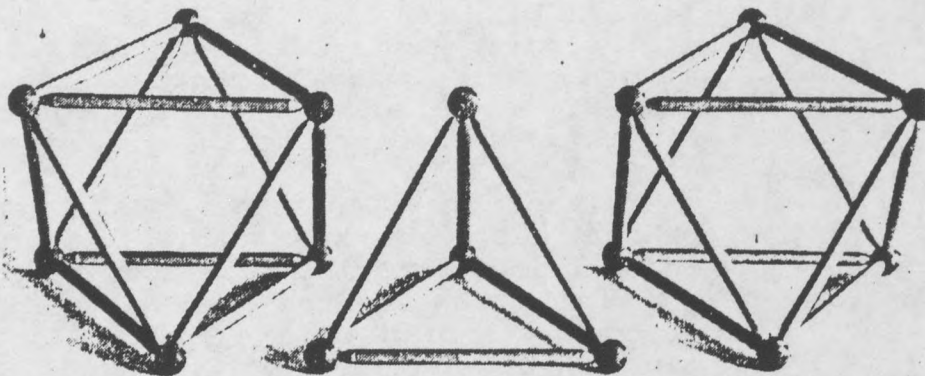
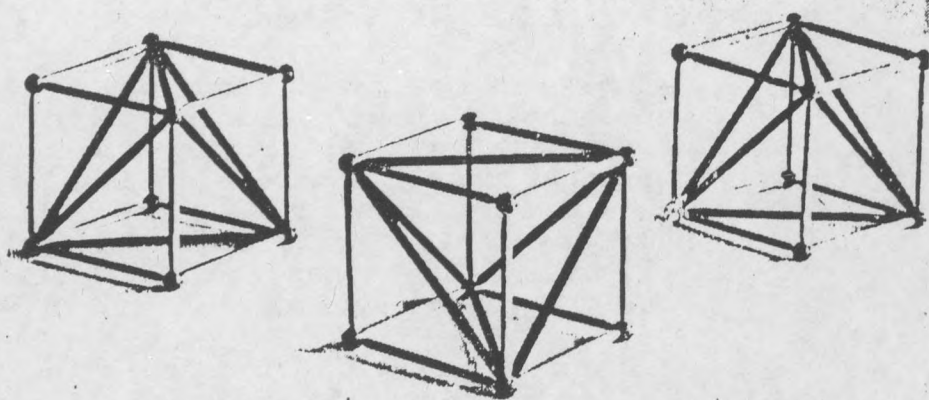
Suivant ce théorème, les autres polyèdres peuvent être rendus stables, théoriquement, en rendant indéformables les faces polygonales autres que les triangulaires par des simplex planaires stables, semblables à ceux qui ont été traités plus haut. Mais, pratiquement, d'après des expériences sur maquettes, cette méthode n'aboutit pas toujours, les simplex planaires étant, pour la plupart, sujets à déversement.



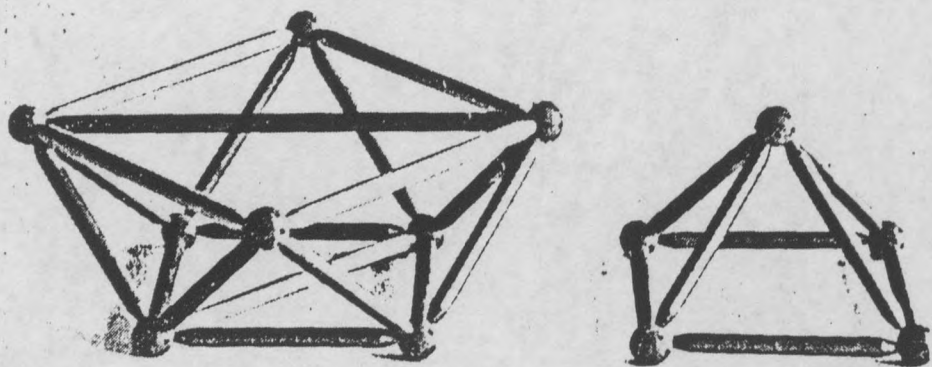
Solides simples. Léonard



Petit rhombicuboctaèdre stabilisé par simplex "K"



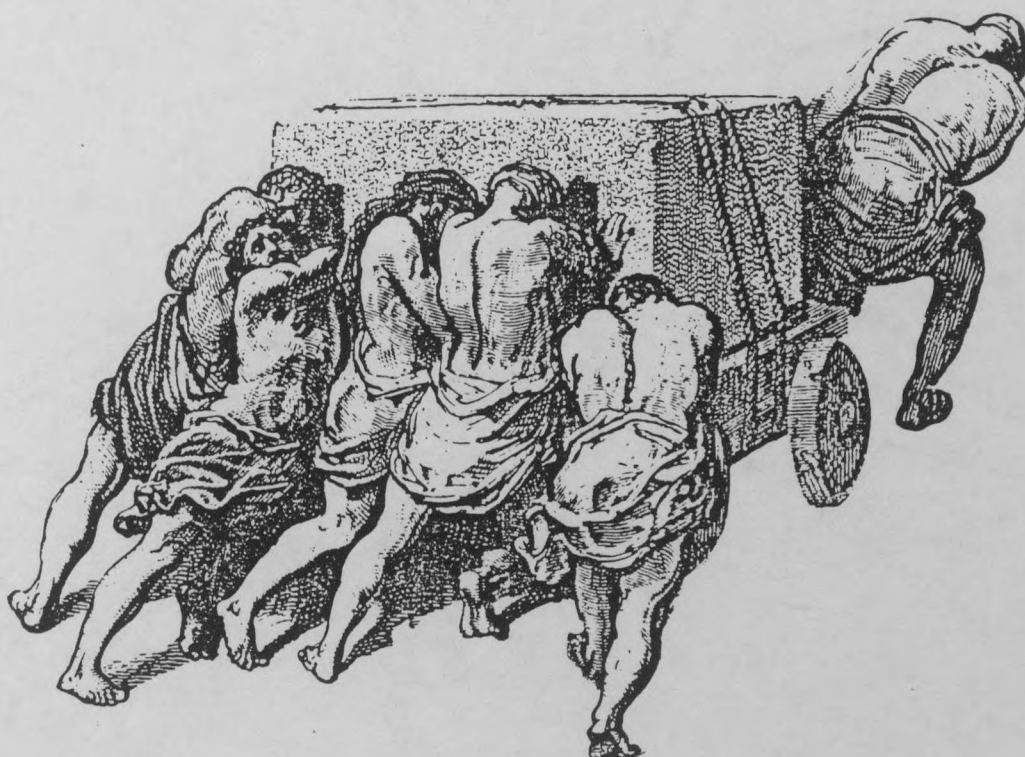
Assemblages tetra-octaédriques



Les simplex dont la configuration interne tendue n'a pas de ligne de clivage - ou de charnière - ne déversent pas, donc, quoique planaires, ils restent, en principe stables dans l'espace. D'autres gardent leur indéformabilité dans un assemblage d'ordre impair, etc. Il reste encore énormément à faire dans ce domaine, en poursuivant la recherche par une vérification sur modèles.

Par ailleurs, au lieu de faire du spatial avec du planaire, il paraît plus logique de suivre là aussi la démarche morphologique en partant cette fois directement des volumes les plus simples allant systématiquement vers les solides plus complexes et en cherchant leur stabilisation par des moyens autant que possible stéréométriques.

En poursuivant sur cette voie, on découvre, en effet, qu'au delà des volumes entièrement triangulés ou composés de faces rendues indéformables par des simplex planaires, il existe d'autres solides élémentaires à membrures articulées, construits non seulement avec des barres rigides mais aussi avec des tirants flexibles, donc des structures différenciées, qui forment des simplex spatiaux stables et en même temps quasiment vides, donc légers, avec lesquels on peut bâtir des ouvrages par divers assemblages, tout comme le faisait le maçon avec les blocs de pierre de taille.



PYRAMIDES

Ces corps, les plus simples de tous les volumes, sont construits à base d'un polygone et d'un point non coplanaire, c'est à dire, qui ne se situe pas sur le plan du polygone et qui est le sommet commun des faces latérales. Les polyèdres ainsi définis ont donc outre leur base polygonale une enveloppe composée uniquement de triangles.

Parmi les structures pyramidales, composées de barres rigides avec des joints articulés, seul le tétraèdre ayant une base triangulaire, est naturellement stable (Fig.57). Les autres ne deviennent stables, en tant que structures autoportantes, qu'en rendant indéformable leur base polygonale à l'aide de l'un ou l'autre des simplex planaires: par exemple, par un croisillon ou une stellation tendue. En raison de la simplicité graphique uniquement, c'est cette dernière formule qui a été adoptée dans les exemples présentés (Fig.57a,b,c).

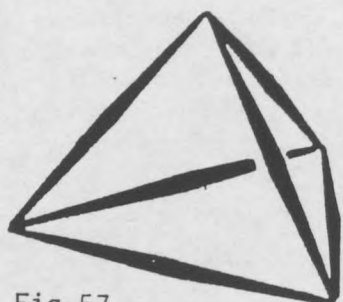


Fig.57

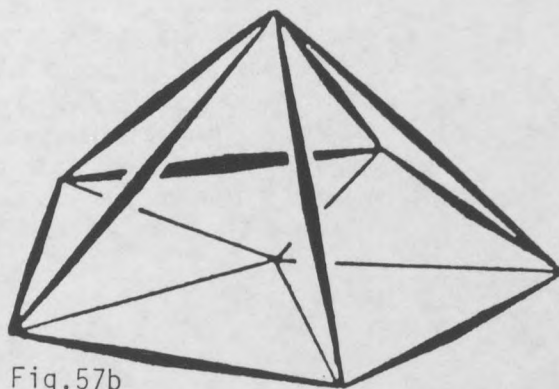


Fig.57b

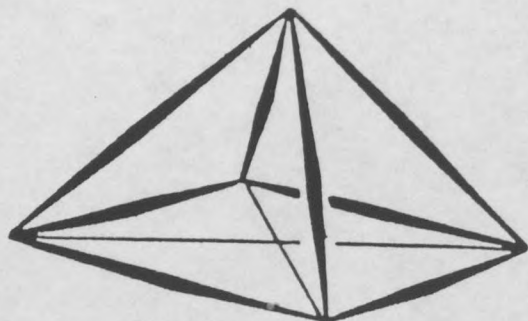


Fig.57a

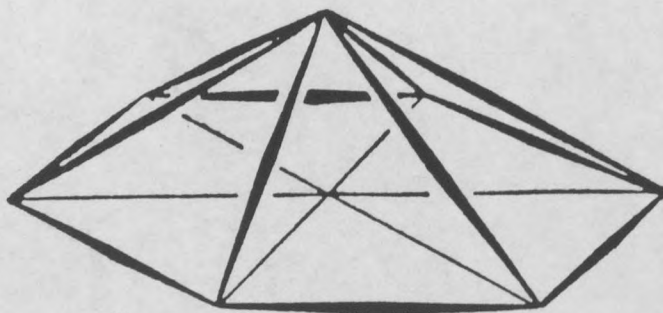
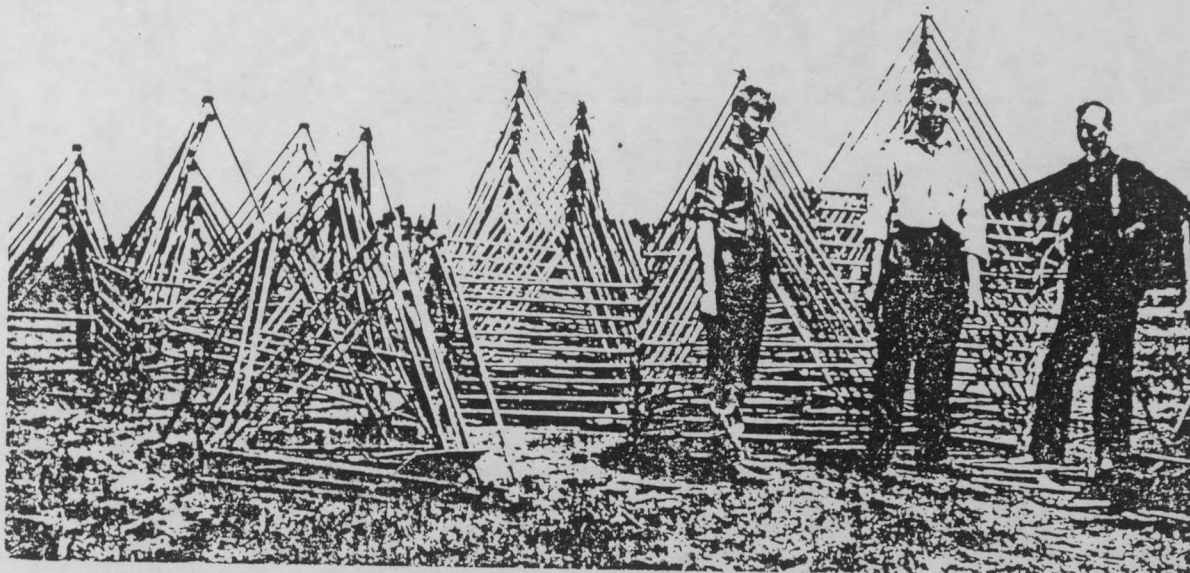
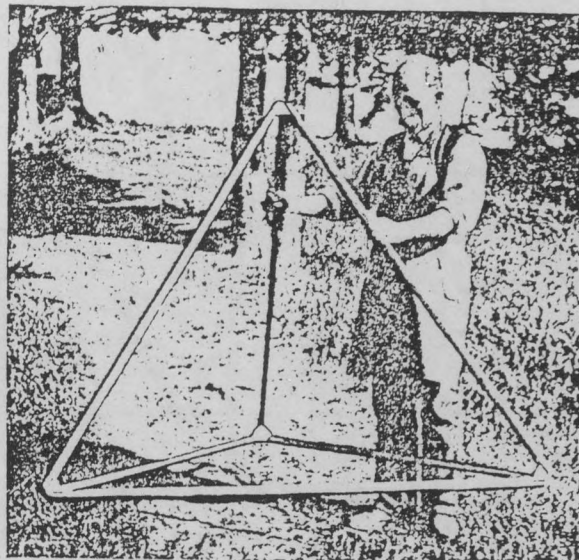
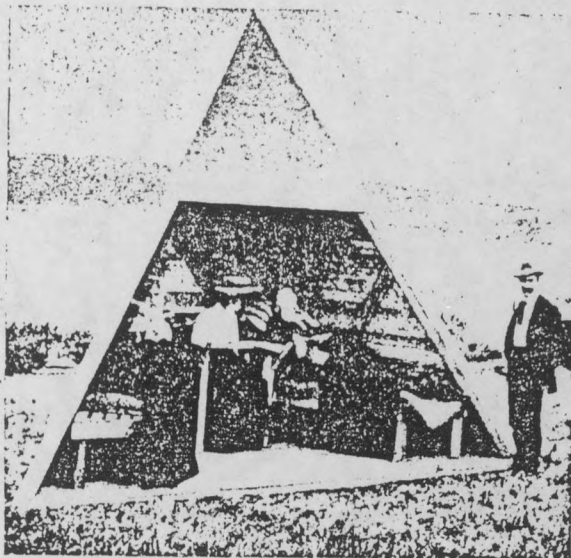
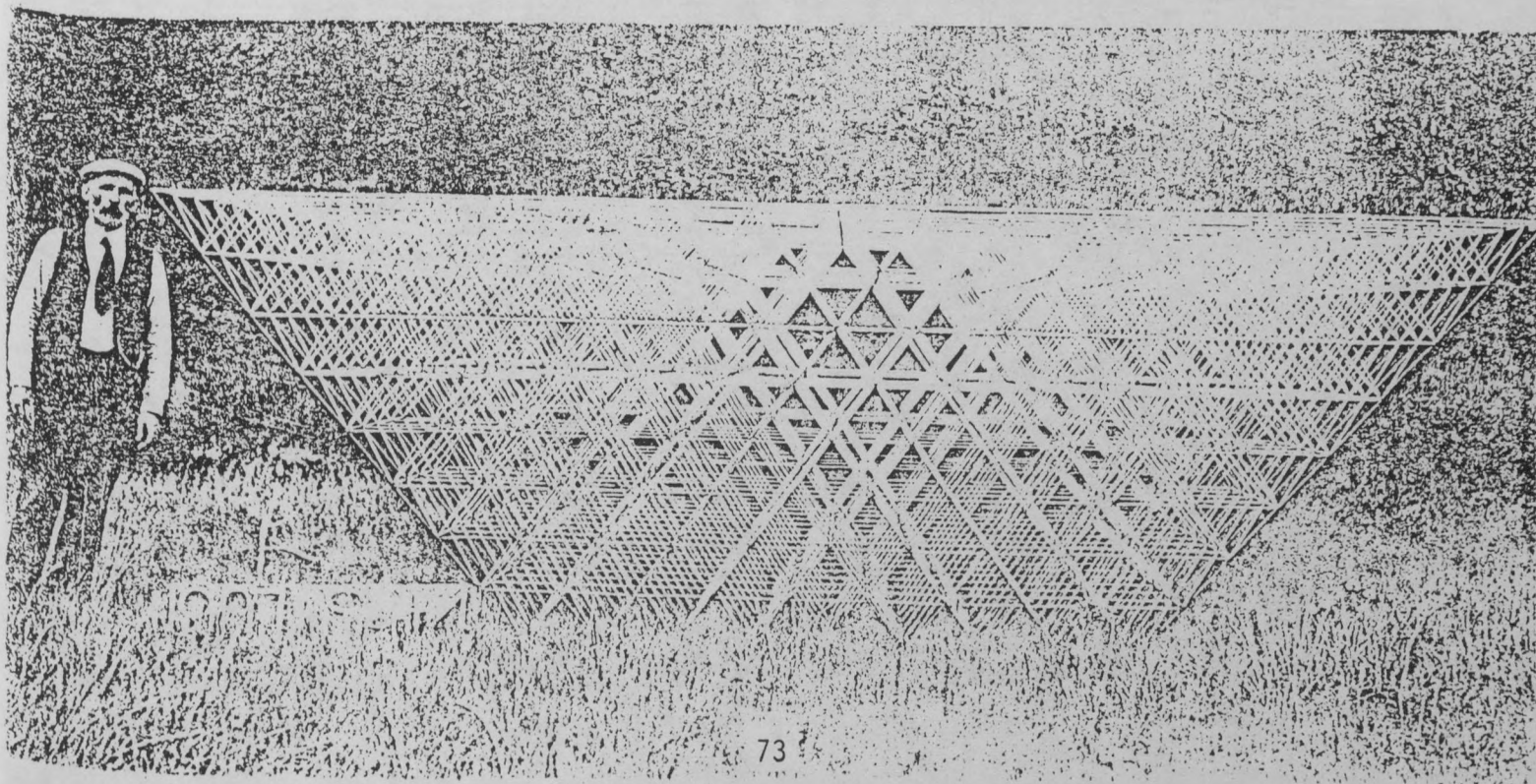
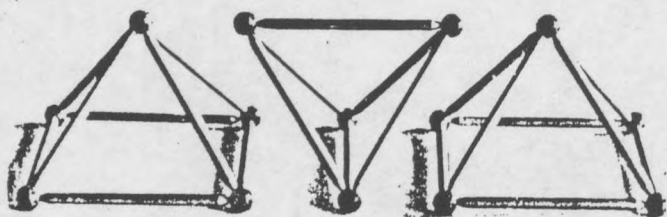
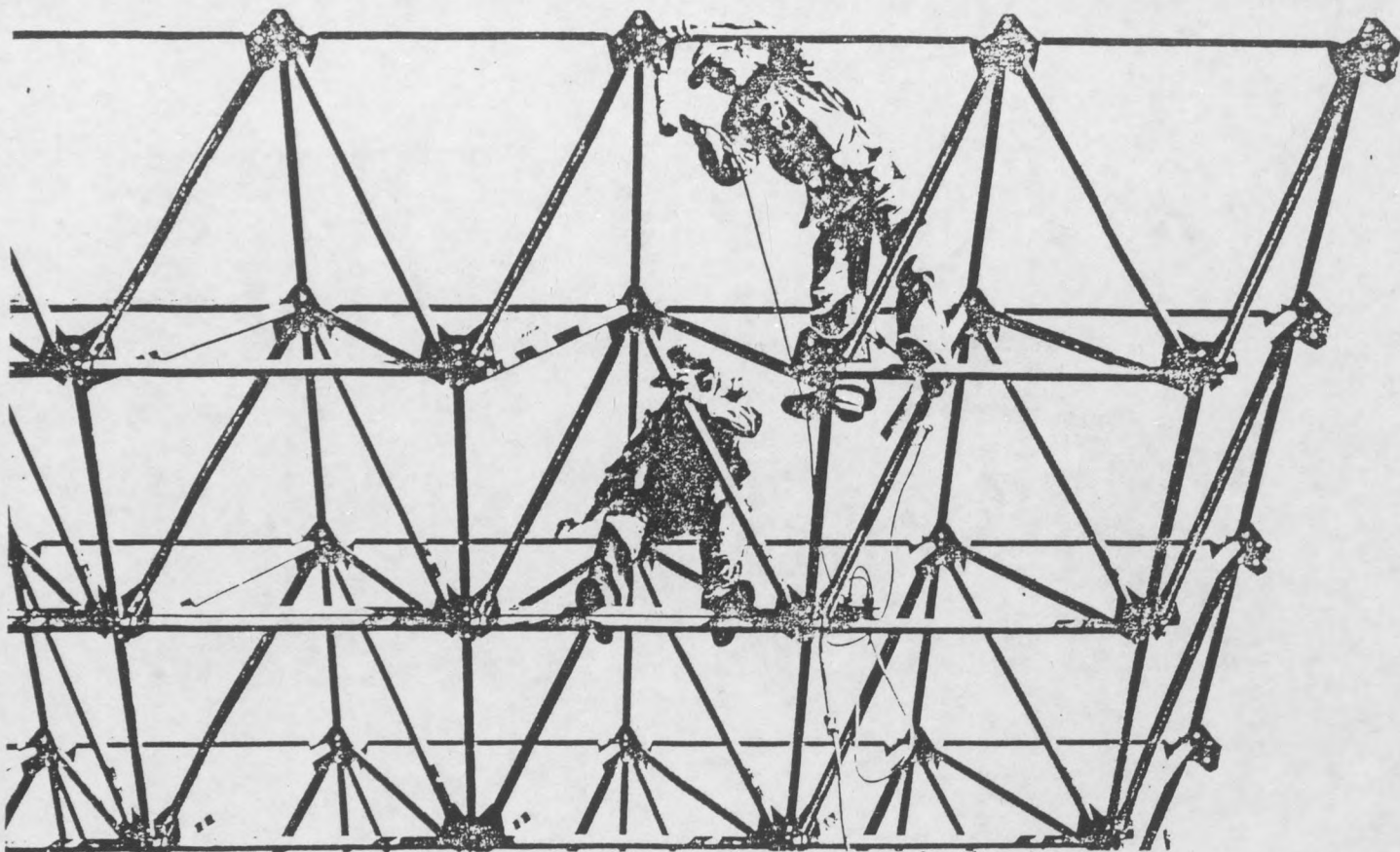


Fig.57c

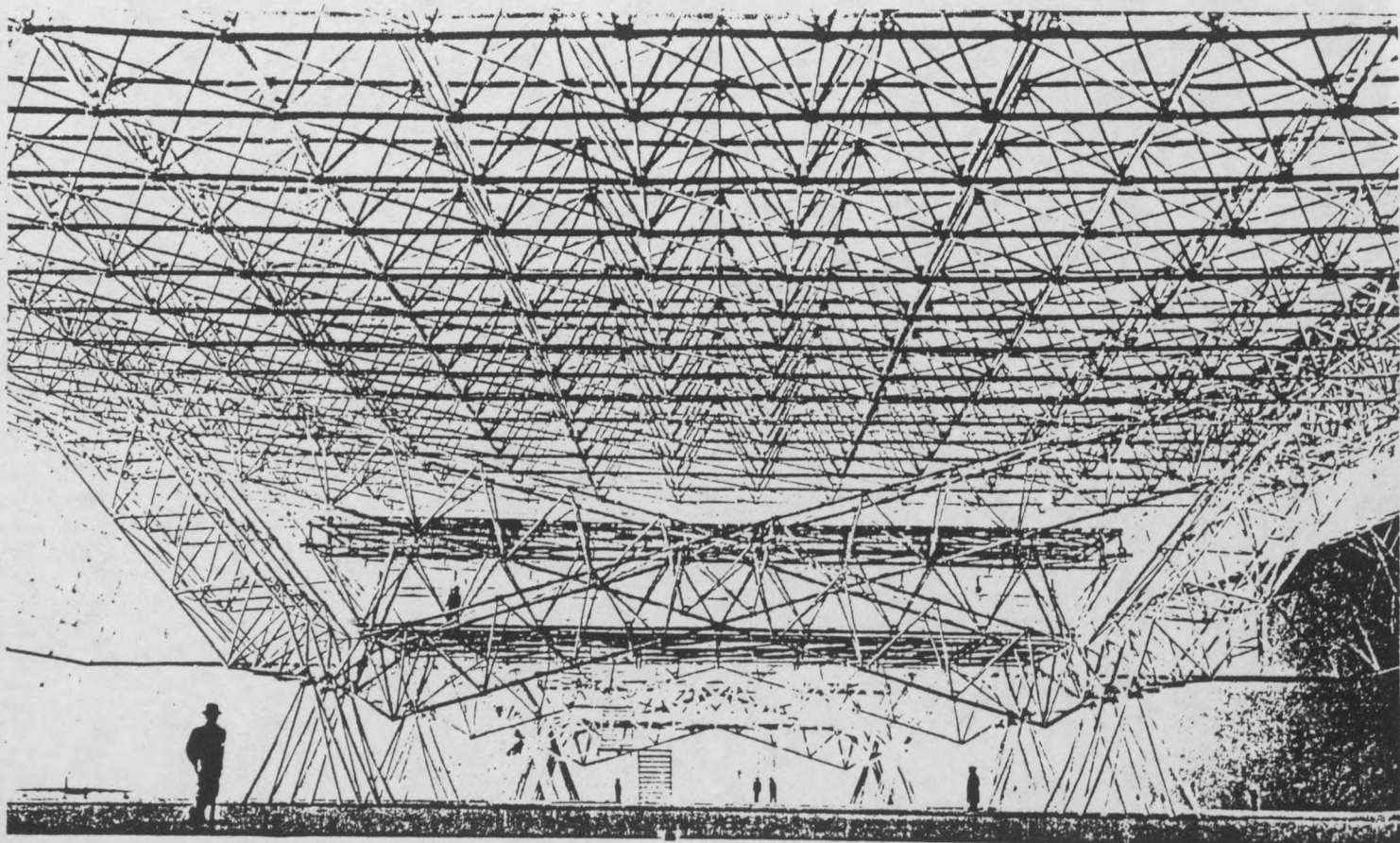


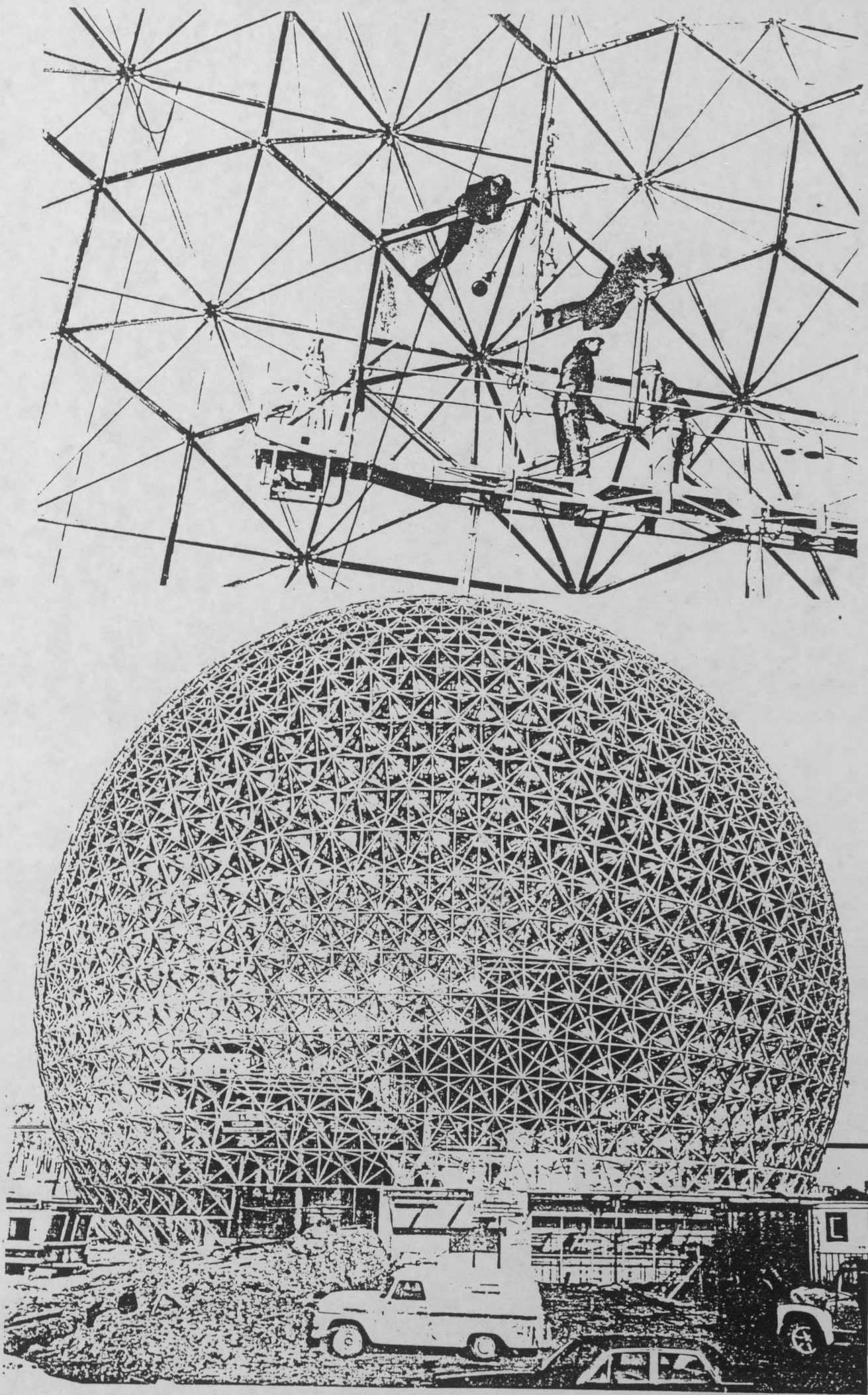
Recherches structurales. A.G.Bell 1907





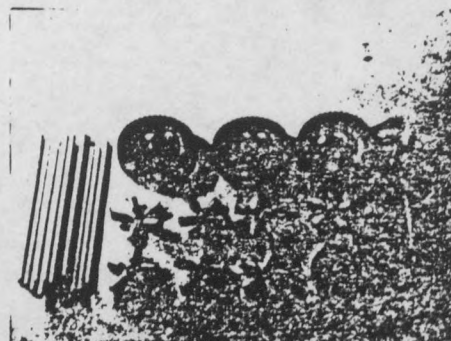
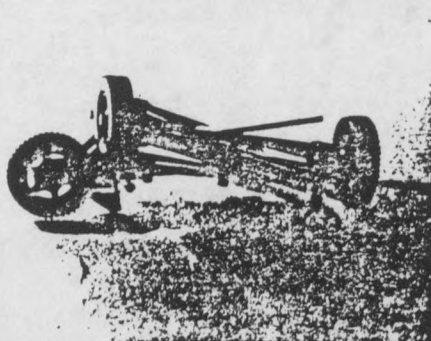
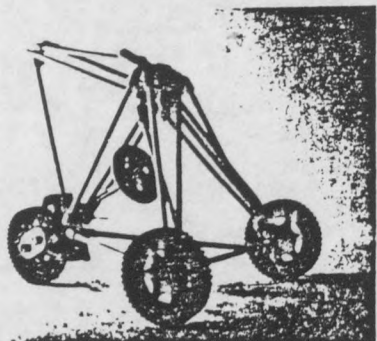
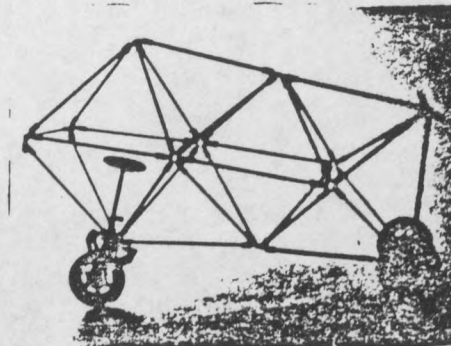
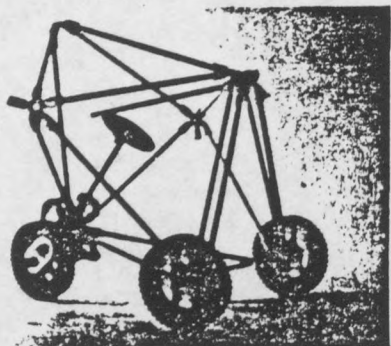
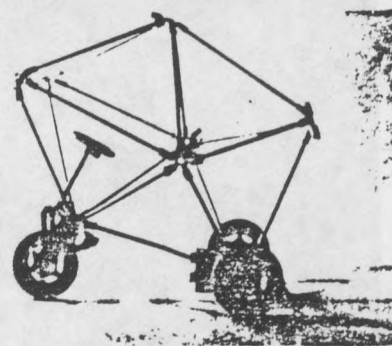
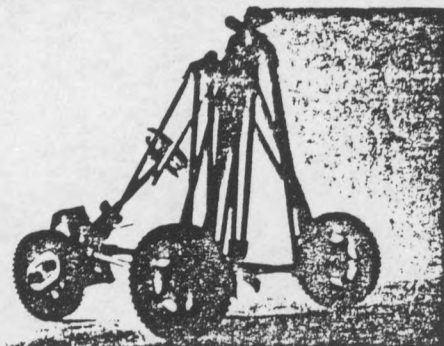
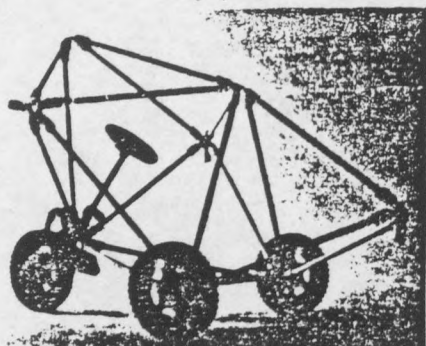
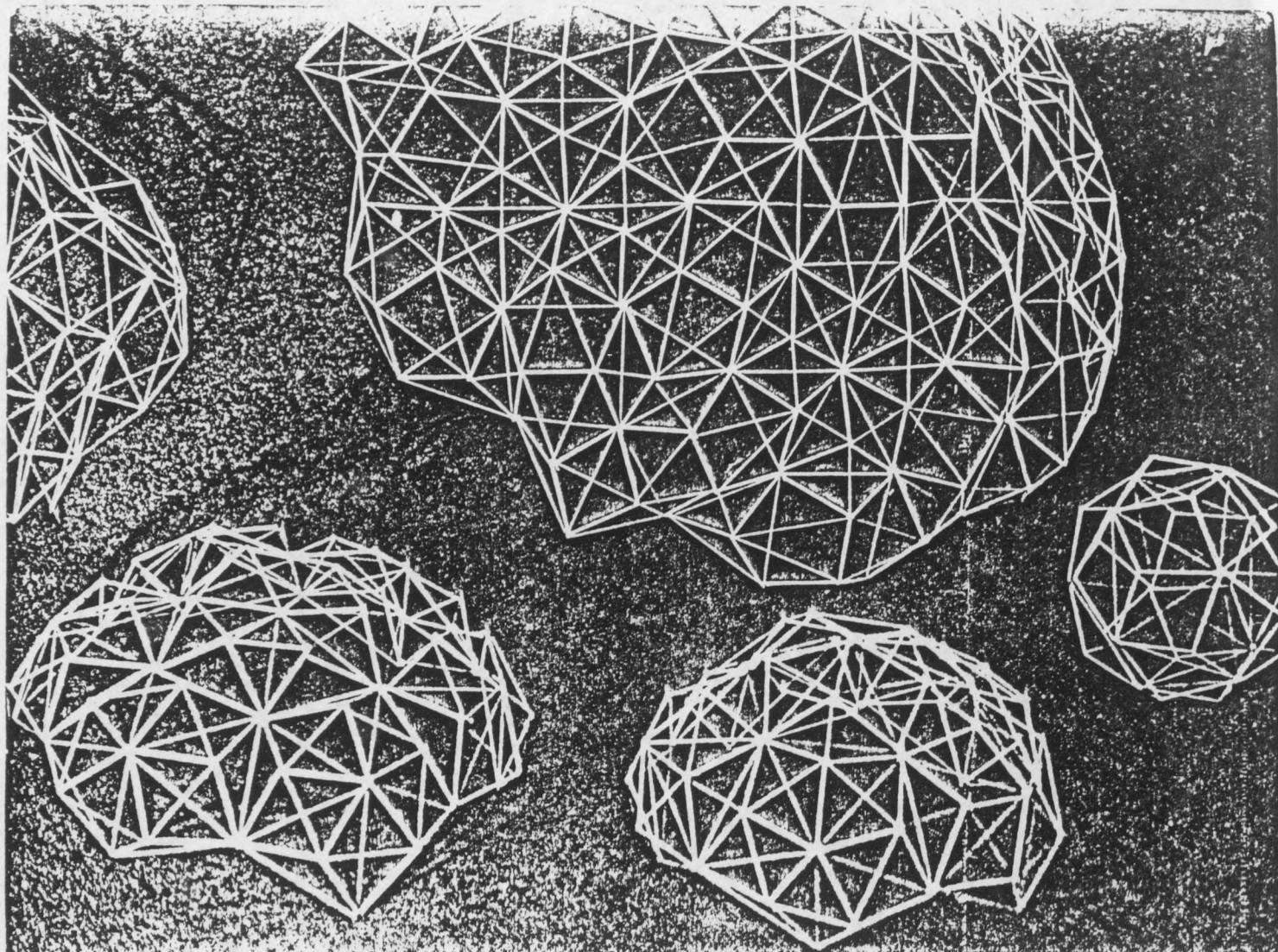
Réseaux tétra-octaédriques. Wachsmann



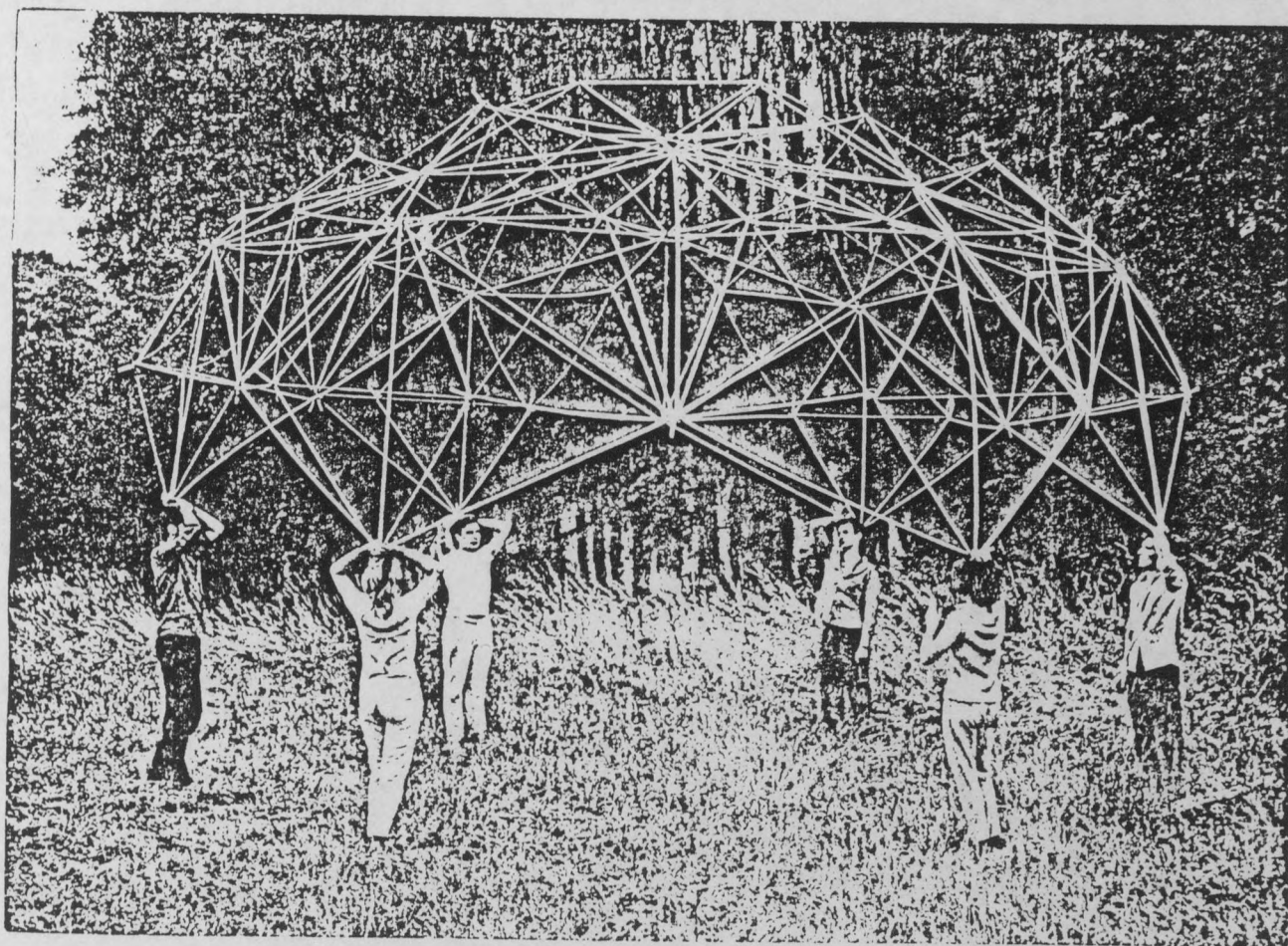
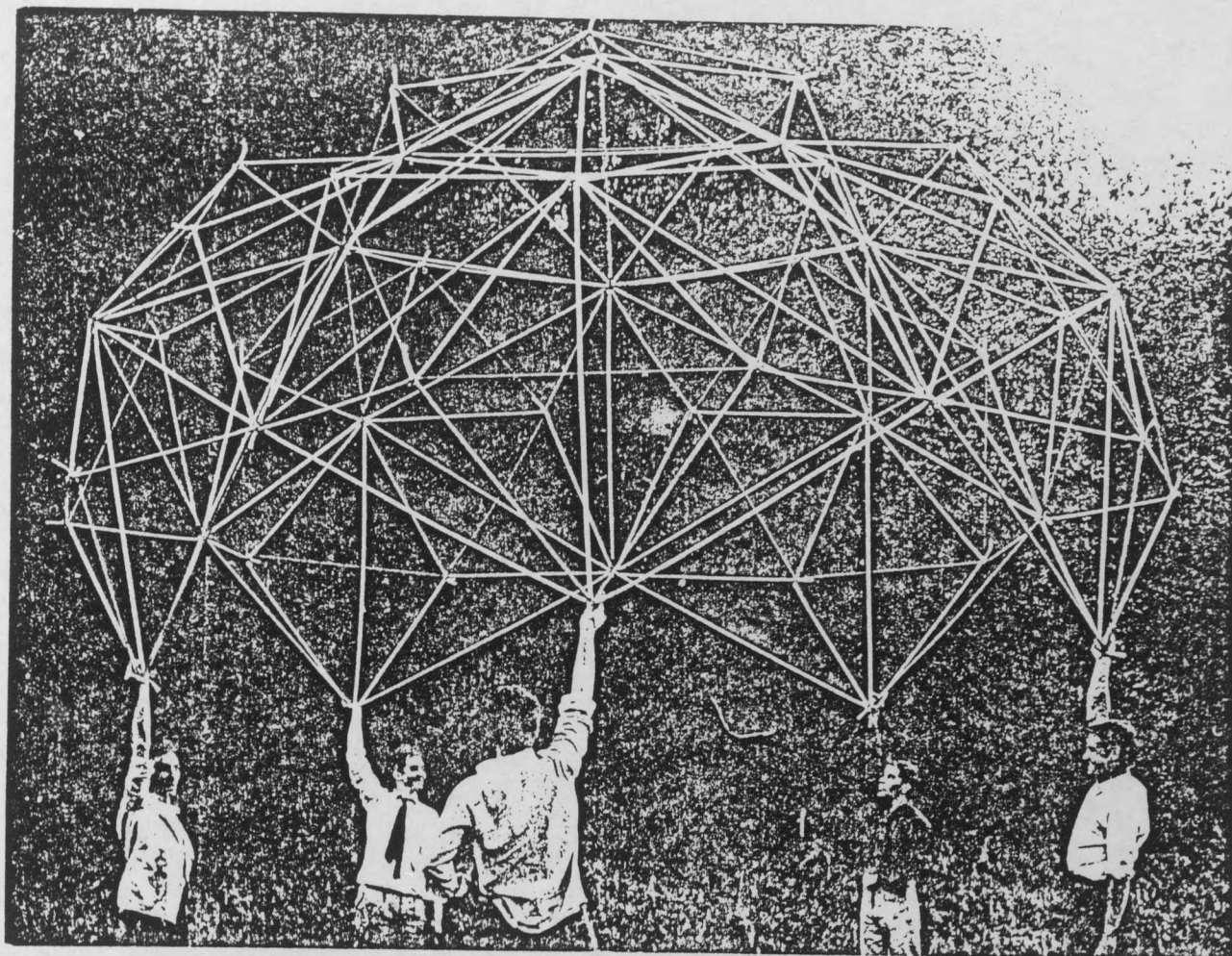


Coupole géodésique. Tétraèdres et pyramides hexagonales. Fuller.

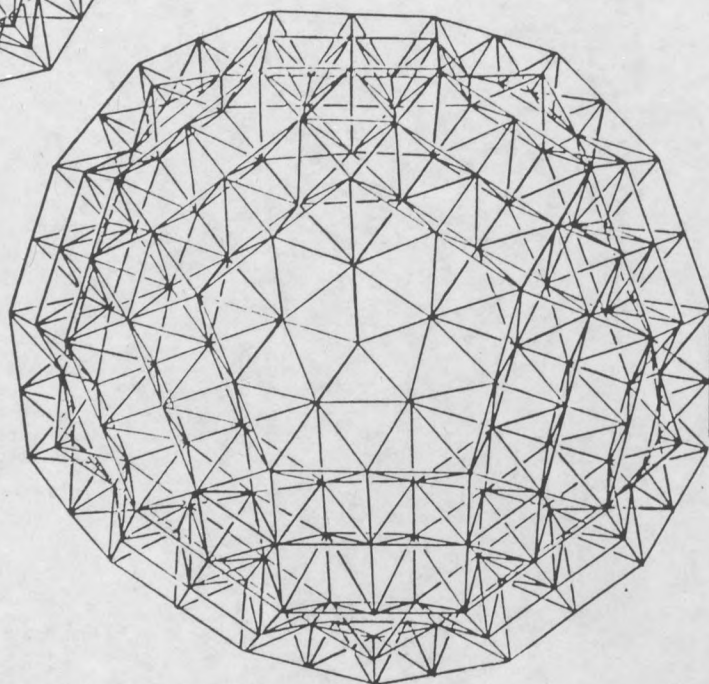
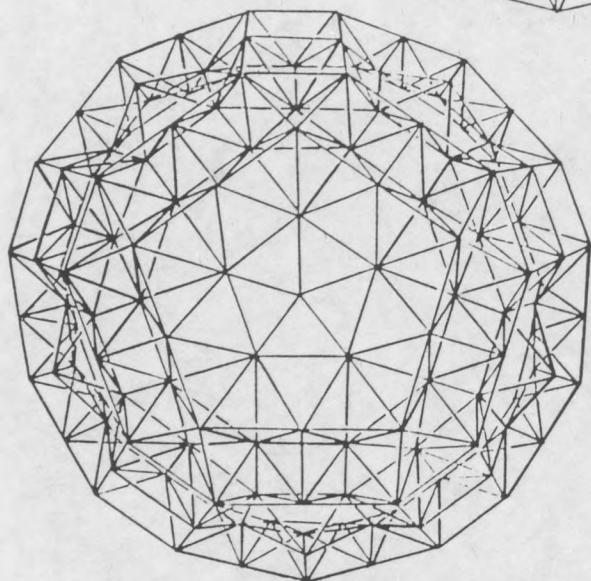
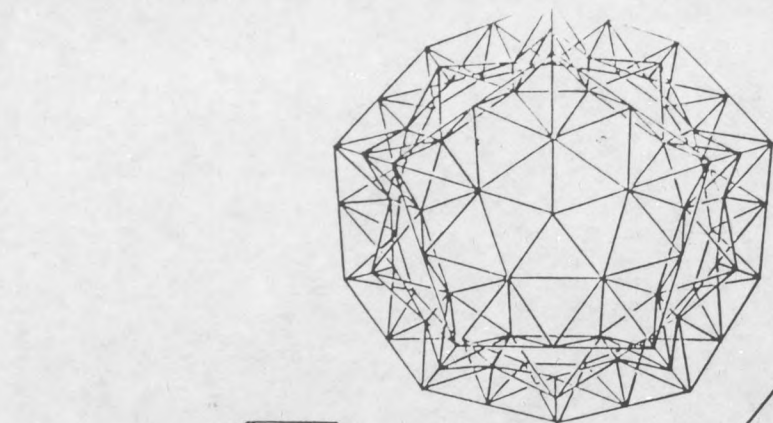
Polyèdres pyramidés. Emmerich



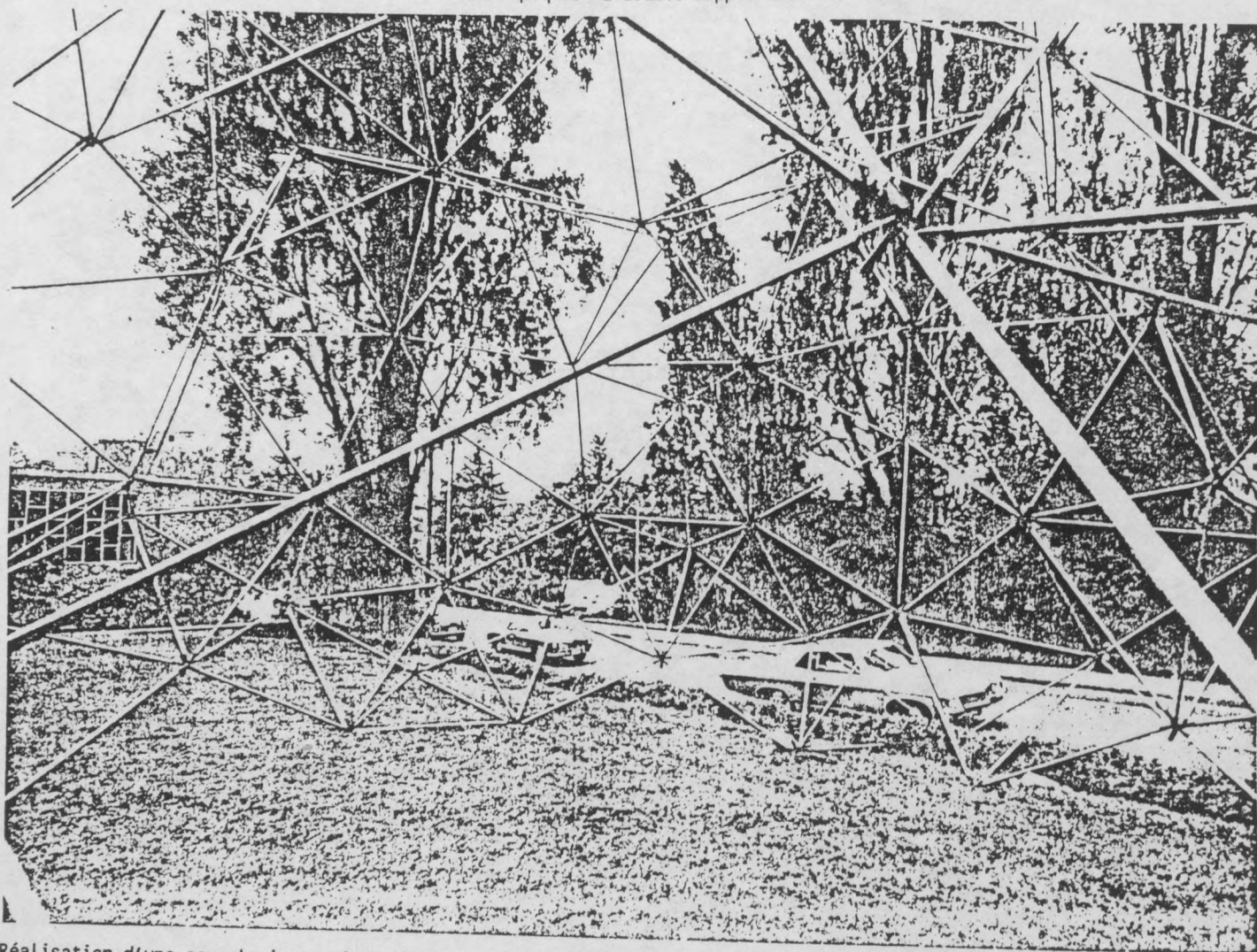
Deltomobiles. Emmerich



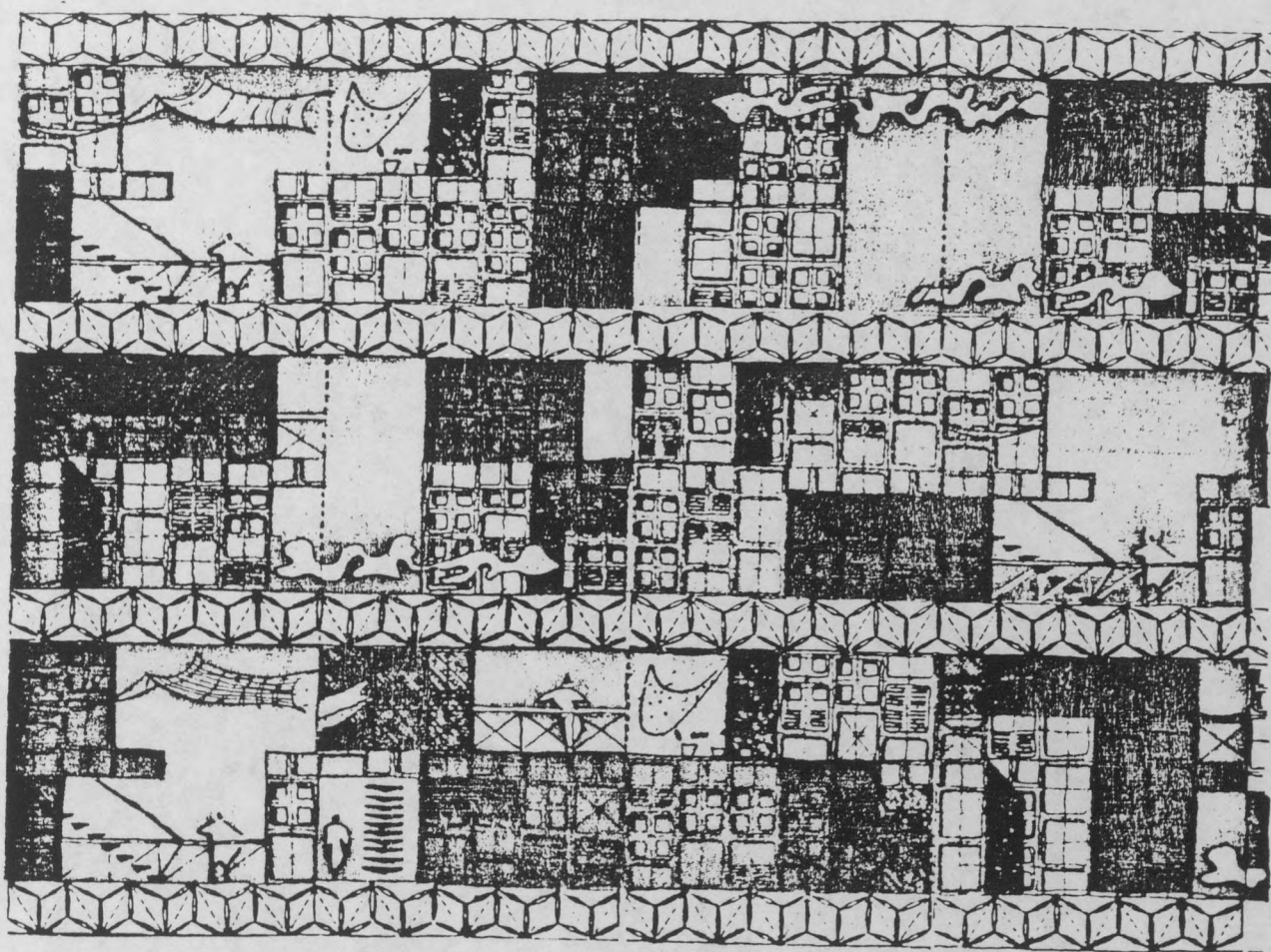
Coupoles pyramidées. Essais de stabilité. ENSBA 1962



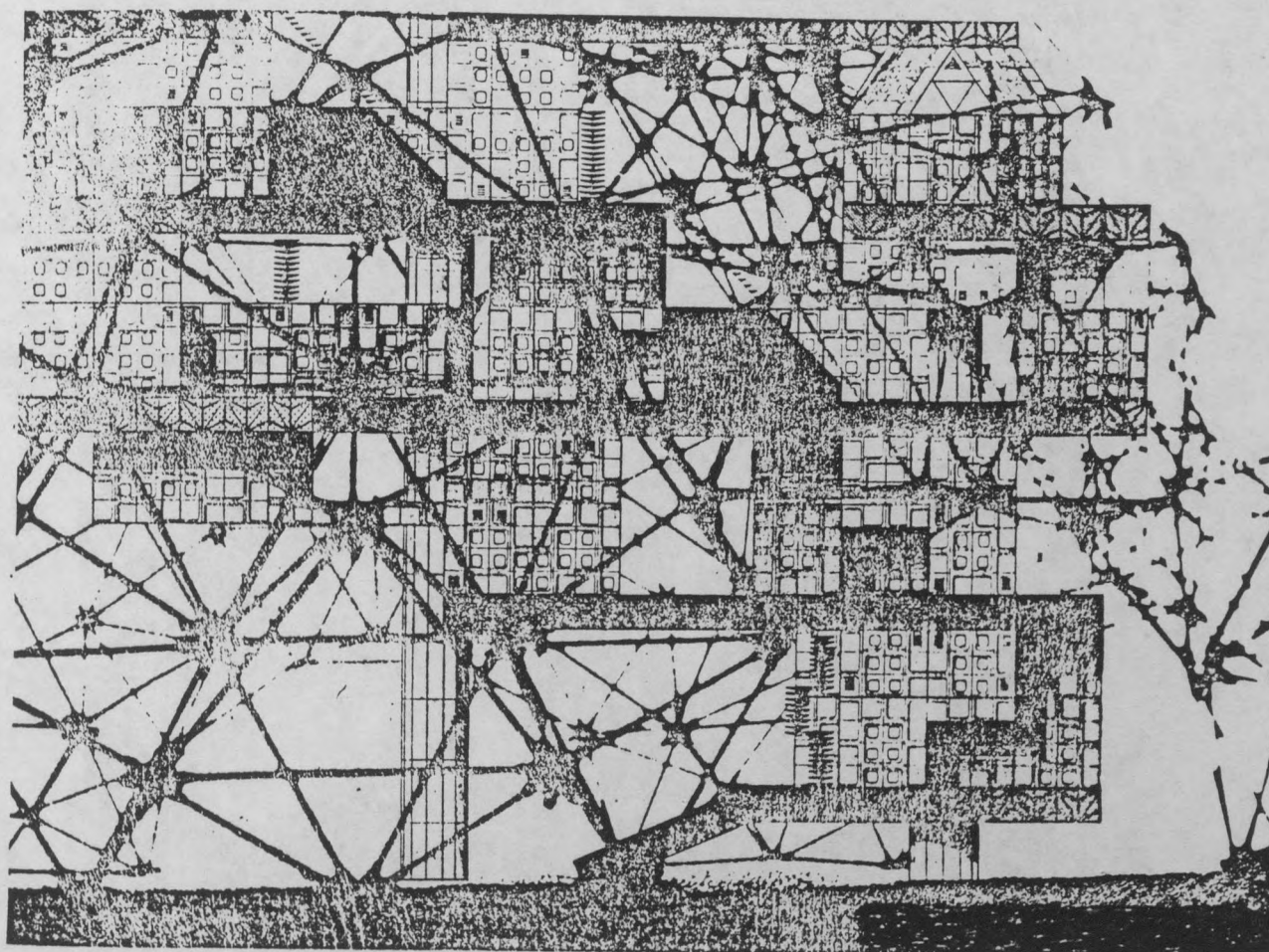
Dômes "isotropiques" à double nappe. Emmerich



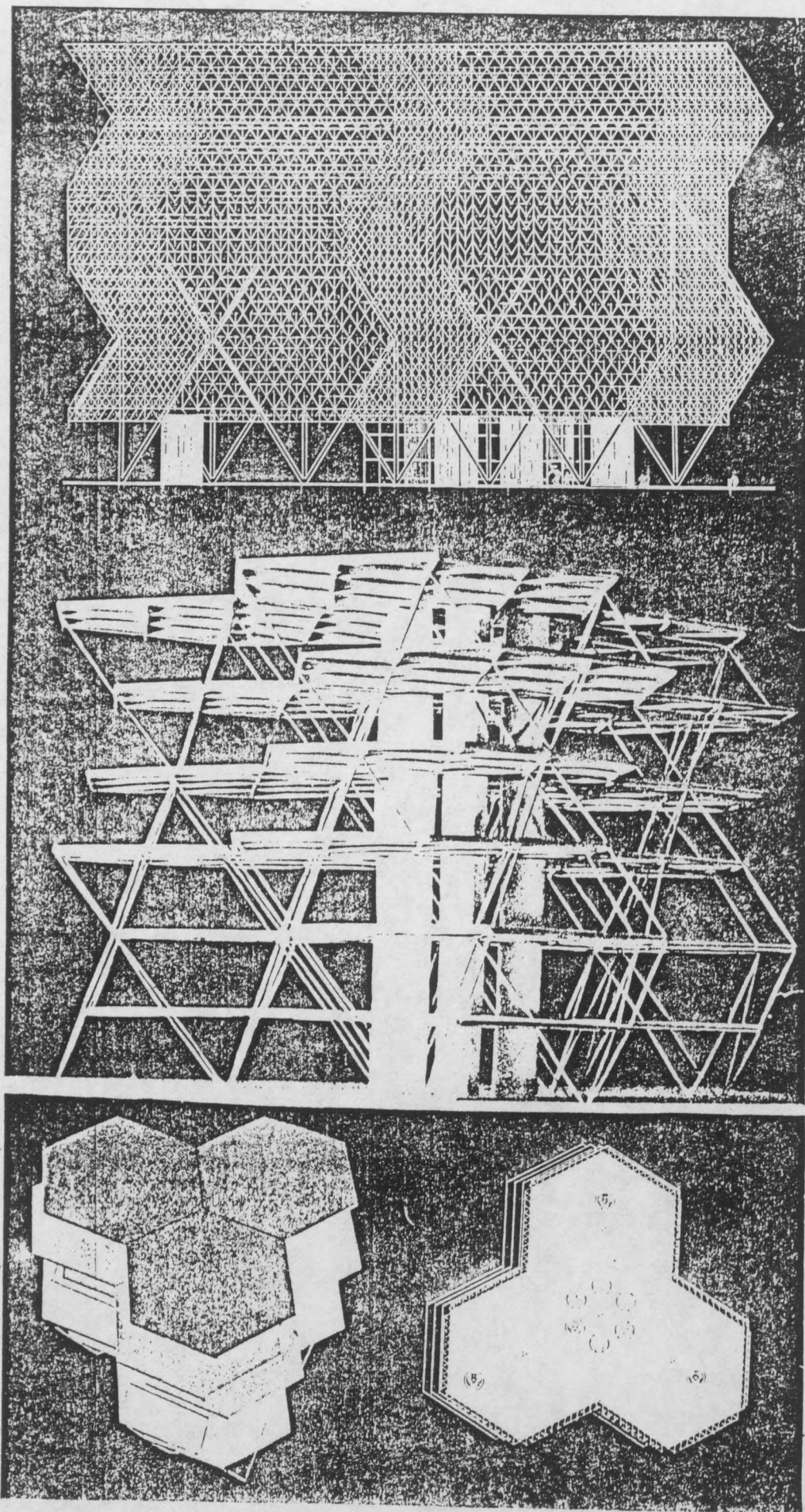
Réalisation d'une coupole isotropique Washington University 1969



Détails



Aménagements



PROJET D'UN BUILDING AVEC STRUCTURE A
TROIS DIMENSIONS
I.I. KAHN, ARCHITECTE

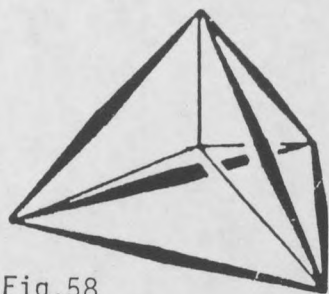


Fig. 58

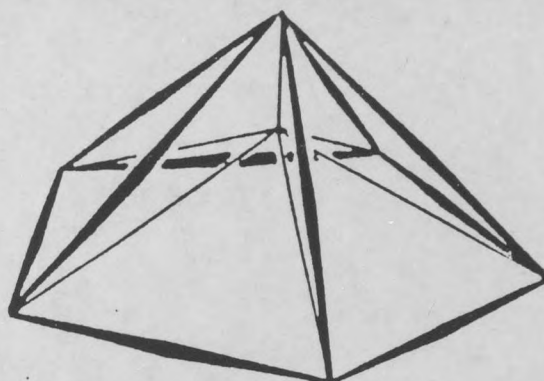


Fig. 58a

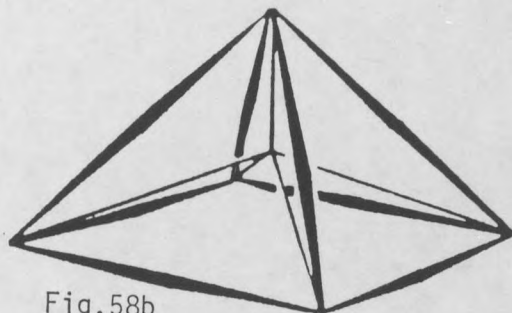


Fig. 58b

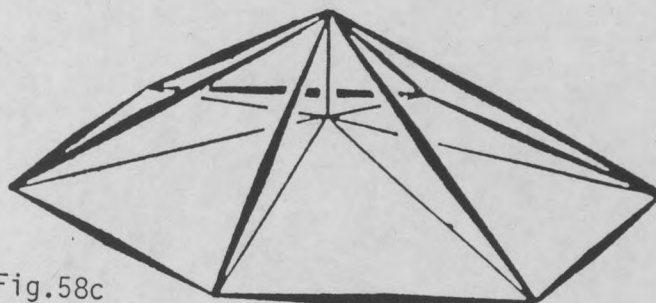
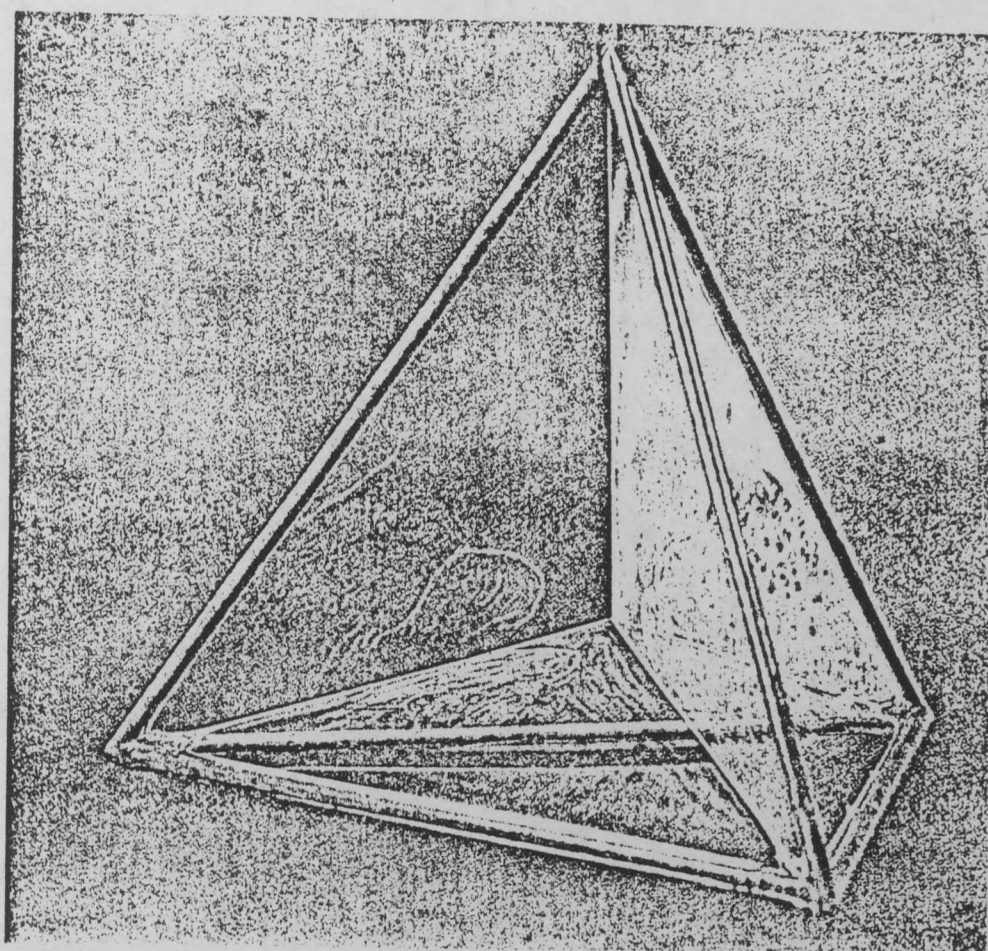


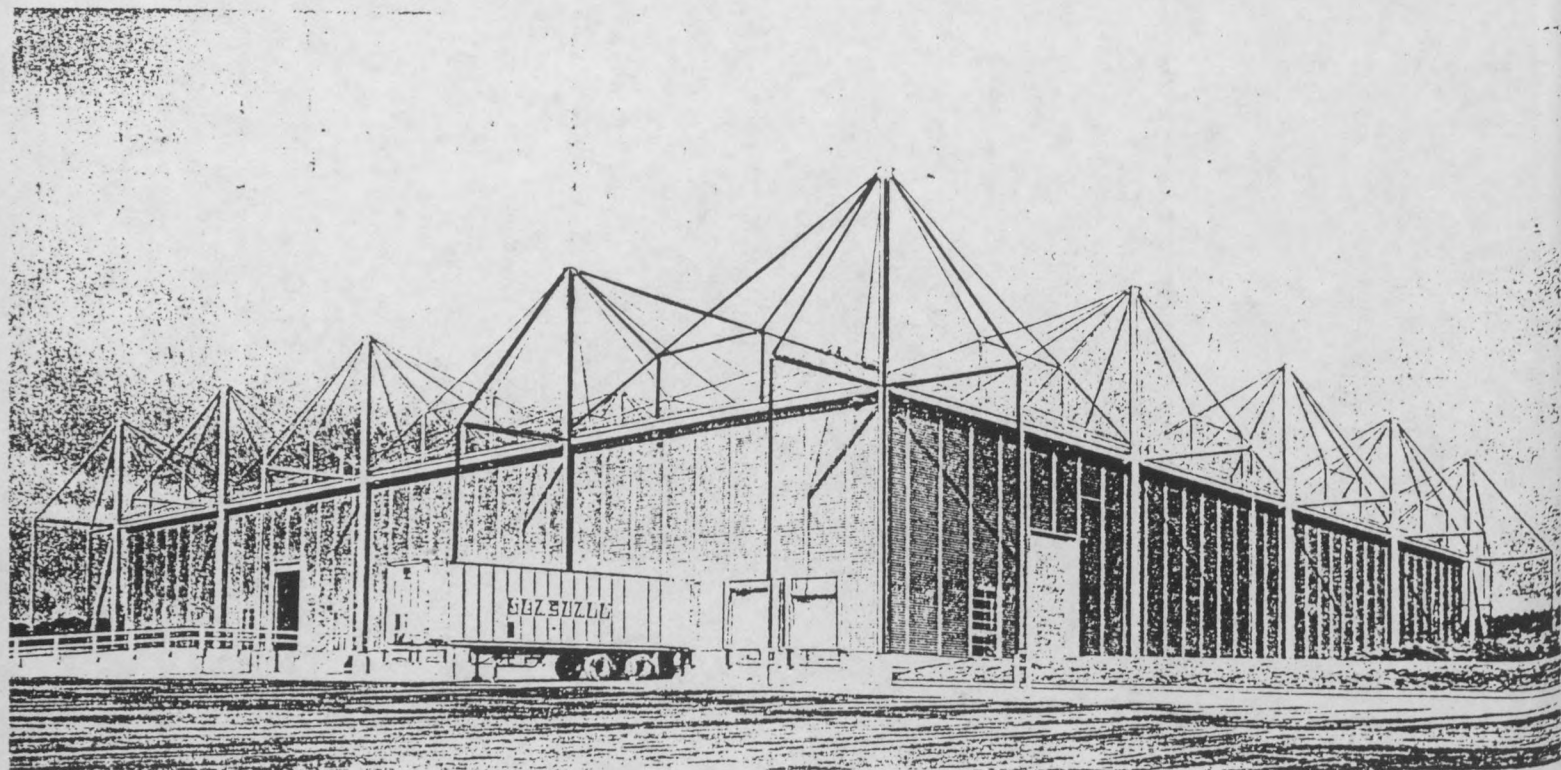
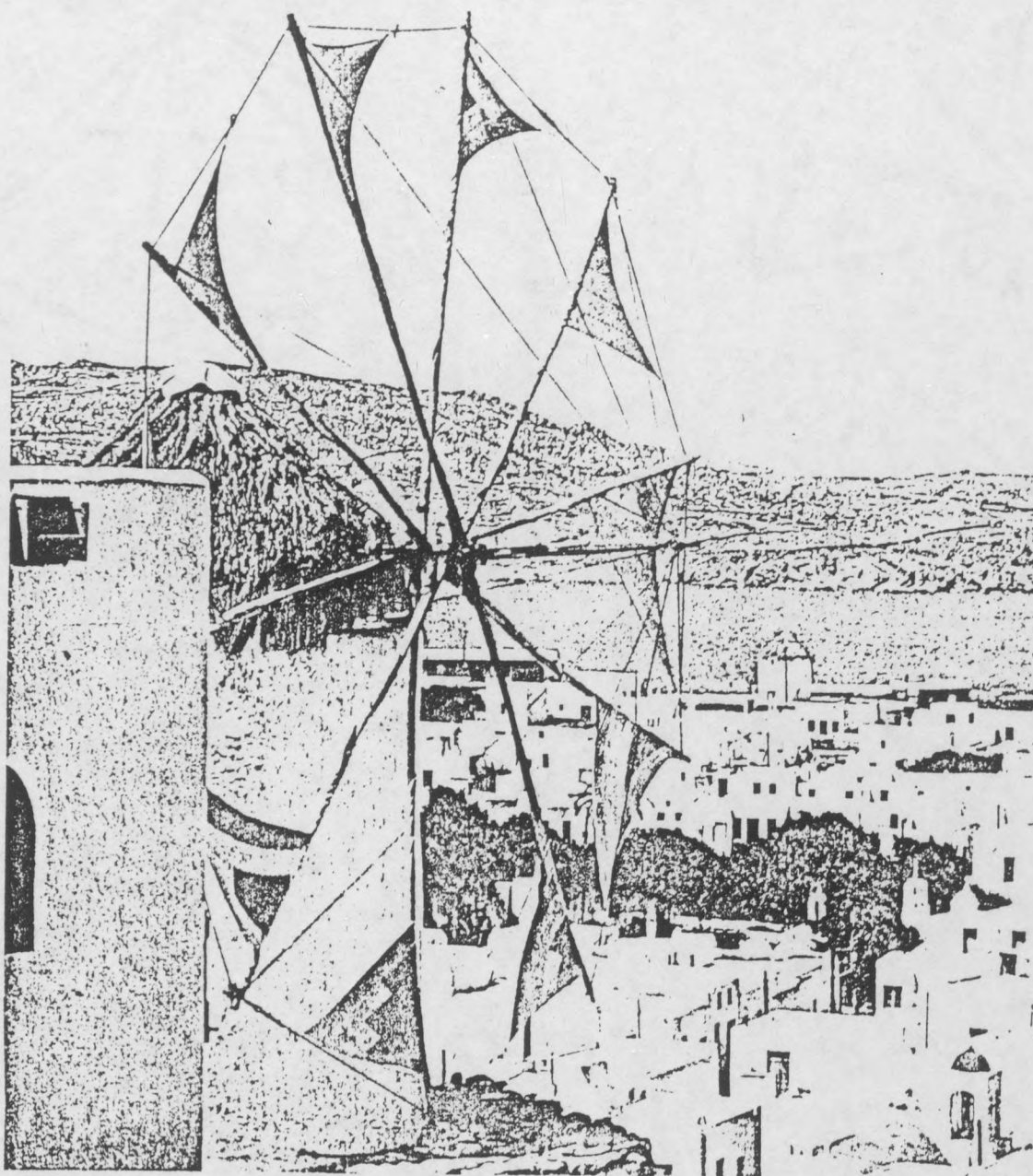
Fig. 58c

Une autre manière de stabilisation est de créer un haubanage centré, qui n'a pas beaucoup de sens dans le cas d'un tétraèdre, d'emblée stable, à moins de vouloir créer une précontrainte. Par contre, l'introduction d'une stellation spatiale - selon les angles de $109^{\circ}28'$ correspondant à la partition optimale de l'espace confirmée également sur membrane savonneuse - rend les autres pyramides pratiquement plus rigides que l'emploi d'un simplex planaire stable raidissant leur base (Fig. 58a,b,c).

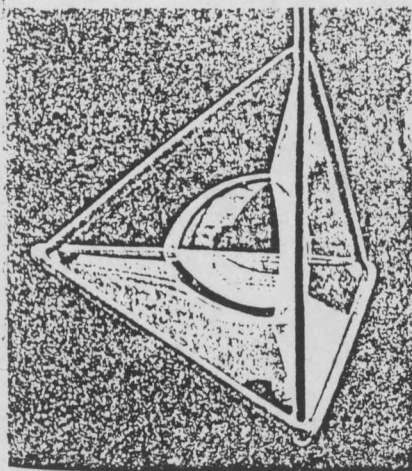


Stellation spatiale à $109^{\circ}28'$ Expérience sur membrane savonneuse

Eolienne à pyramide polygonale haubanée



Structure pyramidale haubanée. Quimper. Rogers



Forme d'équilibre intermédiaire

En procédant une fois de plus par une transformation qui inverse le système des efforts, la configuration centrée d'un tétraèdre gagne tout son intérêt. Par rapport à la variante précédente qui a six barres rigides, le nouveau simplex est composé seulement de quatre barres d'ailleurs considérablement plus courtes, les arêtes du tétraèdre étant réalisées de tirants (Fig.59). De même, en ce qui concerne les autres simplex pyramidaux stables à stellation rigide, qui sont parmi les trois solutions présentées indéniablement les plus légères (Fig.59a,b,c). Ce n'est pas sans raison que semblables simplex polygonaux sont employés comme pales de moulins à vent dans les régions méditerranéennes.

A l'instar des subdivisions planaires plus complexes, il existe évidemment d'autres partitions spatiales, qui au lieu d'un centre unique disposent de plusieurs sommets et d'un réseau interne trapézoïdal ou autre; tel qu'on le voit lors des expériences avec les membranes savonneuses. Ces formes d'équilibre intermédiaire mériteraient également d'être étudiées, puis appliquées en tant que charpentes articulées

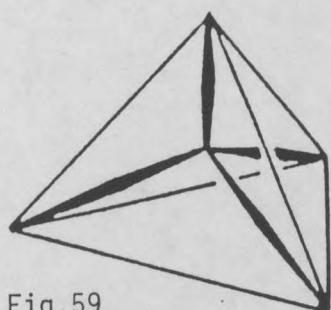


Fig.59

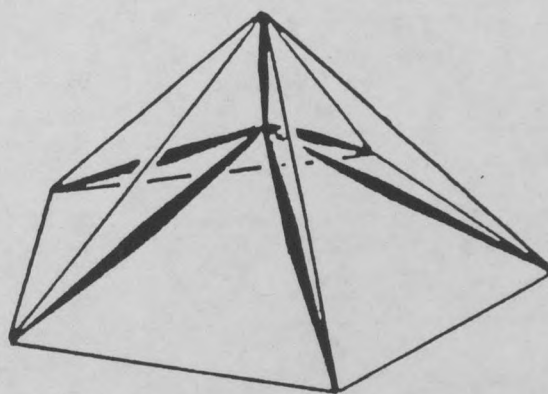


Fig.59b

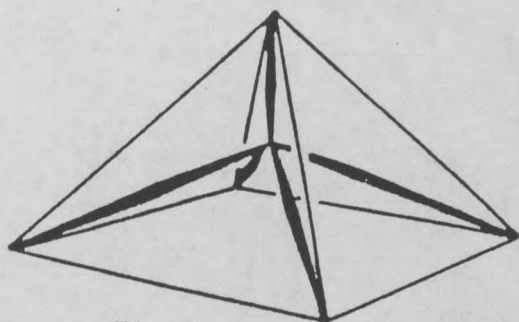


Fig.59a

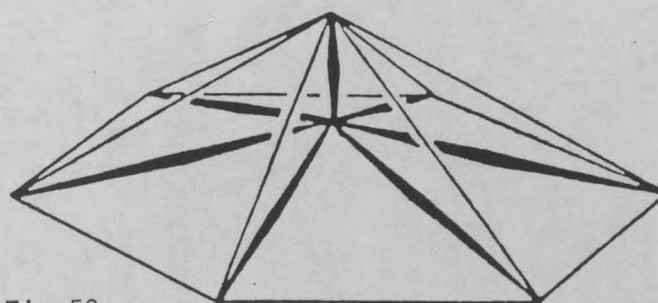
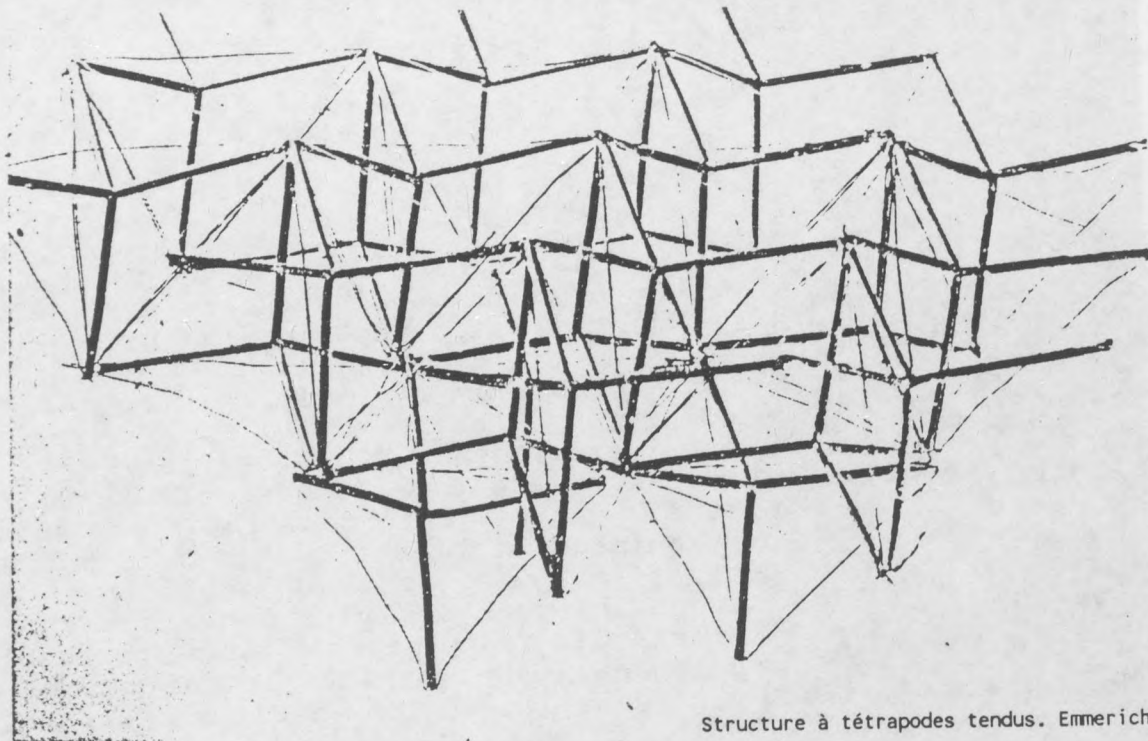
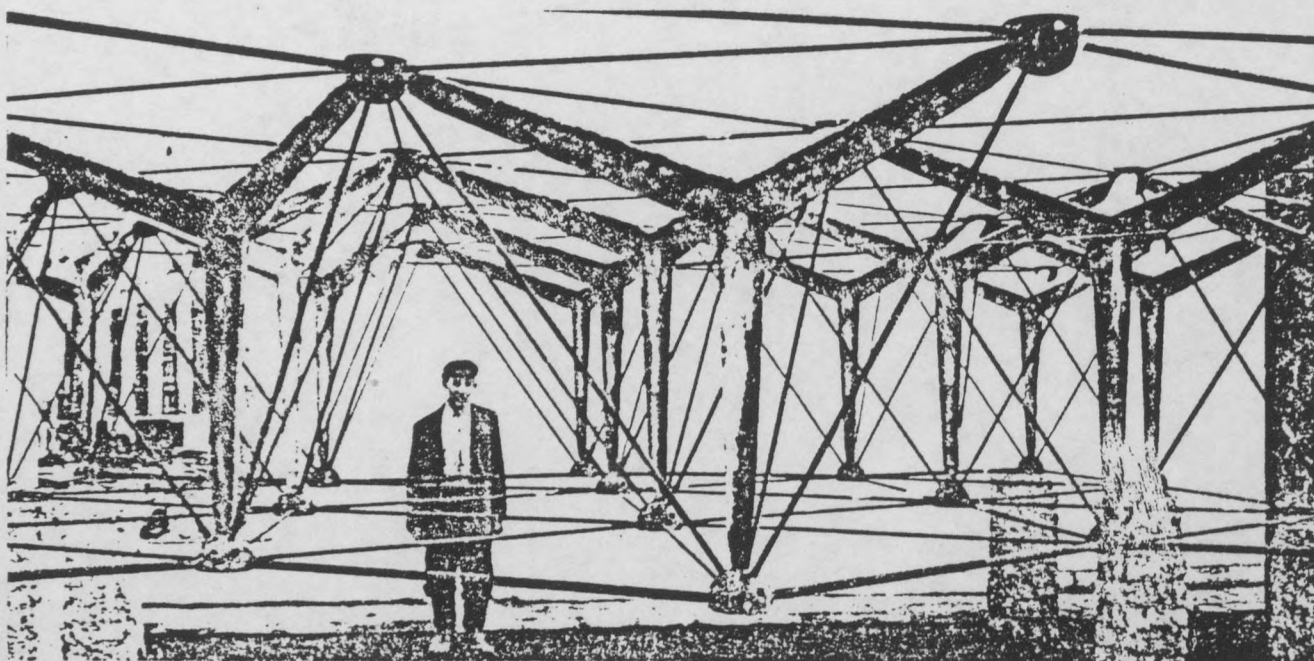
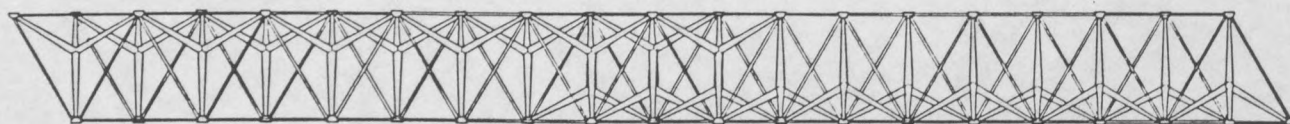
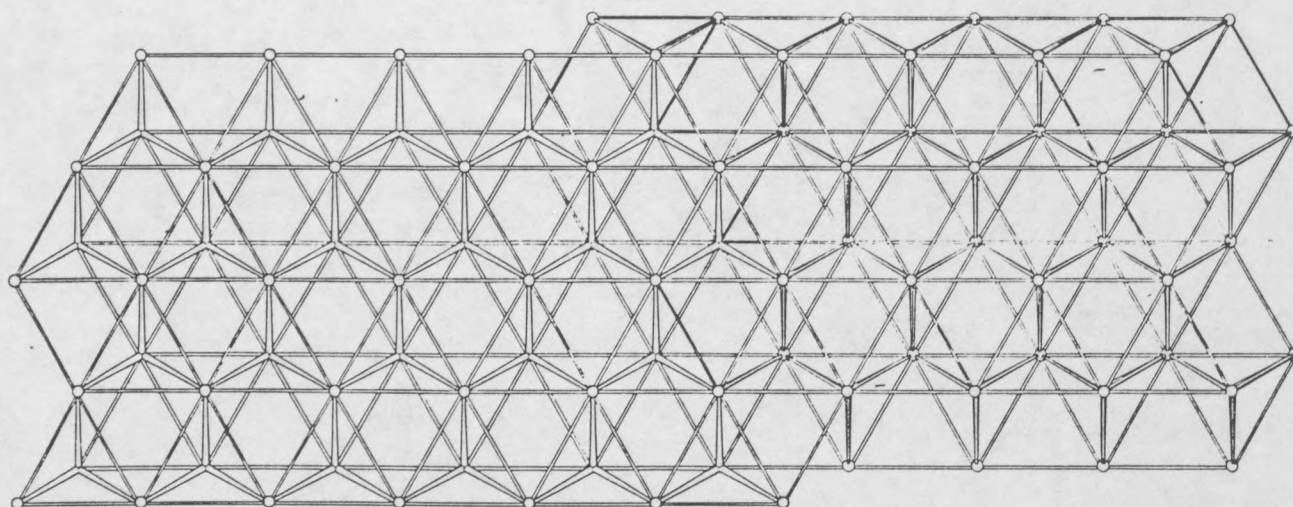


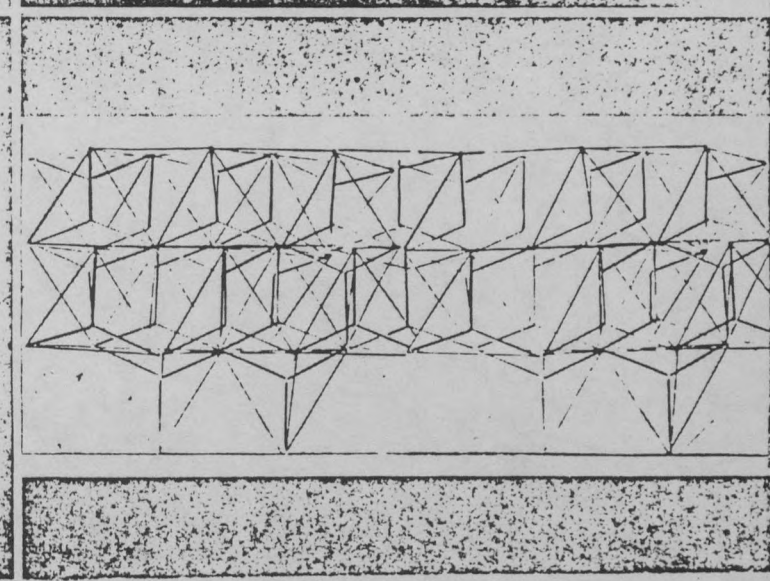
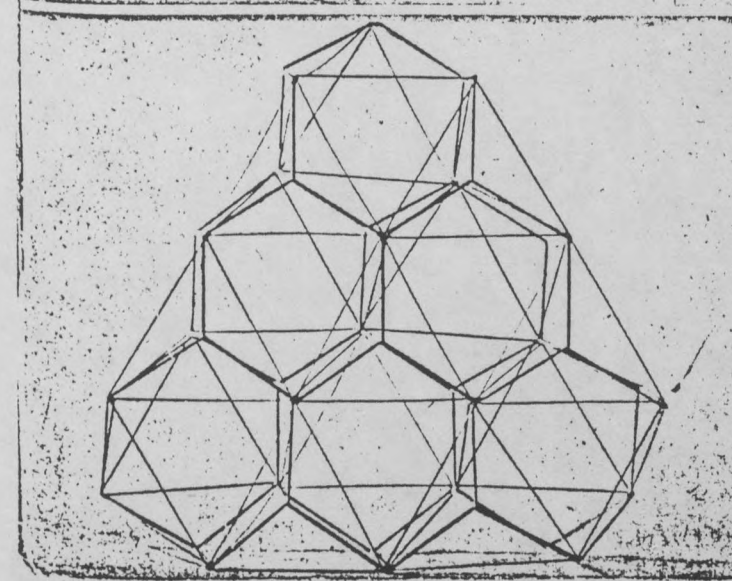
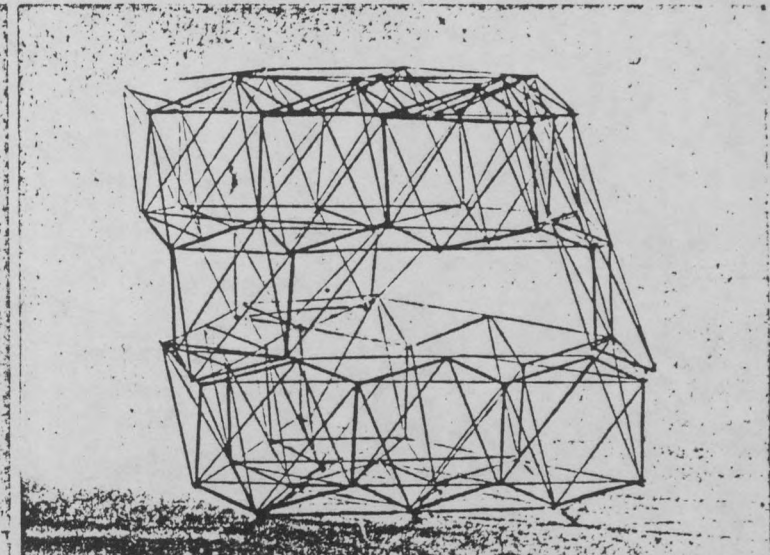
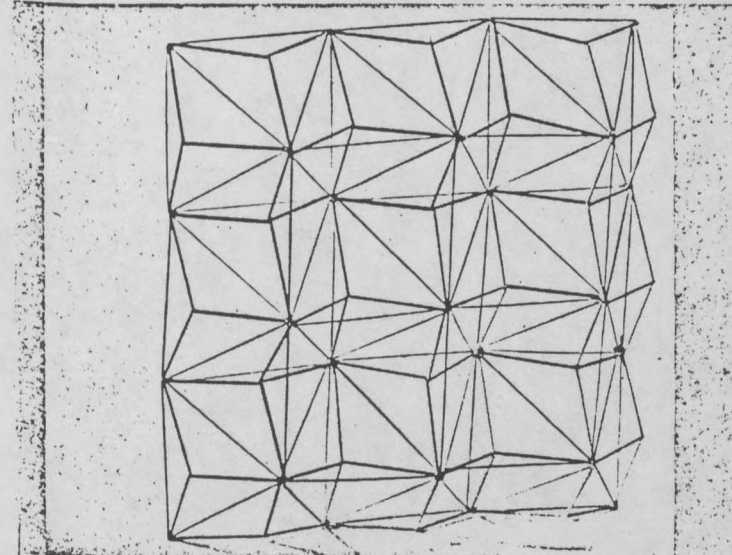
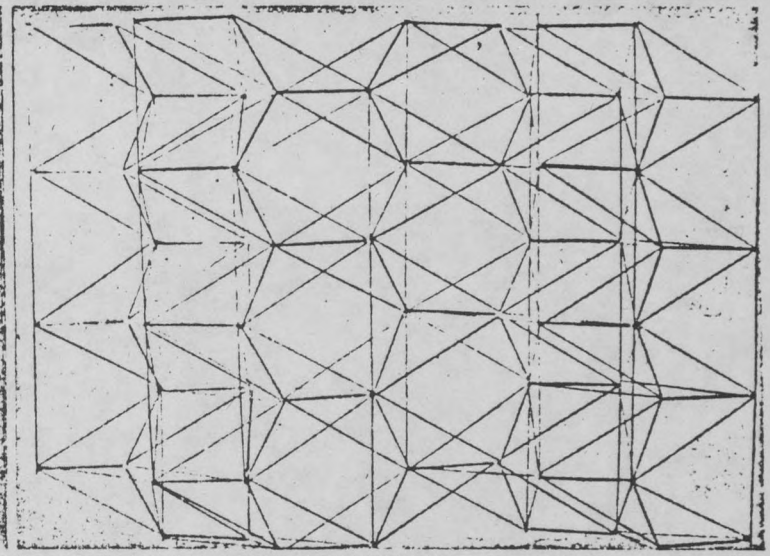
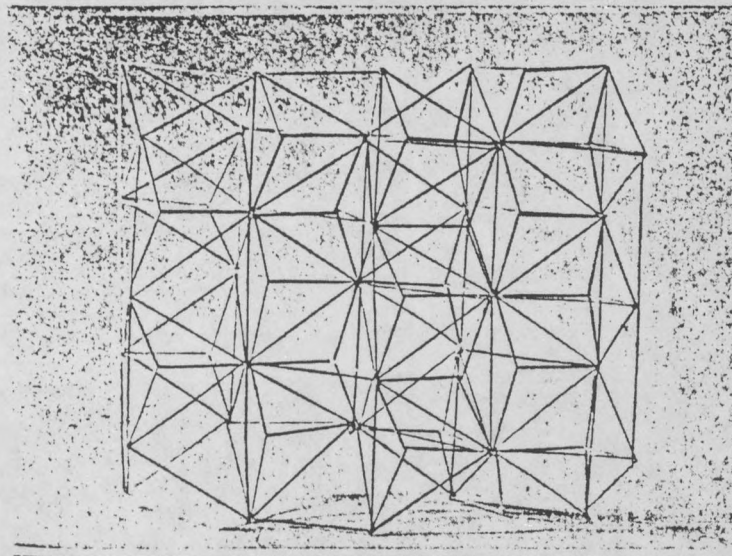
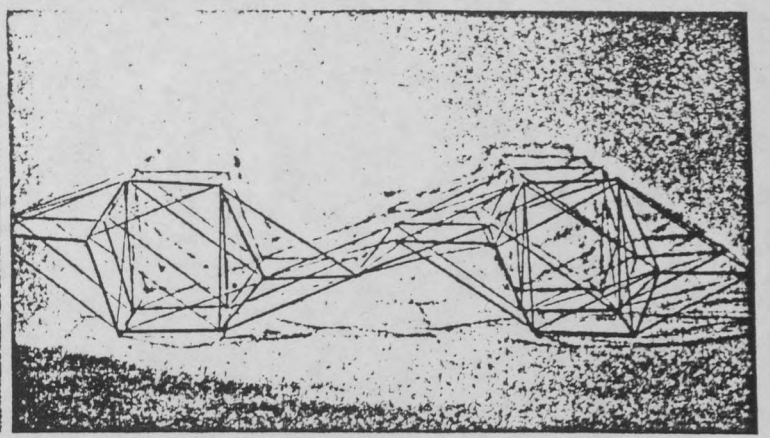
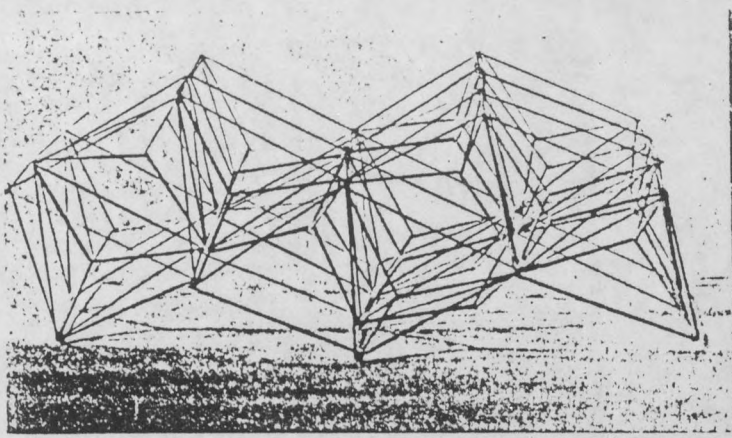
Fig.59c



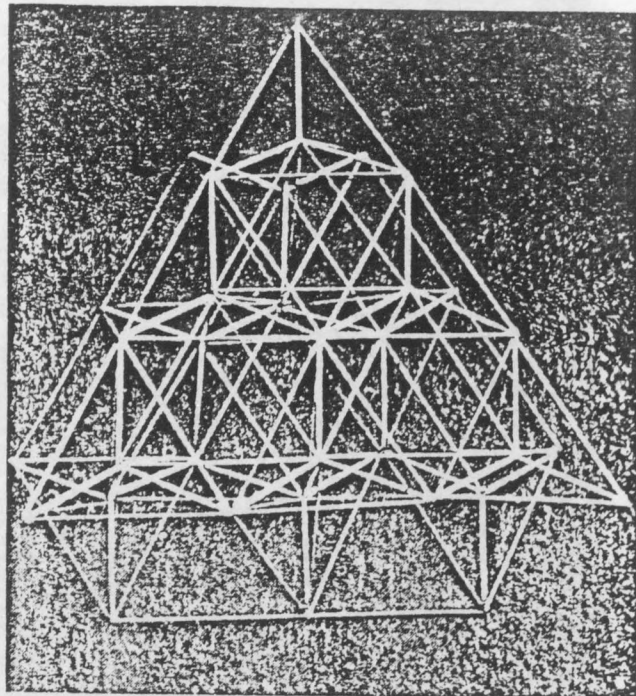
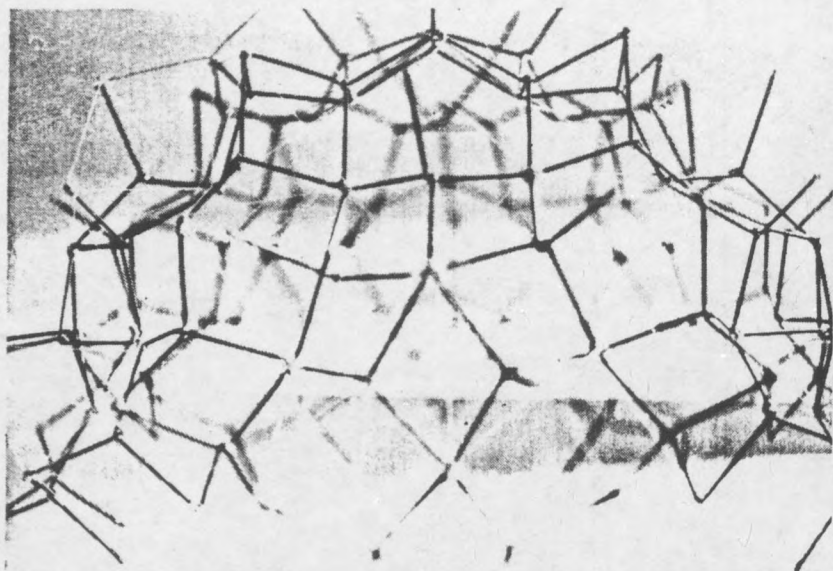
Structure à tétrapodes tendus. Emmerich



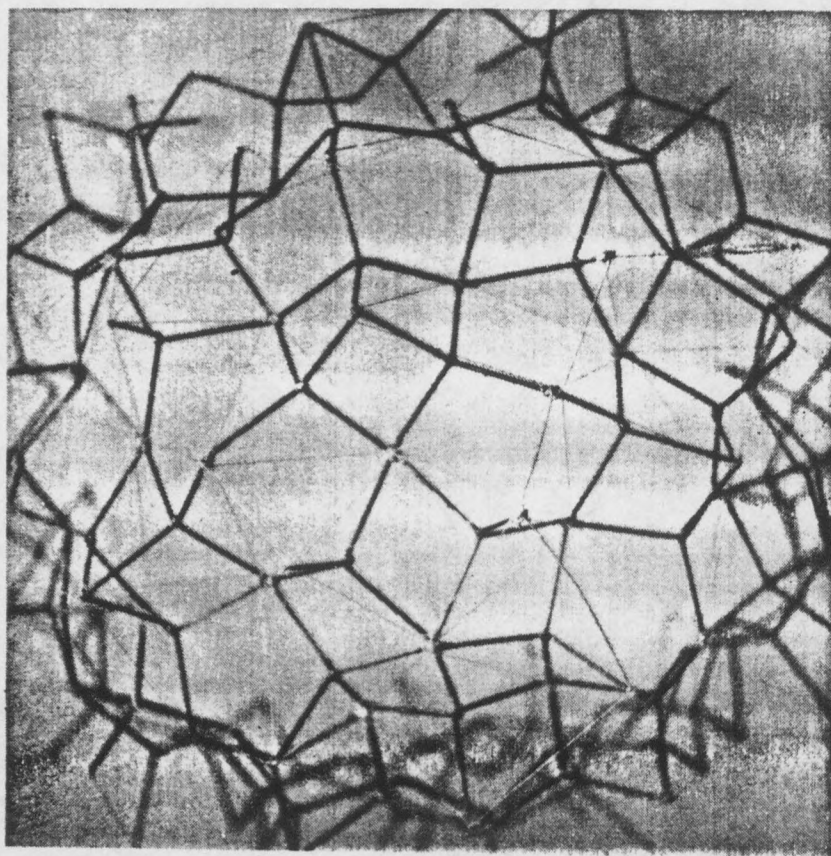
Réseaux à tétrapodes tendus. Pavillon de la Pologne 1958



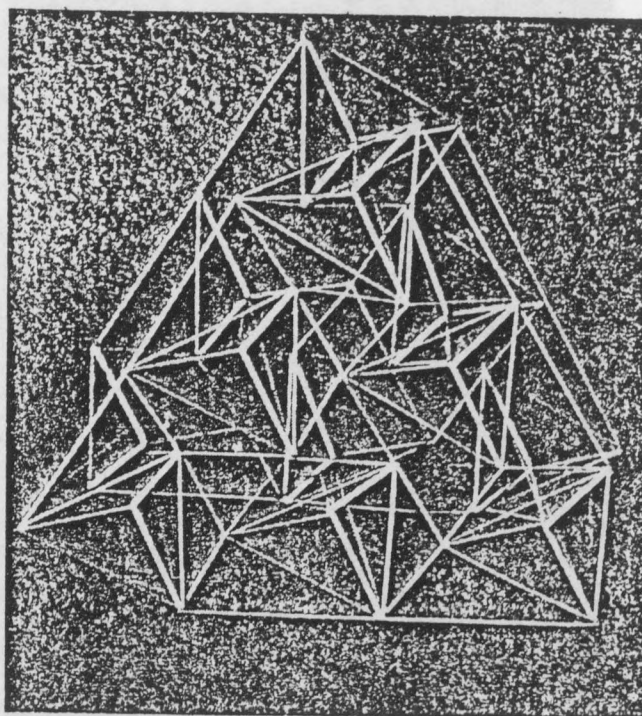
Réseaux à tétrapodes tendus.



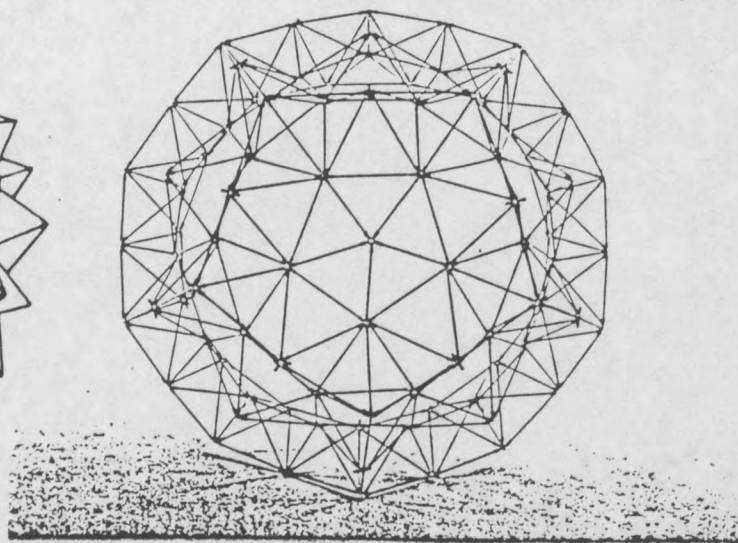
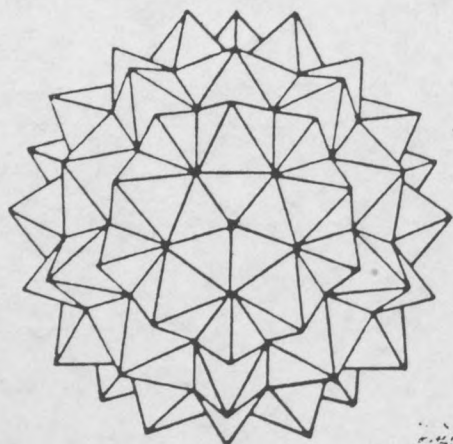
Structure non-saturée dérivée du réseau octaèdre-tétraèdre, composée d'un seul type de barre et de câble.

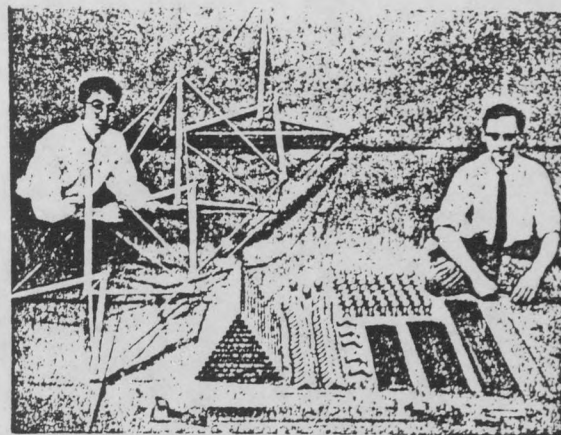
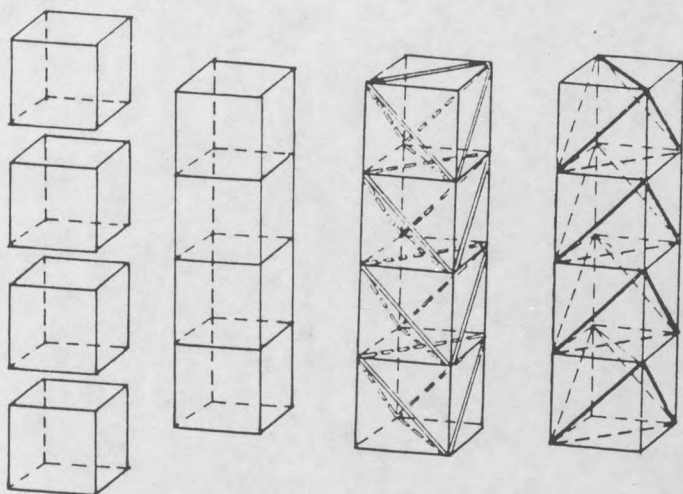


Coupole "isotropique" à tétrapodes. Emmerich

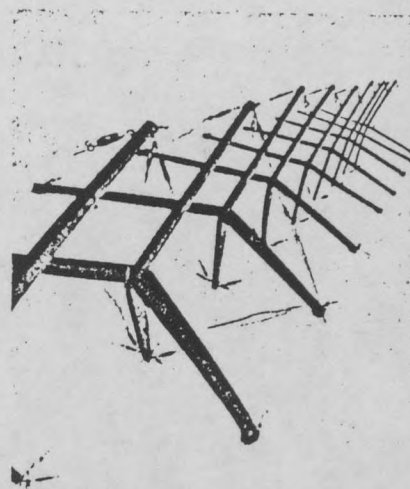
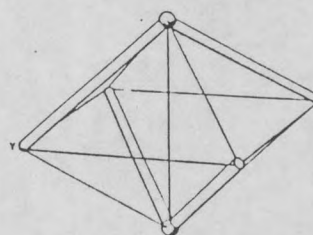
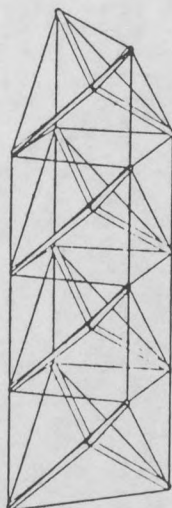
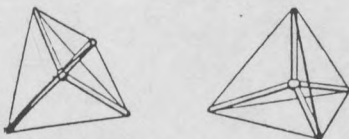
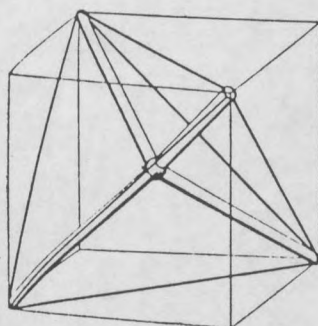


Structure à groupe de barres discontinues, reconstituée à l'aide des sous-ensembles de la précédente après distension et torsion par rapport à une verticale.

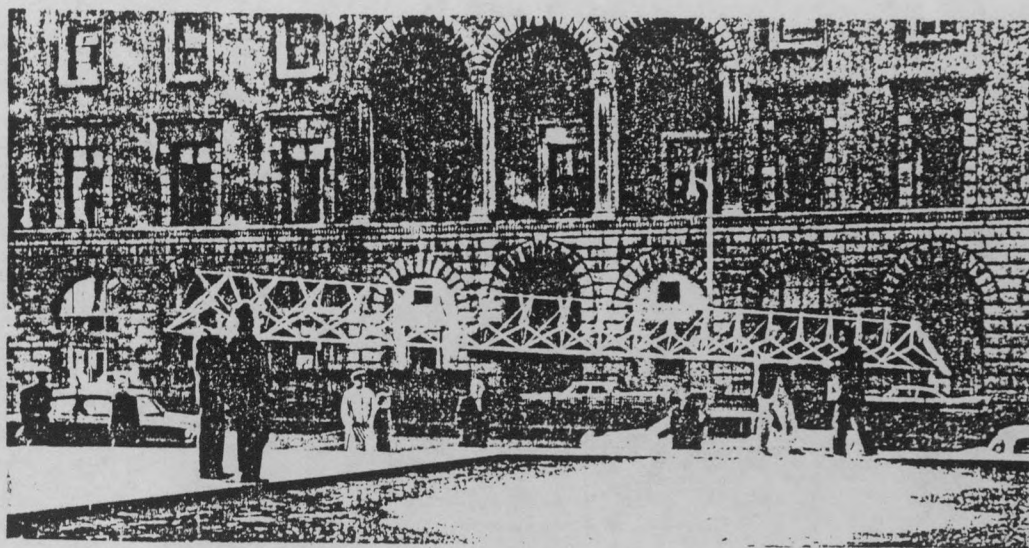




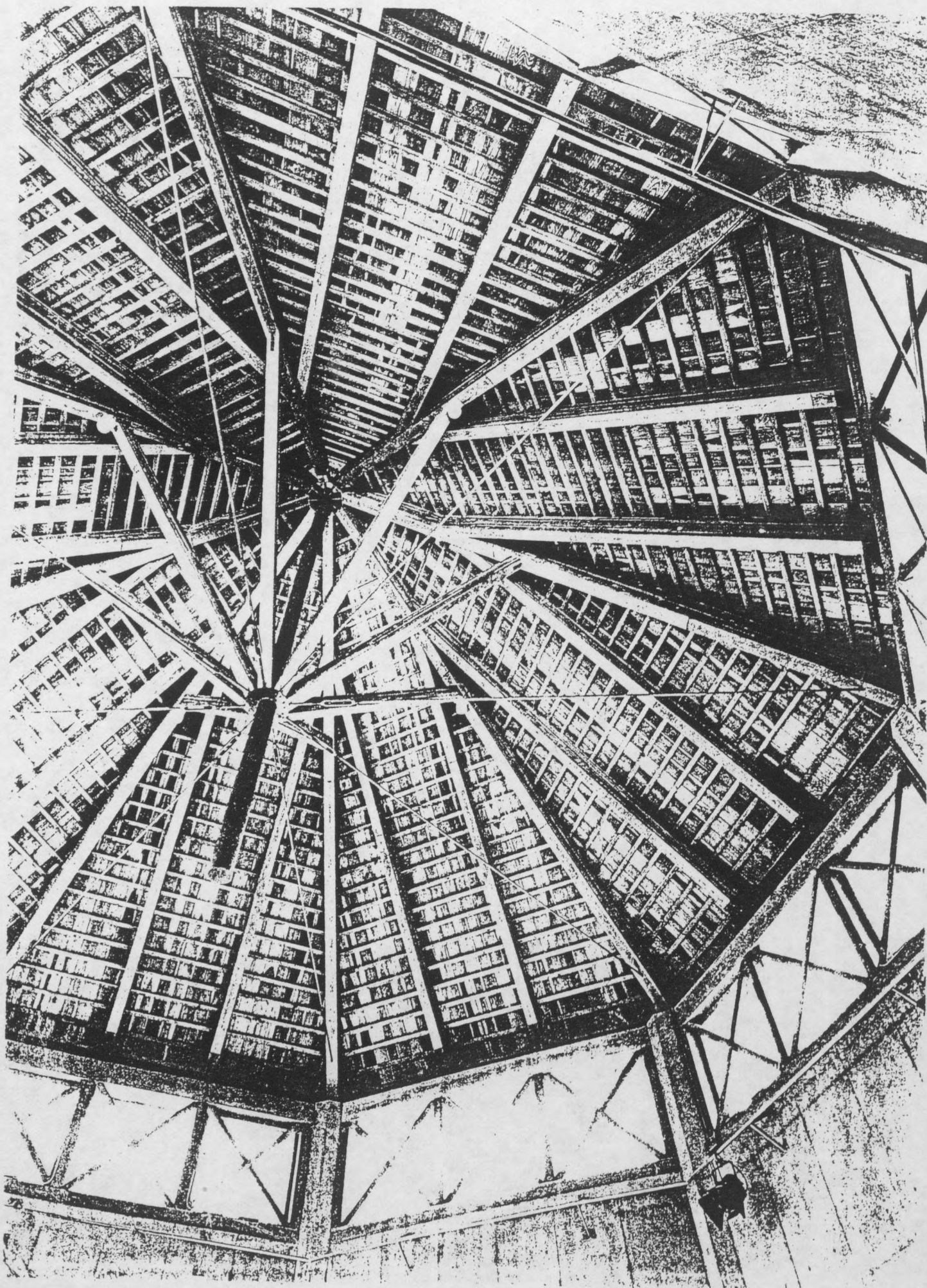
Above: the MMA Tensegrity mast kit 1959. At left is Shoji Sadao and (right) Edson Price who are co-designers. The tension members are $\frac{1}{8}$ in. monel rods, compression members 1 in. aluminium tube
Below: early version of tensegrity mast 1948



Mât semi-autotendant à tétrapodes. Fuller



The Buckminster Fuller Tensegrity Mast for the 1959 exhibition in the garden of the Museum of Modern Art



Charpente à bipyramides. Fogia Mura. Isozaki

BIPYRAMIDES

La deuxième catégorie de simplex stables, par ordre de complexité, se compose de formes bipyramidales, obtenues par l'assemblage de deux pyramides d'orientation opposée et ayant une base polygonale commune. Les bipyramides étant des deltoèdres, c'est à dire: des solides entièrement triangulés, leur réalisation directe avec des barres rigides à joints articulés aboutit obligatoirement à une nouvelle série de simplex indéformables.

Leur forme la plus simple, l'archétype des bipyramides, est le bitétraèdre (Fig.60). La variante à base carrée n'est autre que l'un des cinq polyèdres platoniciens l'octaèdre, qui tout comme le solide précédent est réalisable de triangles équilatéraux (Fig.60a). Il en est de même pour la bipyramide pentagonale composée, en effet, de deux calottes icosaédriques (Fig.60b). Par contre, la bipyramide hexagonale et à plus forte raison les suivantes, ne sont réalisables qu'avec des triangles isocèles aigus (Fig.60c).



Parachute bipyramidal. Léonard

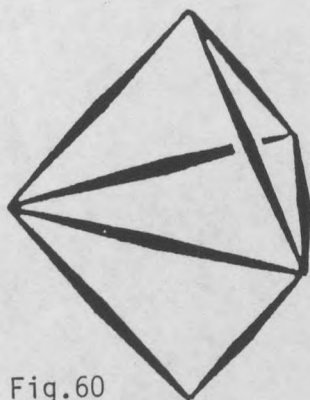


Fig.60

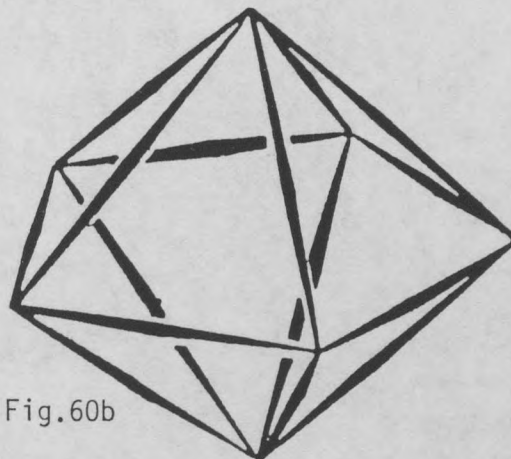


Fig.60b

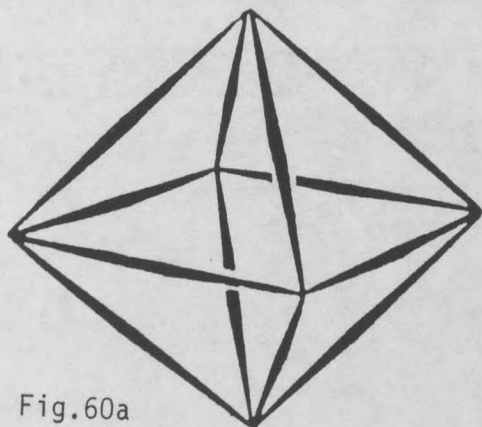


Fig.60a

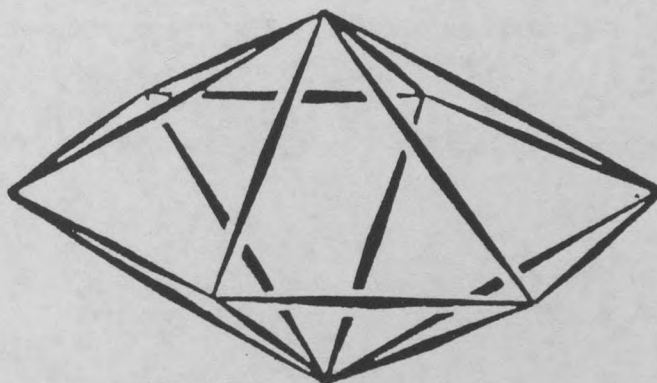
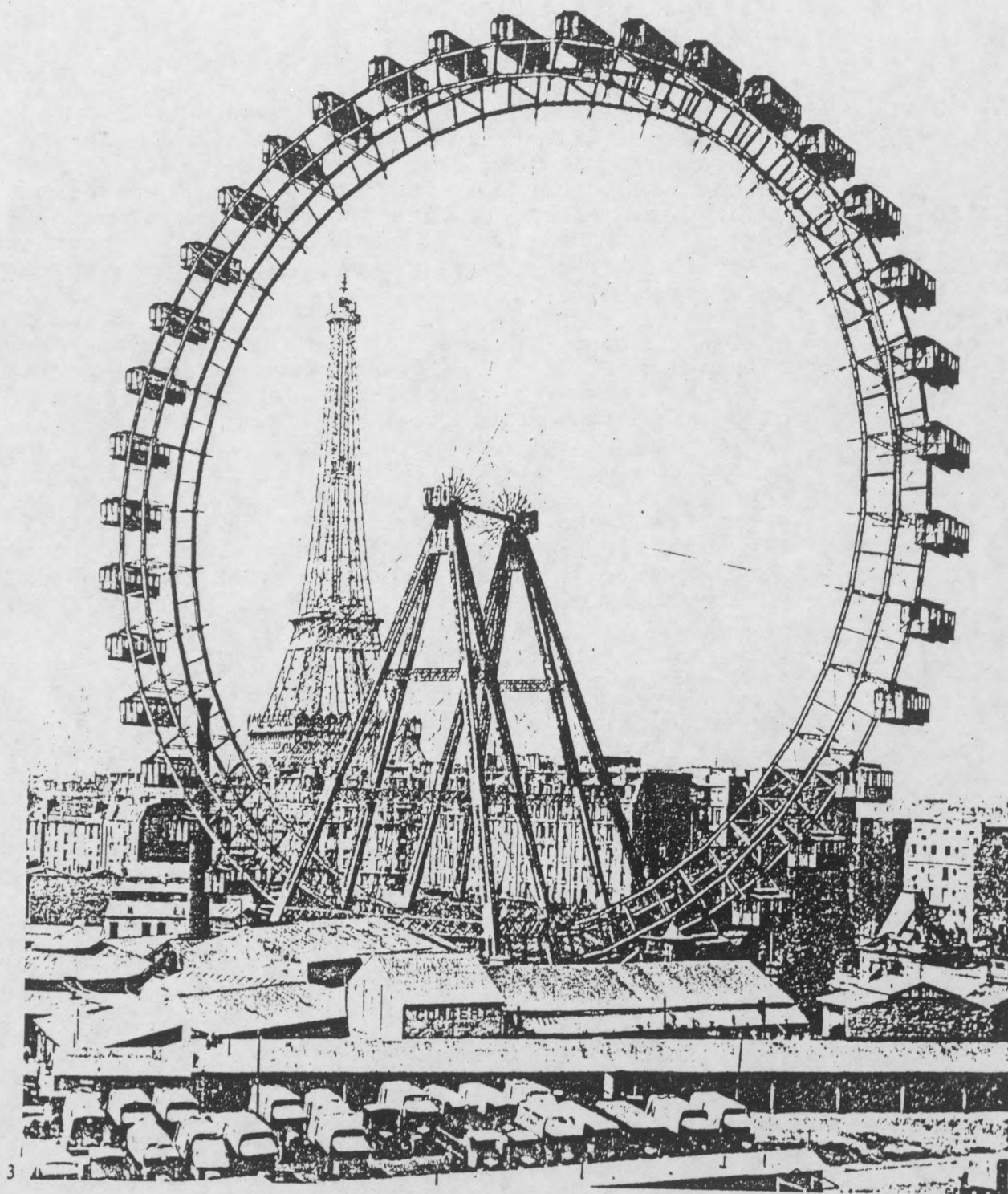
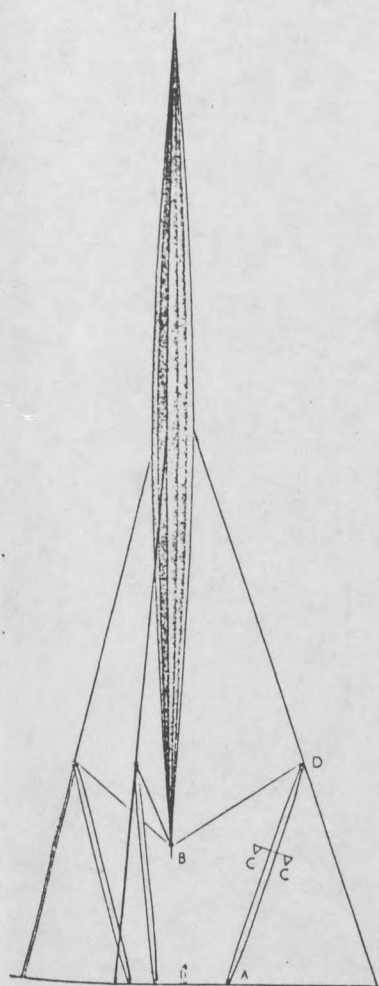


Fig.60c



La « grande roue » à l'Exposition universelle de 1900 à Paris, par Slitckins (ing.), Walter B. Basset et la Société des Forges et Aciéries de Haumont. Acier. Diamètre : 93 m. Aujourd'hui détruite.



Dimensions : hauteur totale : 91 m 50, diamètre maximum : 4 m 10. Distance entre les bases des pylônes de support : 21 m 35. Poids approximatif : 28 tonnes.

POWELL et MOYA, Architectes.
F.-J. SAMUELY, ingénieur-Conseil

Une transformation concentrique de ces solides d'emblée stables n'aura pas plus de sens que celle du tétraèdre. Mais, en rajoutant un segment axial reliant les deux sommets pyramidaux, on obtient deux systèmes inverses fort judicieux et depuis longtemps connus : les deux variantes de la roue.

En introduisant à l'intérieur de la bipyramide comme axe une barre de compression, sa poussée provoque des tractions dans toutes les membrures radiales attachées à ses extrémités qui à leur tour compriment les composants de la base polygonale devenue périphérique. Cela correspond, en fait, au principe de la roue de bicyclette où la jante circulaire peut être considérée comme un polygone à un nombre de côtés infini. Ces structures appartiennent à la classe semi-autotendante, les barres de compression étant partiellement dissociées.

L'archétype du système est, cependant, la bipyramide triangulaire, la plus fusiforme de toutes (Fig.61). En multipliant les jantes, on obtient des fuseaux encore plus allongés : des barres composites. Les variantes avec des polygones ayant un nombre de côtés supérieur tendent évidemment vers des formes de plus en plus plates (Fig.61a,b,c).

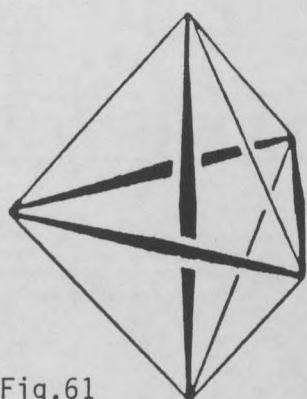


Fig.61

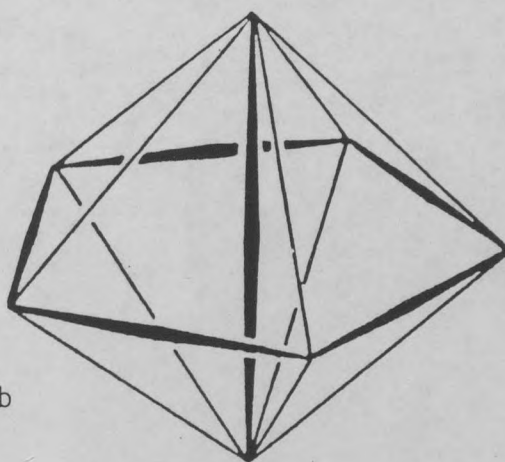


Fig.61b

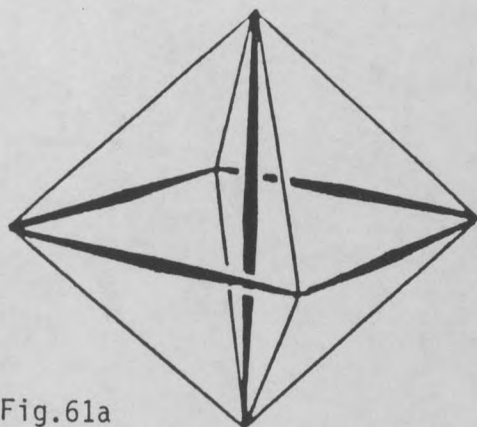


Fig.61a

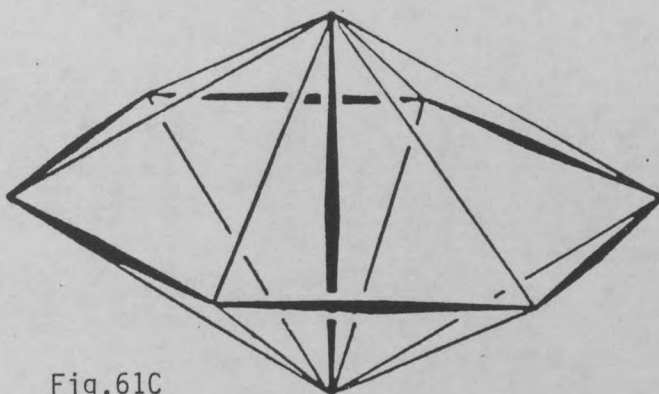
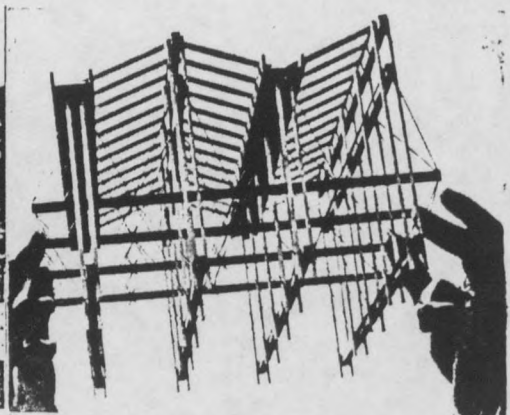
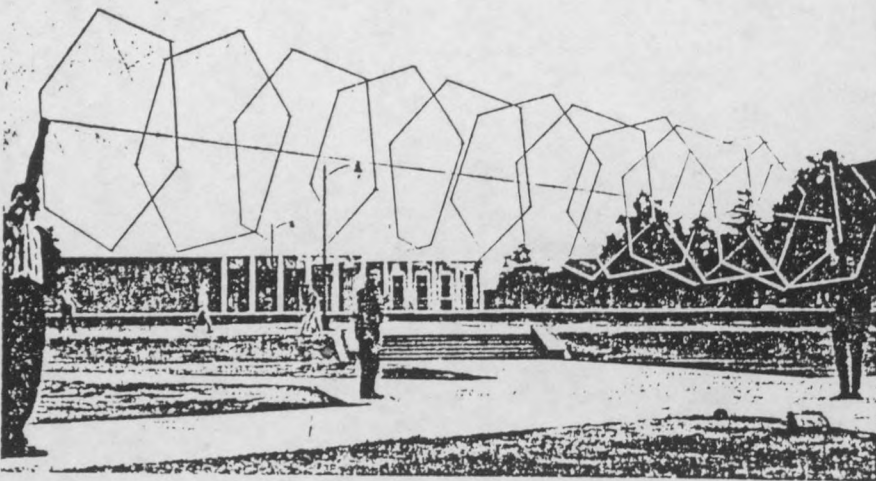
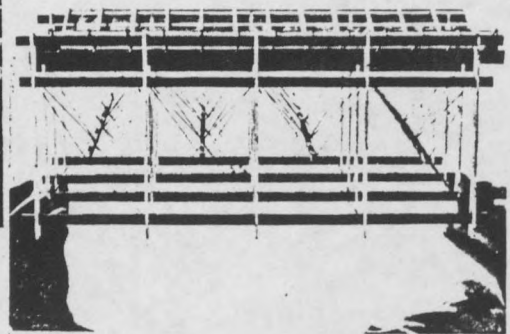
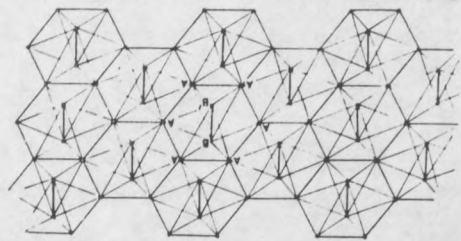
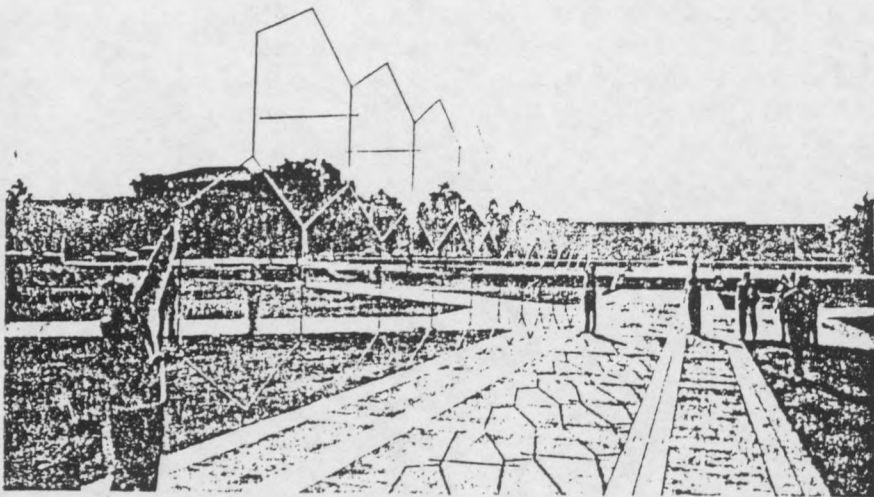
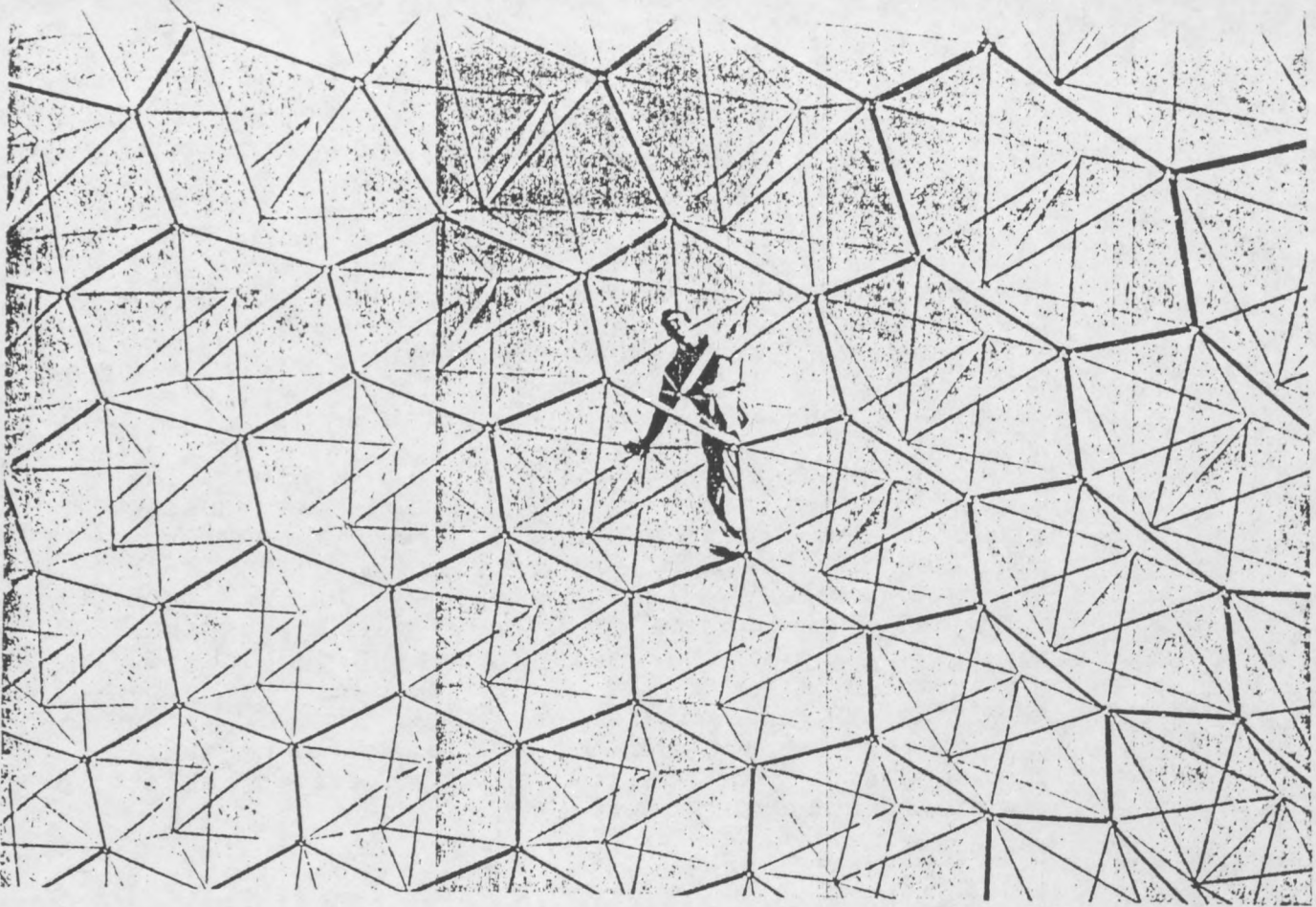
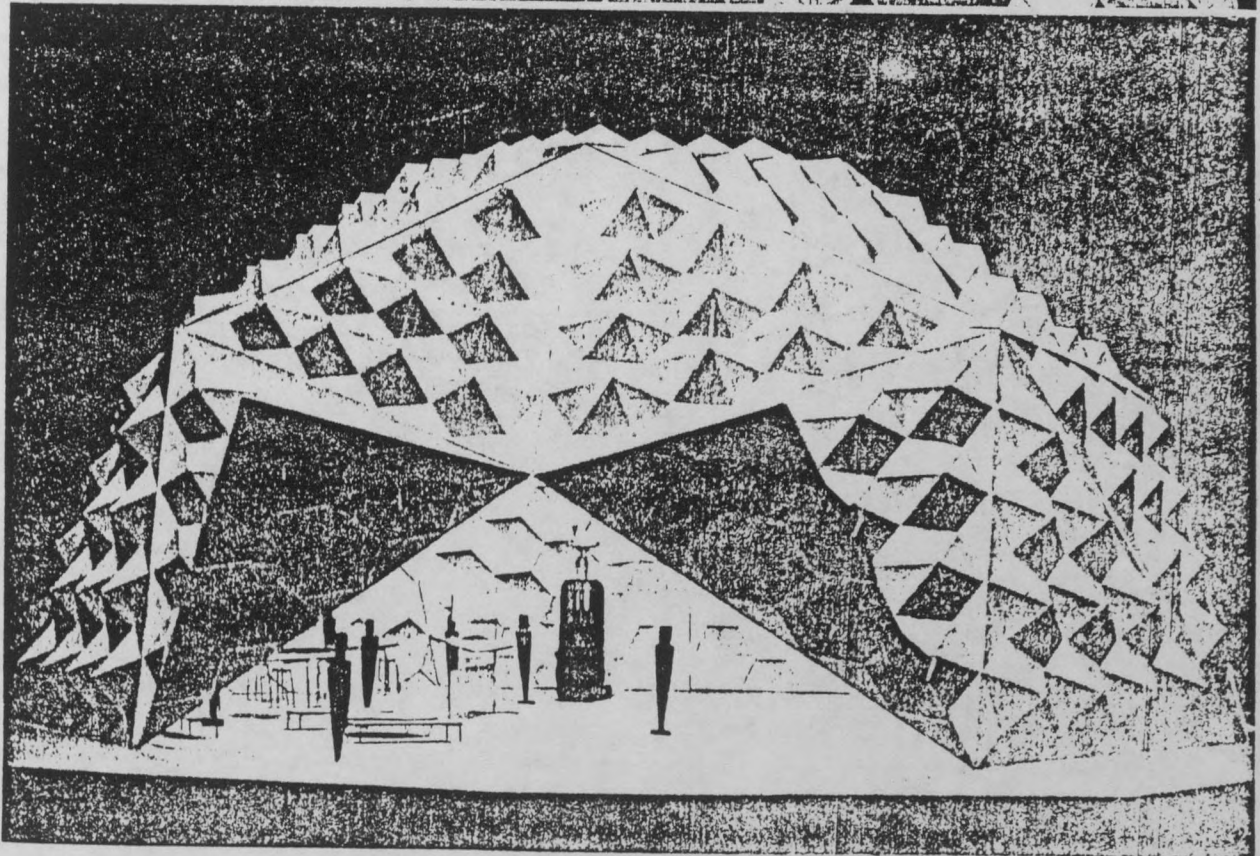
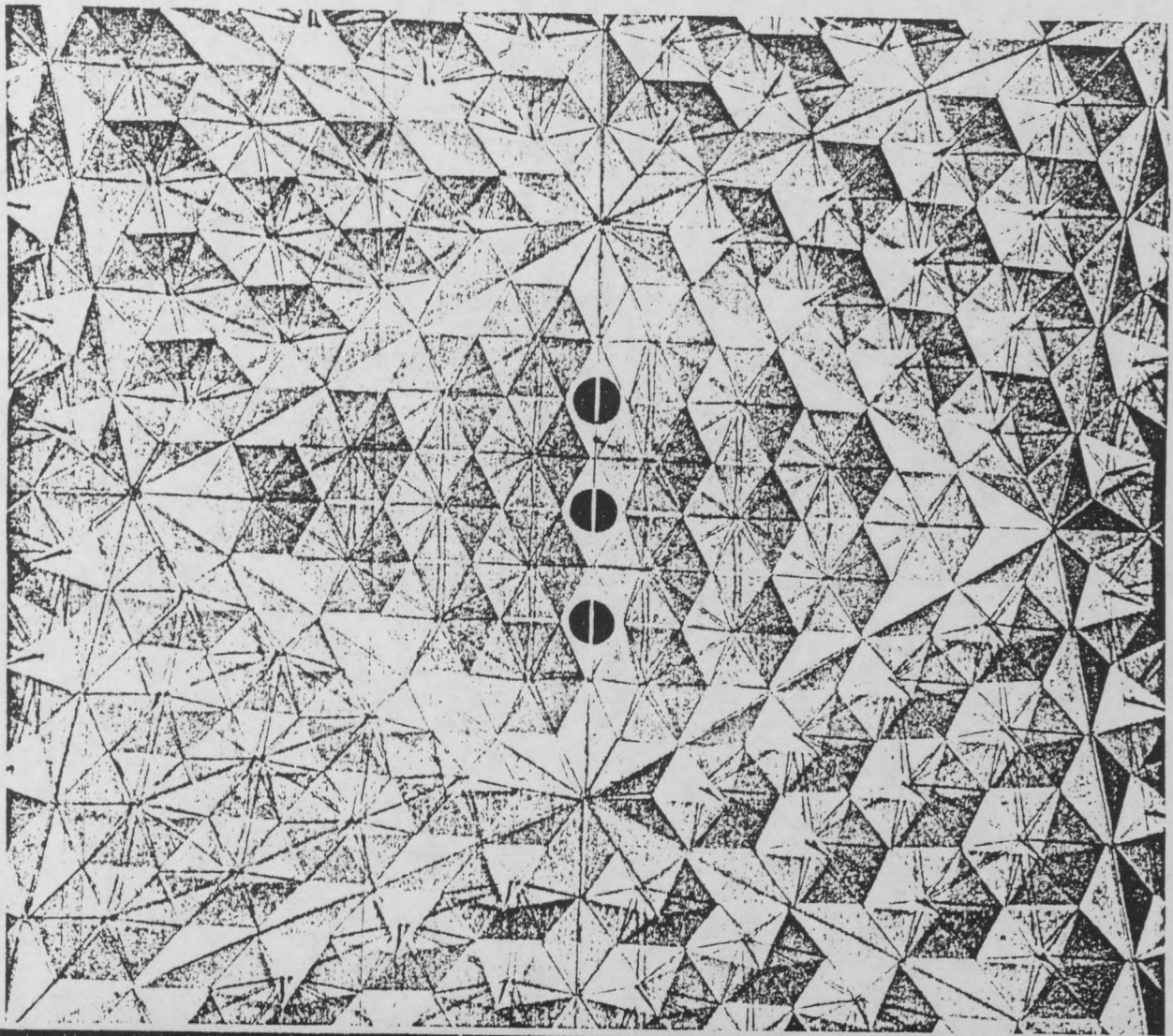


Fig.61c

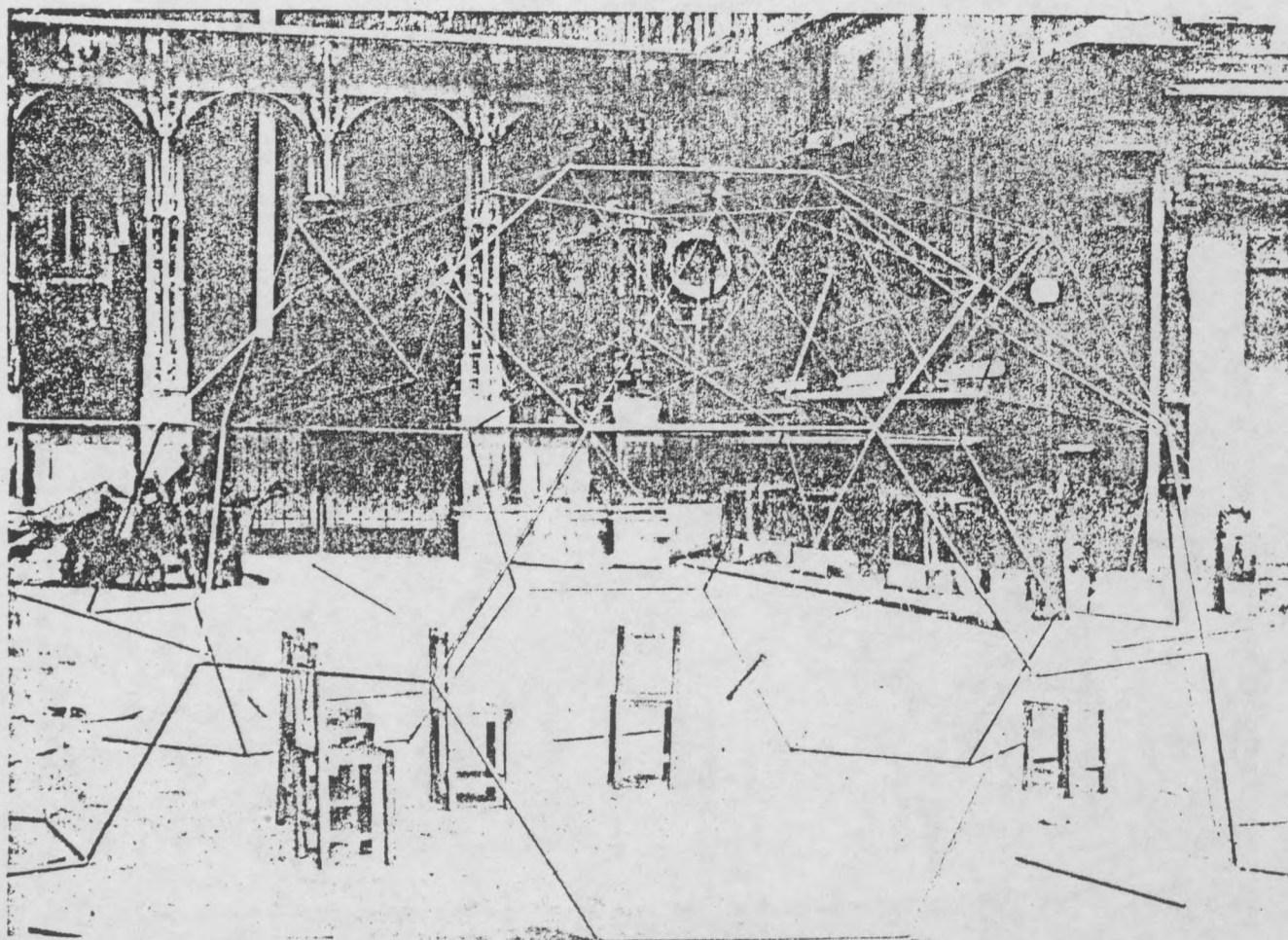
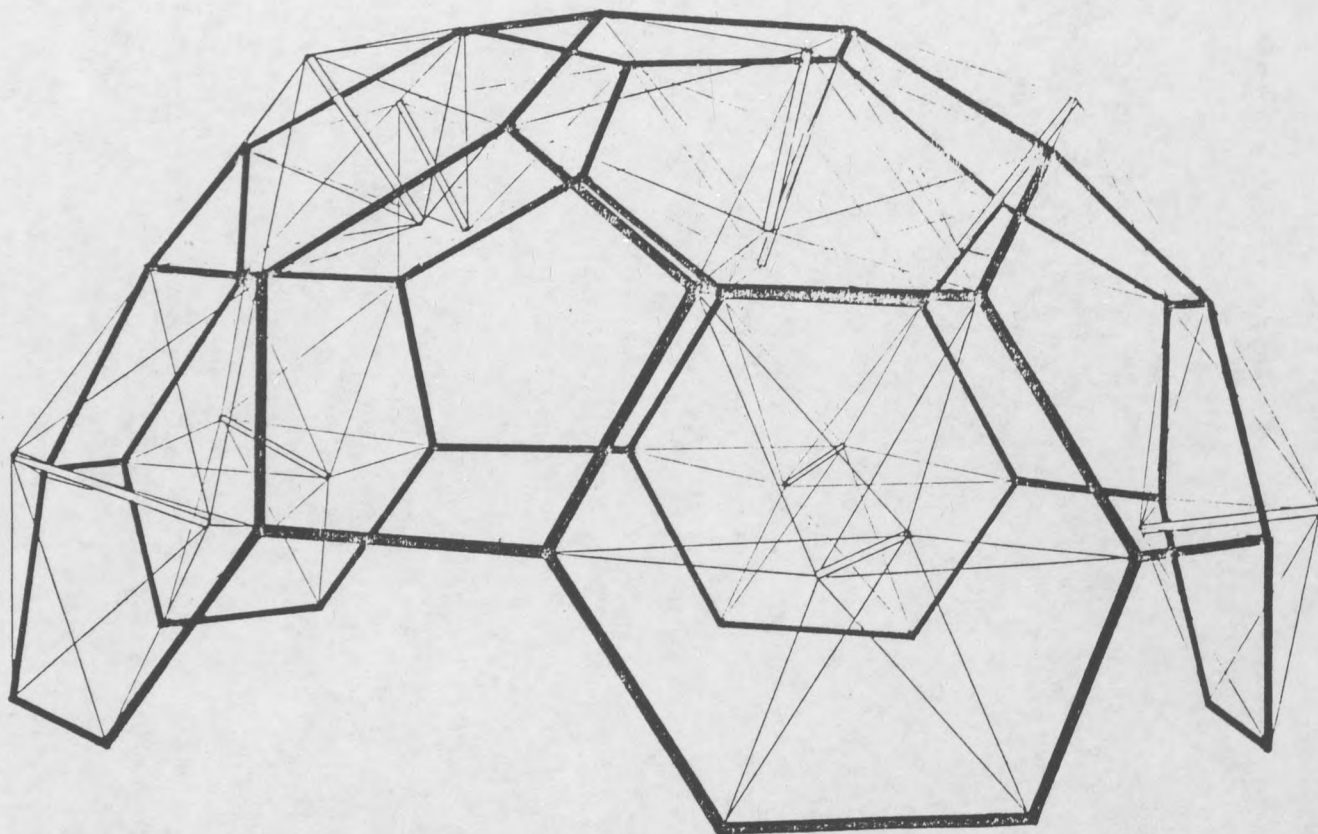


Structures à roues de bicyclette carrées et hexagonales.

Lindsay 1955

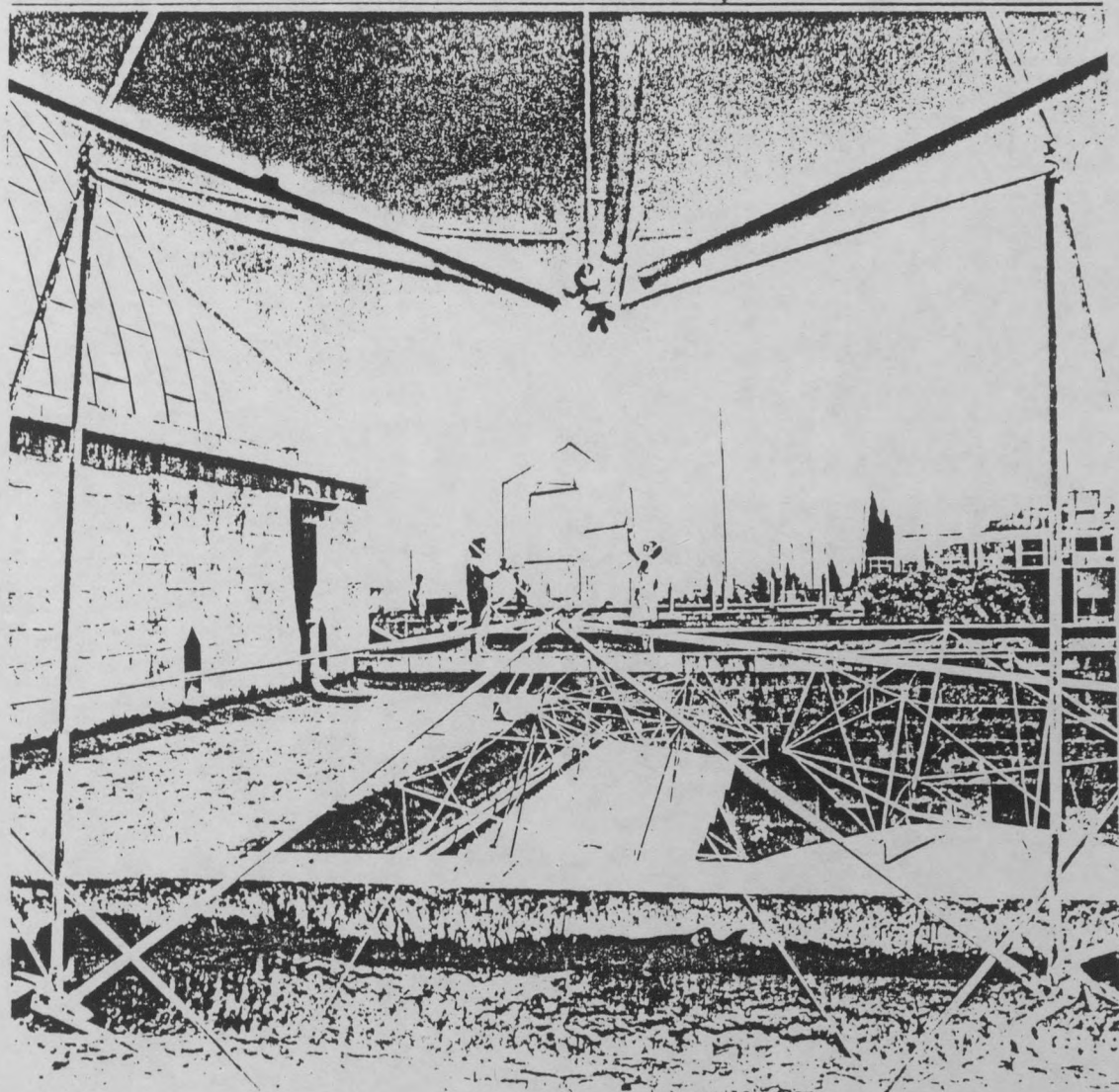
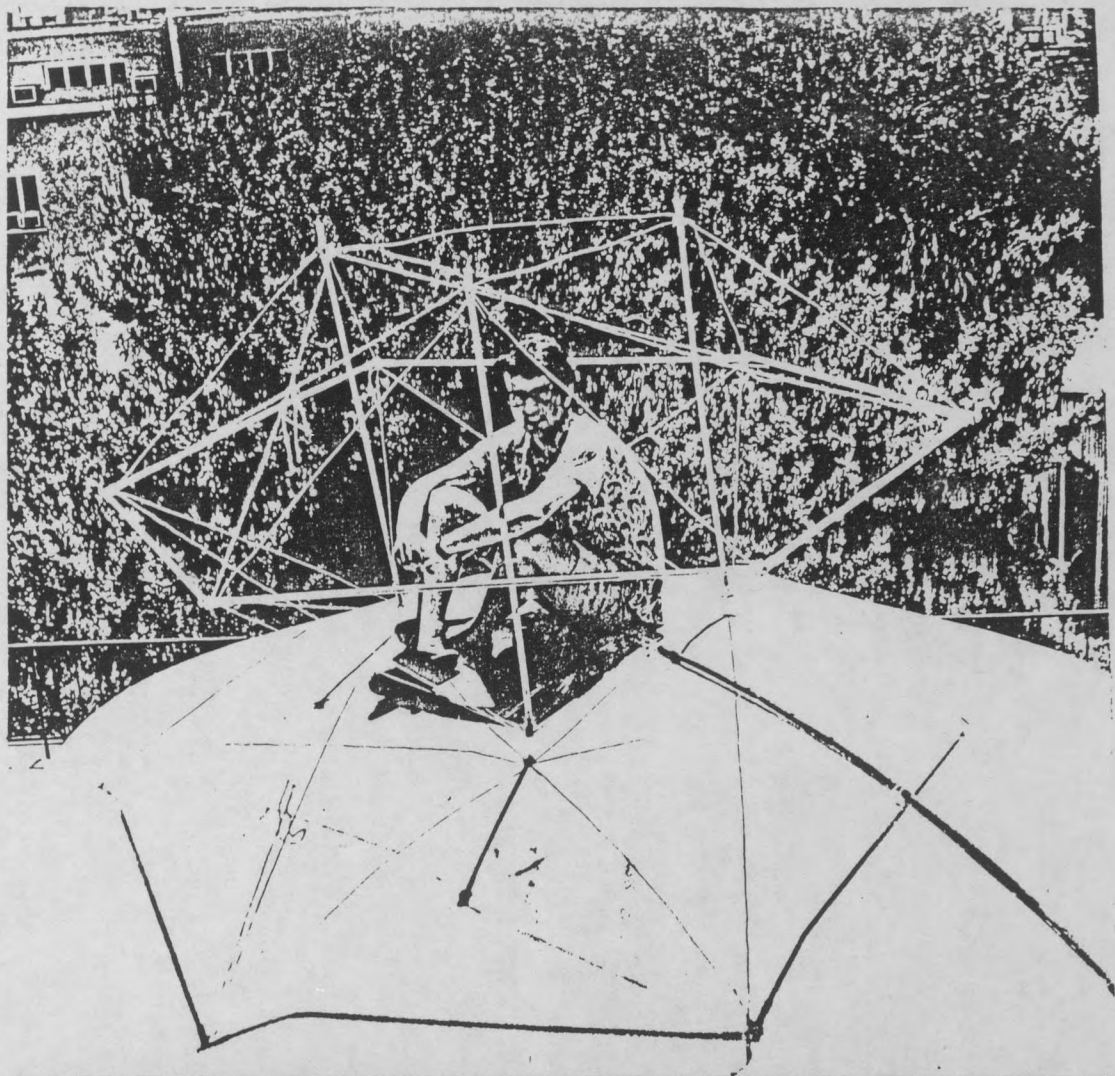


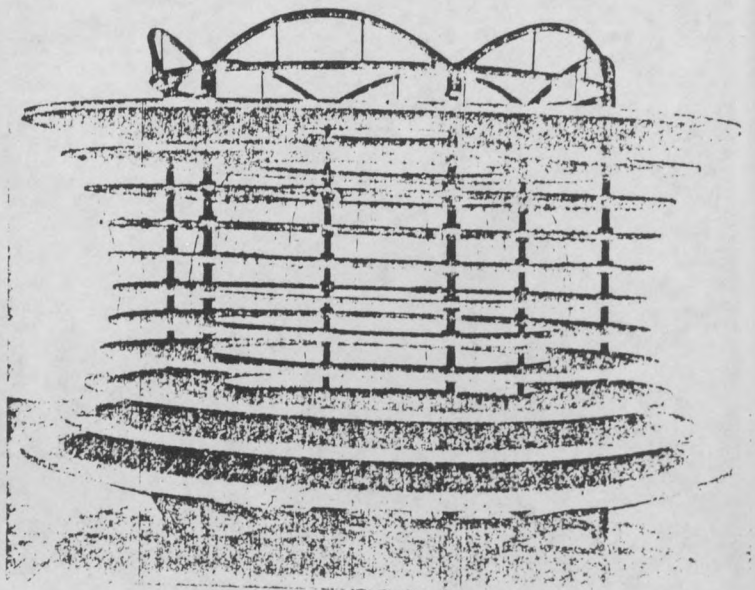
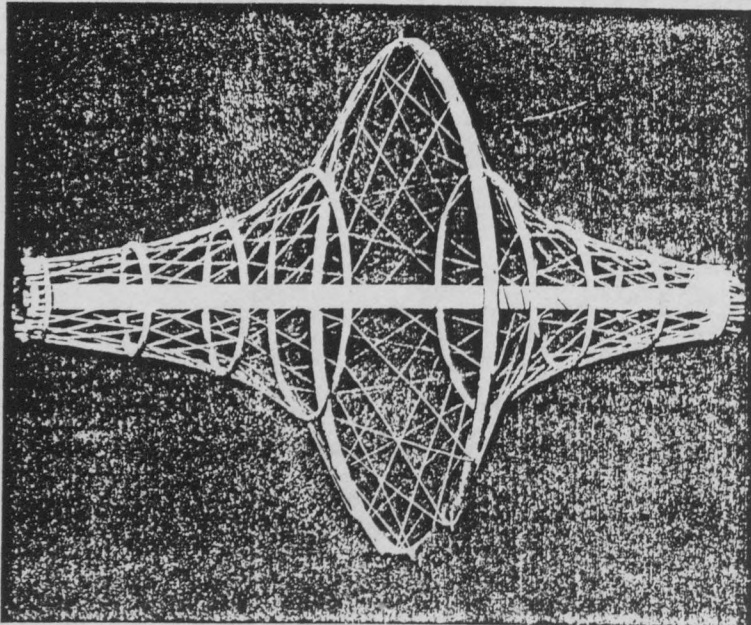
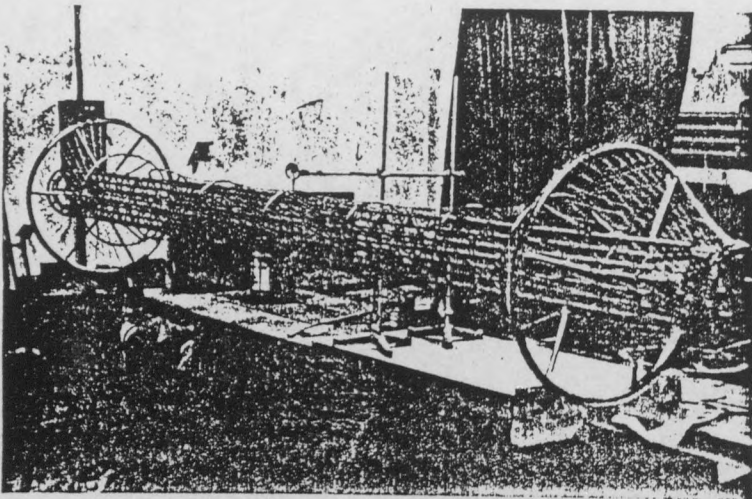
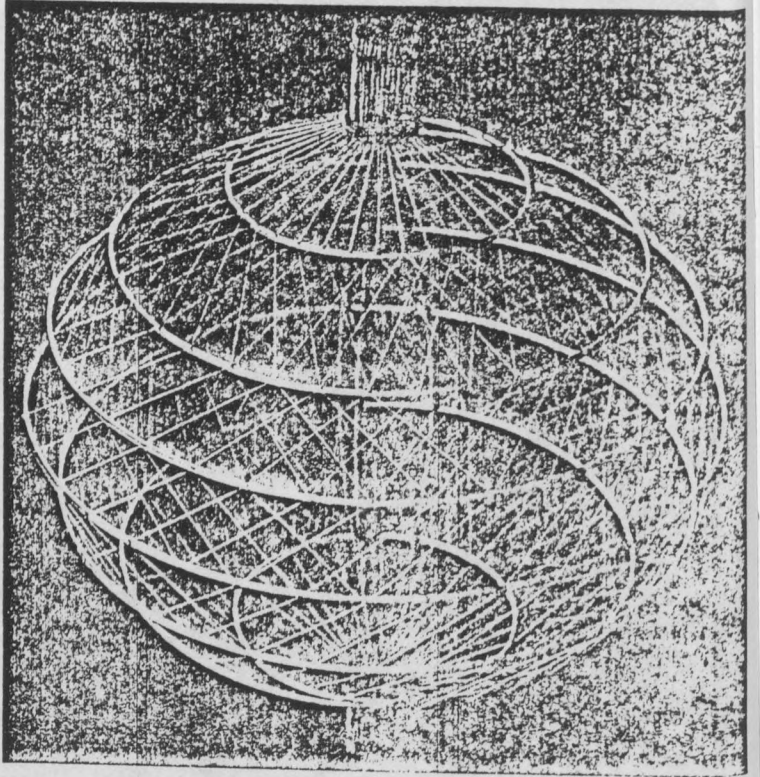
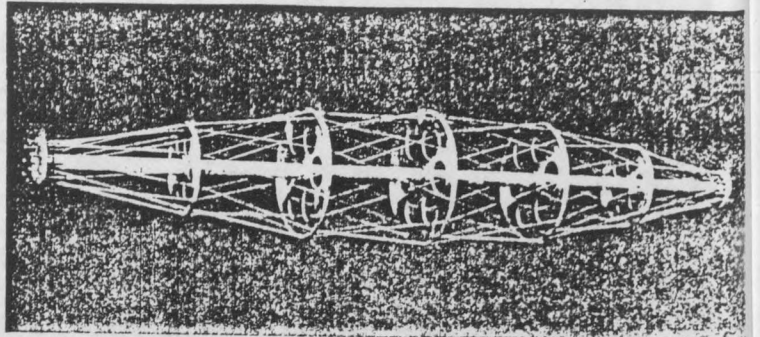
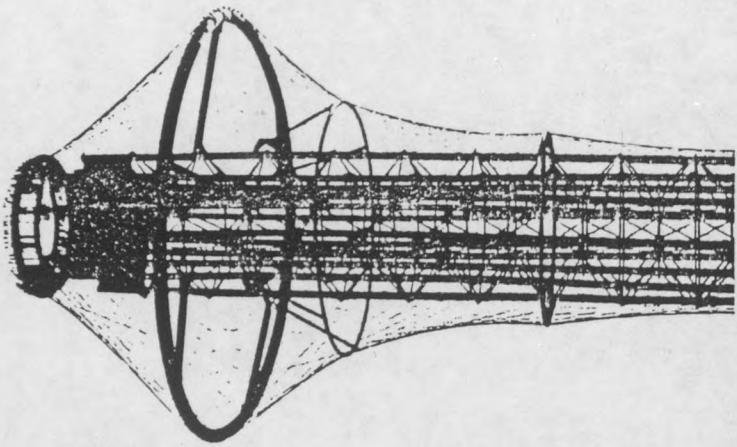
Lindsay



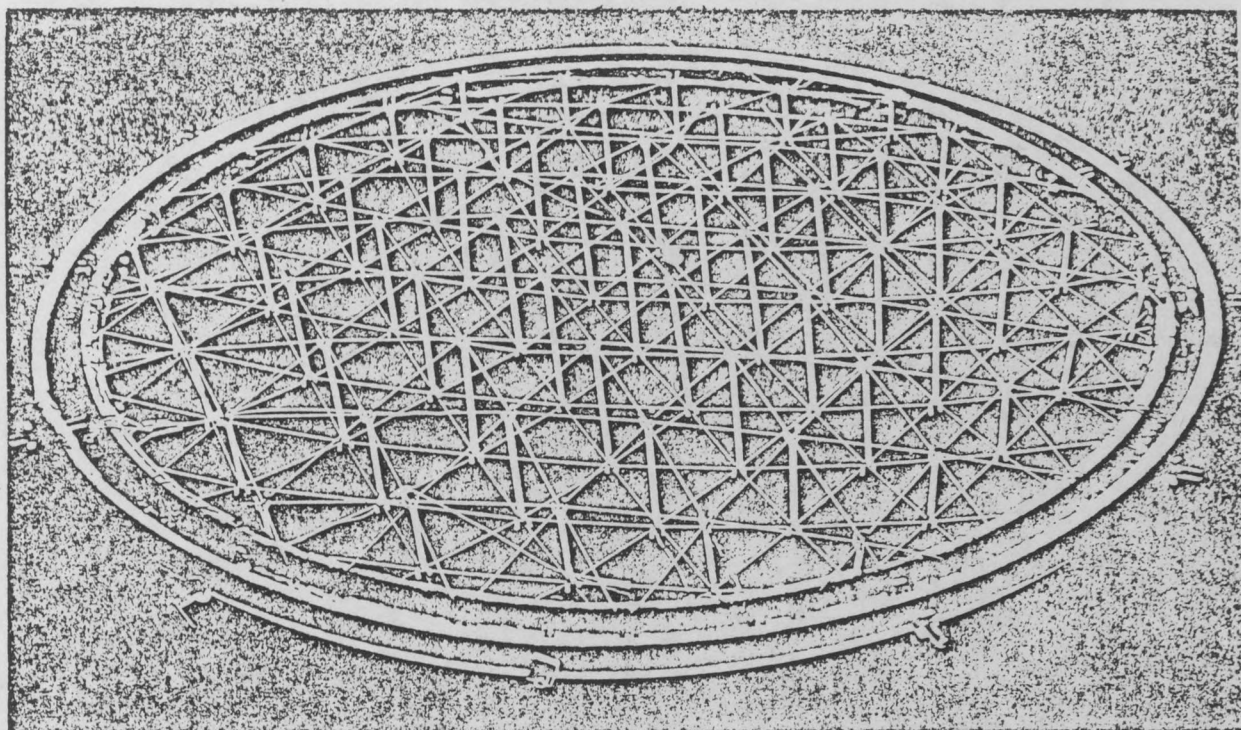
Coupole bipyramidée. ENSBA. 1969

Bipyramide hexagonale à trois axes. Technion. 1970

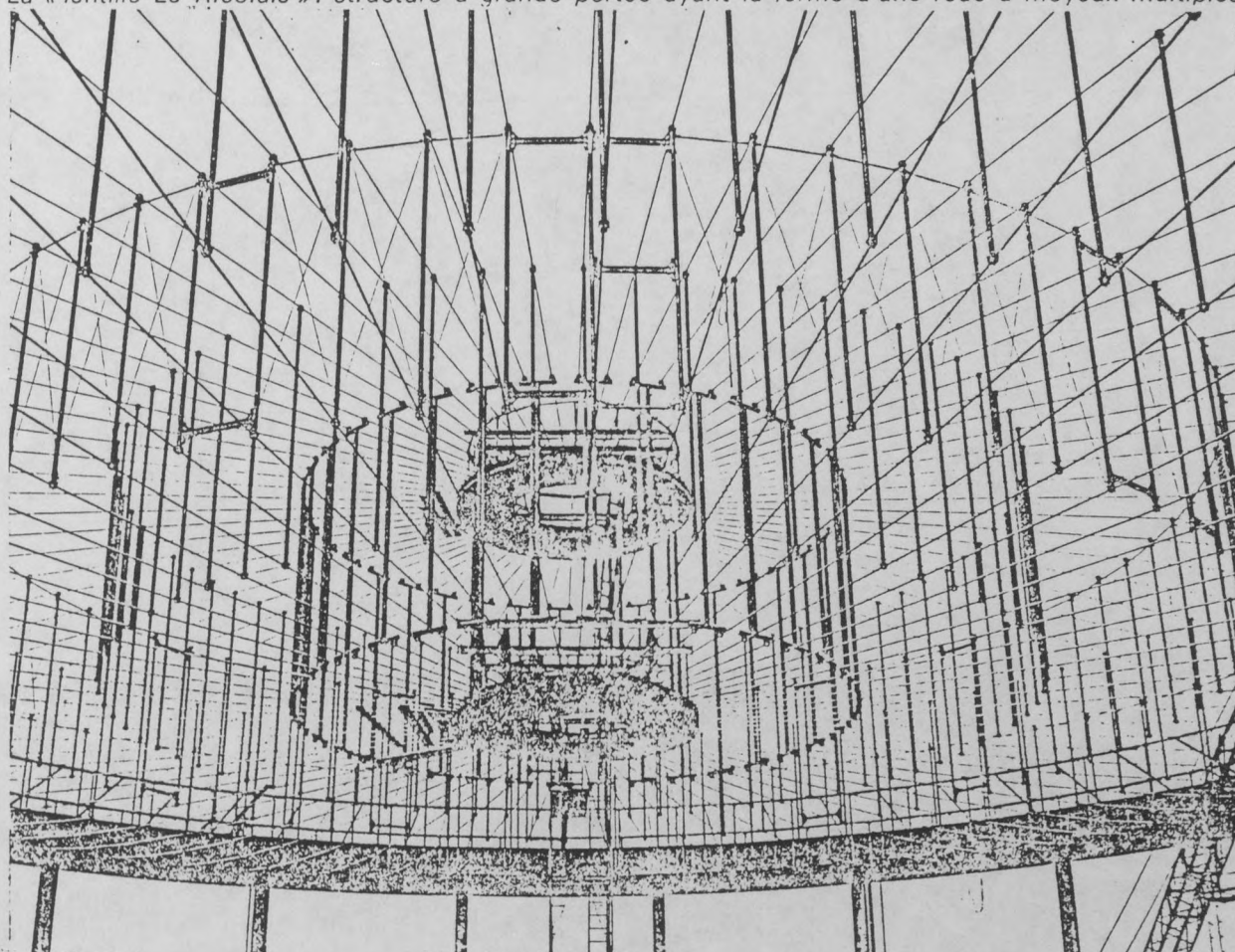




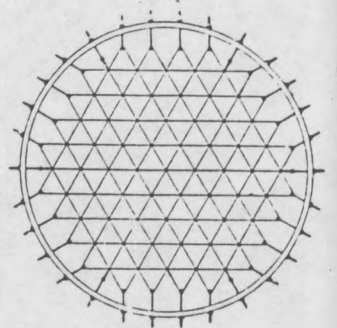
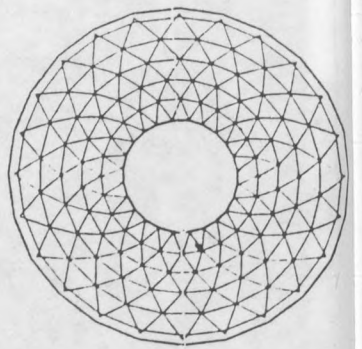
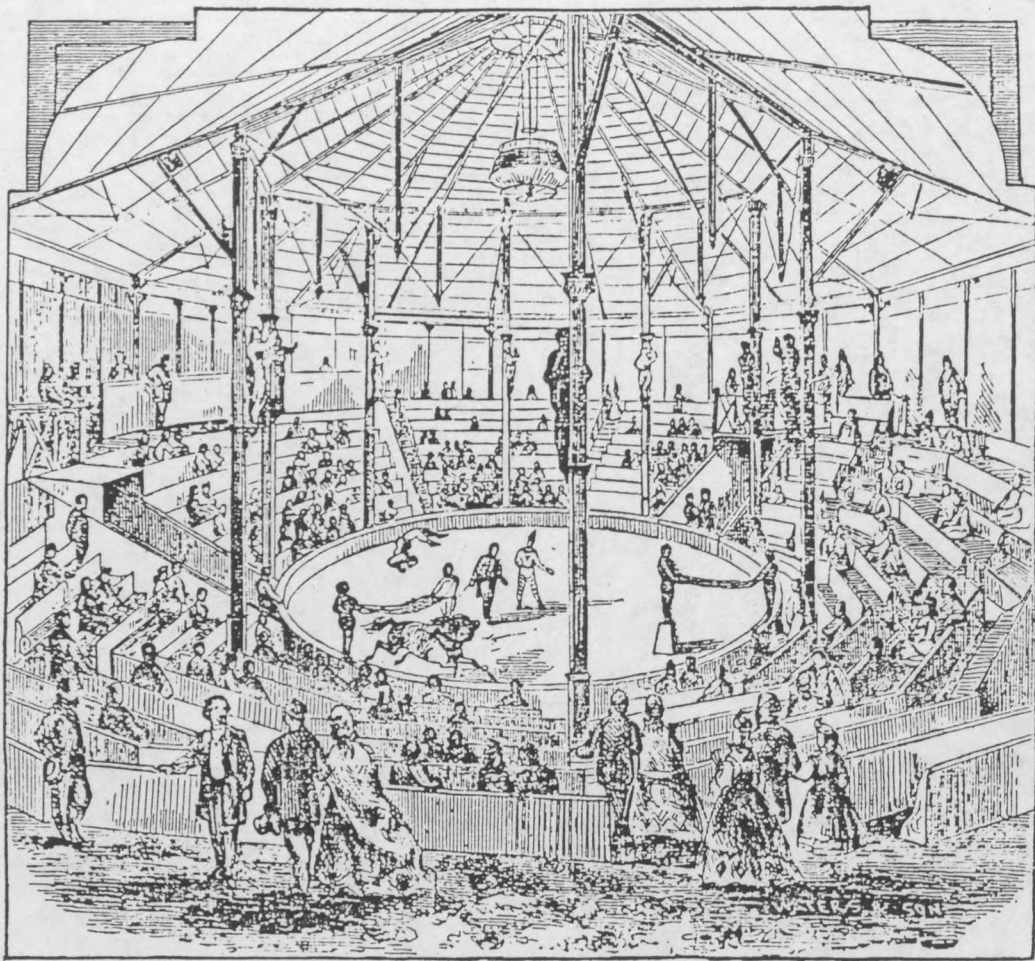
Multiroues de bicyclette. Le Ricolais



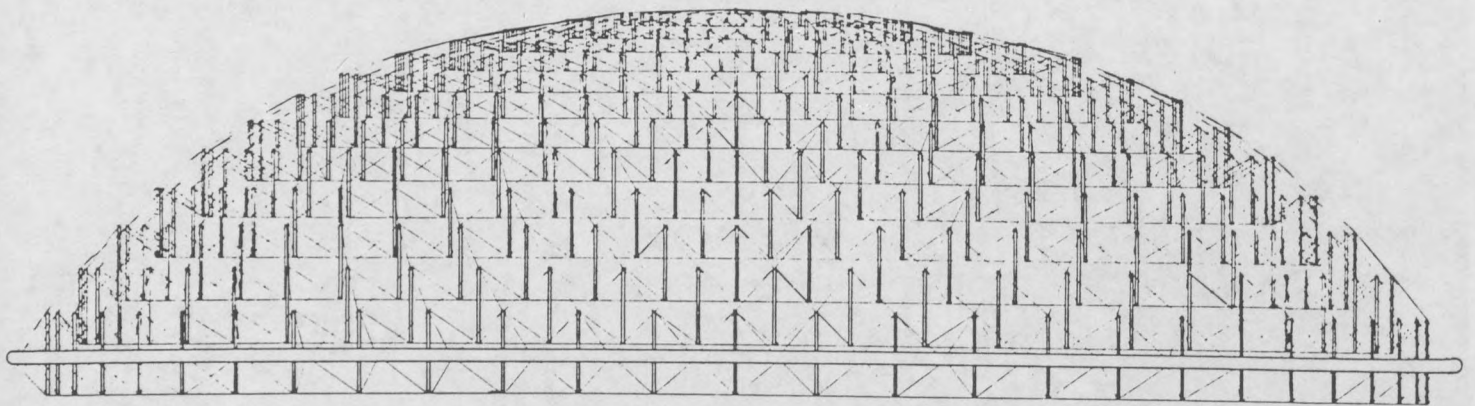
La « lentille Le Ricolais » : structure à grande portée ayant la forme d'une roue à moyeux multiples



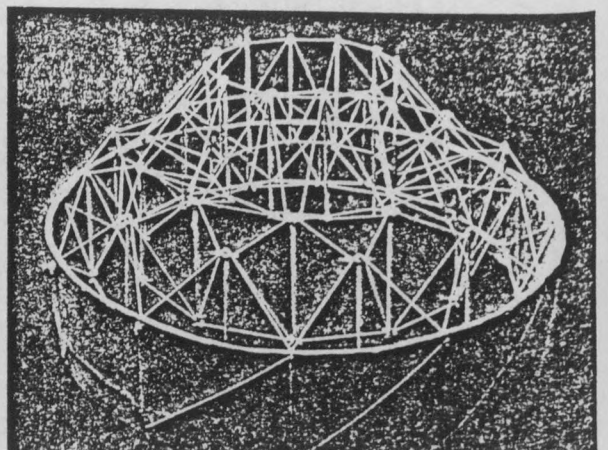
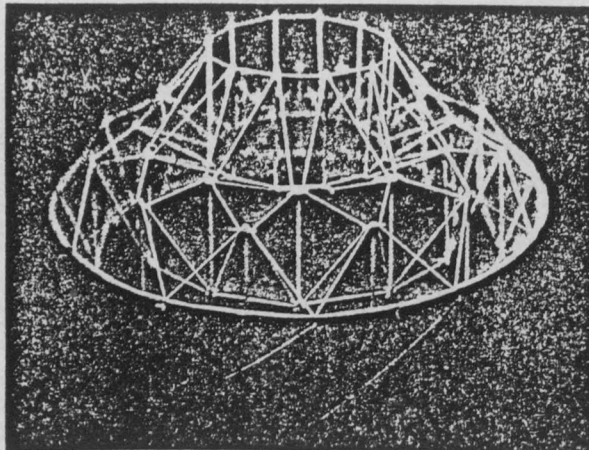
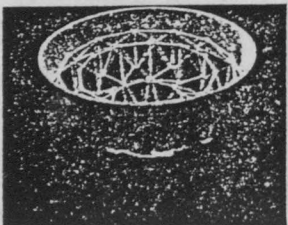
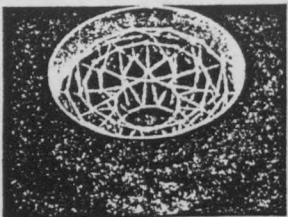
Bicycle wheel roof structure for the
Utica Memorial Auditorium, New York,
1960.



Hippothcatron New York 1864

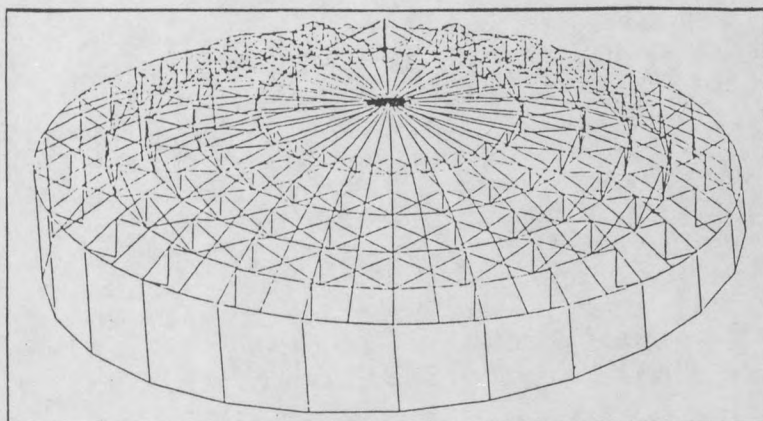
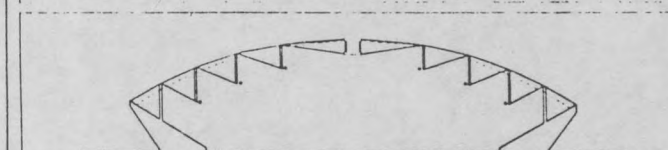
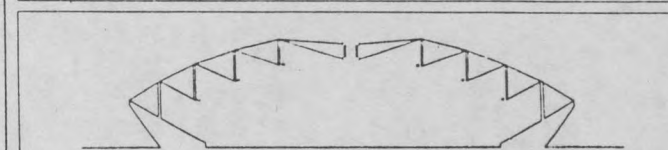
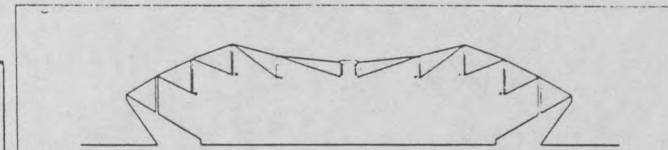
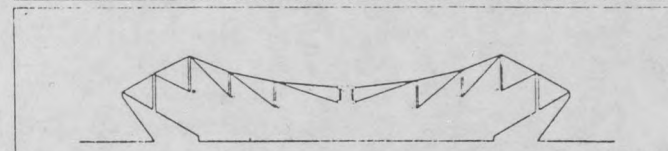
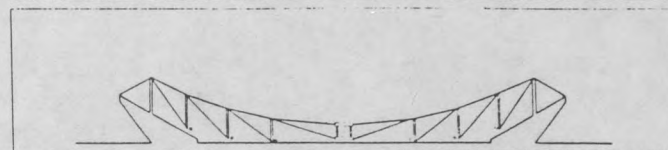
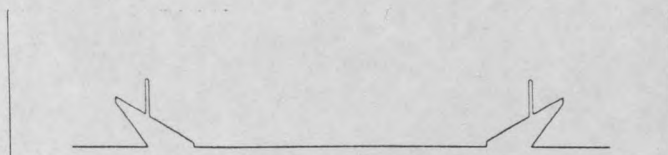
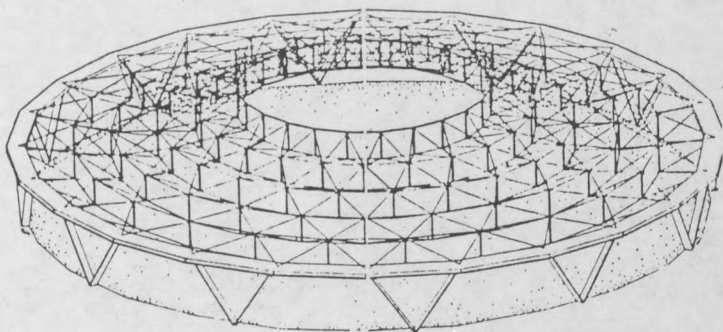


Minke

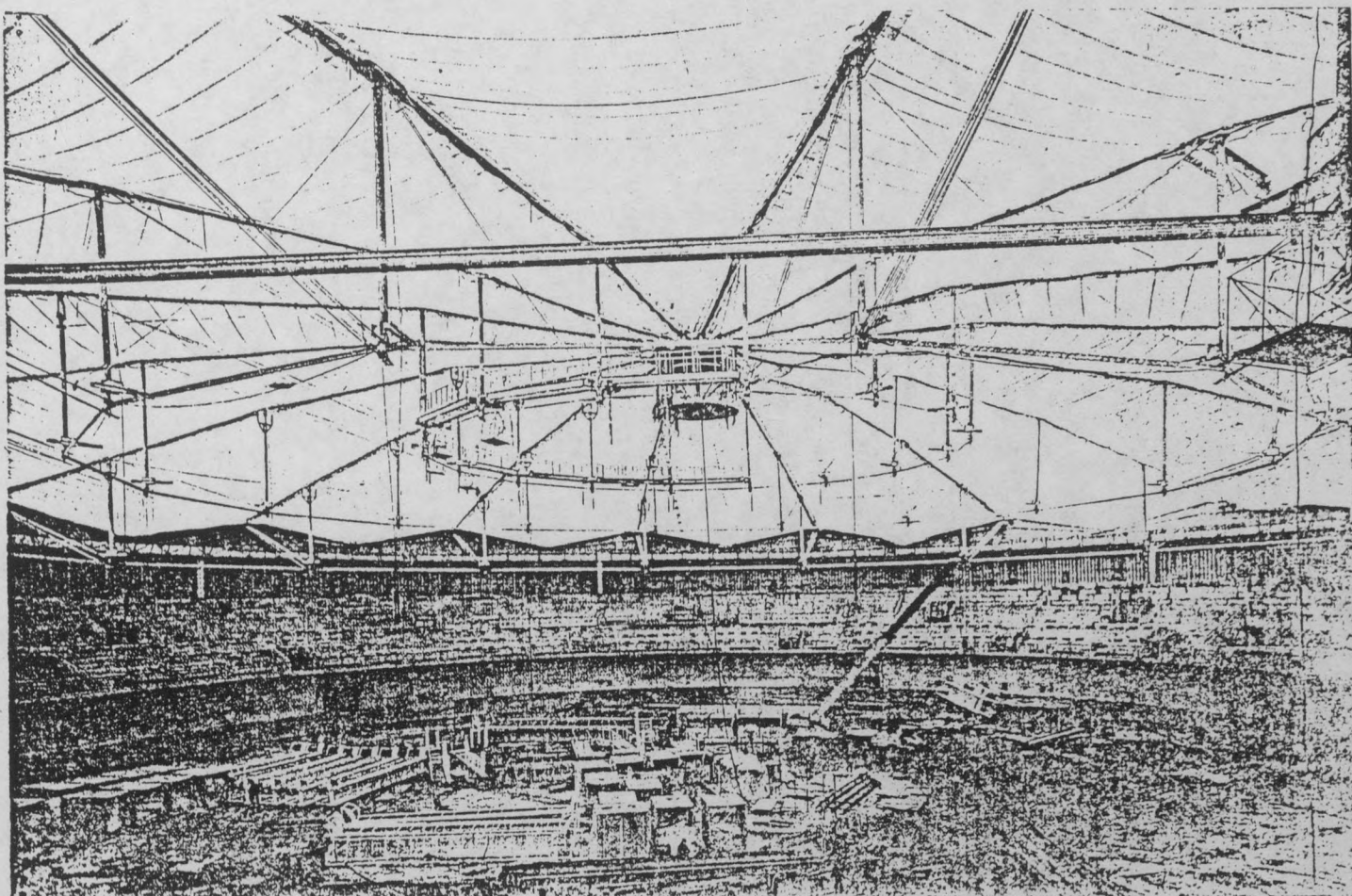


Dômes lenticulaires bombés.

Fuller



Dôme lenticulaire auto-érectile. Geiger



Gymnastics arena that seats 13,000 is the larger of the two cable domes built in Seoul, South Korea.

Tous les simplex polygonaux planaires, avec un réseau tendu plus complexe, donc à plusieurs sommets, peuvent être transformés en roue à plusieurs axes. En multipliant le nombre des moyeux on obtient ainsi des roues "lenticulaires" encore plus aplatiees utilisées comme couverture à grande portée. De la déformation de ces "lentilles" bi-convexes dérivent les coupoles incurvées, concaves-convexes, à capacité de portée encore plus grandes, utilisées pour les stades.

Partant de la même configuration triangulaire bipyramidale en introduisant un tendeur axial, on obtient cette fois le simplex inverse où les barres obliques radiales sont comprimées, le triangle "équatorial" devenant une ceinture tendue (Fig.62). Les variantes polygonales d'allure de plus en plus aplatiee forment autant de simplex stables qu'on peut appeler de type parapluie (Fig.62a,b,c). Le mécanisme réglable de ce système est semblable, en effet, au fonctionnement du parapluie, donc facilement adaptable pour constituer des structures mobiles: ouvrables ou escamotables.



Fig.62

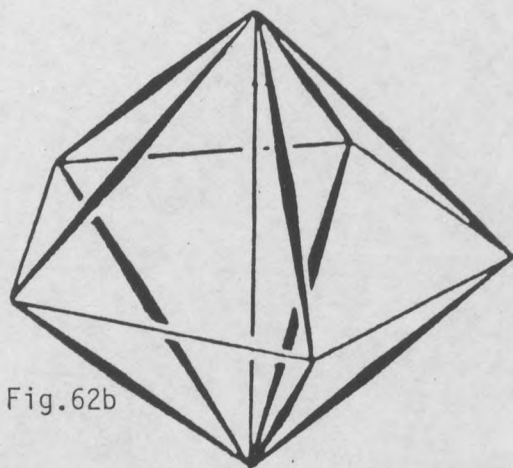


Fig.62b

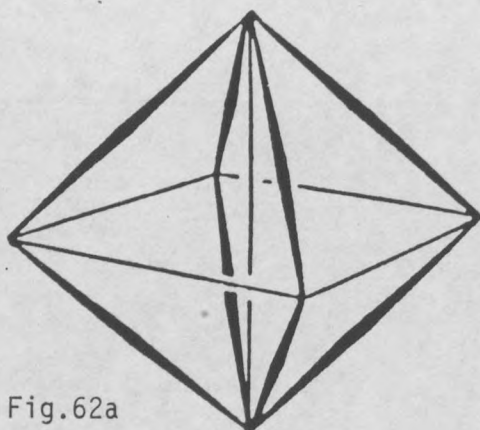


Fig.62a

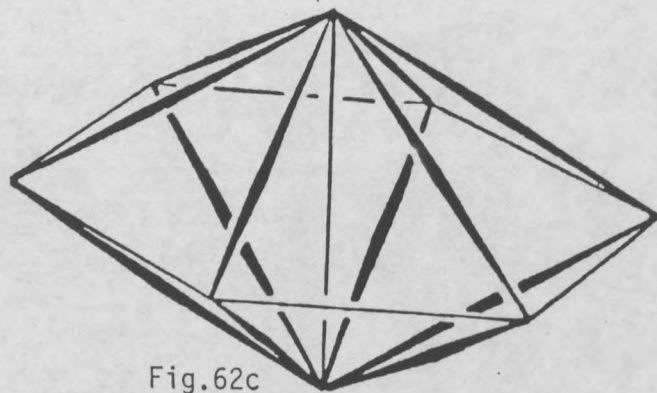
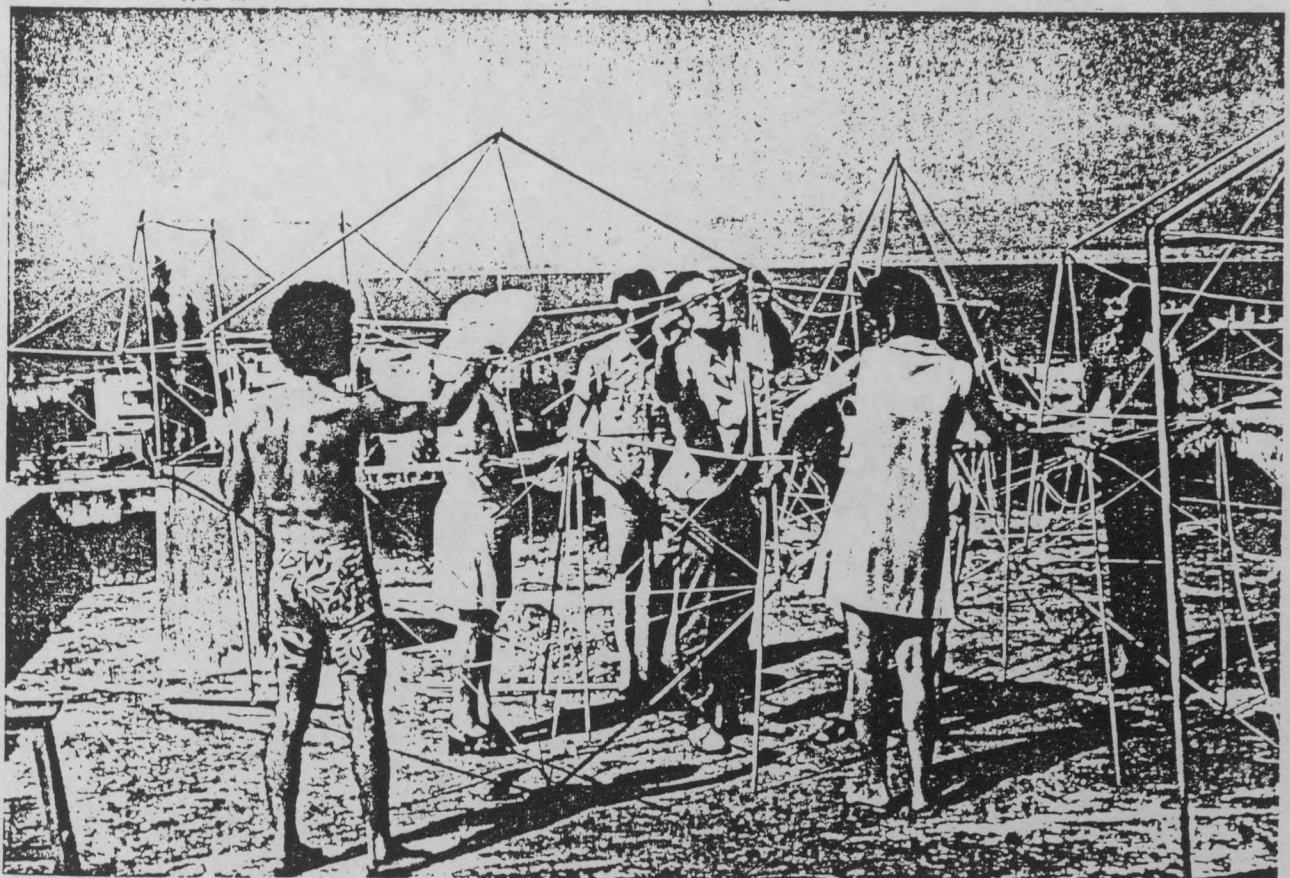
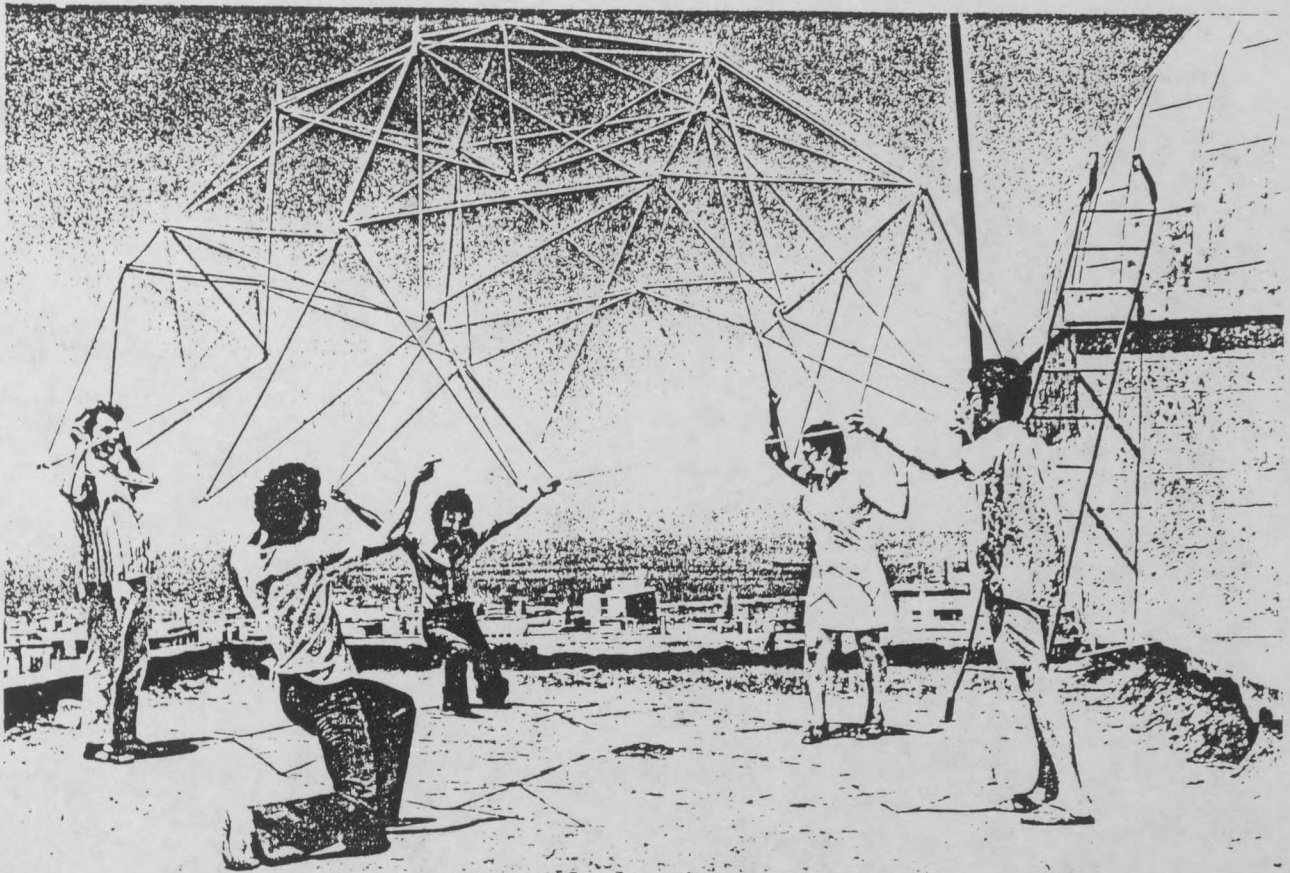
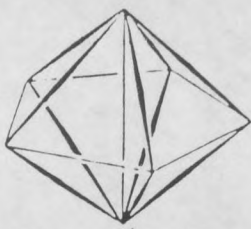
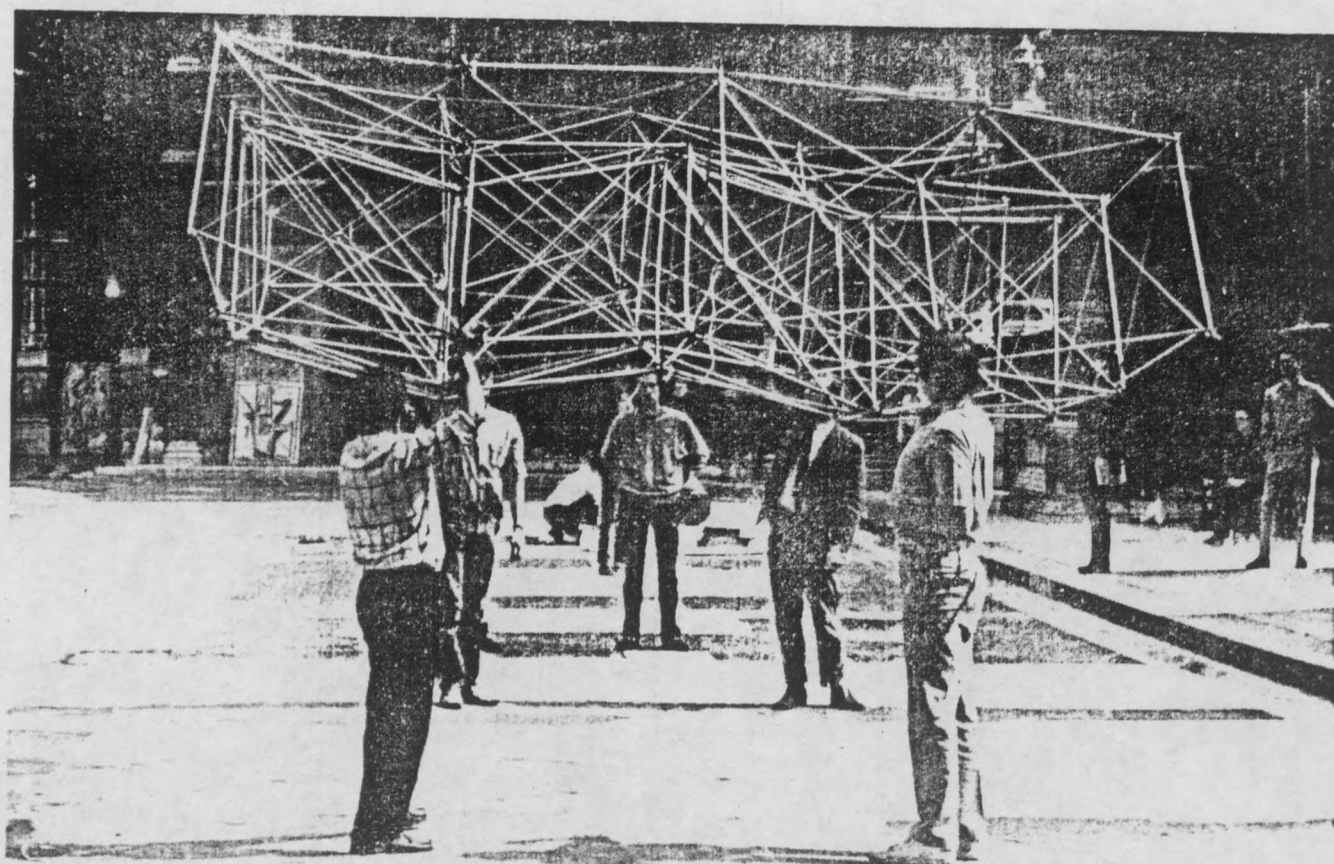
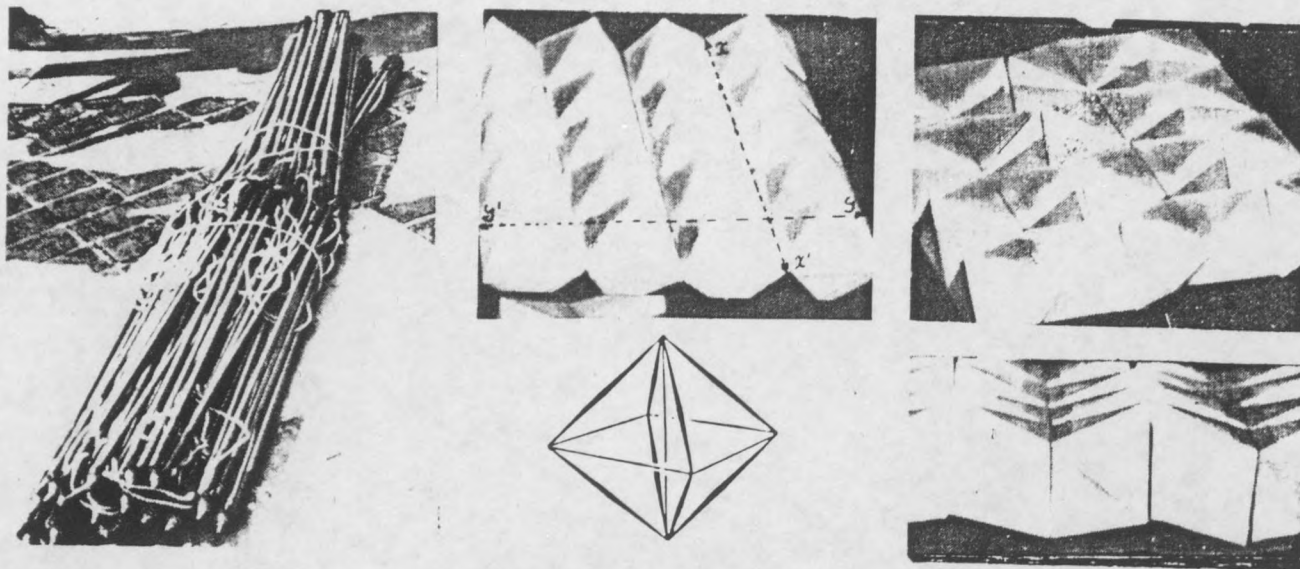


Fig.62c

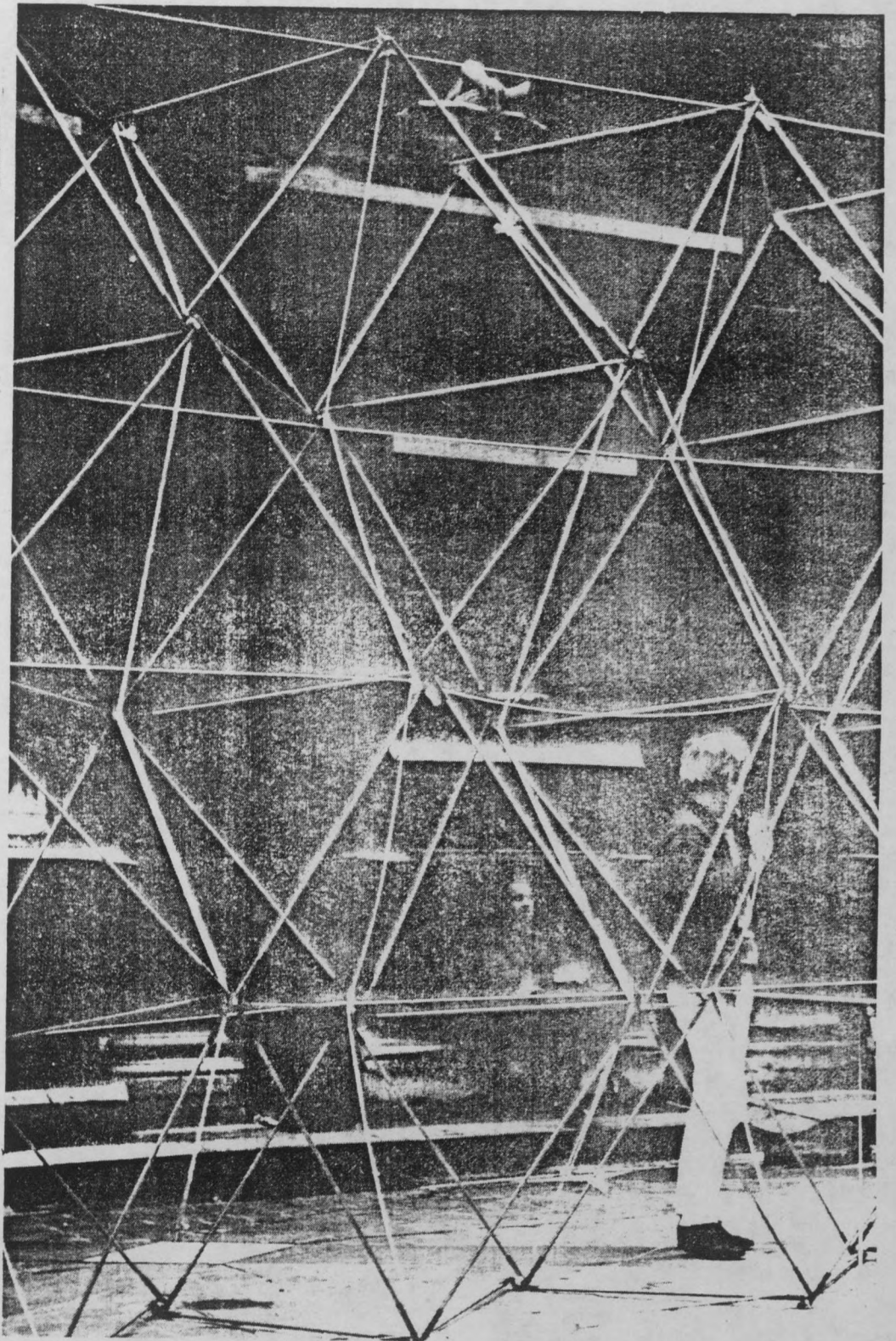
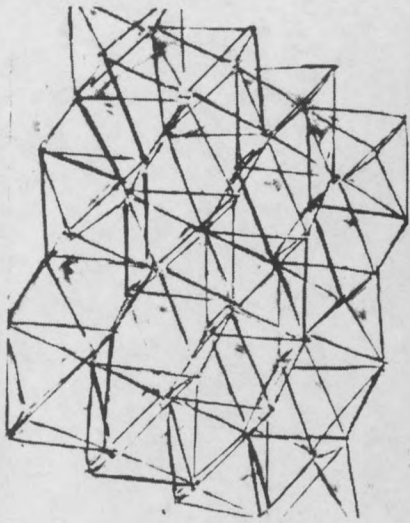


Coupoles pliante à bipyramides.

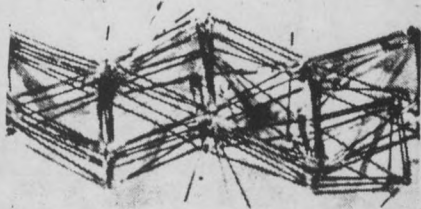
Technion. 1970

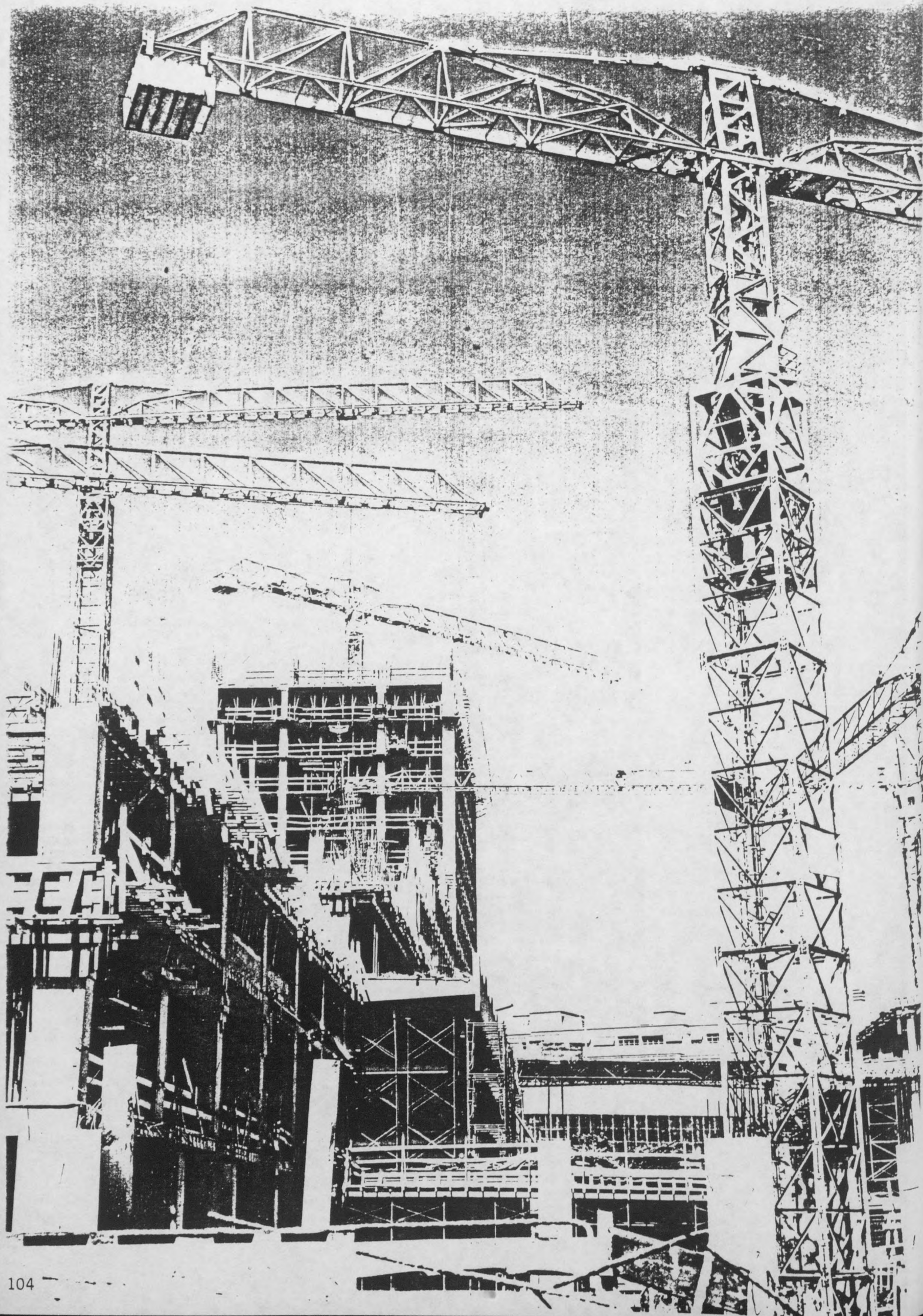


Réseau pliant octaédrique. ENSBA. 1969



Réseau pliant octaédrique. ENSBA. 1969





PRISMES

La troisième catégorie de simplex spatiaux est obtenue en partant des prismes, dont le cube, qui sont en quelque sorte des êtres géométriques biplanaires étant issus de la translation droite et orthogonale des polygones. Si on fait abstraction des variantes moins régulières, ces prismes, dits archimédiens, ont donc deux bases polygonales parallèles et des faces latérales carrées.

Le plus simple des prismes, le triangulaire, peut être stabilisé en rendant indéformables ses faces latérales (Fig.63). Les autres ayant pour base des polygones déformables demandent des contreventements horizontaux qu'on peut réaliser de façon primitive à l'aide d'un simplex planaire quelconque, en l'occurrence par des croix de Saint André ou des stellations tendues (Fig.63a,b,c). Cette opération essentiellement planaire se pratique fréquemment dans le bâtiment, bien qu'outre le croisillon tout autre simplex planaire pourrait être choisi: résille minimale, division étoilée, etc.

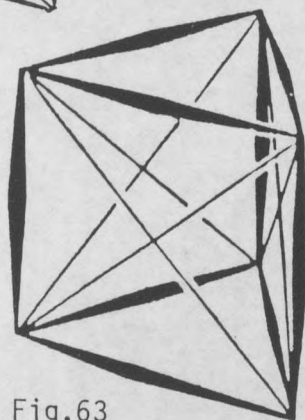
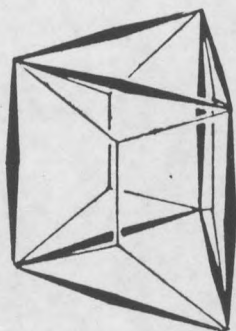
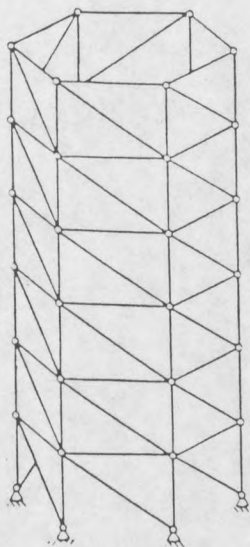


Fig.63

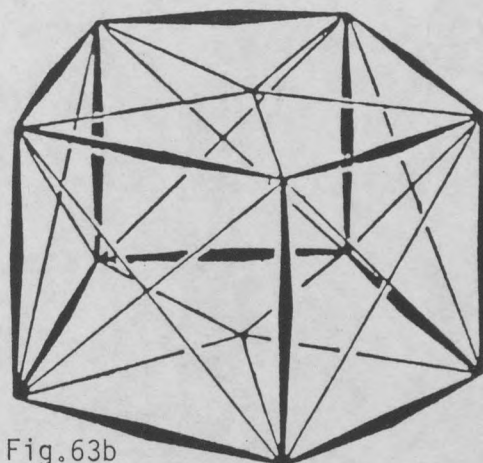


Fig.63b

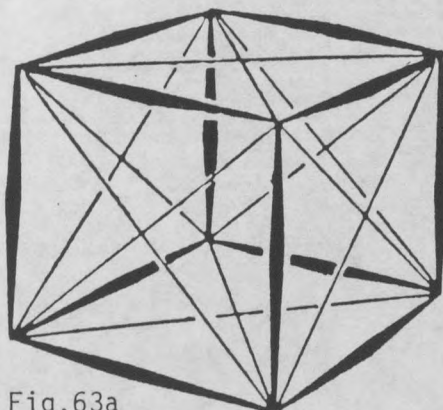


Fig.63a

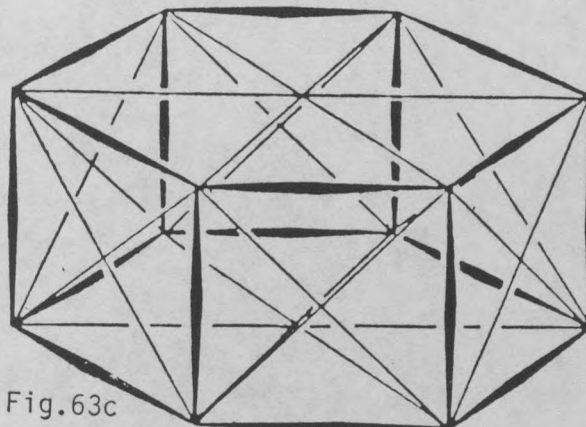
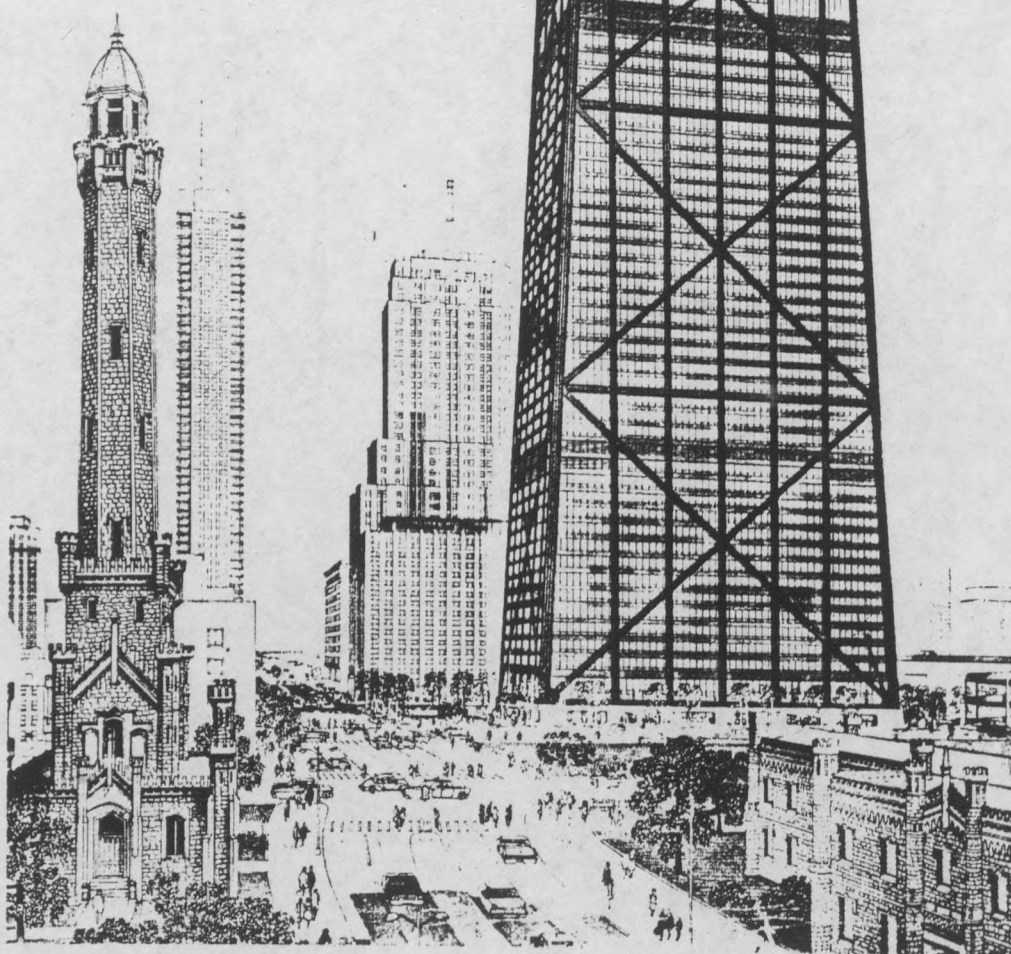
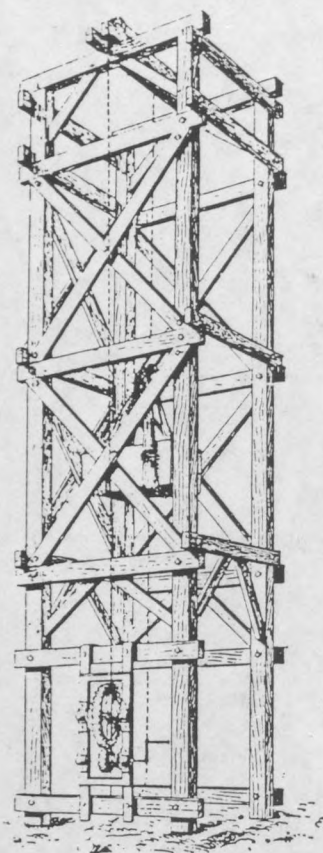
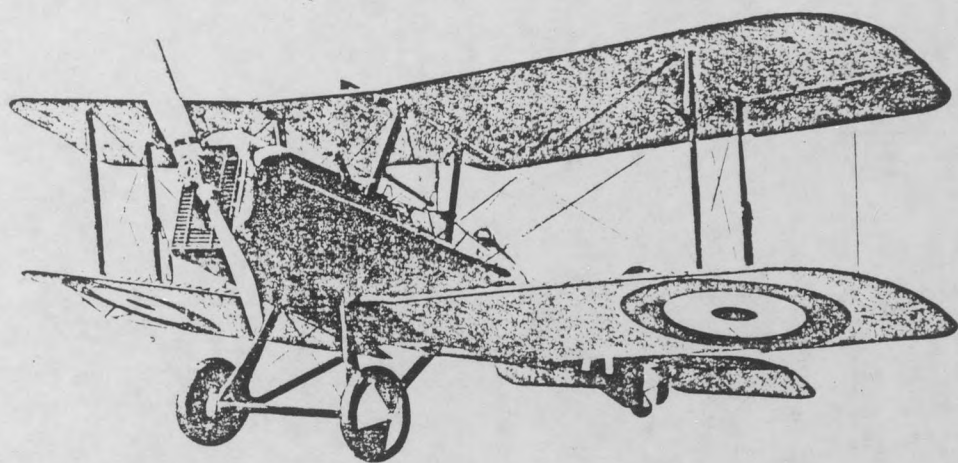


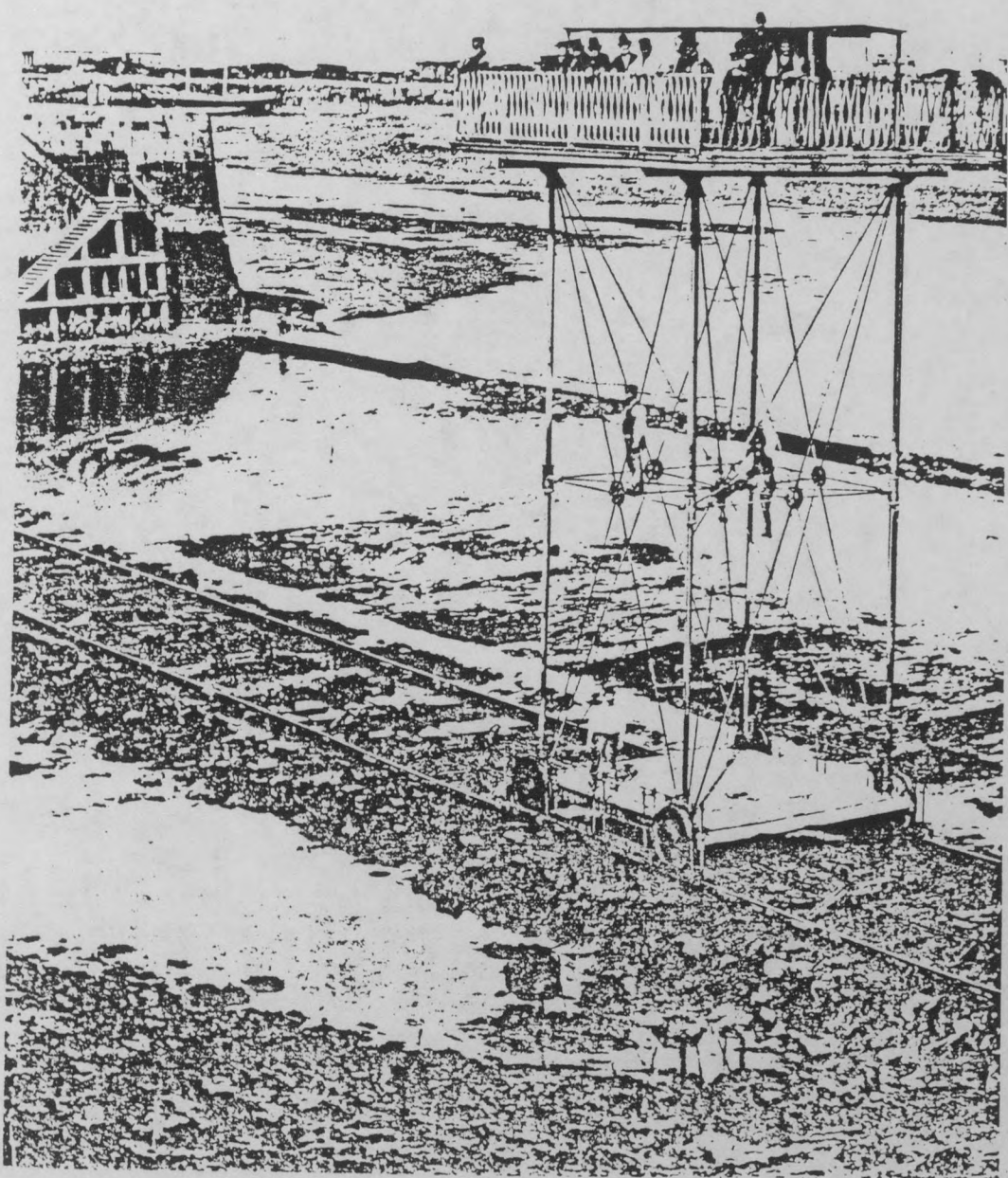
Fig.63c



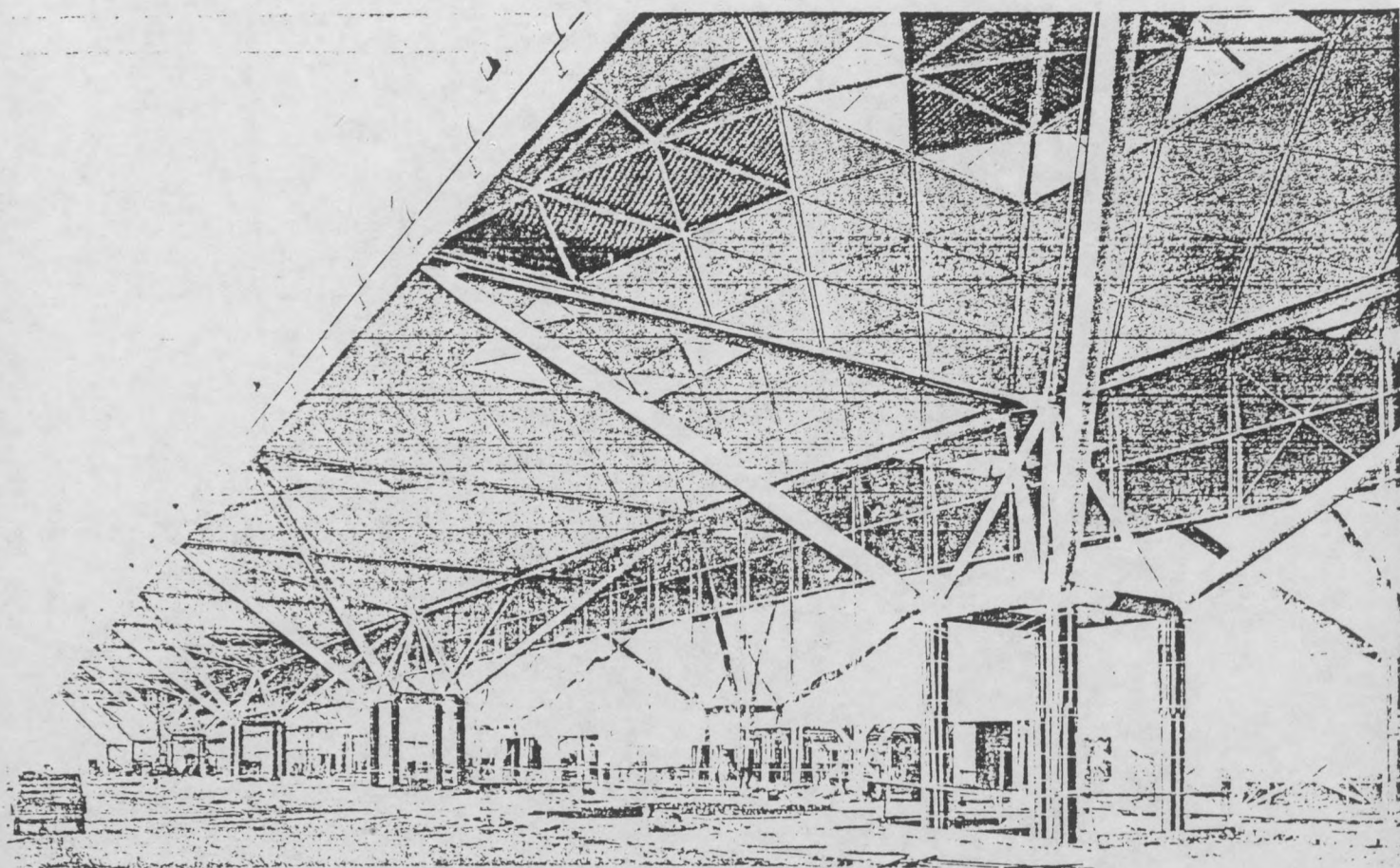
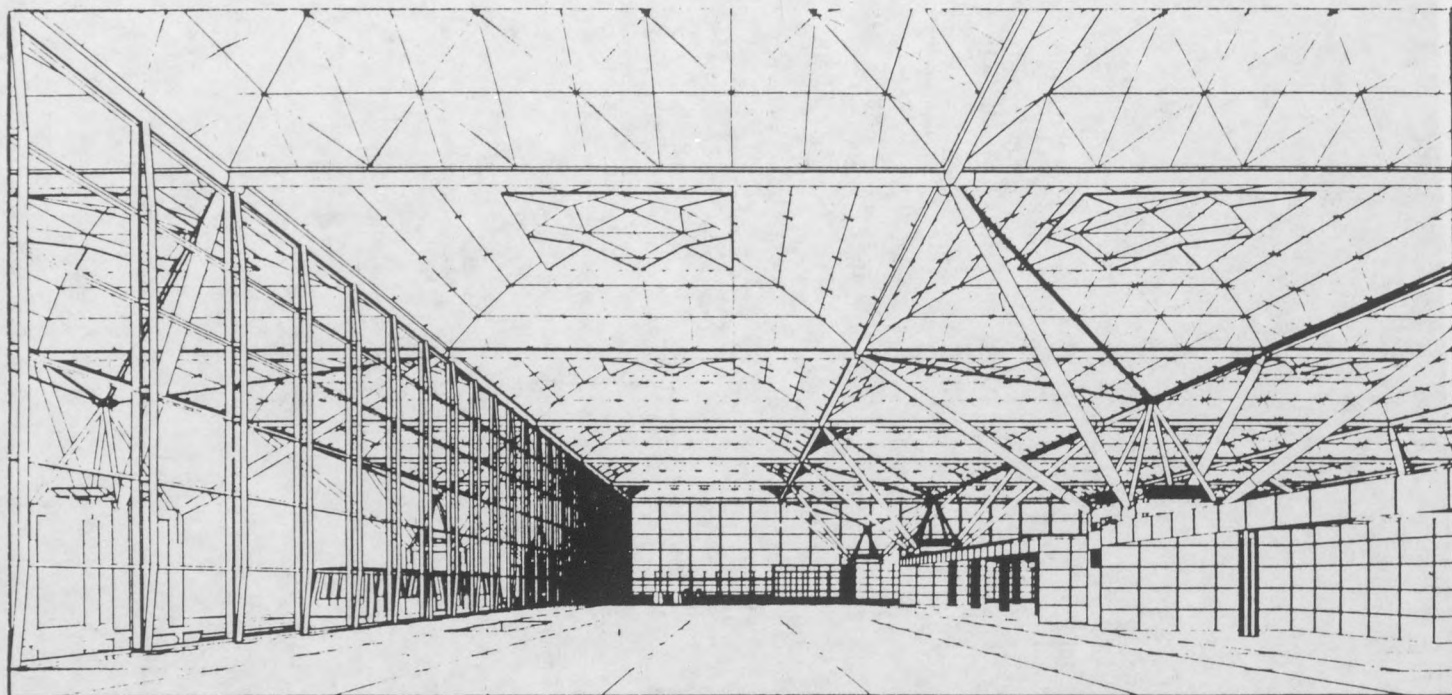
Tours croisillonnées



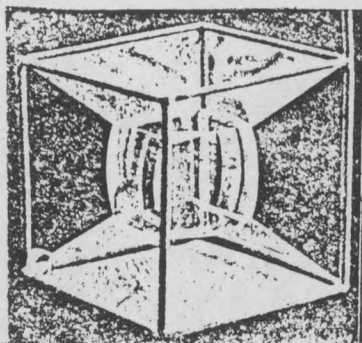
Biplan à croisillons tendus



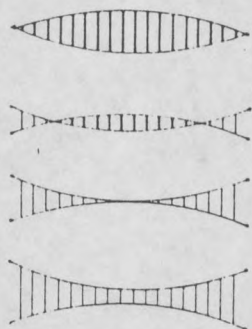
Transbordeur. Saint Mâlo



Trapézoïdes centrés Aéroport. Stansel. Foster



Forme d'équilibre intermédiaire



Une autre méthode est la stabilisation spatiale des prismes par le centrage, qui peut être interprété morphologiquement comme fondé sur l'utilisation de leurs formes involuées, où à chaque face du prisme est substituée une pyramide rentrante, le sommet commun à chacune étant le centre du solide. Les pyramides rentrées voisines ayant des arêtes également communes, cette méthode permet de stabiliser le volume avec deux fois moins de tirants que les stellations planaires.

L'archétype de cette gamme de structure qu'on peut appeler anti-roue de bicyclette, le moyeux étant réduit à un point et la jante s'élargissant en un cylindre, est la roue triangulaire (Fig.64). Cette dénomination se justifie au fur et à mesure qu'on augmente le nombre de côtés de la base polygonale (Fig.64a,b,c). En introduisant des tendeurs intermédiaires reliant les tirants radiaux on peut les transformer en autant de caténoïdes et créer ainsi une structure tendue dont la variante circulaire est appelée "lentille involuée" qui est également convertible en une couverture autostable.

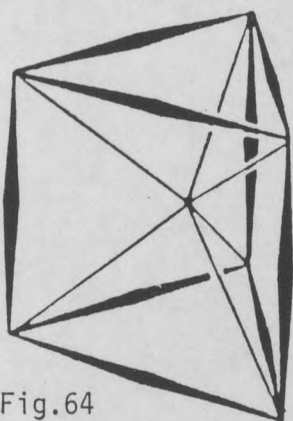


Fig.64

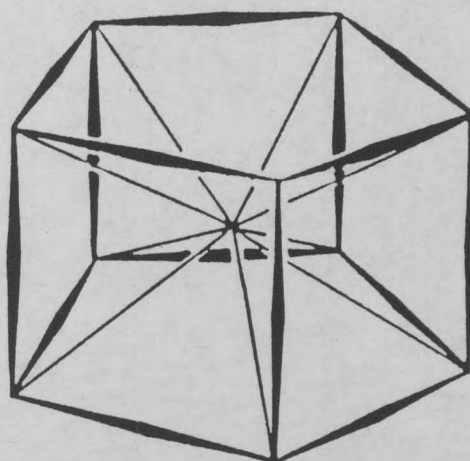


Fig.64b

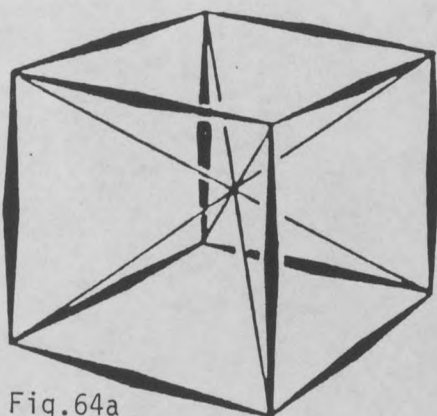


Fig.64a

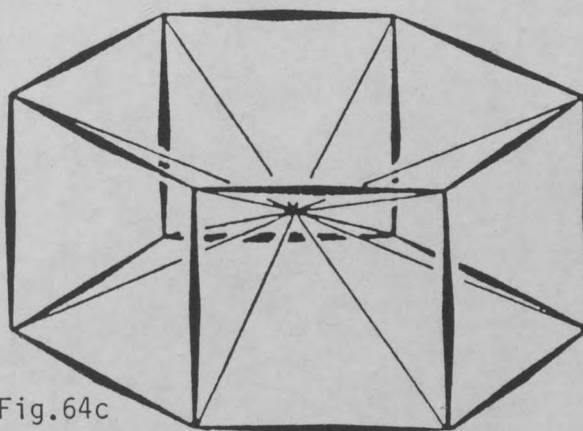
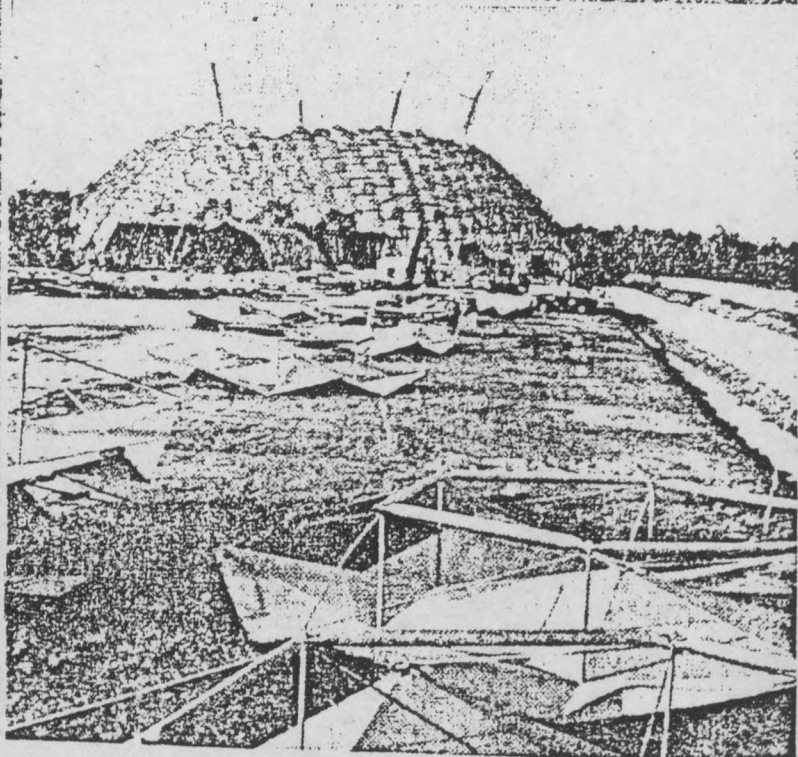
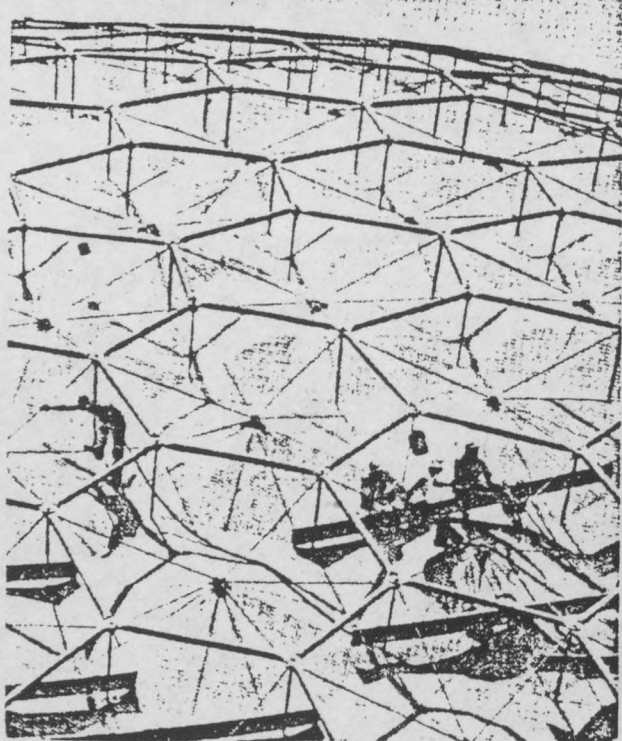
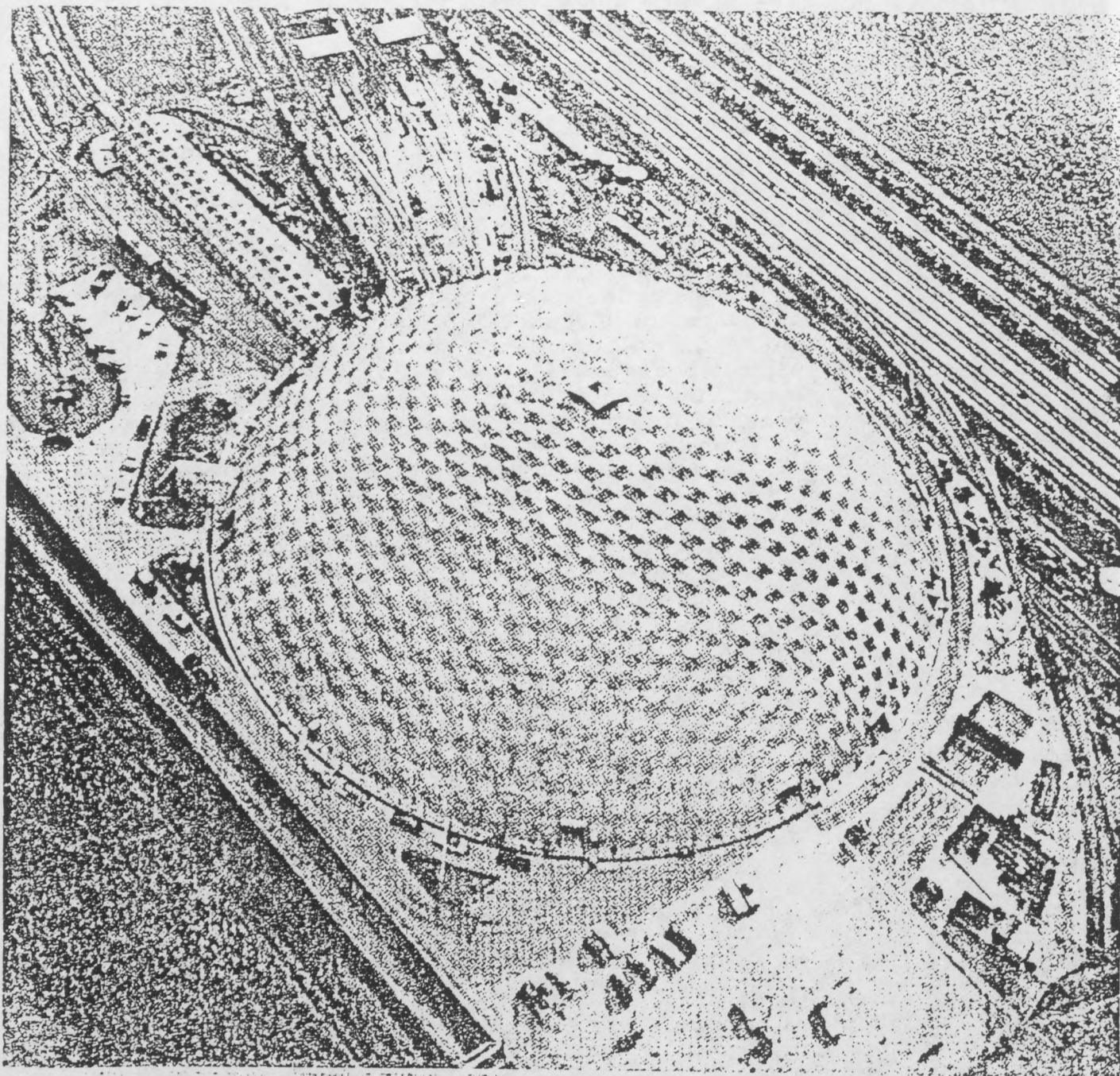
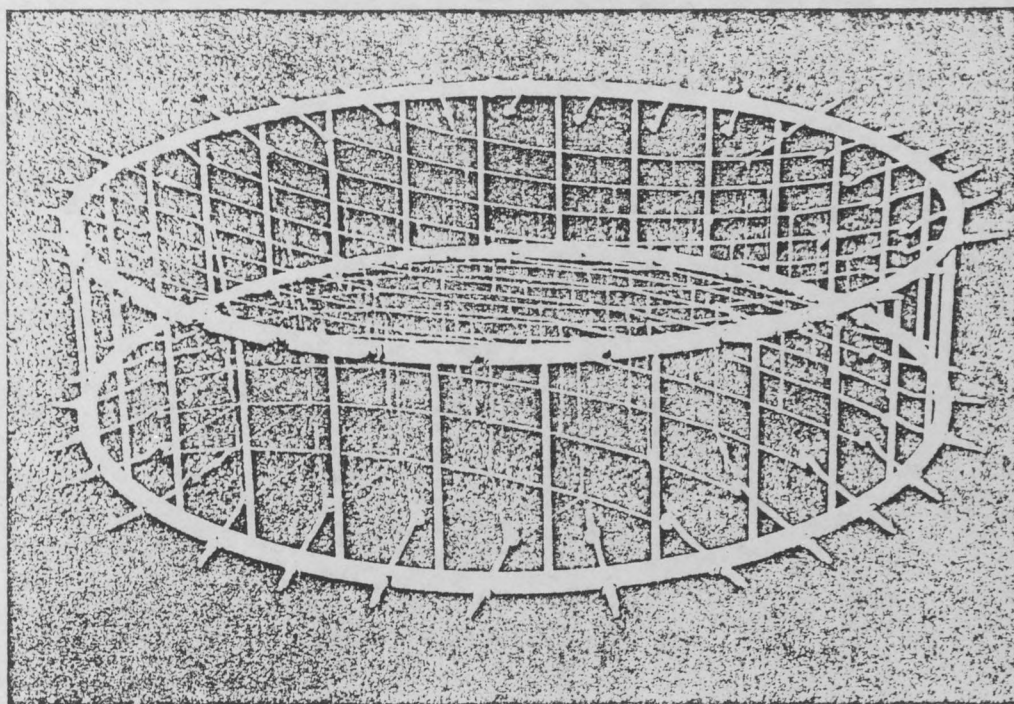
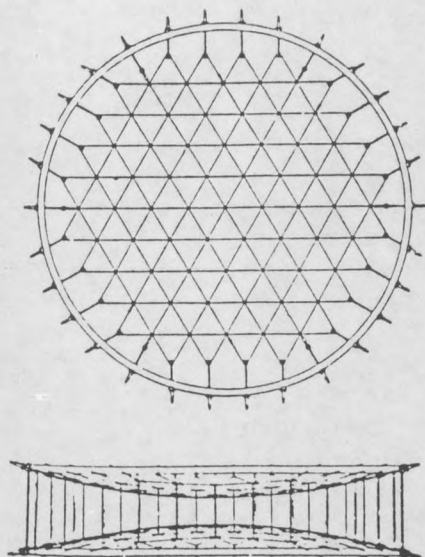


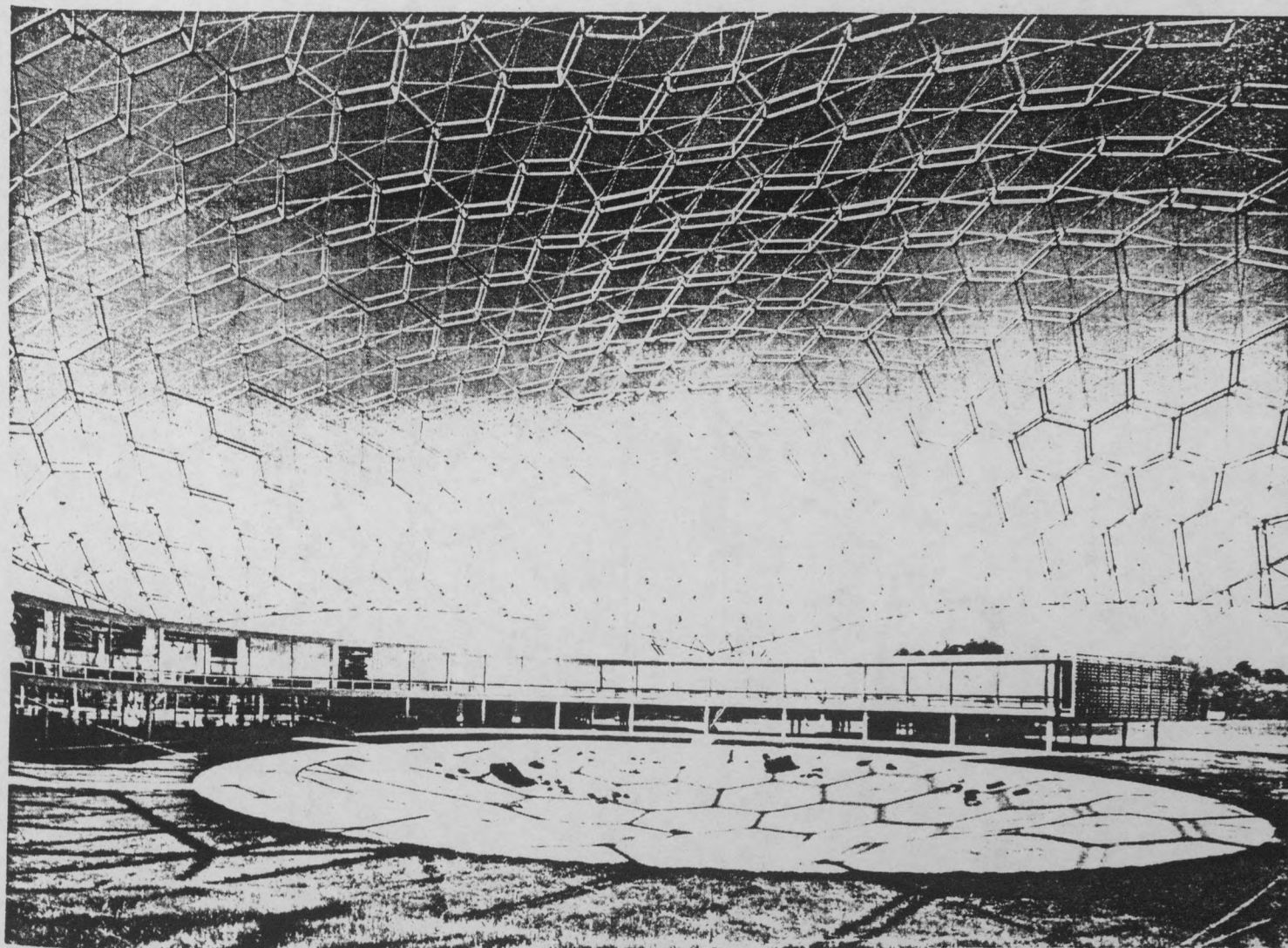
Fig.64c



Union Tank dome 1960 Baton Rouge 384ft.



Lentille inverse biconcave. Le Ricolais



L'inversion de ces simplex prismatiques tendus à l'intérieur, comprimés à la périphérie, donne naissance à une autre gamme de prismes stables qui se révèle encore plus légère. La stellation à barres comprimées ne contient plus que les deux cinquièmes des composants et non les trois cinquièmes, les barres étant en outre plus courtes. Le premier de cette série rappelle le trépied utilisé comme tabouret pliant (Fig.65), les variantes polygonales gardent cette propriété, les stellations pouvant être réduites à un faisceau par l'extension d'une des deux ceintures polygonales (Fig.65a,b,c).

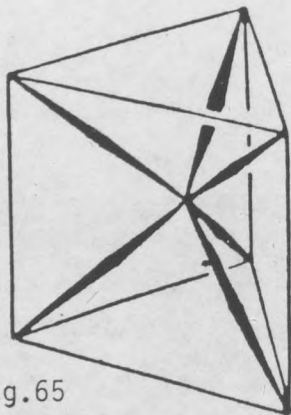


Fig.65

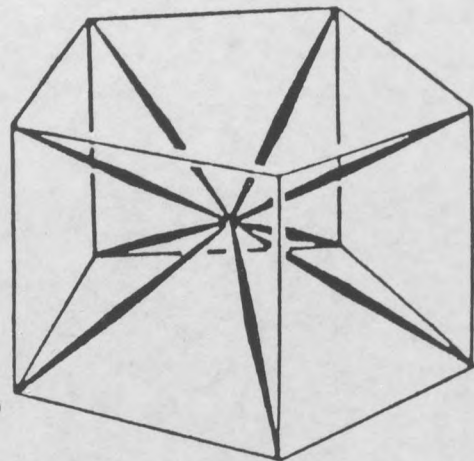


Fig.65b

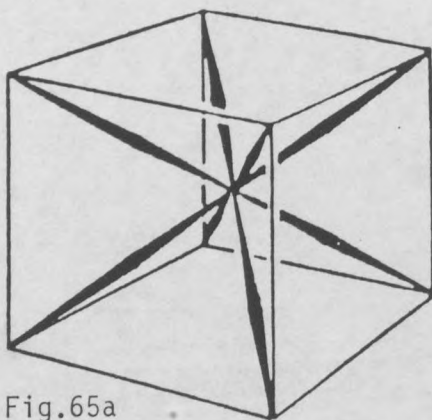


Fig.65a

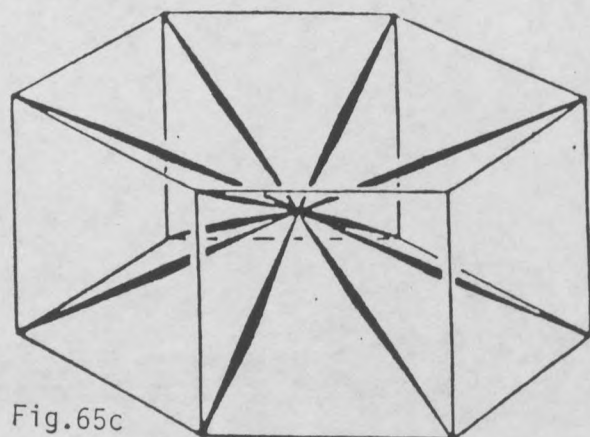
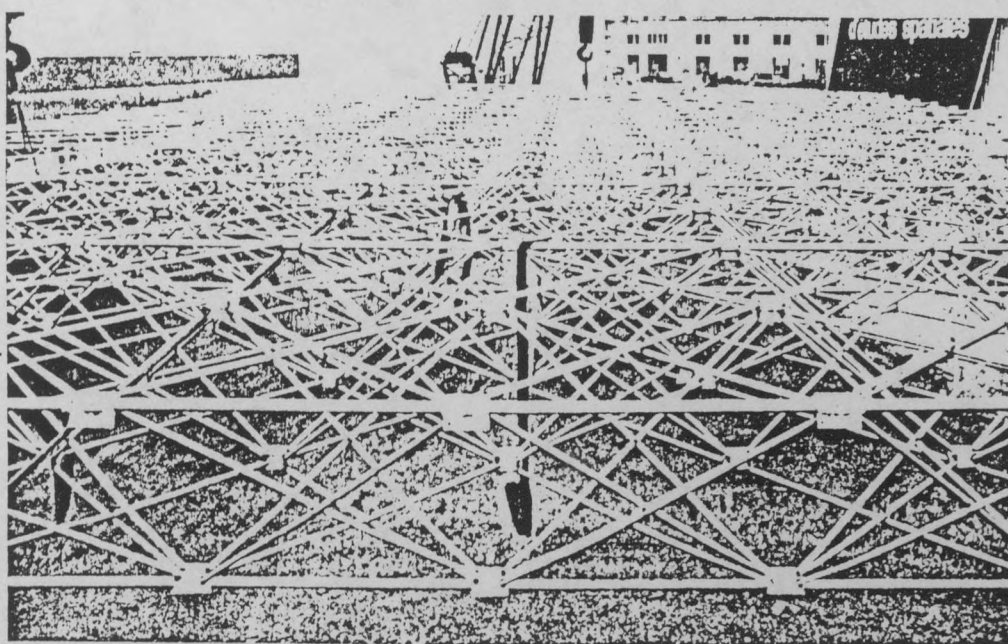
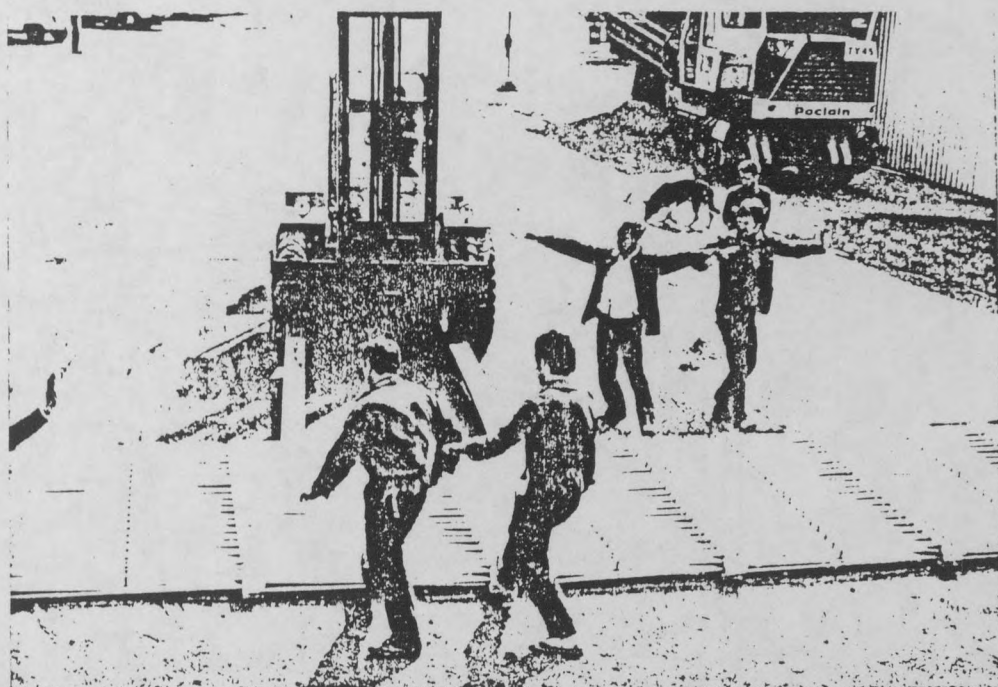
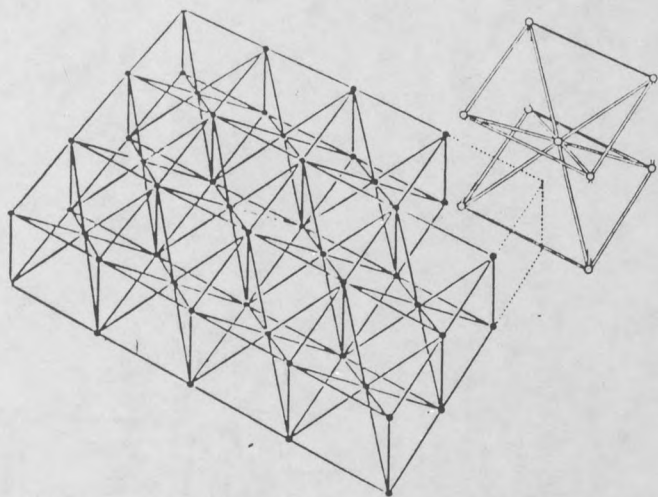
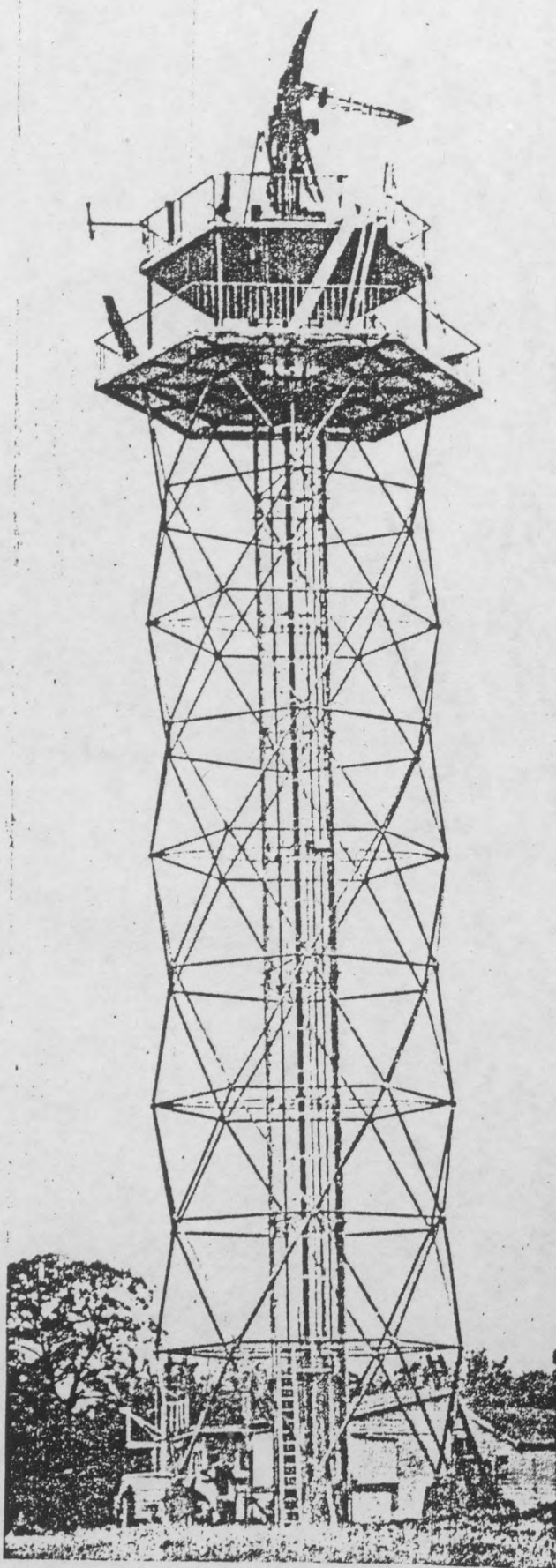


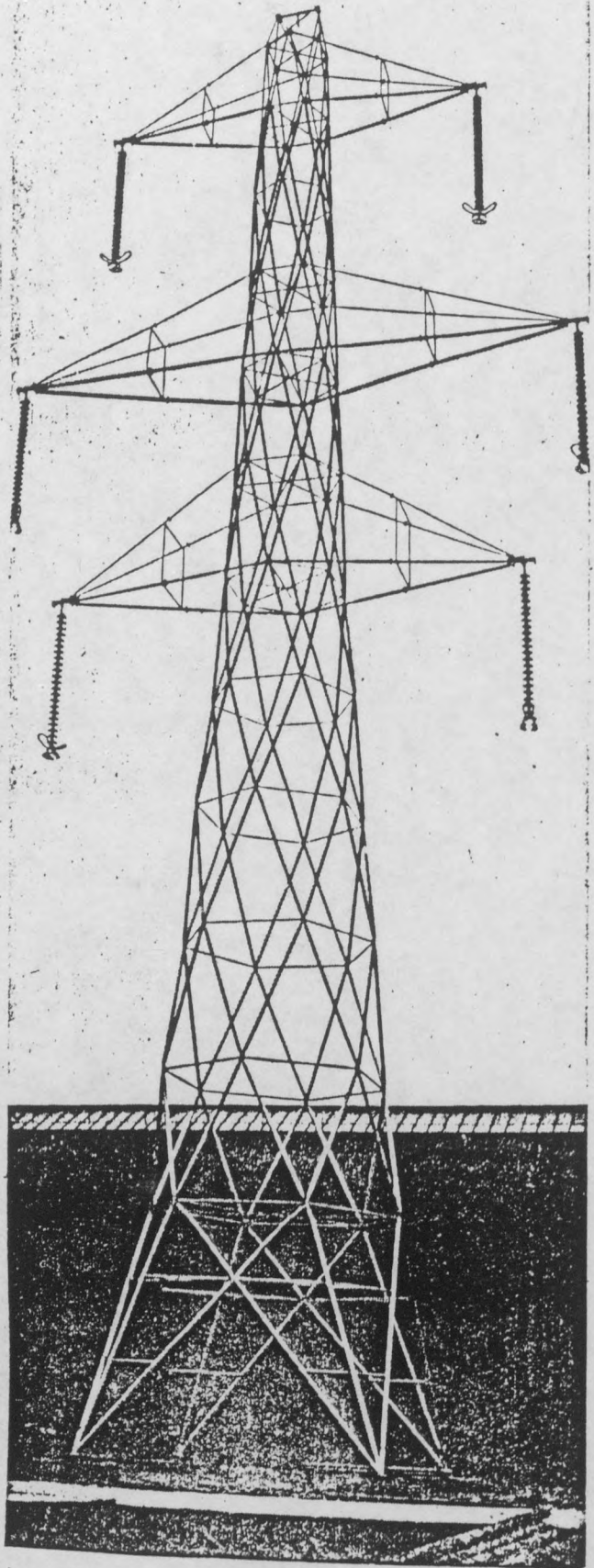
Fig.65c



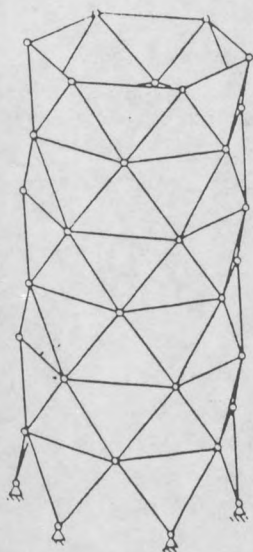
Réseau prismatique pliant. Soisson



Pylones antiprismatiques



ANTIPRISMES



La quatrième classe de simplex dérive de l'antiprisme; forme ayant comme le prisme deux bases polygonales parallèles mais en dérotation relative qui, étant latéralement triangulée, est d'emblée plus stable que le prisme. En principe, le contreventement des deux bases à l'aide d'un simplex planaire quelconque rend la configuration indéformable.

Dans la série réalisée intégralement de barres rigides le premier antiprisme, le triangulaire, est par nature stable. Sa forme coïncide, en fait, avec l'octaèdre, solide régulier deltoédrique, qu'on a rencontré aussi sous une autre interprétation en tant que bipyramide carrée (Fig.66). Les autres antiprismes de cette série deviennent rigides par l'application d'une croix de Saint André ou d'une autre stellation raidissant les deux bases (Fig.66a,b,c).

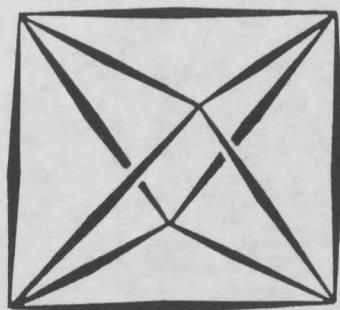


Fig.66

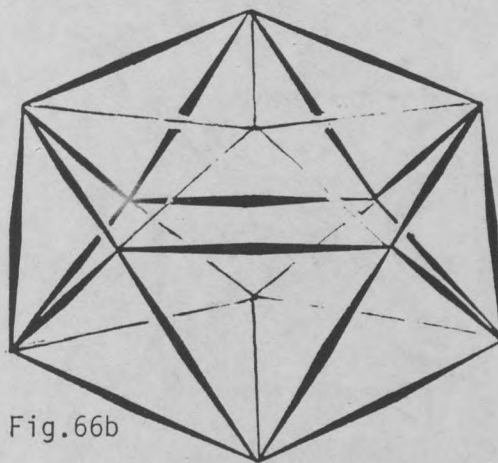


Fig.66b

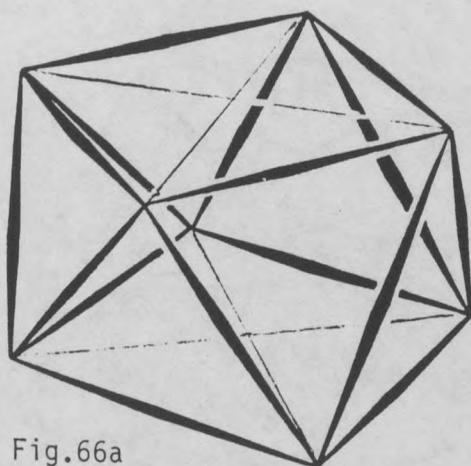


Fig.66a

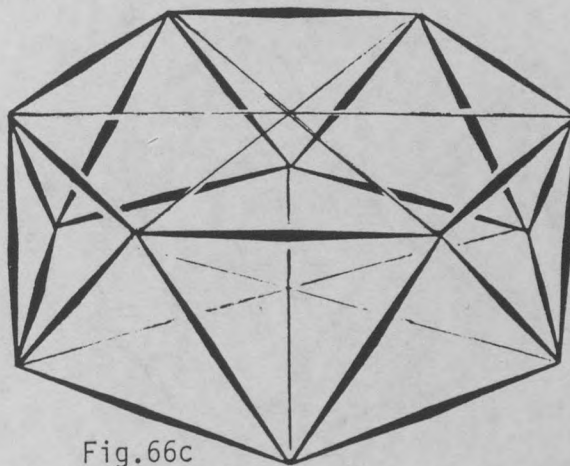


Fig.66c

La transformation centrée de l'antiprisme à l'aide de deux pyramides involuées et opposées par leur sommet commun et correspondant aux deux bases polygonales, donne d'abord une série de simplex construits de barres rigides à l'extérieur et d'un haubanage concentrique se situant à l'intérieur. Dans le premier simplex, triangulaire, et déjà stable, le haubanage semble surabondant, à moins de vouloir impliquer à l'ensemble une force de précontrainte initiale (Fig.67).

Les autres antiprismes polygonaux à haubanage centré sont autant de variantes améliorées des "roues de bicyclette" prismatiques (Fig.67a,b,c); ils sont aisément transformables en systèmes de couverture à grande portée où les tirants concentriques définissent les arêtes d'un vélum plié. A partir de ces antiprismes centrés peuvent se développer de nouvelles variantes de la lentille involuée avec un réseau tendu, plié et avec des lignes d'arêtes incurvées en forme de caténoïdes.

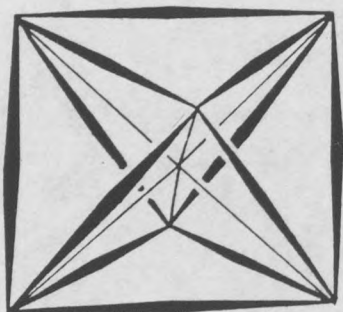


Fig.67

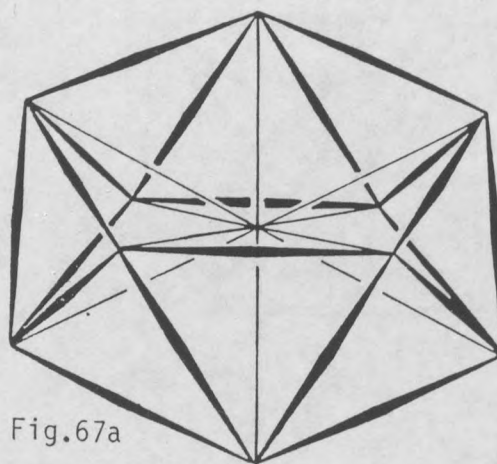


Fig.67a

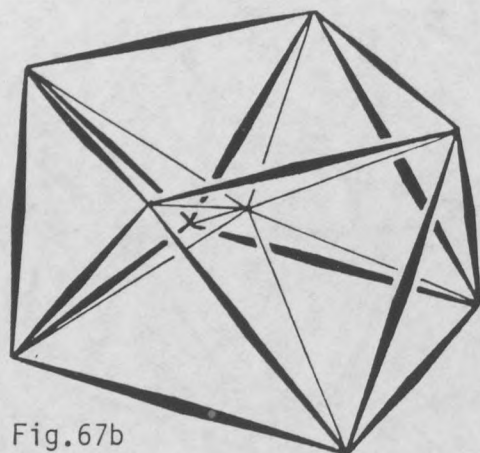


Fig.67b

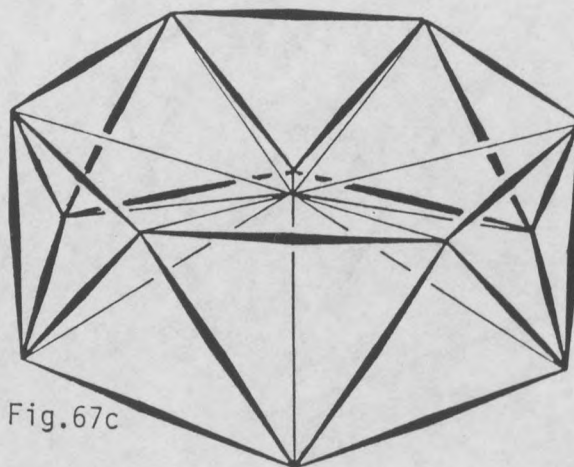


Fig.67c

L'inversion des configurations précédentes mène à des structures antiprismatiques avec une stellation spatiale concentrique composée de barres rigides qui est enserrée par un anneau triangulé tendu. L'archétype triangulaire, sera composé, cette fois, d'éléments tous nécessaires: de six barres rigides et d'un filet octaédrique tendu (Fig.68).

Dans toutes les variantes, triangulaires ou polygonales, la stellation étant transformable en faisceau, la structure est pliable ou modifiable par la manipulation de la longueur des tirants (Fig.68a,b,c). Le simplex triangulaire, sorte de tabouret de chasse, est employé pour construire des réseaux à double couche pliants qu'on peut déployer dans le plan ou même en forme de coupôles sphériques.

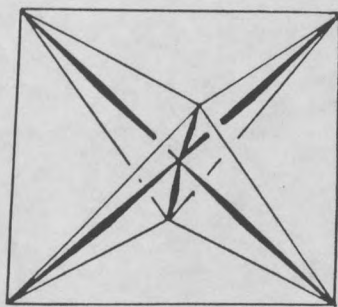


Fig.68

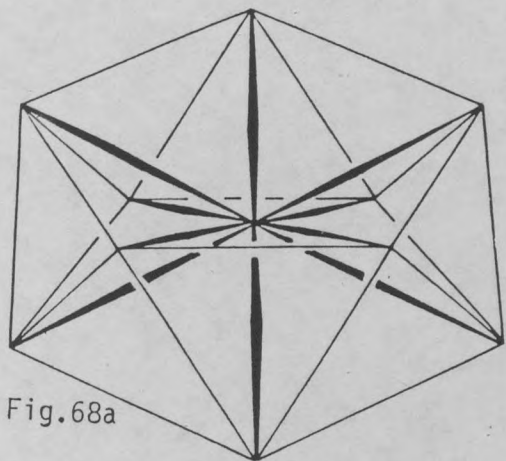


Fig.68a

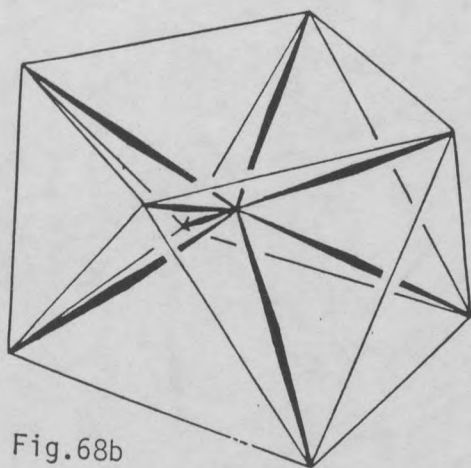


Fig.68b

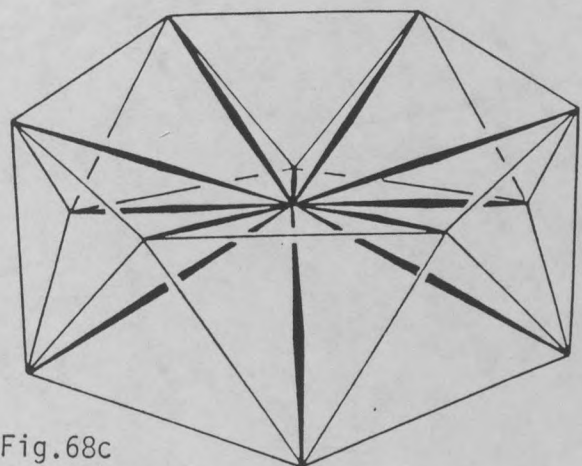
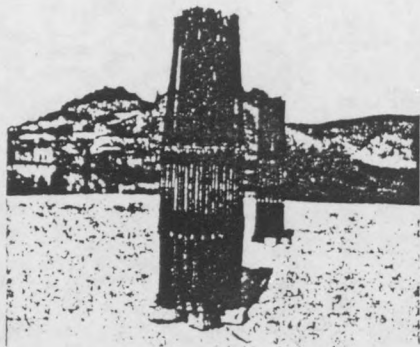
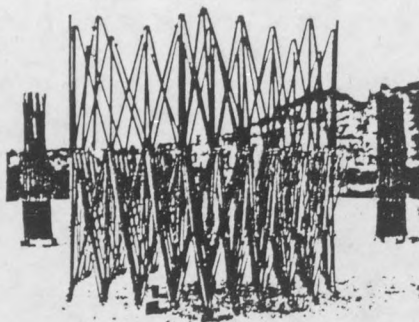


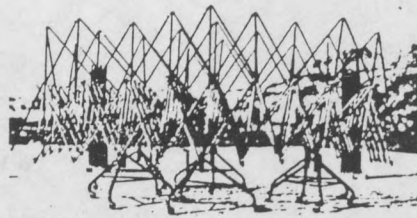
Fig.68c



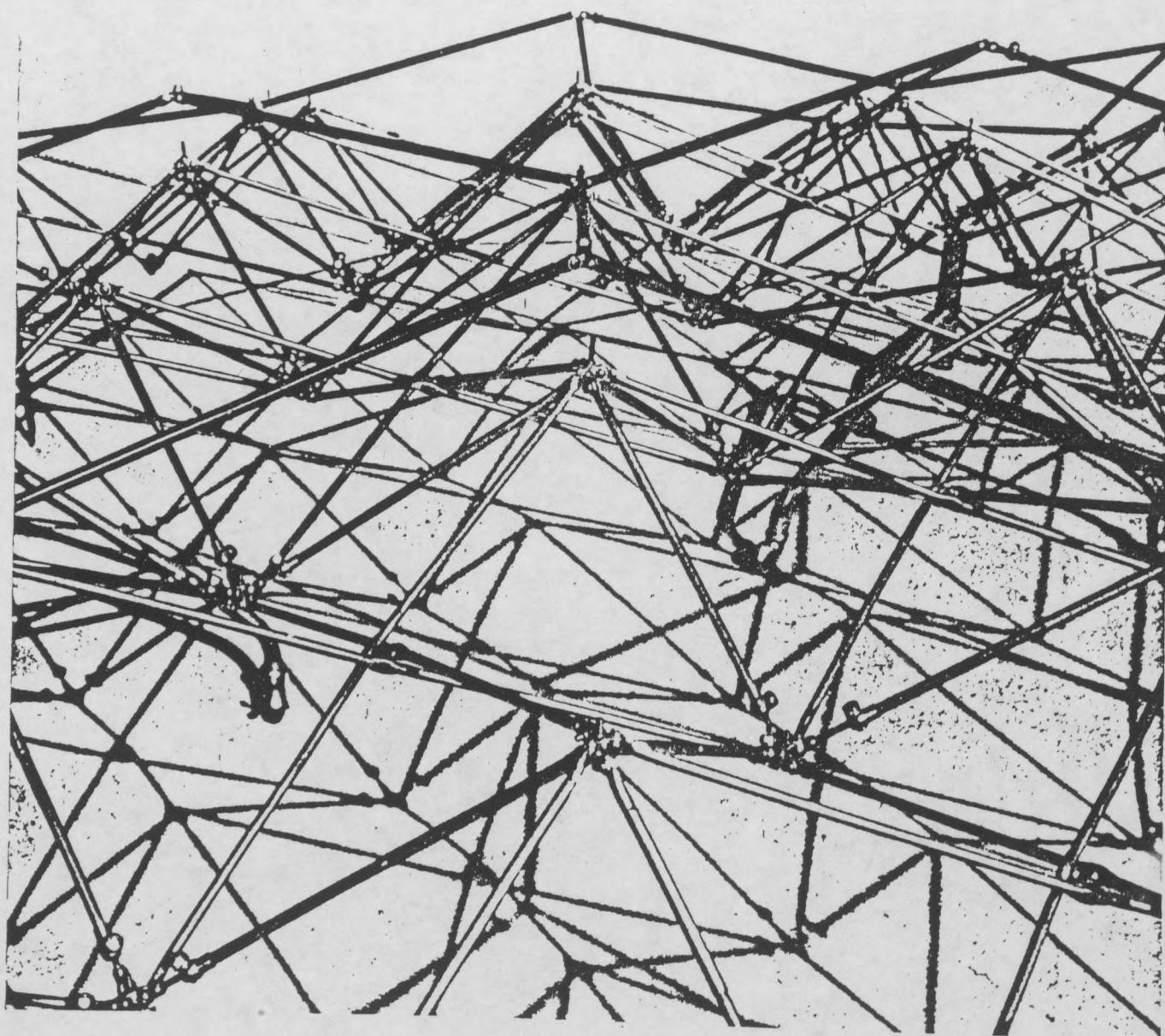
1



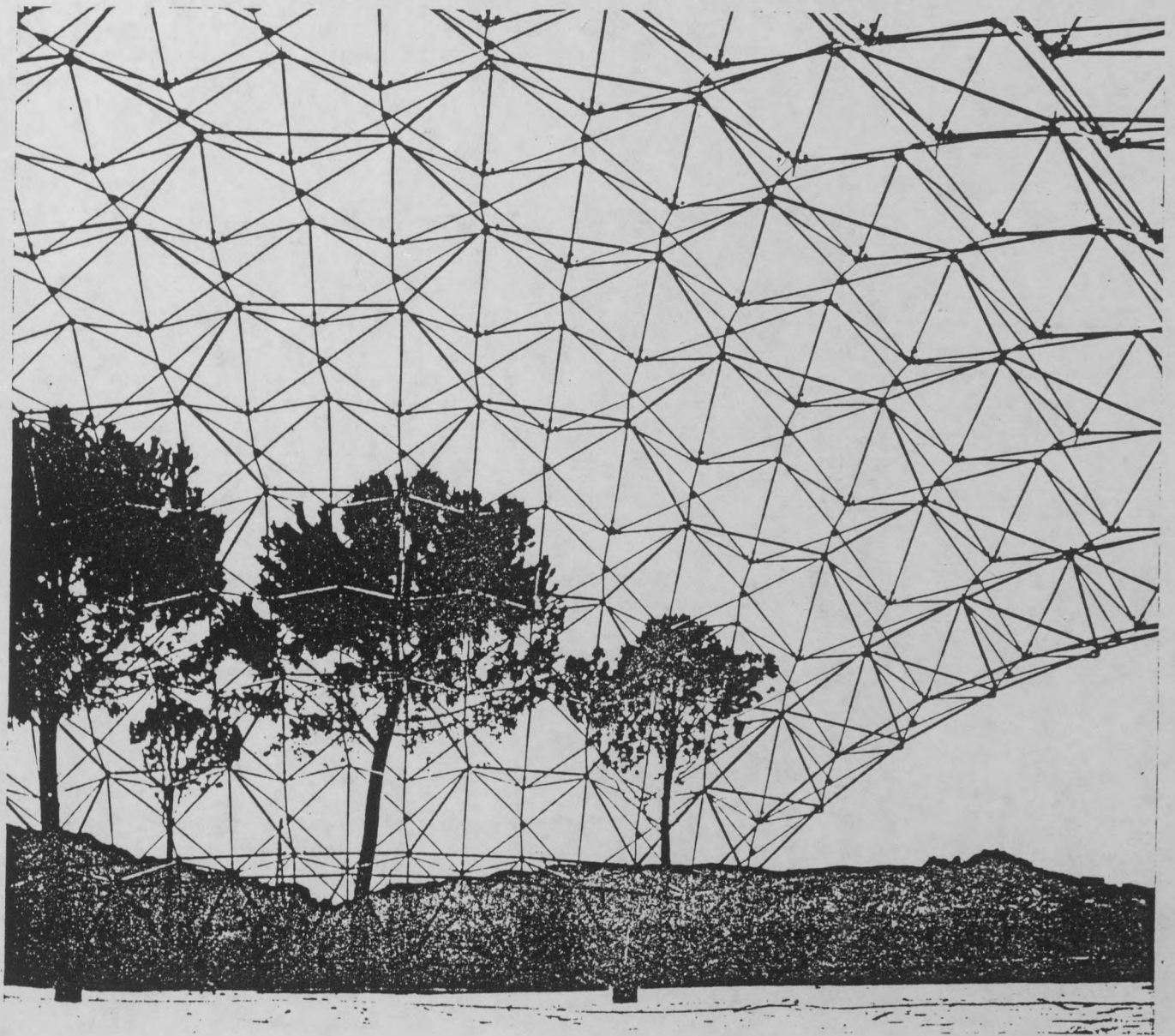
2



3

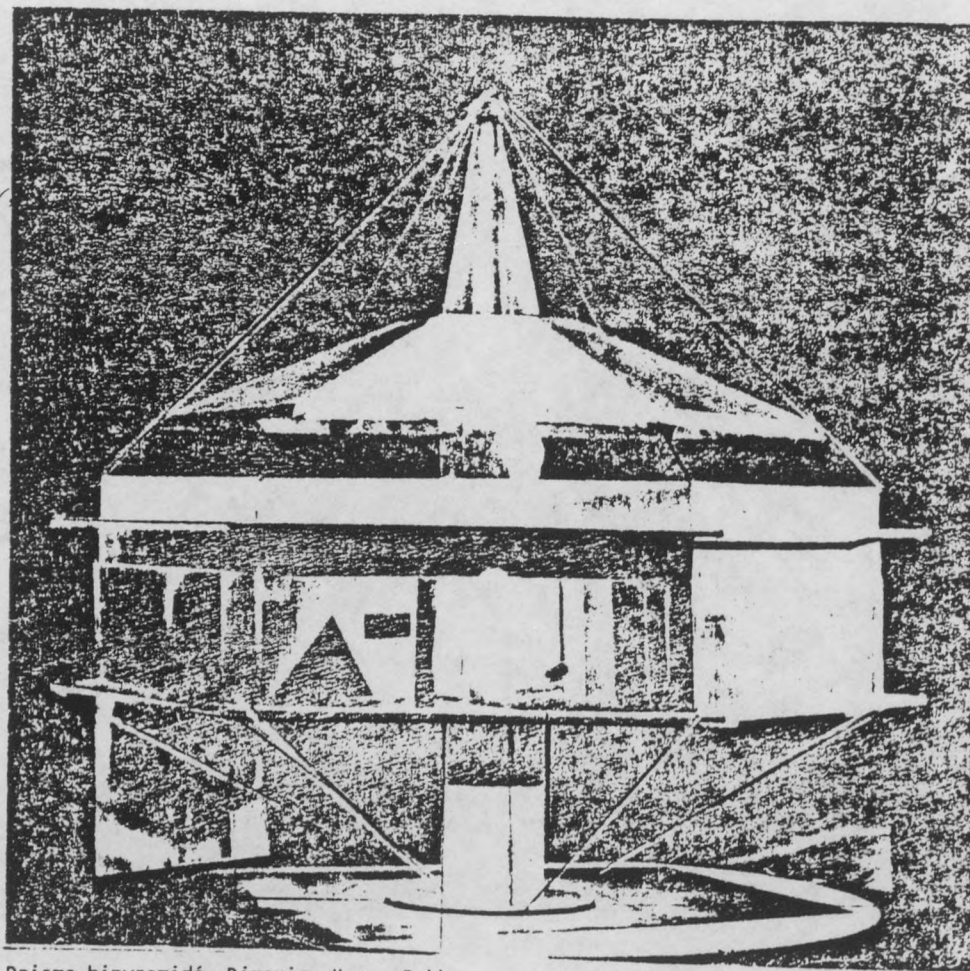
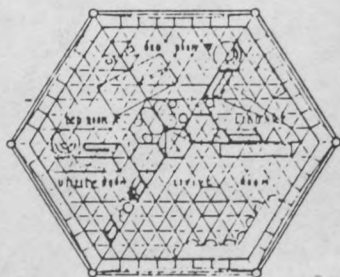
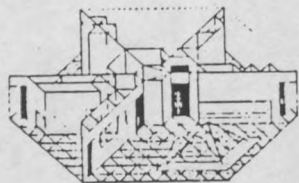
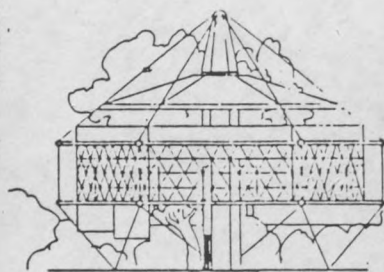


Coupole pliante à antiprismes triangulaires. Pinero



ANTIPRISMES BIPYRAMIDES

Un nombre relativement grand de solides convexes composites peut être obtenu par l'assemblage congruent de trois corps primitifs: les pyramides, prismes et antiprismes. Les combinaisons les plus simples sont les assemblages monoaxiaux ayant un corps central prismatique ou antiprismatique complété sur leur base par deux pyramides. La transformation en simple spatial stable des antiprismes bipyramidés est particulièrement intéressante car ce sont des deltoédres entièrement triangulés donc naturellement stables. Ils constituent donc la cinquième classe des simplex spatiaux.



Prisme bipyramidé. Dimaxion House Fuller

Dans la série des configurations directement réalisées avec des barres rigides uniquement, la première est composée d'un octaèdre enrichi par deux tétraèdres, qui est, en fait, un fragment du réseau spatial appelé empilement compact (Fig.69). Parmi les variantes polygonales suivantes, la pentagonale n'est rien d'autre que l'icosaèdre, solide régulier à vingt faces triangulaires équilatérales; quant à l'hexagonale sa pyramidation n'est réalisable qu'avec des triangles isocèles aigus (Fig.69a,b,c).

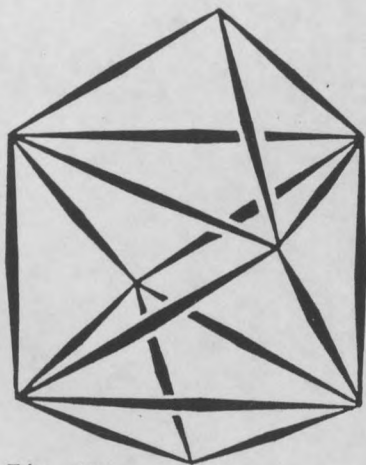


Fig.69

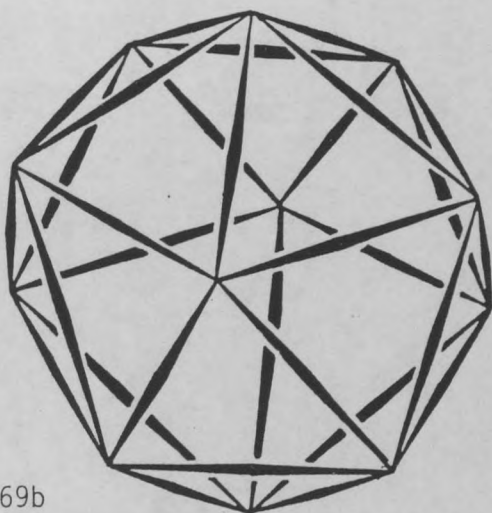


Fig.69b

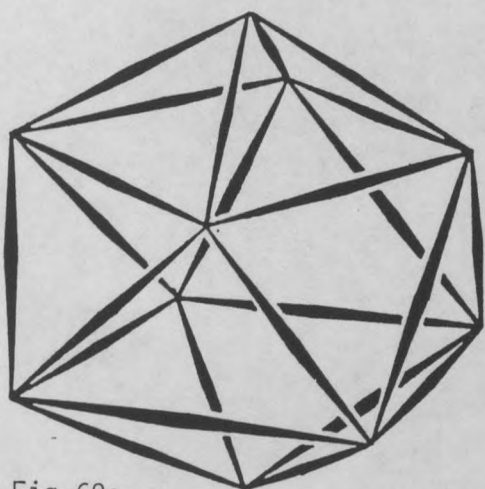


Fig.69a

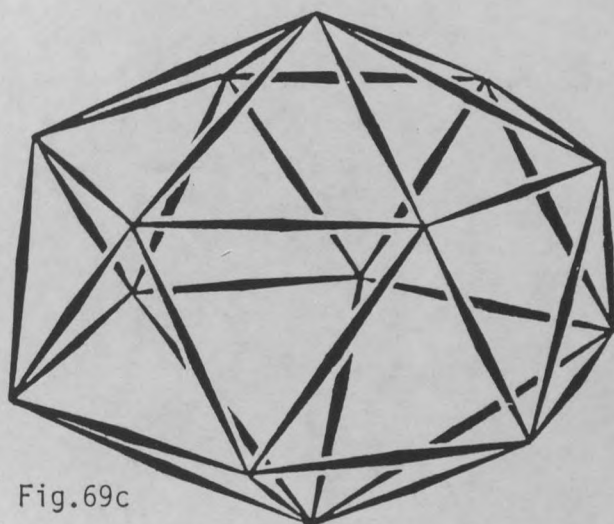


Fig.69c

Les configurations antiprismatiques bipyramidées peuvent être transformées à l'aide d'un mât central servant de moyeux en autant de bi-roues de bicyclette ayant deux jantes polygonales rigides, toutes les autres arêtes radiales et obliques étant tendues. Le premier simplex, le triangulaire, est tétraoctaédrique, forme qui entre dans les assemblage des réseaux à double nappe les plus fréquemment utilisés. Par rapport à la variante indifférenciée, qui est construite de dix huit barres rigides, la bi-roue de bicyclette n'en comporte que sept d'où un allègement considérable (Fig.70). Les variantes suivantes sont de plus en plus trapues; certaines étaient connues et utilisées notamment comme dévidoirs dans les filatures (Fig.70a,b,c).

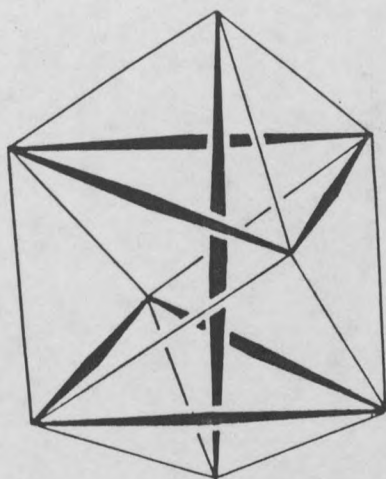


Fig.70

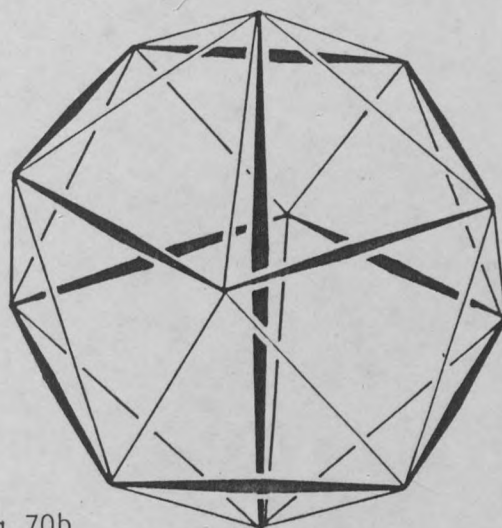


Fig.70b

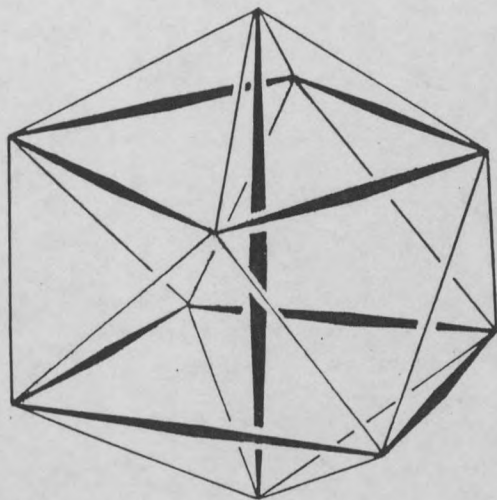


Fig.70a

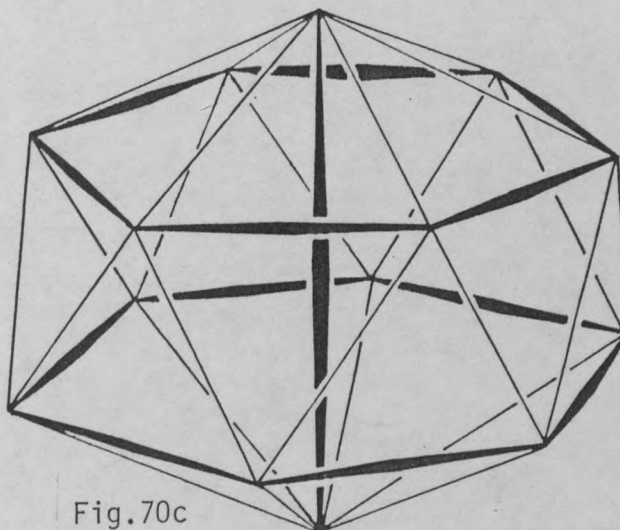
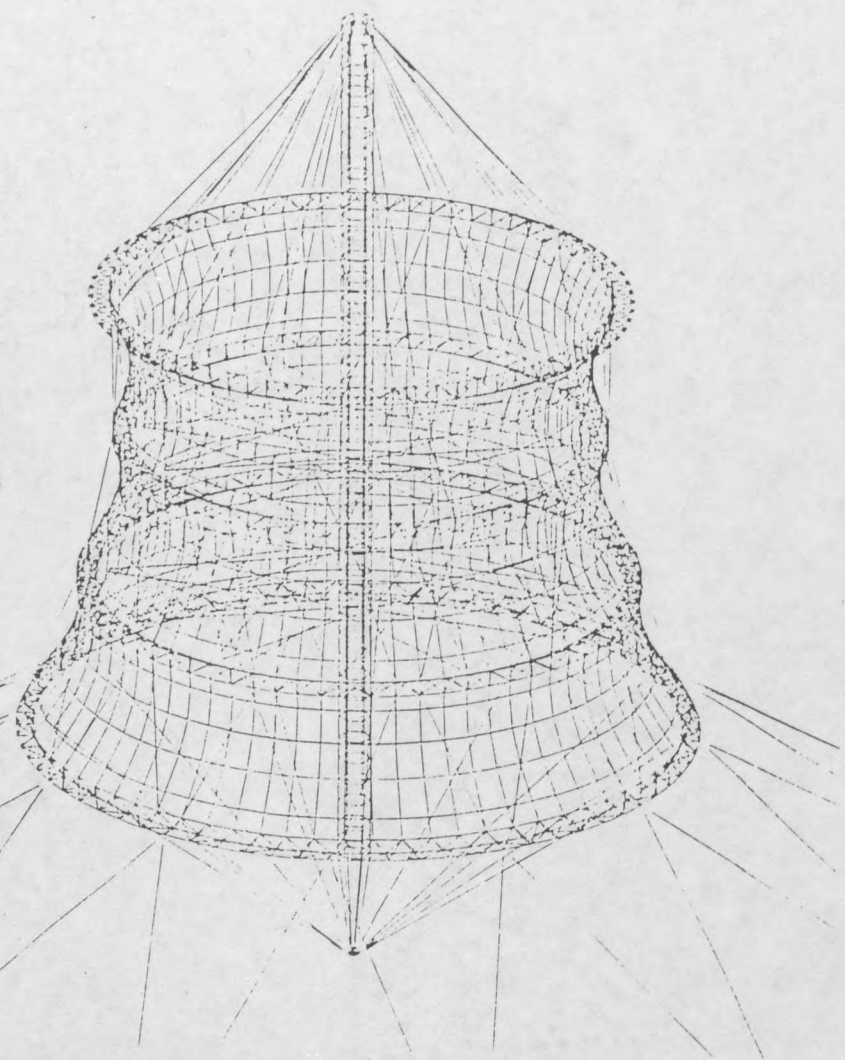
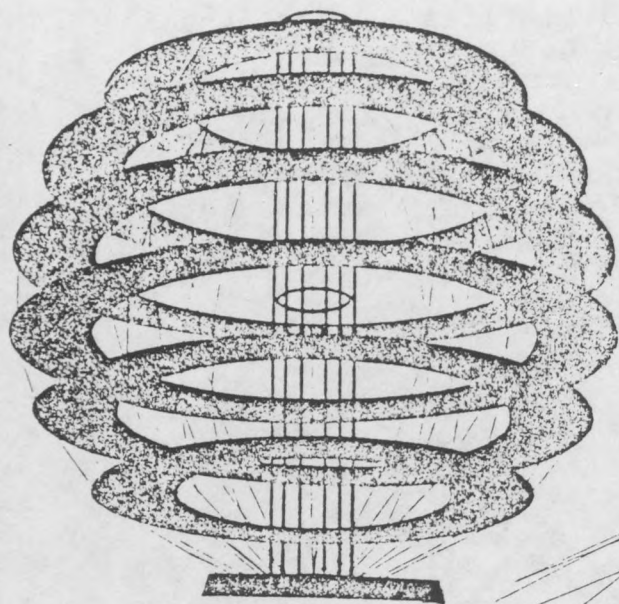
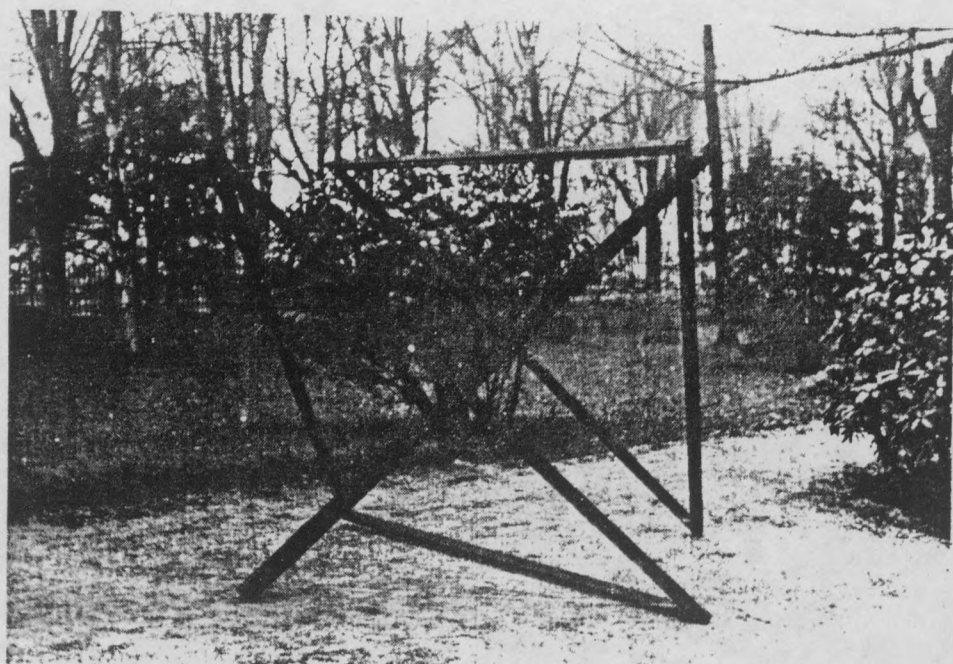


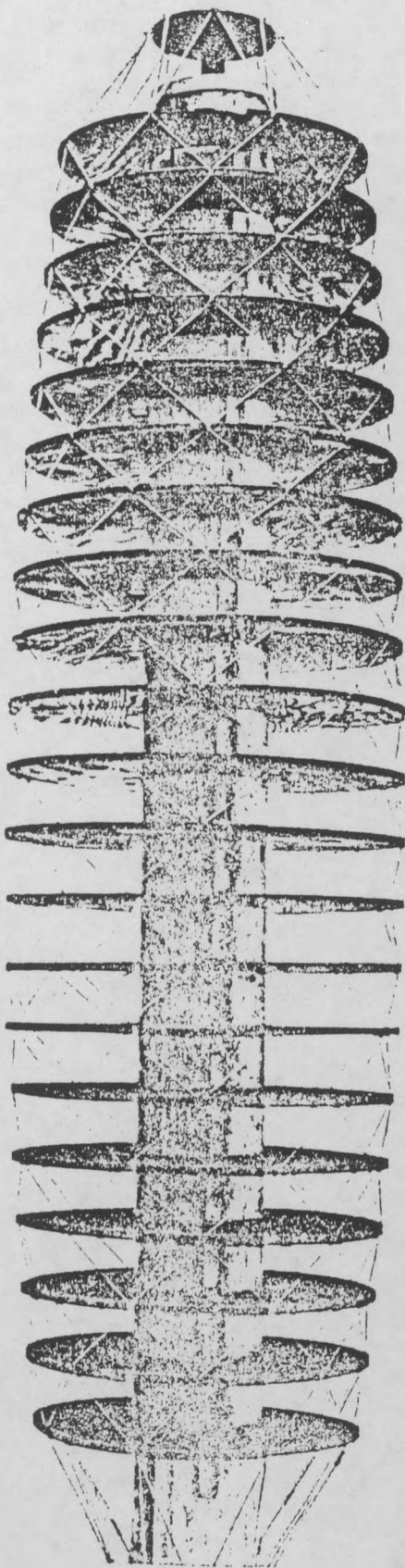
Fig.70c



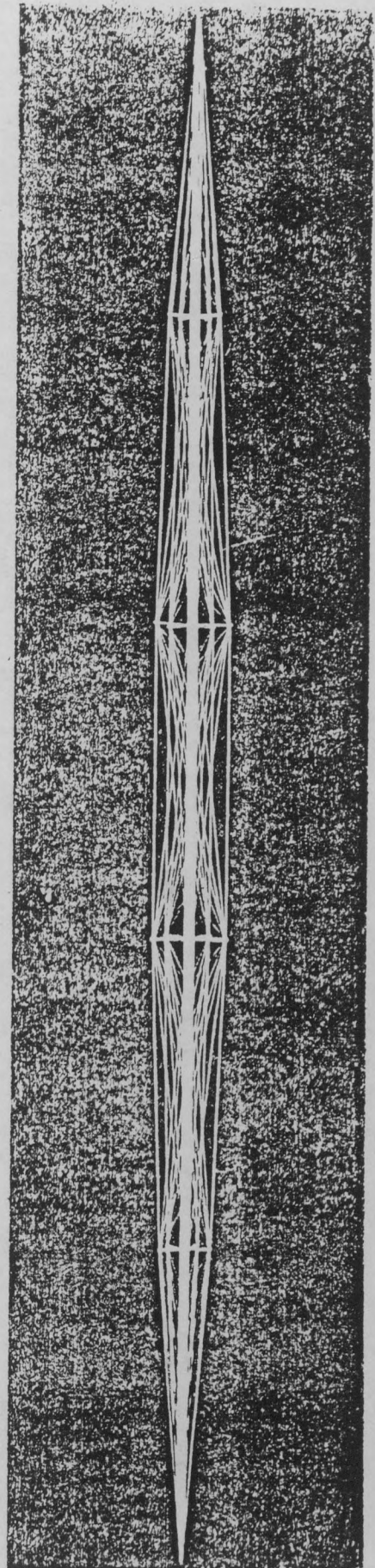
Multiroues de bicyclette. Le Ricolais



Cube semi-autotendant. ENSBA Strasbourg 1967



Immeuble-tour et mât tendus. Le Ricolais



L'inversion de ce système donne le groupe qu'on peut appeler bi-parapluies où autour d'un tirant axial, s'organisent des membrures périphériques: tendues pour les deux ceintures polygonales et rigides pour les arêtes radiales et obliques. Ces structures sont composées entièrement de losanges spaciaux à barres rigides qui sont facilement pliables, chacun étant réglable avec un tendeur. Par ailleurs, l'ensemble peut être précontraint par la contraction du tirant axial, tandis que son élongation le transforme en un faisceau fermé.

L'archétype tétraoctaédrique est utilisable comme sous-ensemble adaptable pour la construction de réseaux tridimensionnels modelables à simple ou double courbure (Fig.71). Les autres "bi-parapluies" polygonaux se présentent comme autant d'habitacles facilement déployables, partant de l'état de faisceau fermé, passant par celui du fuseau, jusqu'à la forme entièrement aplatie (Fig.71a,b,c).

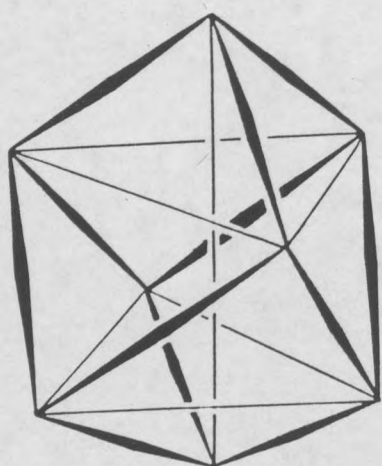


Fig.71

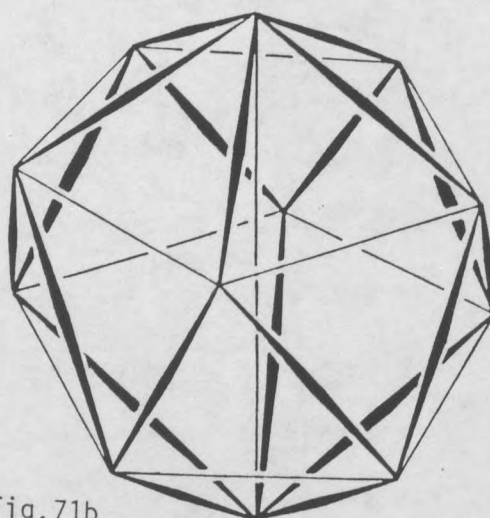


Fig.71b

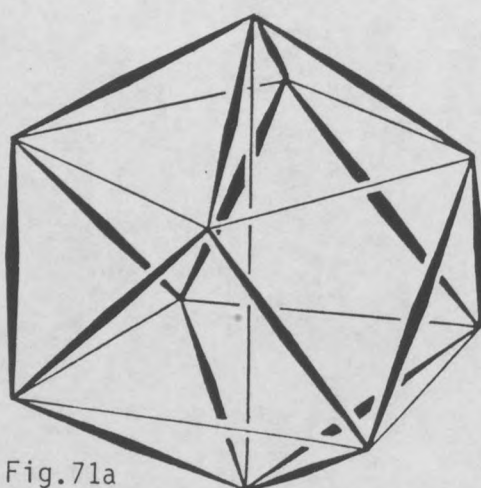


Fig.71a

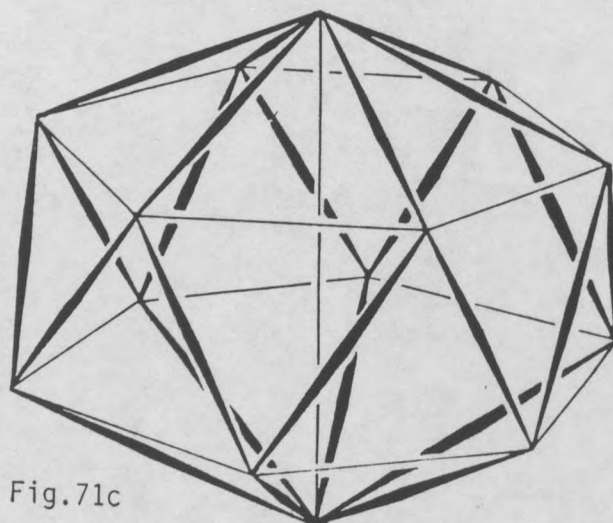


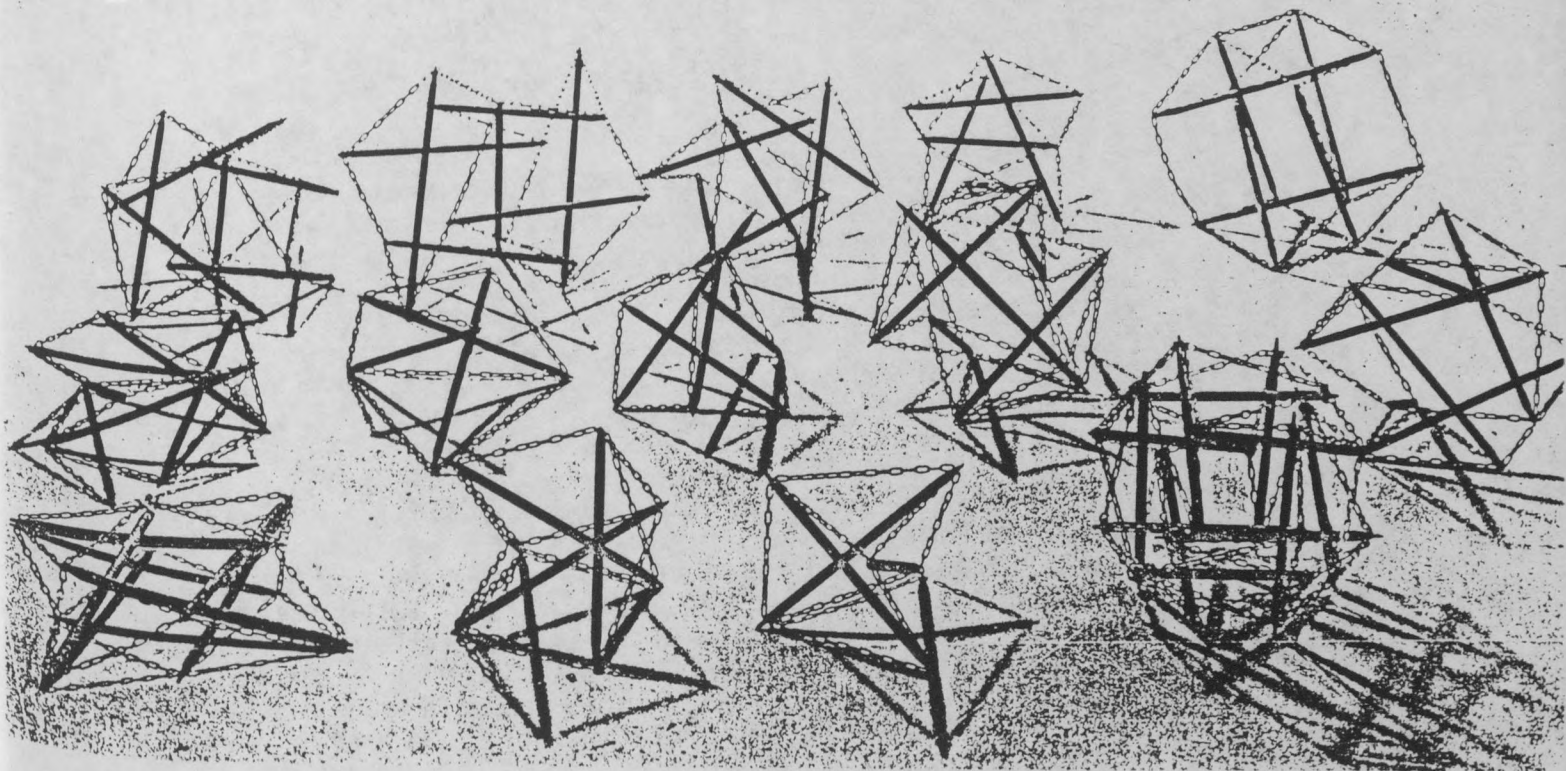
Fig.71c

AUTOTENDANTS ELEMENTAIRES

Cette sixième classe de simplex dérive directement de la famille morphologique précédente, les antiprismes bipyramidés et plus particulièrement du groupe bi-roues de bicyclette pour aboutir en plusieurs étapes de transformation aux autotendants antiprismatiques les plus simples.

Les transformation consistent à introduire des barres de compression diagonales imbriquées dans les maillons latéraux voisins, comme on l'a fait dans les maillons trapézoïdaux des simplex planaires, puis à supprimer les membrures devenues surabondantes: une méthode fondée sur la substitution et l'élision.

Partant donc des bi-roues de bicyclette, on obtient un nouveau groupe appelé "toupies", en remplaçant les deux jantes polygonales rigides par des barres de compression obliques enjambant deux par deux les triangles antiprismatiques. Cette transformation, tout en dissociant entre elles la totalité des barres rigides rend toutes les arêtes initiales de l'antiprisme bipyramidé, en principe, tendues.



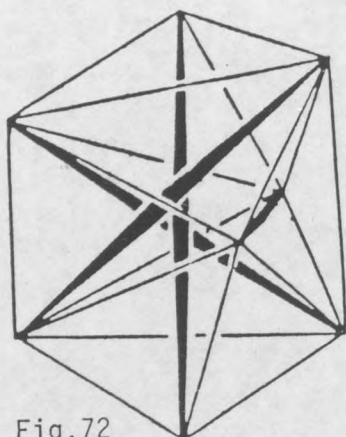


Fig. 72

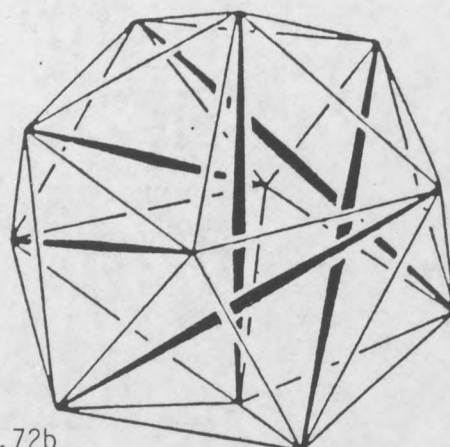


Fig. 72b

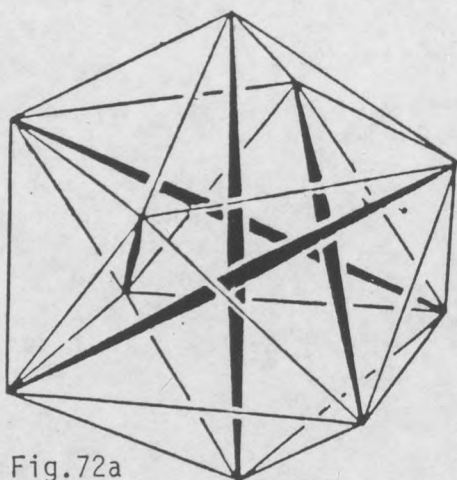


Fig. 72a

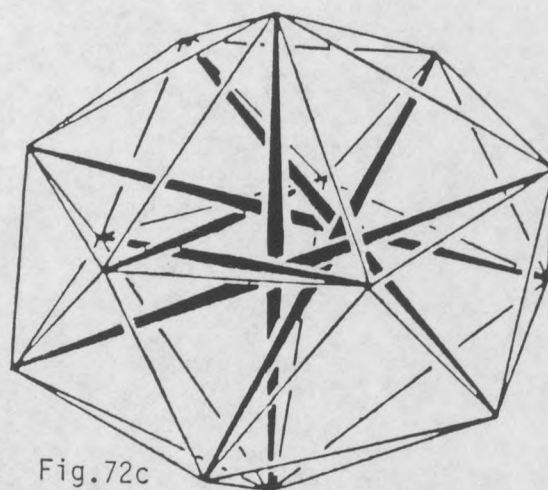
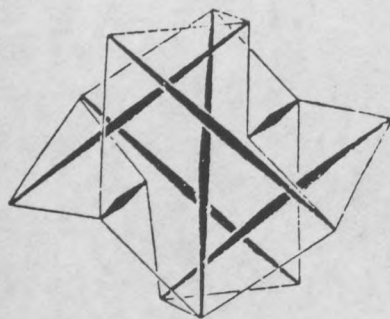


Fig. 72c

L'archétype triangulaire de cette série se compose de quatre barres rigides, ce qui est une amélioration par rapport à la bi-roue de bicyclette et ses sept barres (Fig. 72). Les autres variantes conservent évidemment les mêmes avantages mais présentent en même temps un certain encombrement du volume interne par des barres obliques, qui sont disposées, là aussi, selon une symétrie rotatoire (Fig. 72a,b,c).



Les arêtes initiales ne sont tendues, en effet, qu'en principe, car pratiquement, en raison de l'introduction d'un sens rotatoire dans la disposition des barres, certaines membrures se révèlent détendues donc superflues. Selon le choix des membrures éliminées, il existe deux solutions alternatives, ce qui donne naissance à deux groupes de simplex directement dérivés des toupies.

Le premier groupe se compose des "hélices", qui sont obtenues par la suppression des tirants obliques en position quasi perpendiculaires aux barres de compression et de tous les tirants formant à l'origine les deux ceintures polygonales, donc exactement la moitié de tous les tirants initialement présents. Ceux qui subsistent forment des demi hexagones non planaires attachés par leurs extrémités aux deux pôles de l'axe et dans lesquels les barres rigides restent imbriquées diagonalement.

Le premier simplex de la série, l'hélice triangulaire, est composée de quatre barres de compression et seulement de neuf tirants (Fig.73). Dans les autres volumes le rapport entre le nombre des éléments comprimés et tendus est de un tiers plus une barre, l'axe (Fig.73a,b,c). Ces hélices pourraient être employées à grande échelle comme rotor dans les générateurs éoliens dont la dimension est limitée actuellement par leur mode de construction, les pales de rotor étant encastrées en porte à faux.

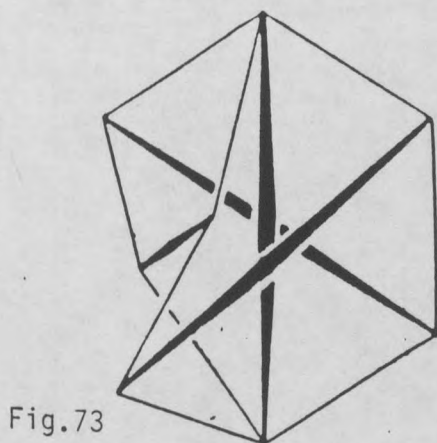


Fig.73

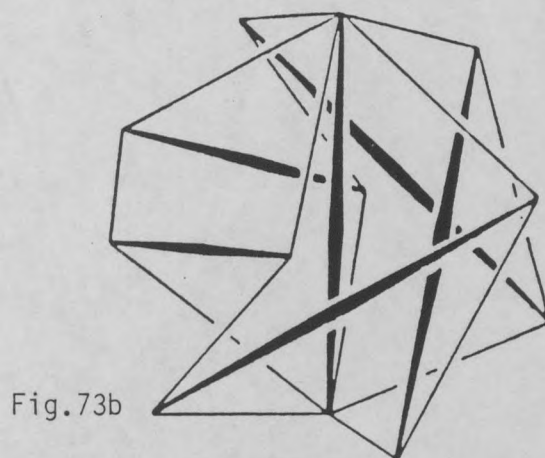


Fig.73b

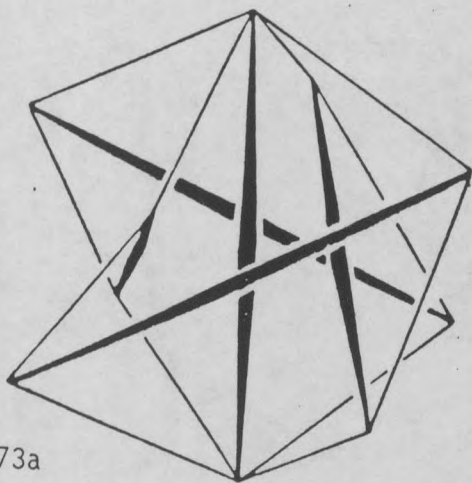


Fig.73a

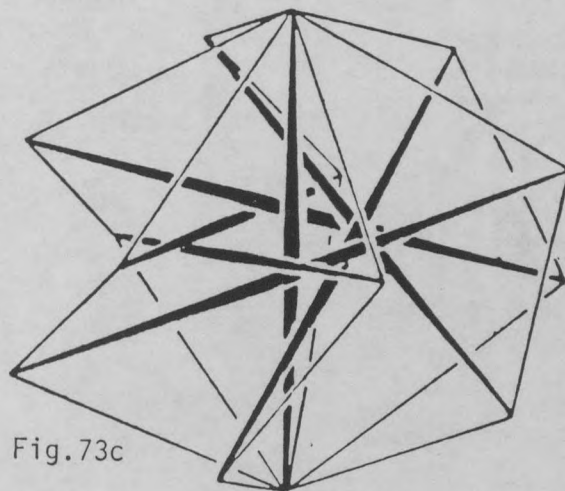
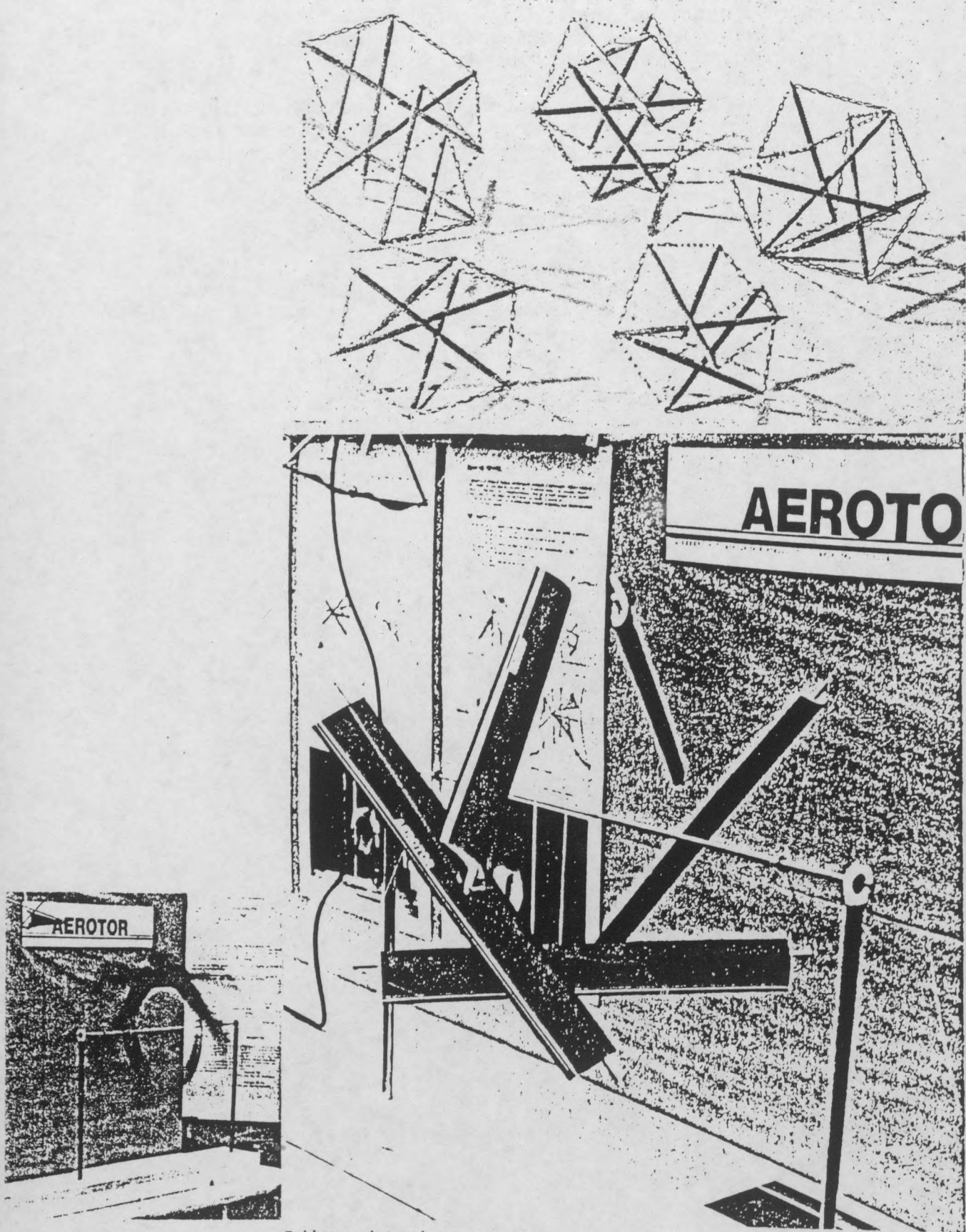
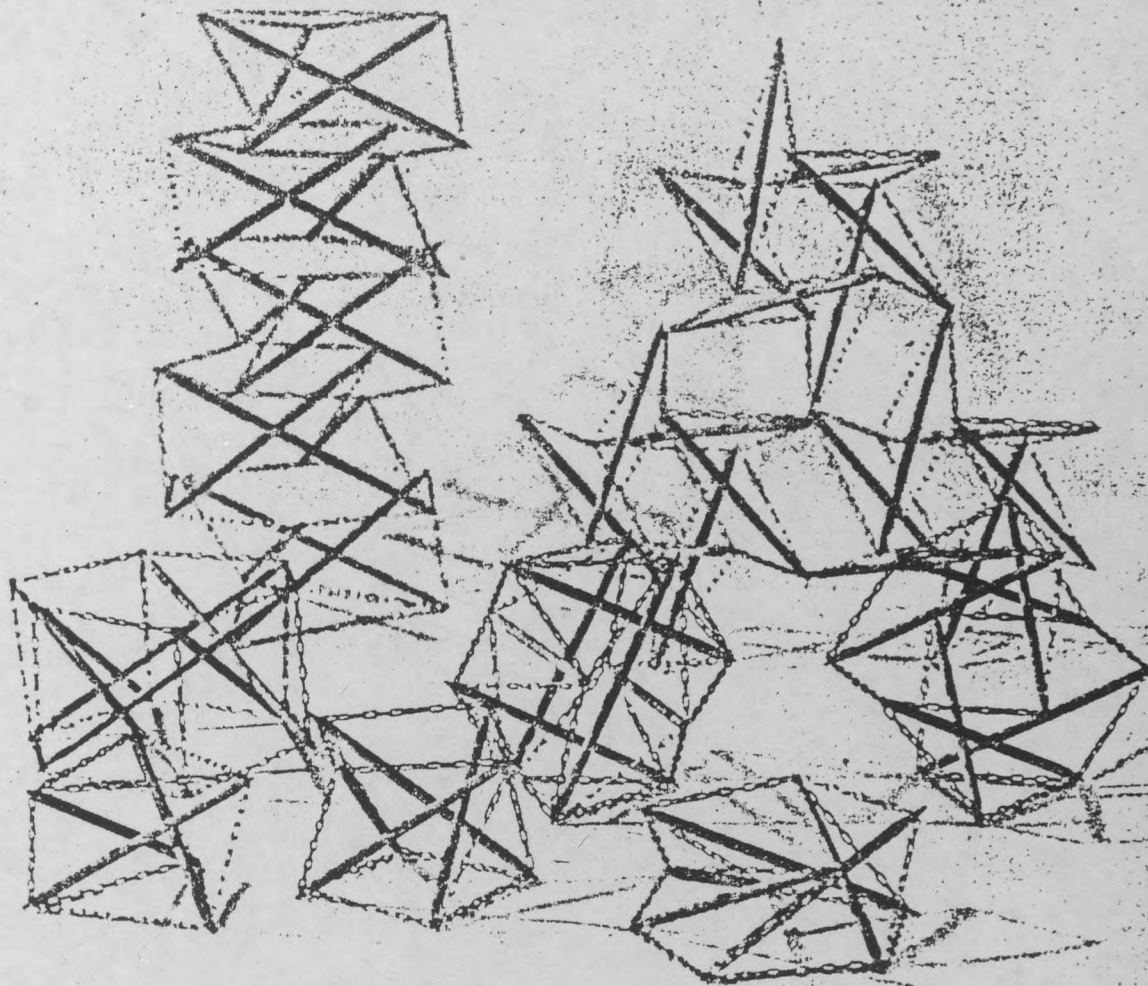


Fig.73c



Eoliennes à toupies autotendantes



Le deuxième groupe dérivé des toupies se compose des autotendants antiprismatiques qui sont les combinaisons les plus simples de ce type de structure spatiale. Certes, on aurait pu les déduire directement des antiprismes, mais, leur comportement statique n'aurait pas été rendu aussi évident qu'en partant des antiprismes bipyramidés, transformés en toupies où les barres trouvent leur position qui reste inchangée dans les simplex dérivés. Les configurations du dernier groupe sont donc obtenus par l'élimination du mât central, de l'axe et des deux haubanages pyramidaux ainsi que par la suppression des tirants obliques perpendiculaires aux barres rigides restantes; il y a donc, là aussi, élision de la moitié des tirants préexistants, plus une barre rigide.

Outre les barres obliques, ces simplex autotendants élémentaires ne gardent que les deux ceintures polygonales et autant de tirants latéraux que le nombre des barres rigides. Ils deviennent ainsi parmi tous les simplex volumiques stables les plus légers, dans lesquels le rapport entre les éléments comprimés et tendus est le plus favorable: un à trois.

La position spatiale d'un point étant définie par quatre vecteurs, parmi lesquels dans un ensemble convexe un au moins doit être pousseur, les trois restants tendeurs, on ne peut guère imaginer des configurations qui iront plus loin sur la voie de l'allègement structural.

Le premier simplex autotendant, l'archétype, avec trois barres rigides et neuf tirants, a la forme d'un antiprisme tripolaire dont la dérotation, cependant, n'est pas complète. Si elle l'était, les barres se rencontreraient au centre d'un octaèdre régulier ce qui annulerait son caractère autotendant, les barres n'étant plus isolées (Fig.74). Parmi les autres autotendants antiprismatiques seul le carré, ou tétrapode, est un antiprisme régulier parfait, ou anticube, la dérotation des barres étant en position médiane (Fig.74a). Les autres simplex polygonaux, tout en ayant des arêtes de longueur identique, auront des dérotations plus ou moins marquées (Fig.74b,c).

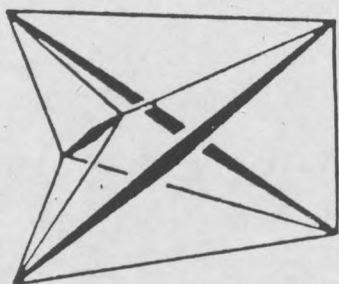


Fig.74

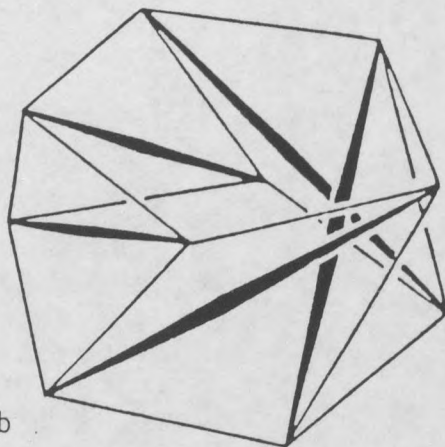


Fig.74b

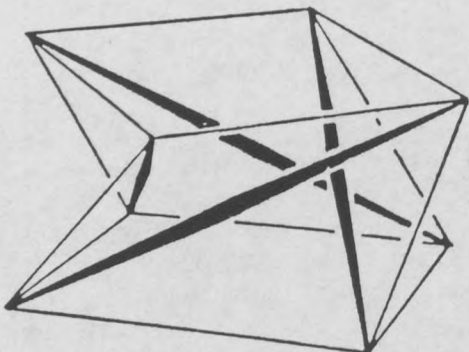


Fig.74a

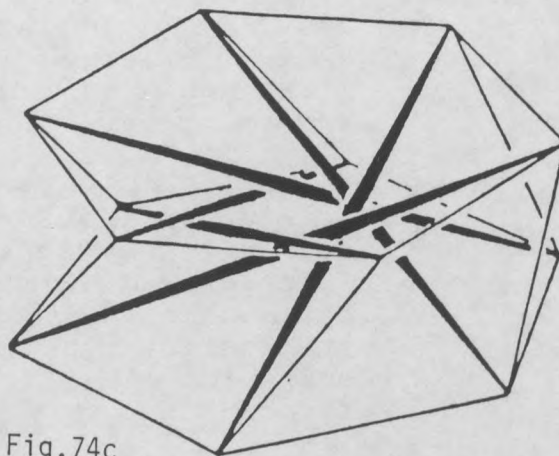
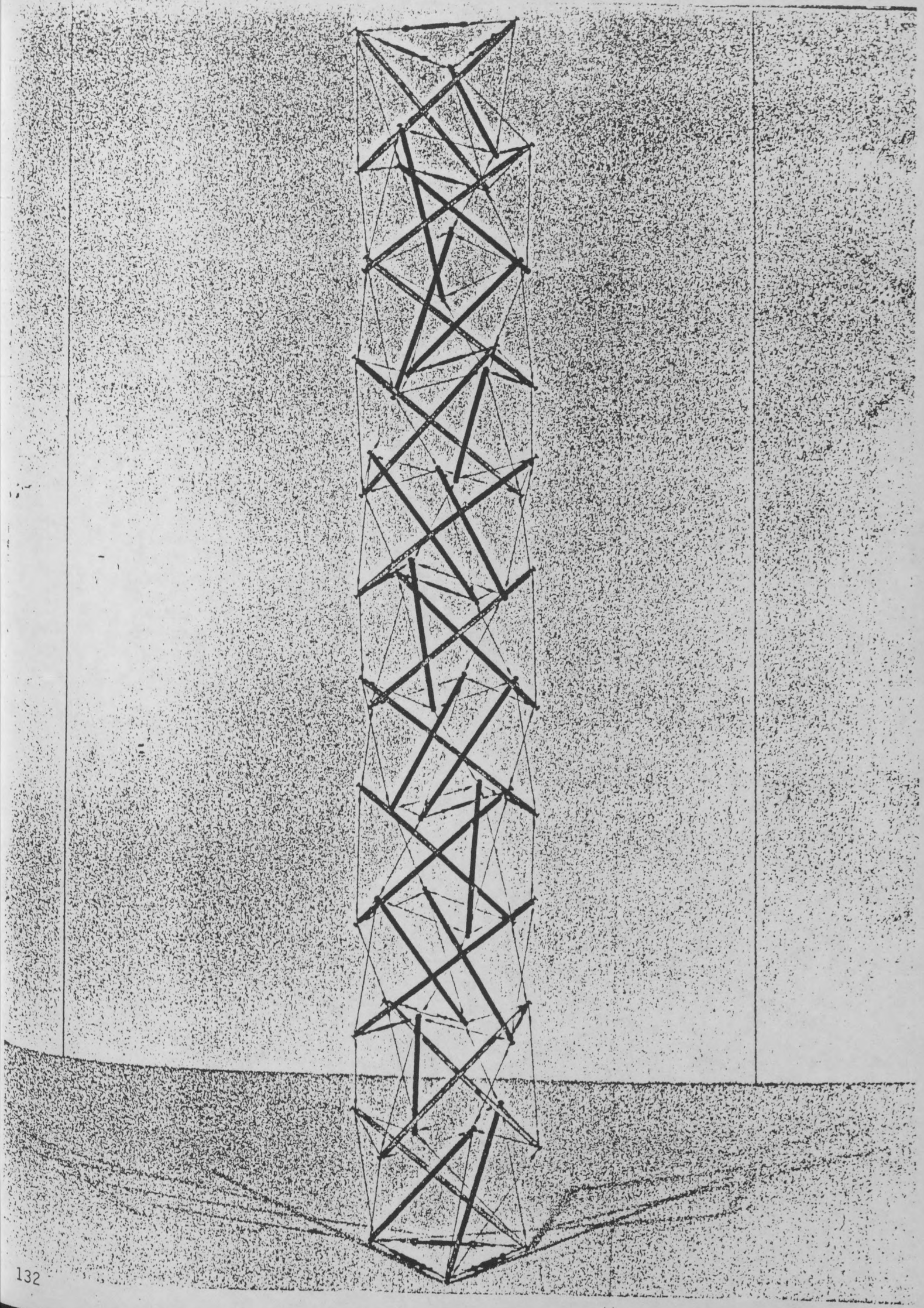
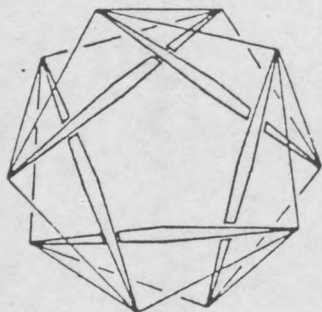
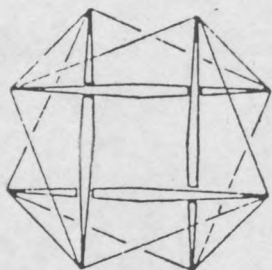
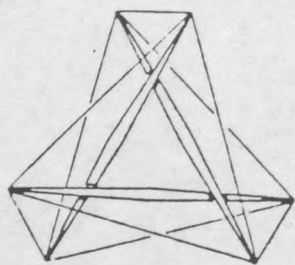


Fig.74c

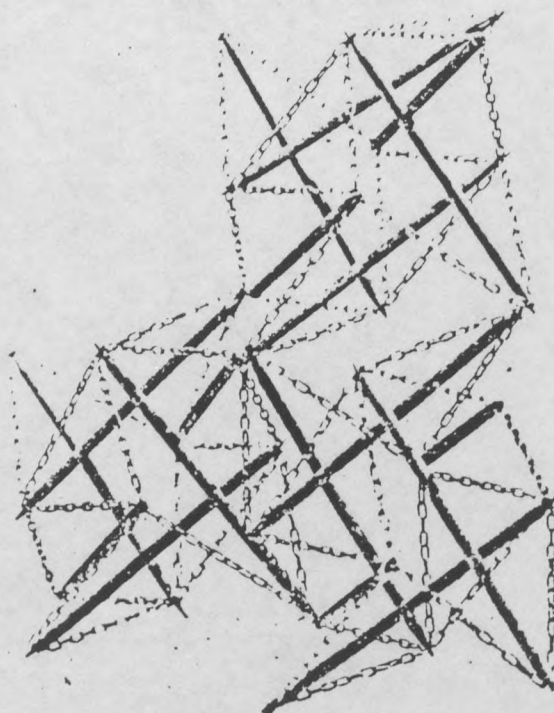
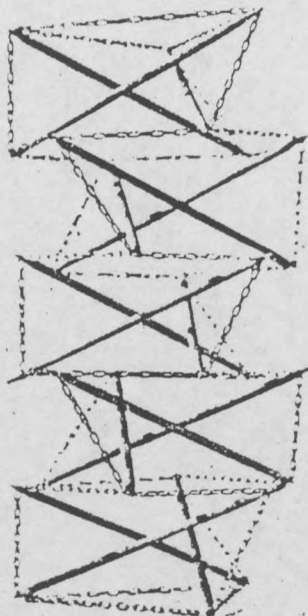
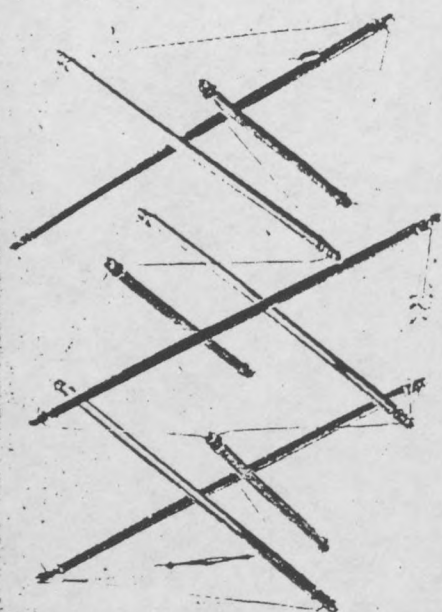




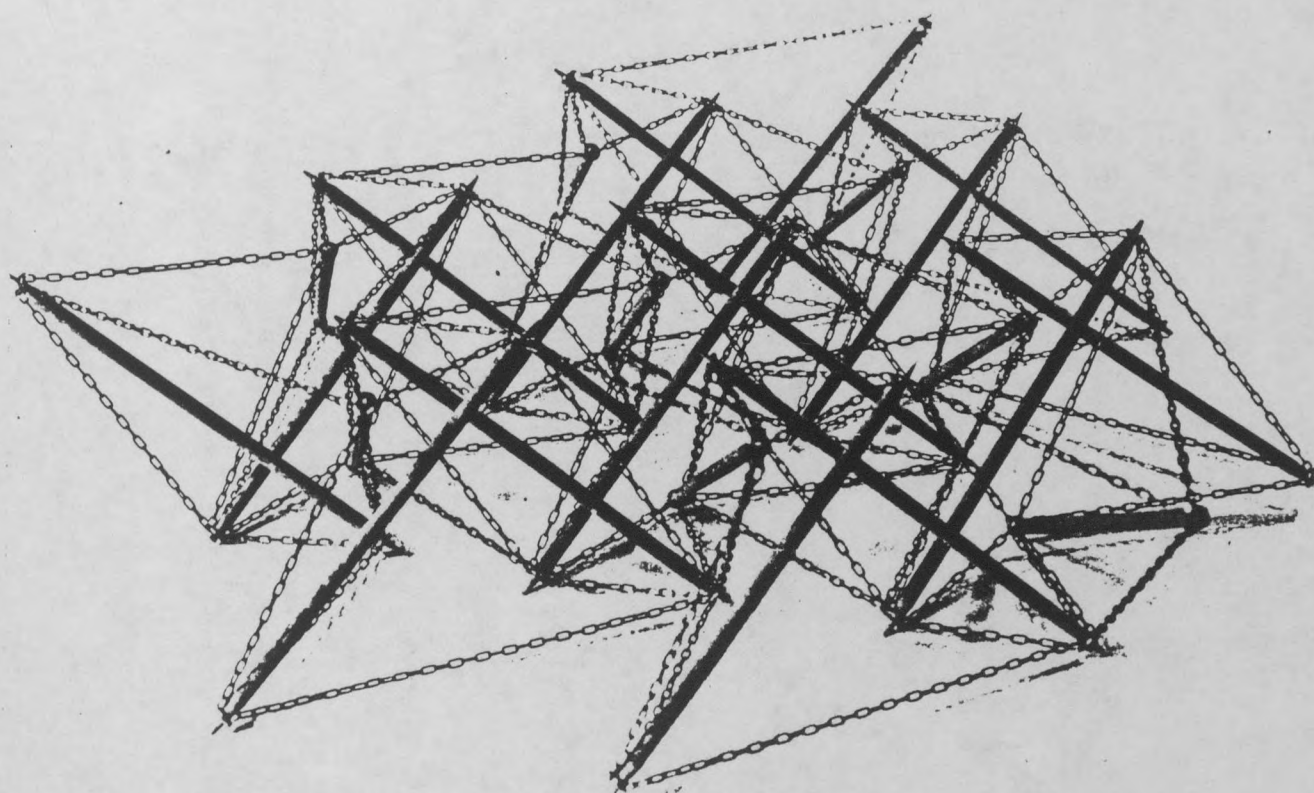
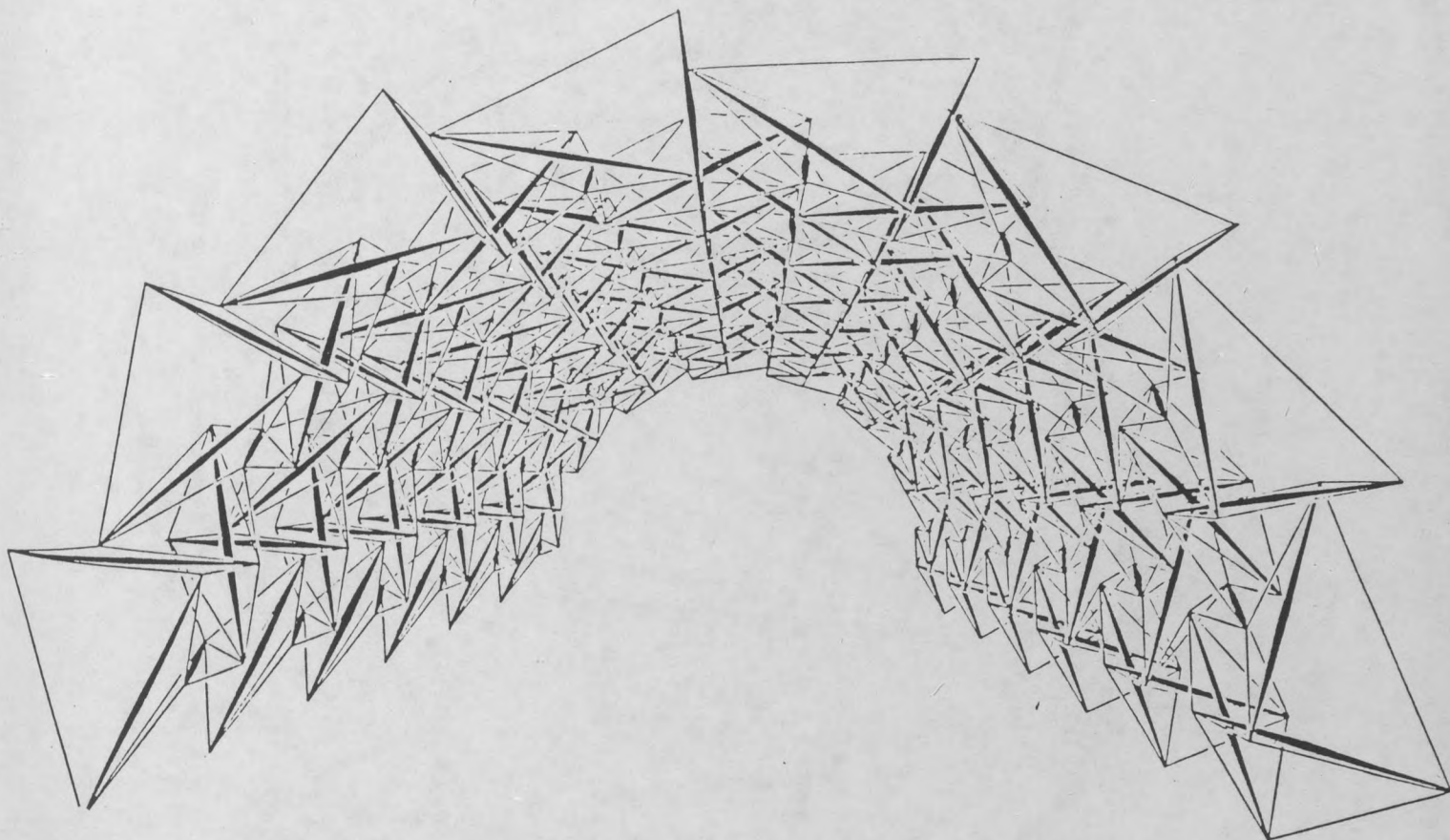
Par ailleurs, le problème de la dérotation lié à la rigidité globale des autotendants élémentaires, traitée par divers auteurs depuis une vingtaine d'années, sera évoqué plus loin à propos de la construction des autotendants non convexes, les hypersimplex toriques, voir l'étude reproduite en annexe.

L'assemblage de ces simplex autotendants antiprismatiques, biplanaires et donc monoaxiaux est particulièrement facile. En les superposant à l'aide d'un polygone de jonction, on obtient des structures oblongues à usage de tours, antennes, ponts... En les juxtaposant ou entrelaçant, on obtient des réseaux à double nappe utilisables comme planchers, couverture à grande portée, ossatures habitables...

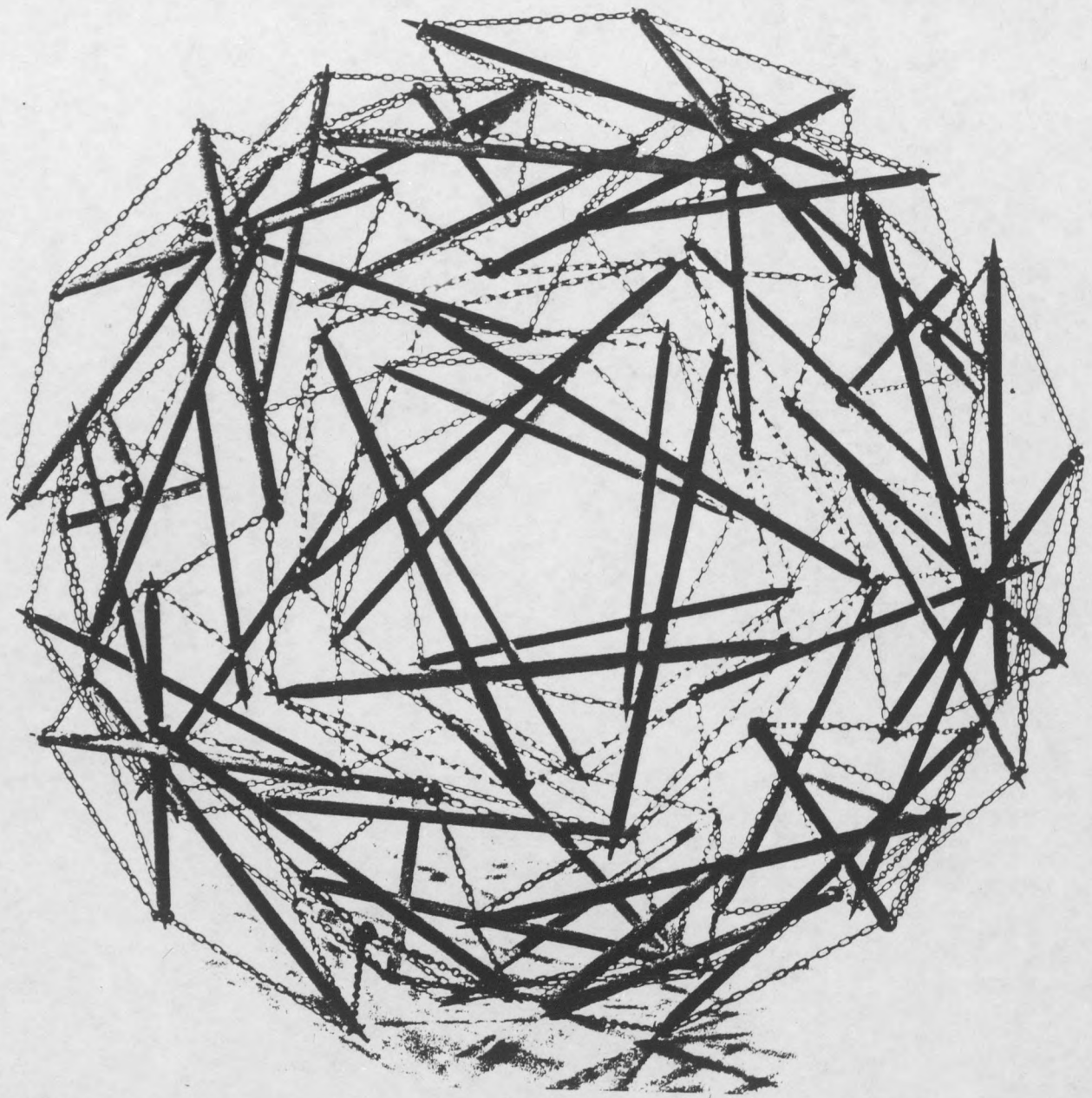
En variant la longueur des tirants, ces structures deviennent modelables et peuvent adopter des formes à simple ou double courbure sans faire varier la longueur des barres ni la forme des joints, les éléments tendus étant flexibles s'adaptent aux variations des angles. Par ailleurs, barres, joints, élingues peuvent être confectionnés avec du matériel et des accastillages ordinaires fabriqués pour les chantiers navals et déjà disponibles pour l'équipement des bâtiments flottants.



Mâts et réseau autotendants

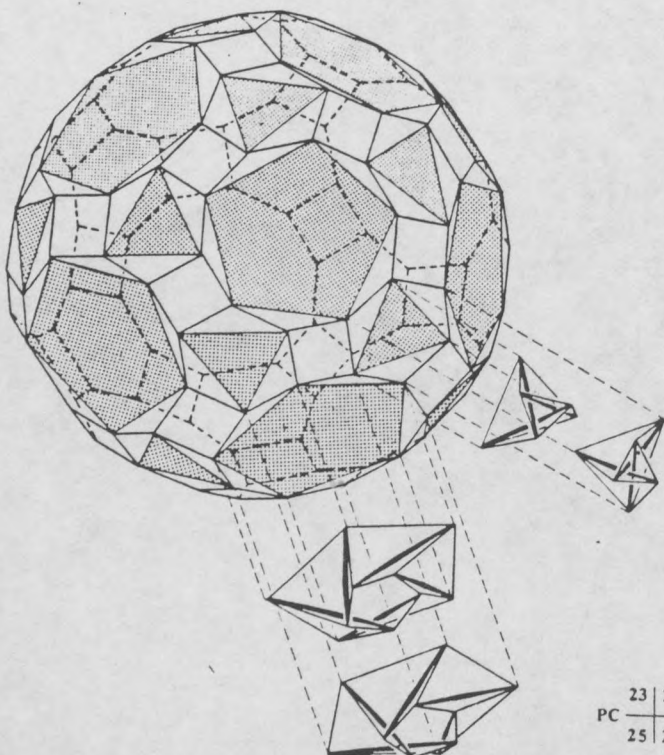


Réseau plan et voûte en berceau autotendants

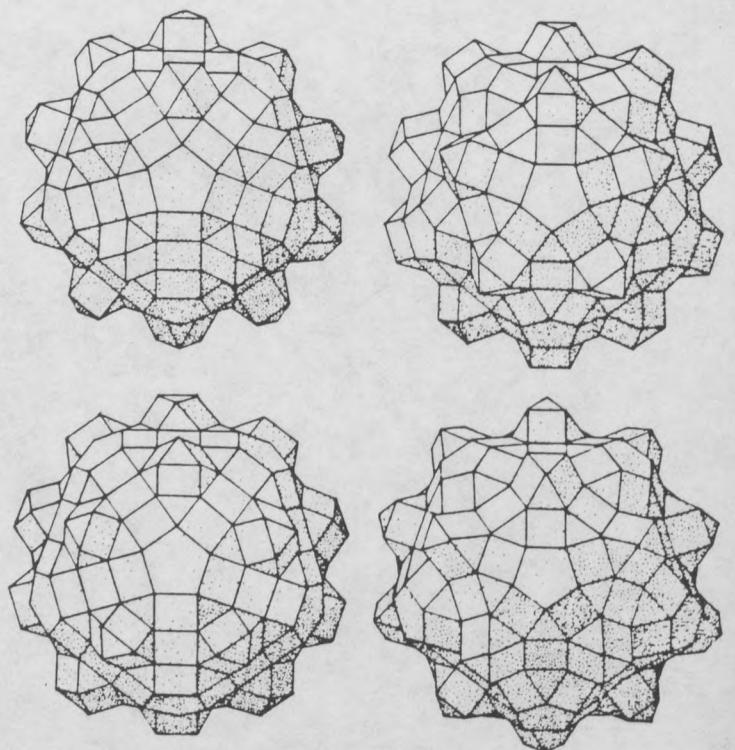


IIV. GRAND RHOMBICOSIDODECA
Coupole à double nappe hyperpolyédrique

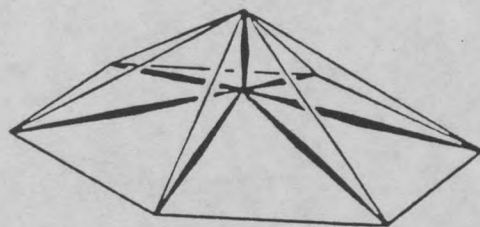
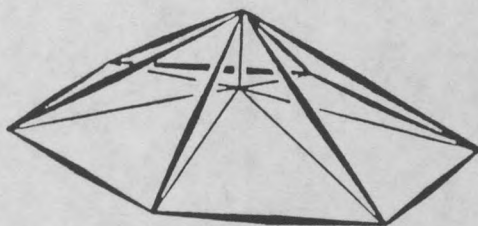
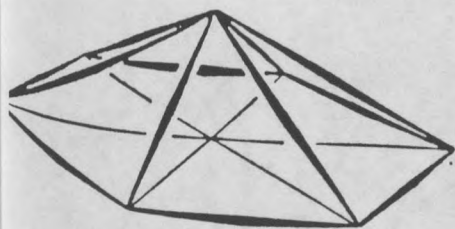
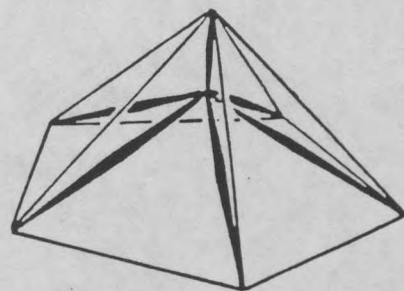
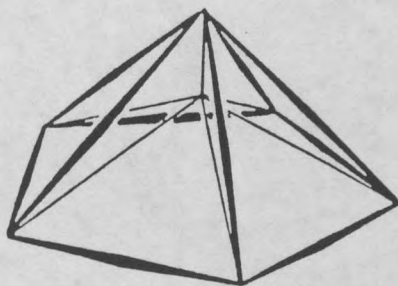
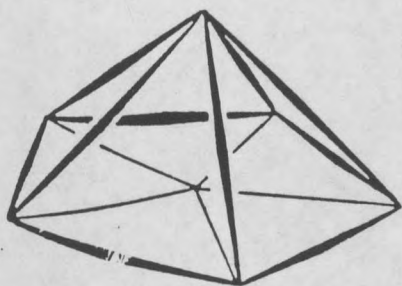
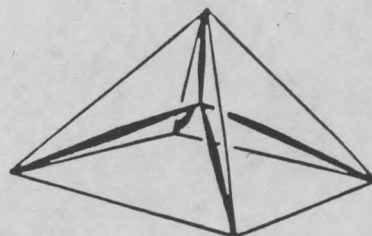
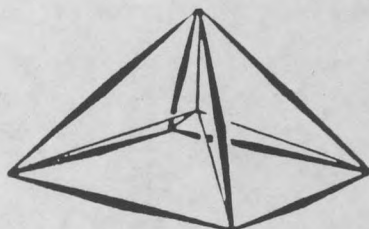
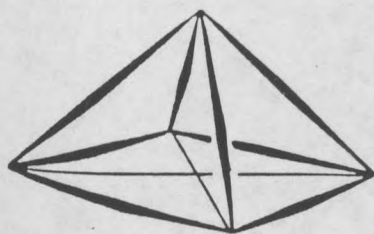
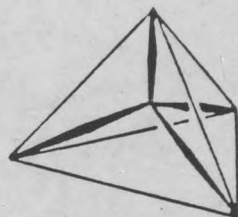
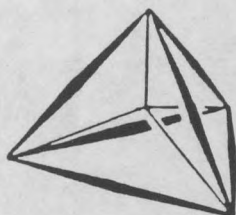
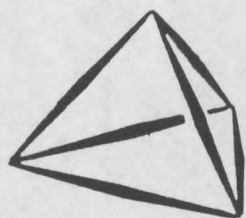
46 10+20.5555+12.5554



PC	23	24
	25	26

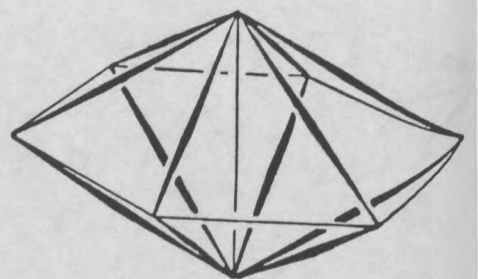
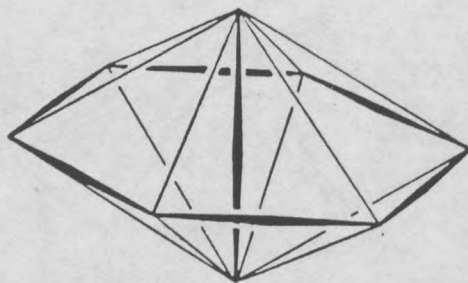
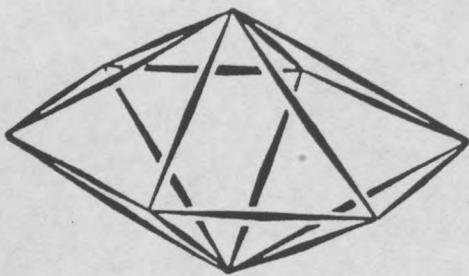
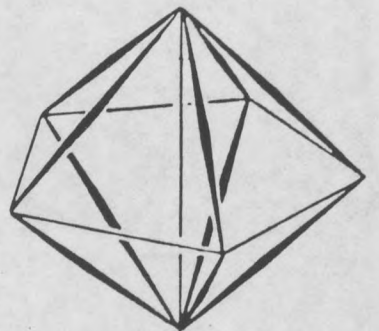
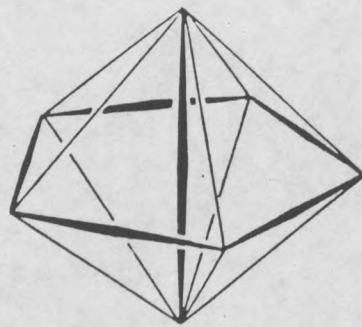
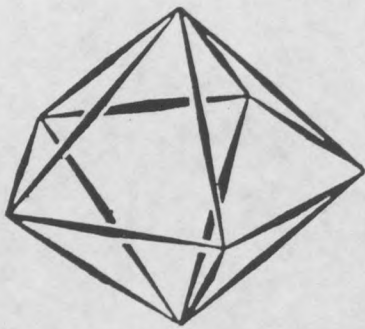
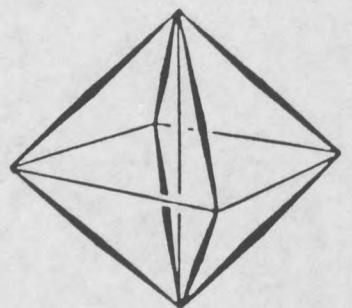
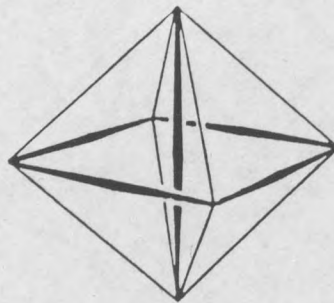
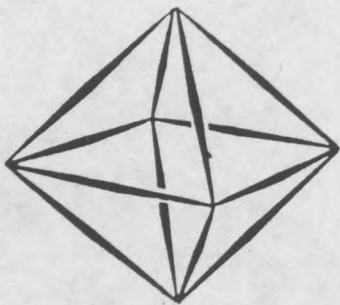
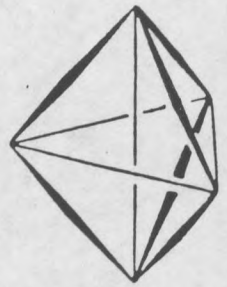


PYRAMIDES

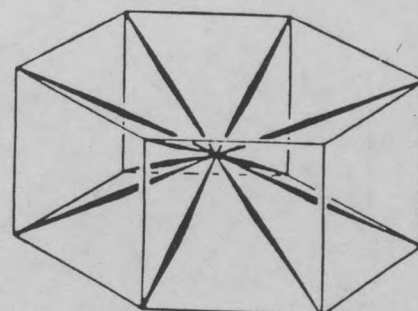
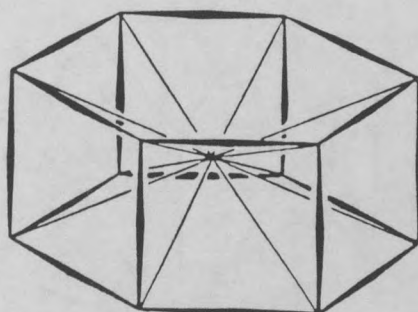
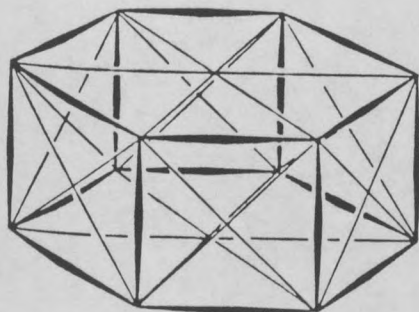
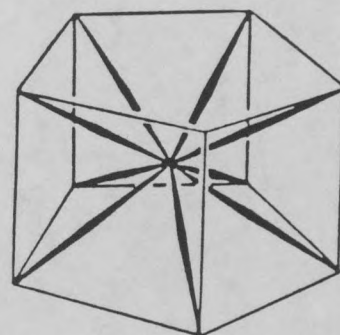
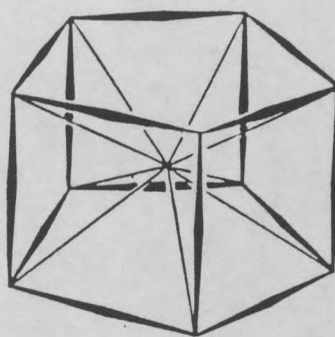
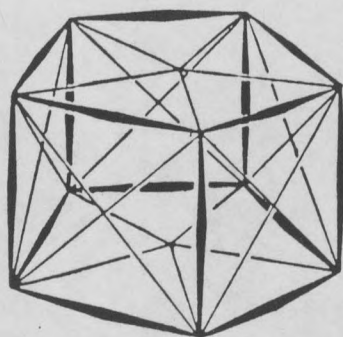
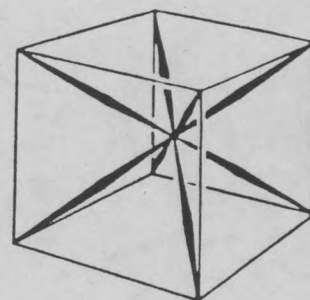
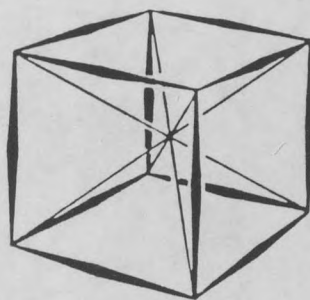
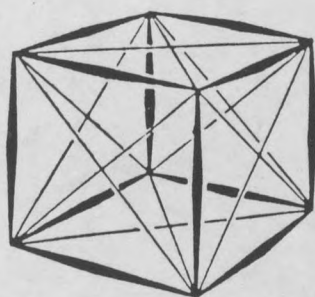
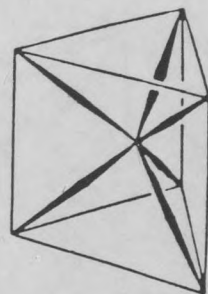
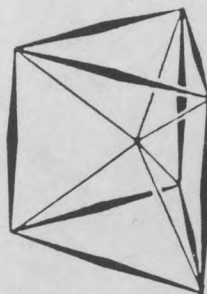
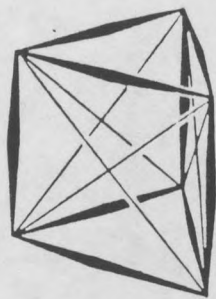


SIMPLEX SPATIAUX

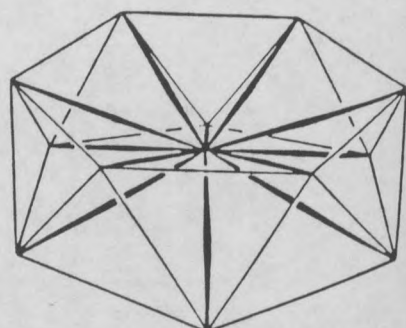
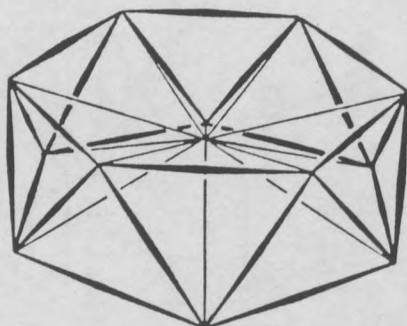
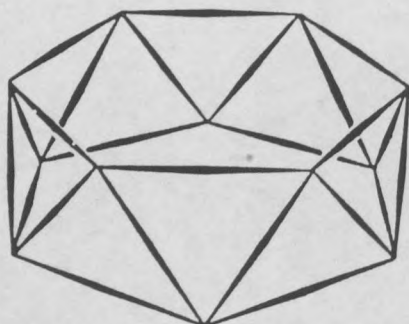
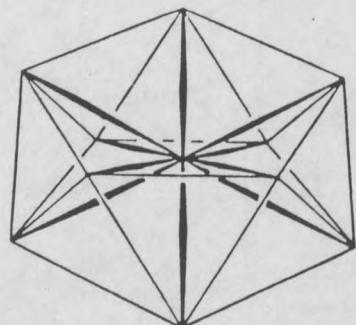
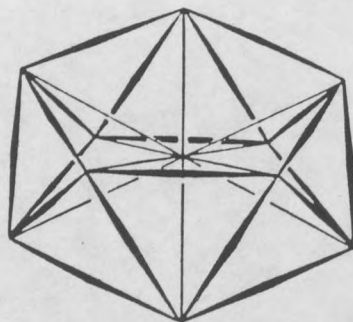
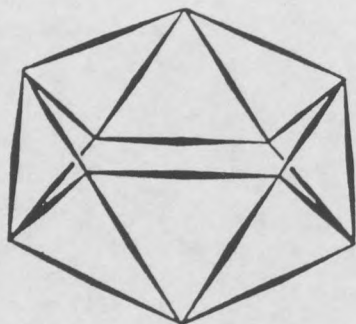
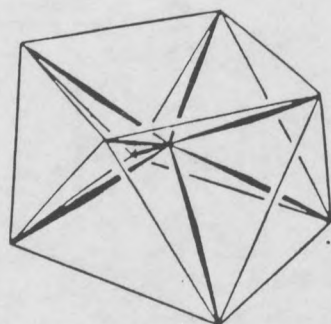
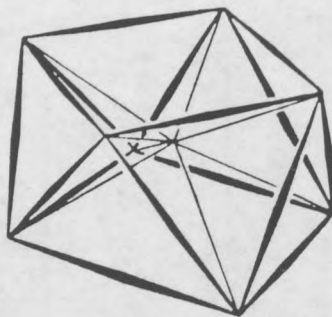
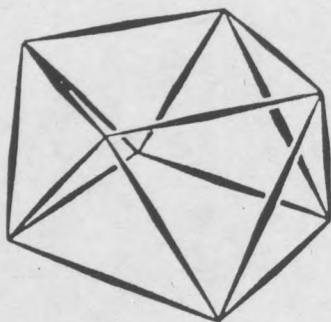
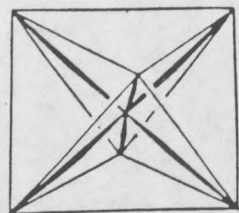
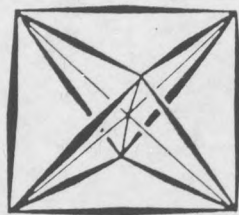
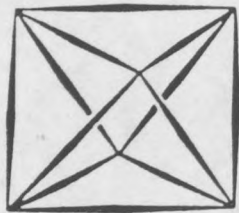
BIPYRAMIDES



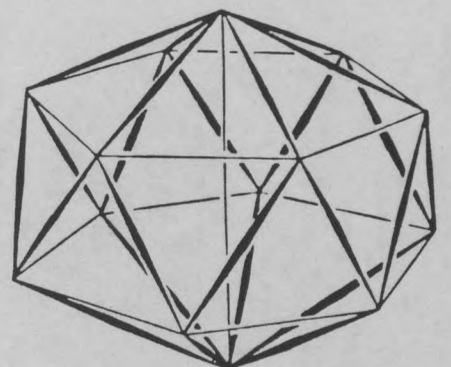
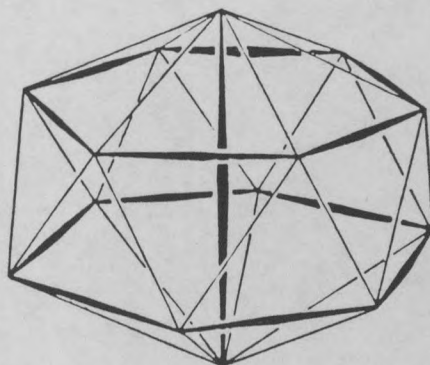
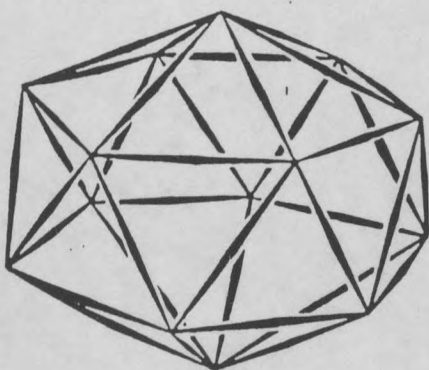
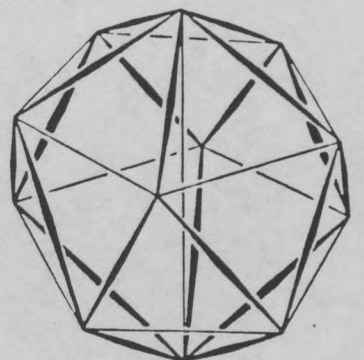
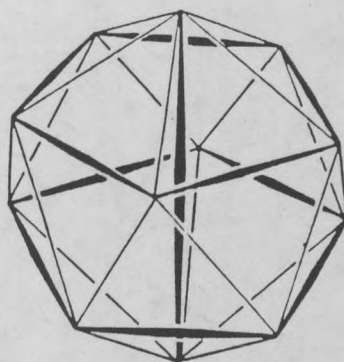
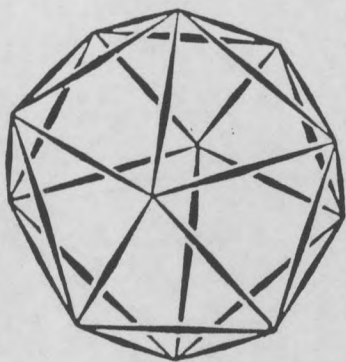
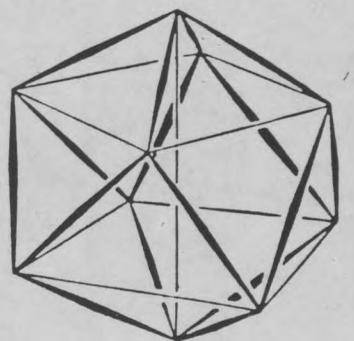
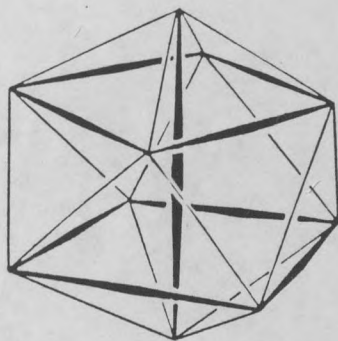
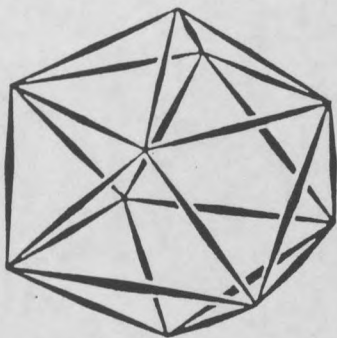
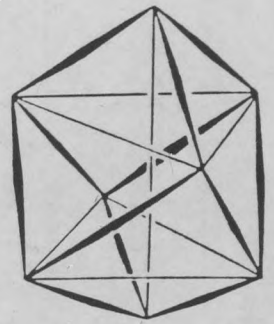
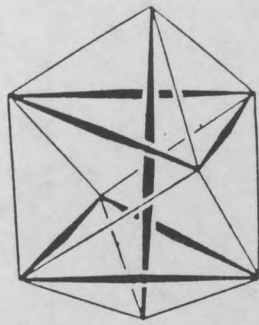
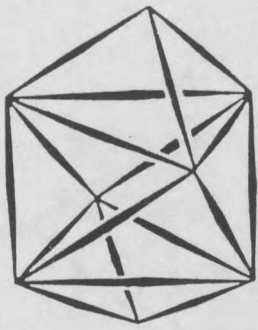
PRISMES



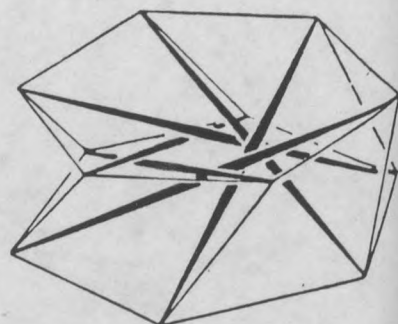
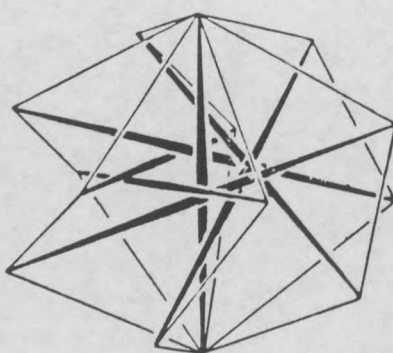
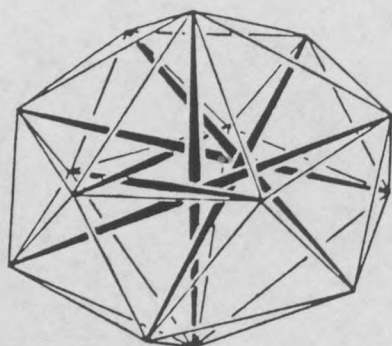
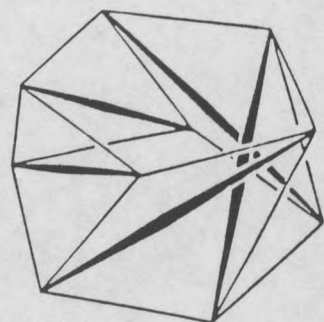
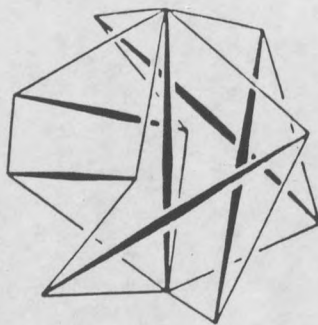
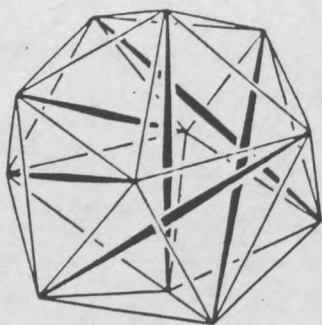
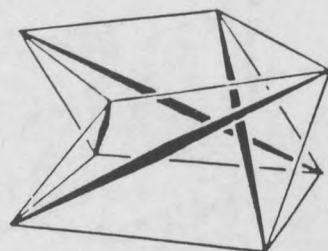
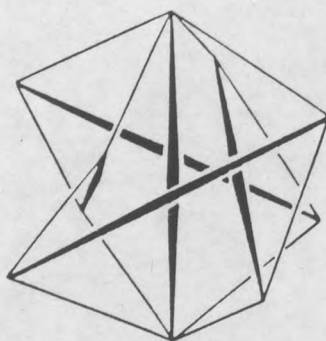
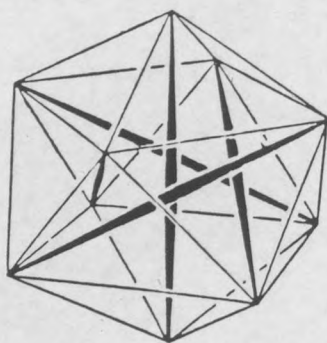
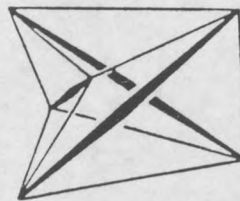
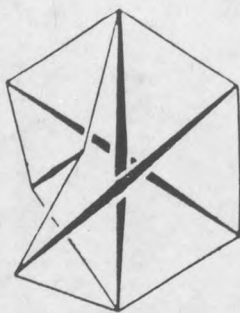
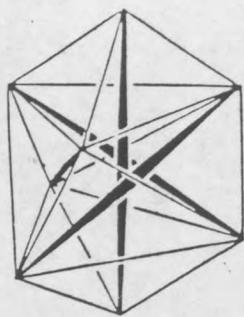
ANTIPRISMES

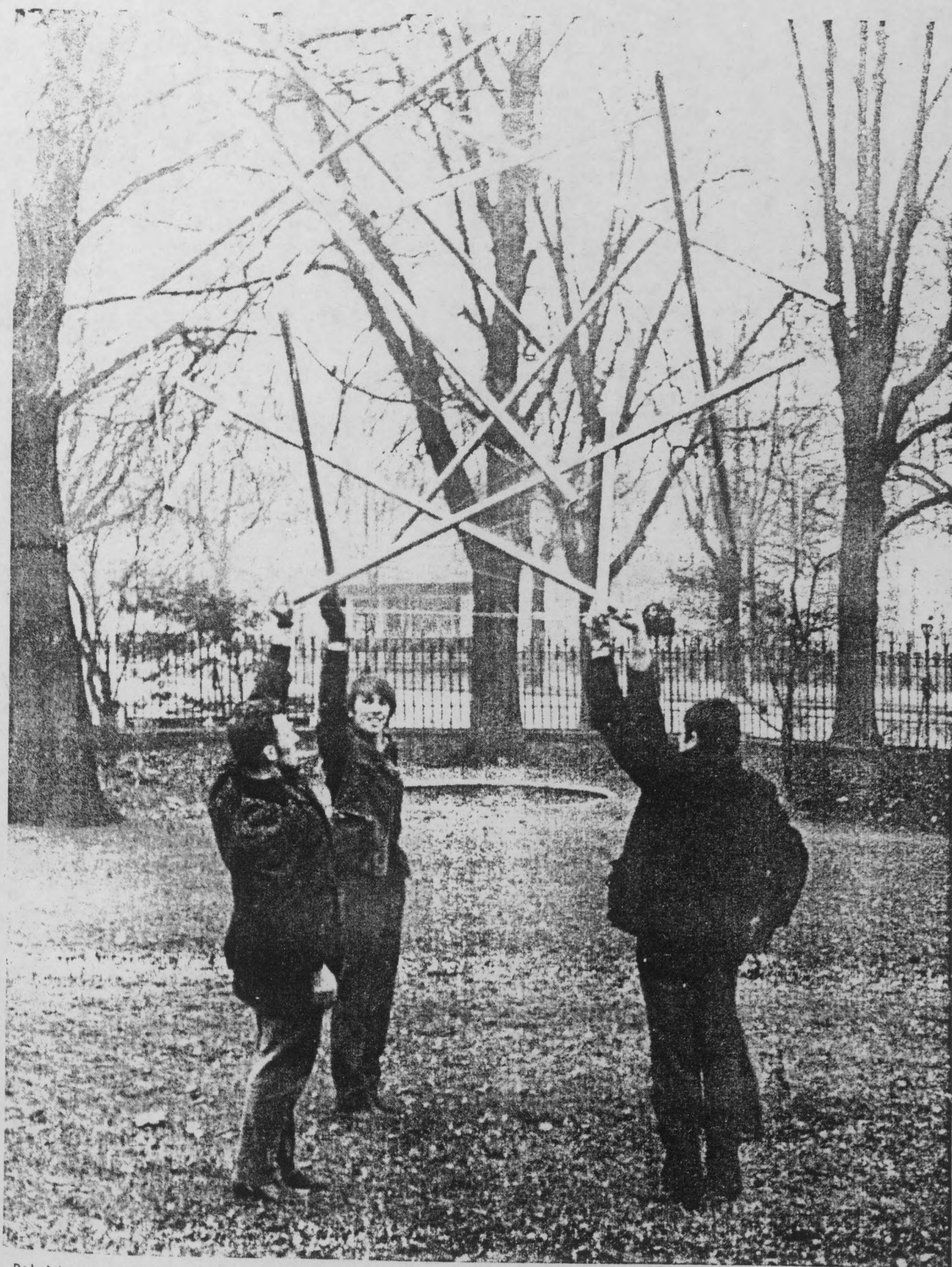


ANTIPRISMES BIPYRAMIDES



AUTOTENDANTS ELEMENTAIRES





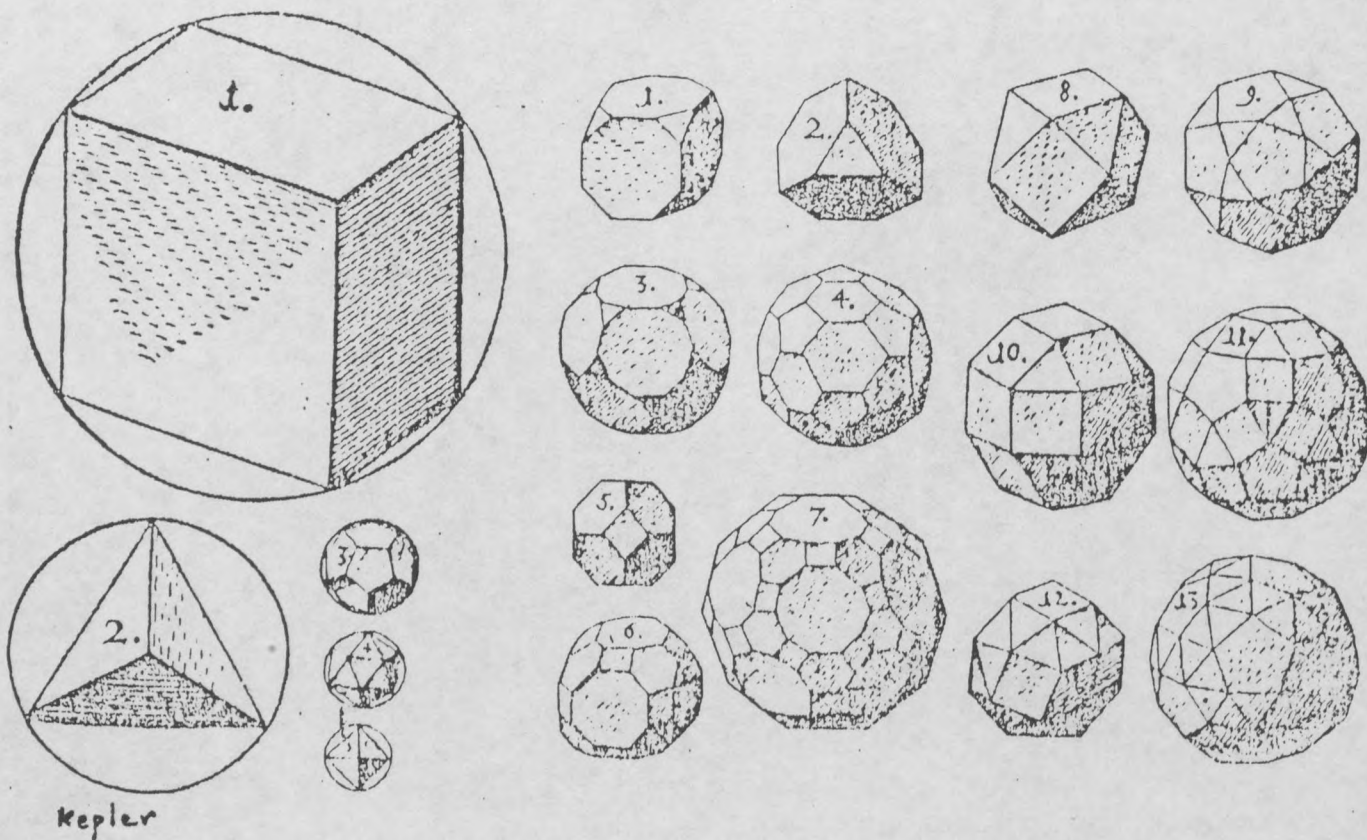
Polyèdre autotendant. ENSBA. Strasbourg 1967

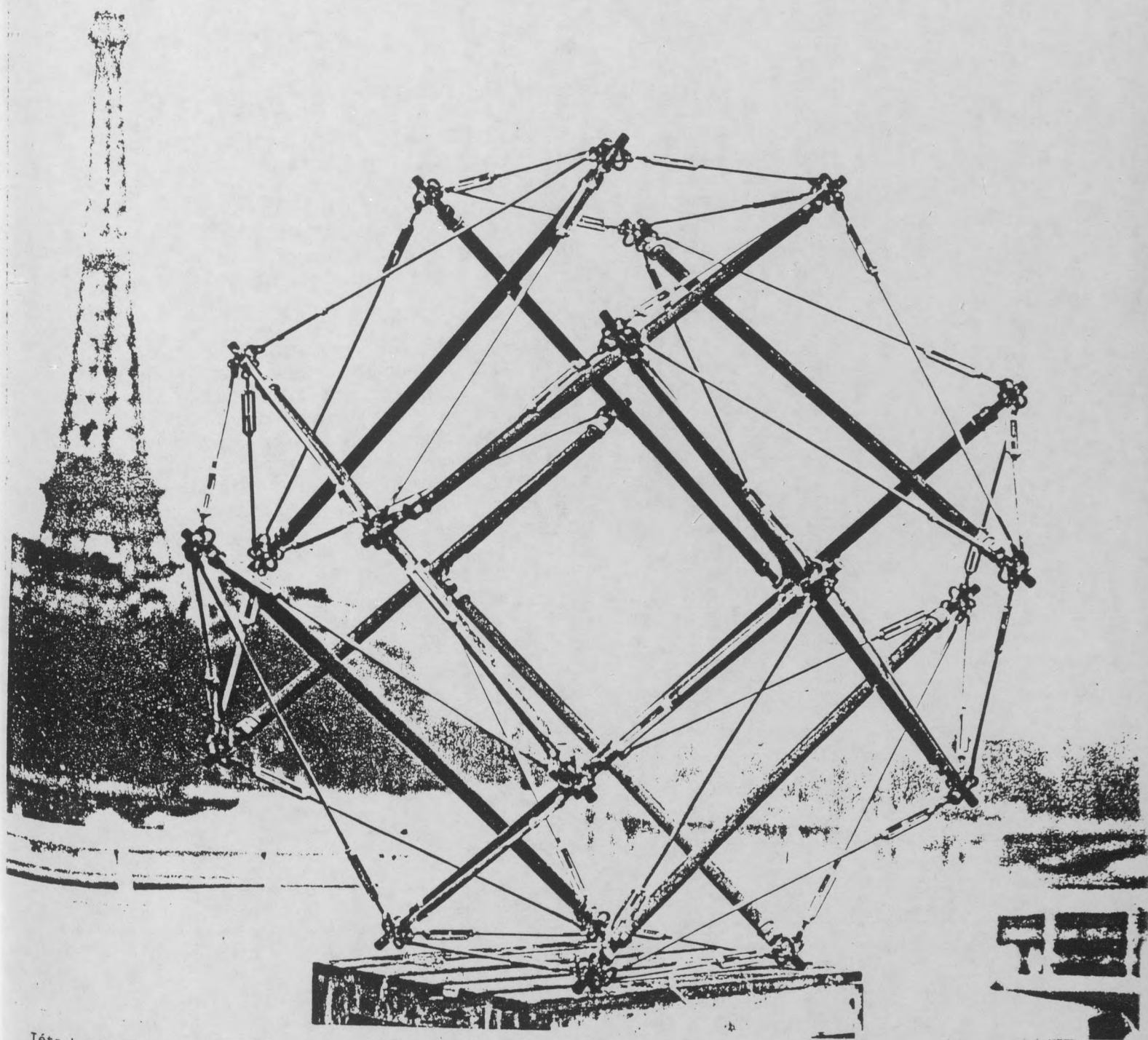
POLYEDRES

REGULIERS AUTOTENDANTS

Le tétraèdre excepté, tous les solides réguliers convexes, platoniciens ou archimédiens, sont réalisables en tant que structures autotendantes. L'octaèdre et le cube étant homéomorphes aux tripode et tétrapode antiprismatiques, il existe donc avec les deux autres platoniciens restants, les treize solides archimédiens et les deux variantes "pseudo", en tout dix sept solides réguliers autotendants. Ces configurations sont représentées par leurs vues axonométriques sur les planches synoptiques suivantes.

Le mode de construction et les caractéristiques de ces configurations polyédriques autotendantes sont précisées dans l'ouvrage déjà cité plus haut. On se contente ici de rappeler que les sommets de ces structures se situent sur une sphère; que les tirants tous identiques correspondent aux arêtes du polyèdre régulier respectif et que les barres de compression, également toutes identiques, relient les sommets non voisins du réseau tendu dans lequel elles sont imbriquées sans aucun contact entre elles, ni par leur extrémité ni par un point intermédiaire.





Tétrakaïdécaèdre autotendant

En somme, ces structures polyédriques multidirectionnelles et à plusieurs axes de symétrie ont les mêmes propriétés que les simplex autotendants antiprismatiques. Chaque structure étant un équilibre isostatique où chaque élément est strictement nécessaire, ces solides autotendants peuvent être considérés comme autant de simplex stables nouveaux.

En les examinant de plus près, on découvre, cependant, qu'en fait ces solides réguliers sont composés de sous-ensembles dérivant des trois premiers simplex autotendants antiprismatiques, à trois, quatre ou cinq barres de compression. Dans ces ensembles ces simplex élémentaires sont, évidemment, déformés: l'antiprisme devient antipyramide tronquée en s'adaptant aux angles du polyèdre, formant ainsi des calottes de ce dernier.

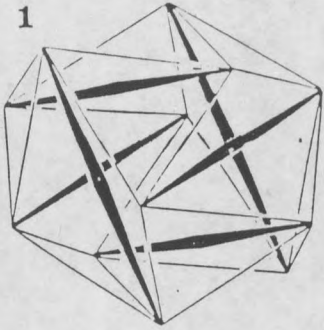
Dans certains cas, deux sous-ensembles sont simplement juxtaposés ou interpénétrés par une base commune en forme de polygone planaire ou spatial; mais, dans la plupart des structures polyédriques les sous-ensembles sont entrelacés de sorte que chaque barre de compression appartient à deux groupes voisins, qui bien qu'étant individualisables en tant que simplex distincts ne sont pas, cependant, des entités statiques autonomes.

Tout en pouvant considérer ces sous-ensembles comme des simplex distincts, ce n'est que leur assemblage dans une hiérarchie supérieure en forme de réseau convexe, qui assure leur stabilité globale et même sphérique. De ce fait, si l'on veut, les polyèdres réguliers peuvent être interprétés comme des hypersimplex convexes autotendants.

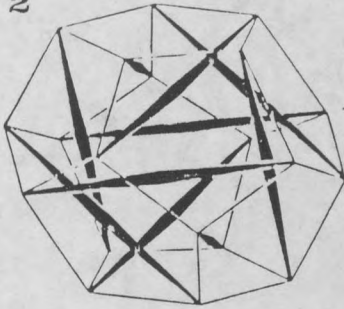
POLYEDRES REGULIERS AUTOTENDANTS

N°	Nom	code	nombre de		
			sommets	tendeurs	barres
	Platoniques				
1	icosaèdre	33333	12	24	6
2	dodécaèdre	555	20	30	10
	Archimédiens				
3	cube adouci	33334	24	60	12
4	pseudo cube adouci	33334	24	48	12
5	cuboctaèdre	3434	12	18	6
6	pseudo cuboctaèdre	3344 3434	12	18	6
7	rhombicuboctaèdre	3444	24	48	12
8	dodécaèdre adouci	33335	60	90	30
9	petit rhombicosidodéca.	3454	60	120	30
10	icosidodécaèdre	3535	30	60	15
11	tétraèdre tronqué	366	12	18	6
12	tétrakaïdécaèdre	466	24	36	12
13	icosaèdre tronqué	566	60	90	30
14	grd rhombicuboctaèdre	468	48	72	24
15	cube tronqué	388	24	36	12
16	grd rhombicosidodéca.	4610	120	180	60
17	dodécaèdre tronqué	31010	60	90	30

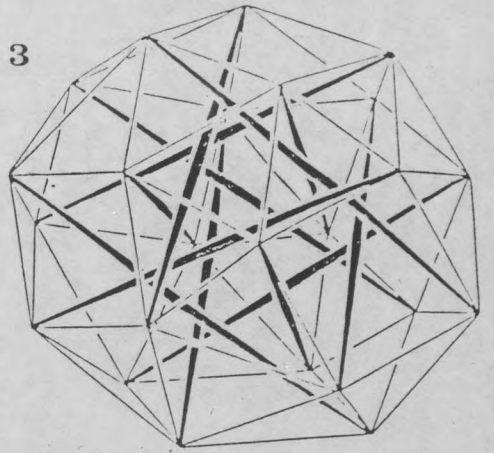
1



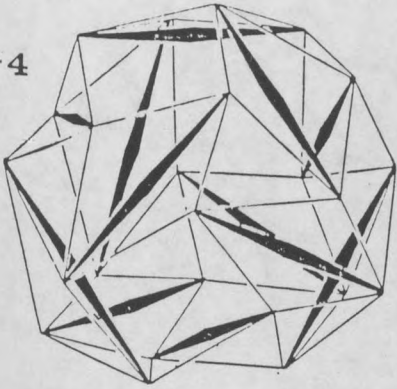
2



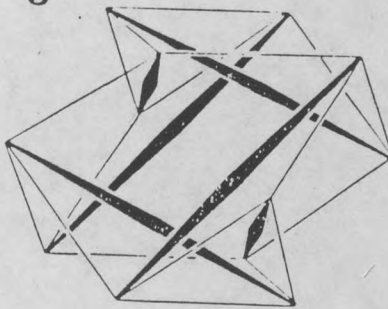
3



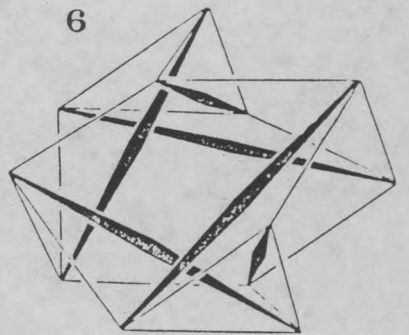
4



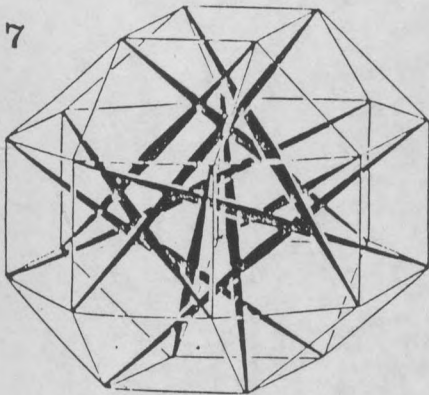
5



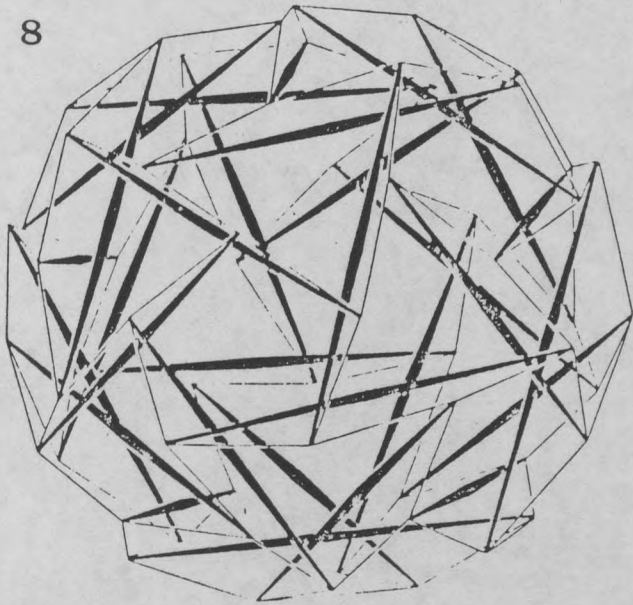
6



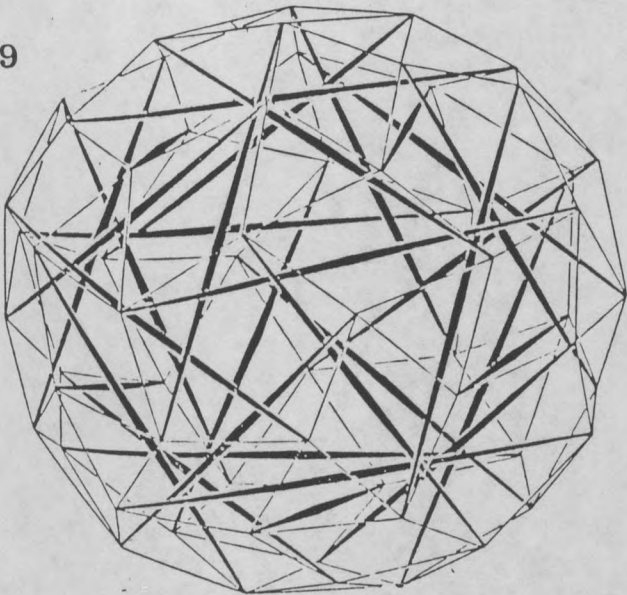
7



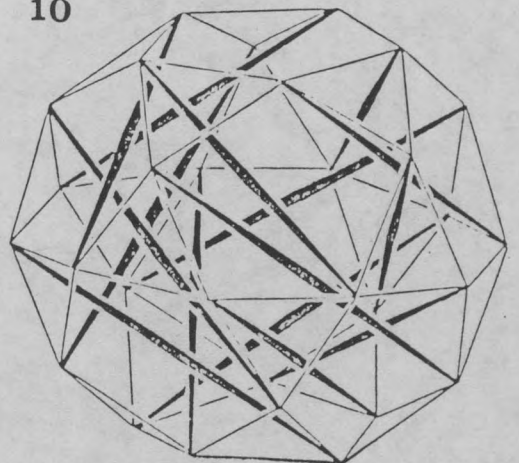
8



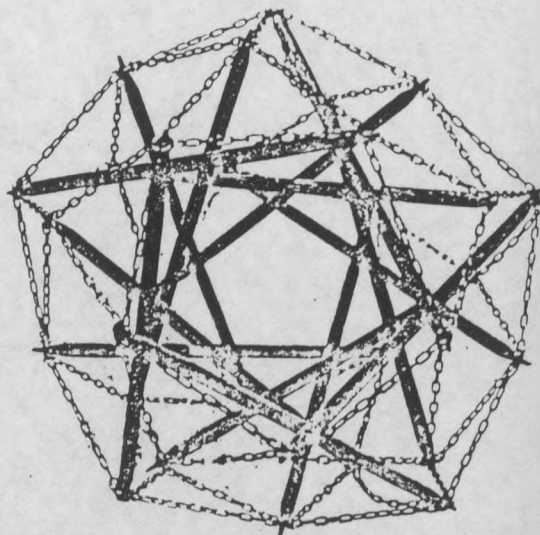
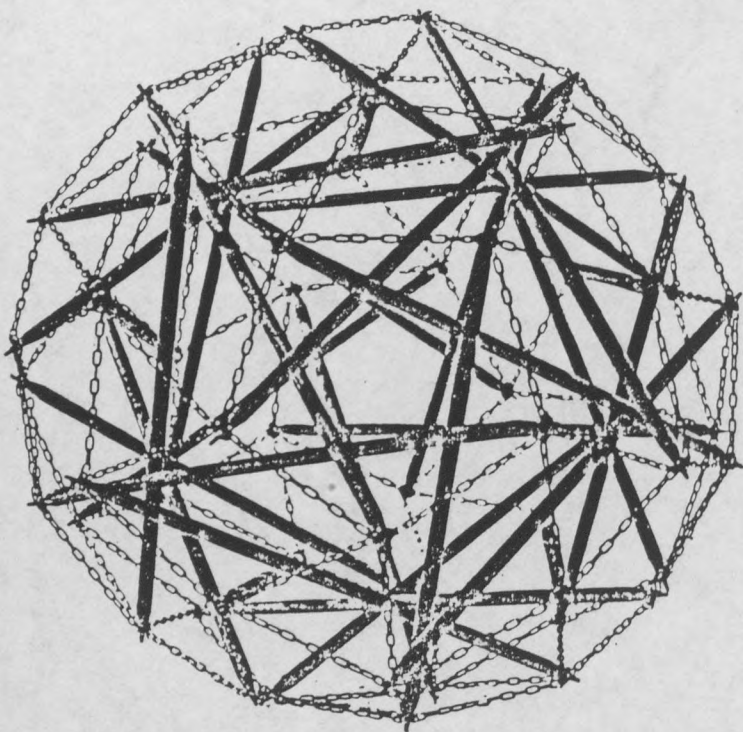
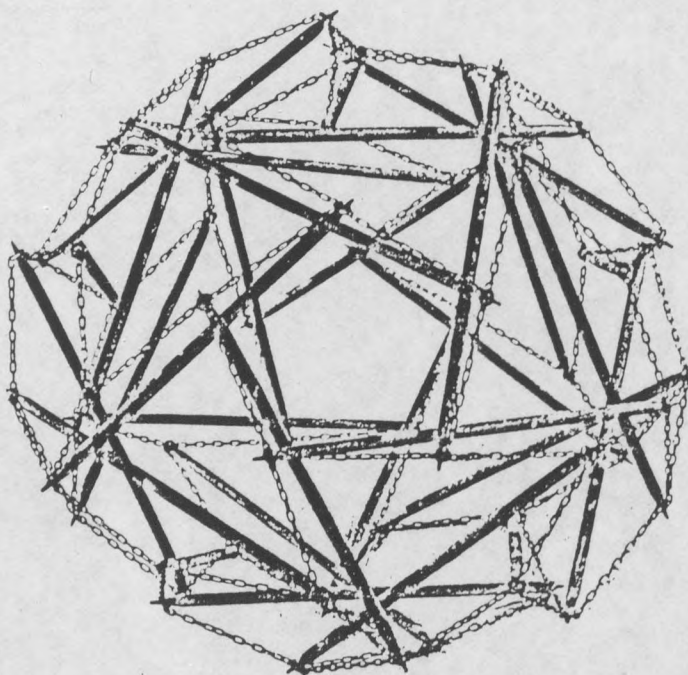
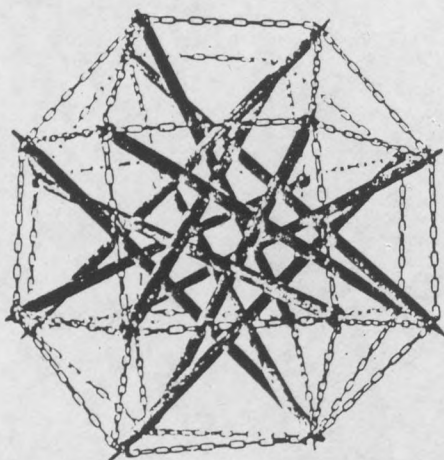
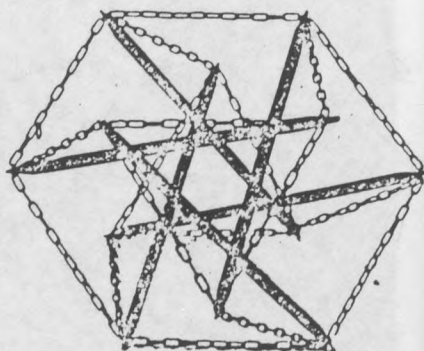
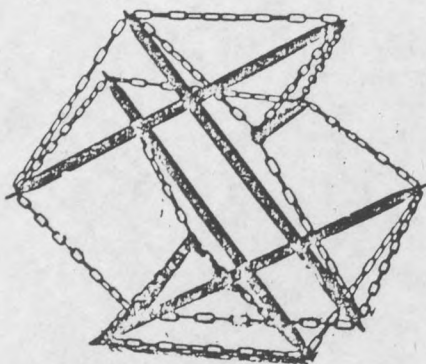
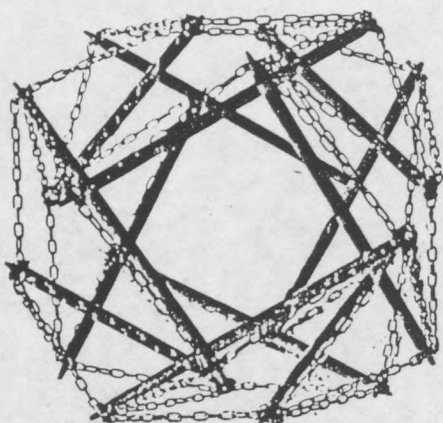
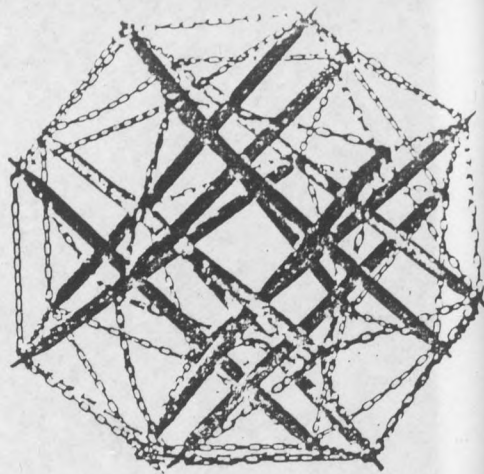
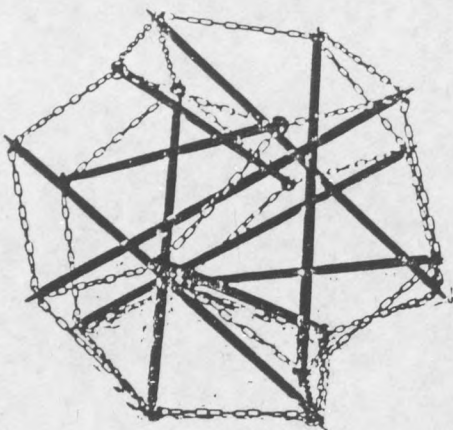
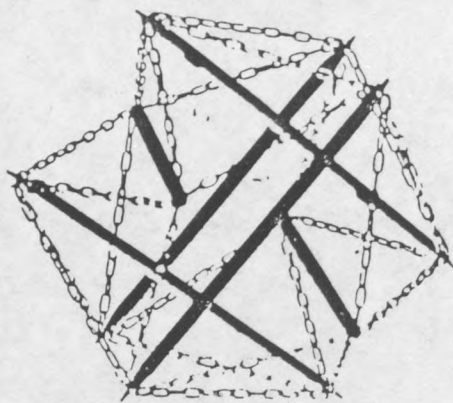
9



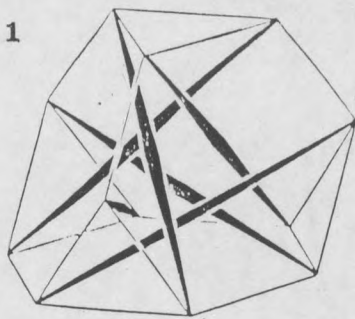
10



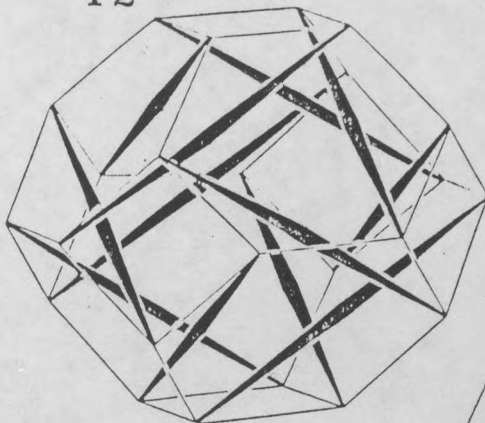
POLYEDRES REGULIERS AUTOTENDANTS



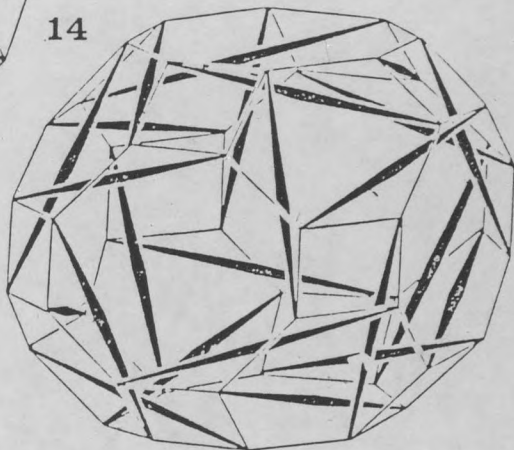
11



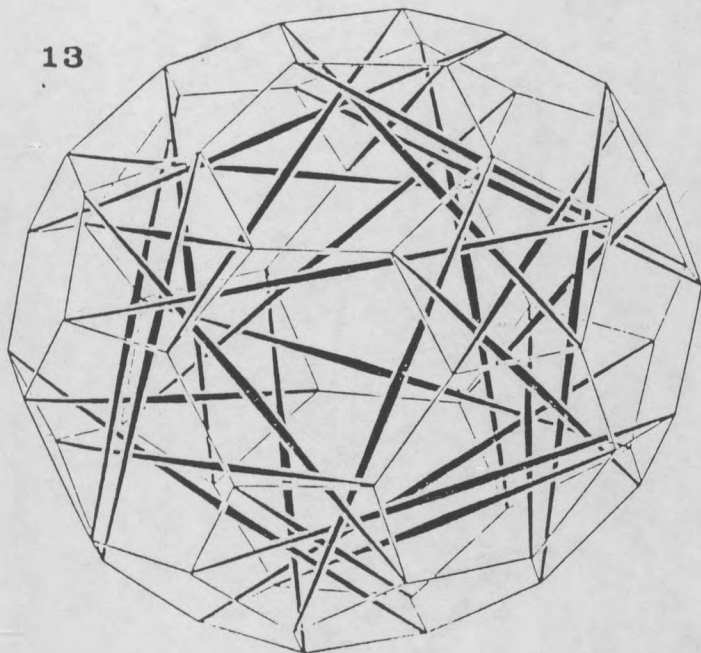
12



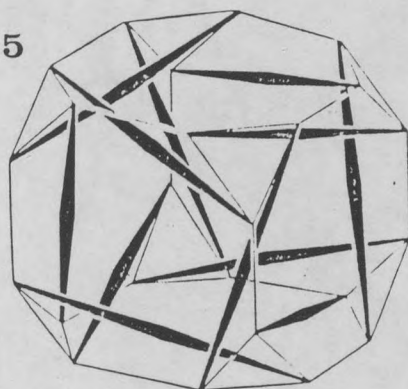
14



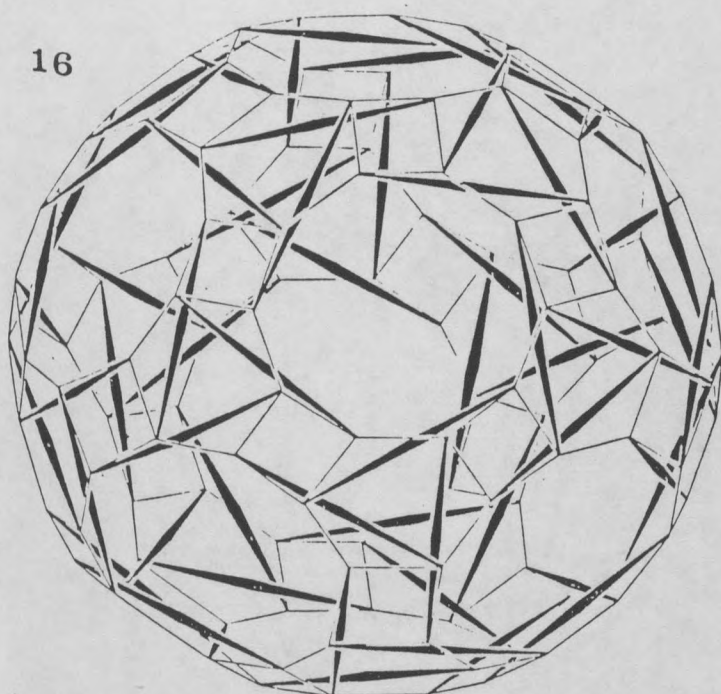
13



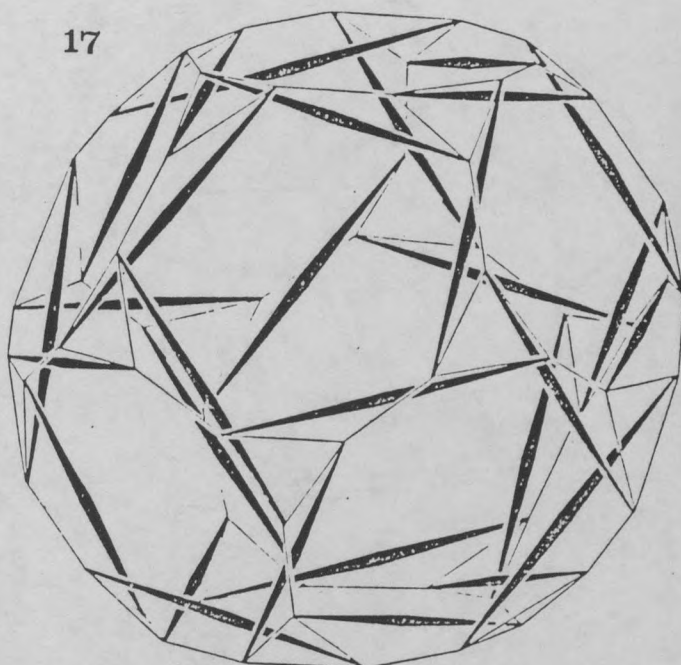
15



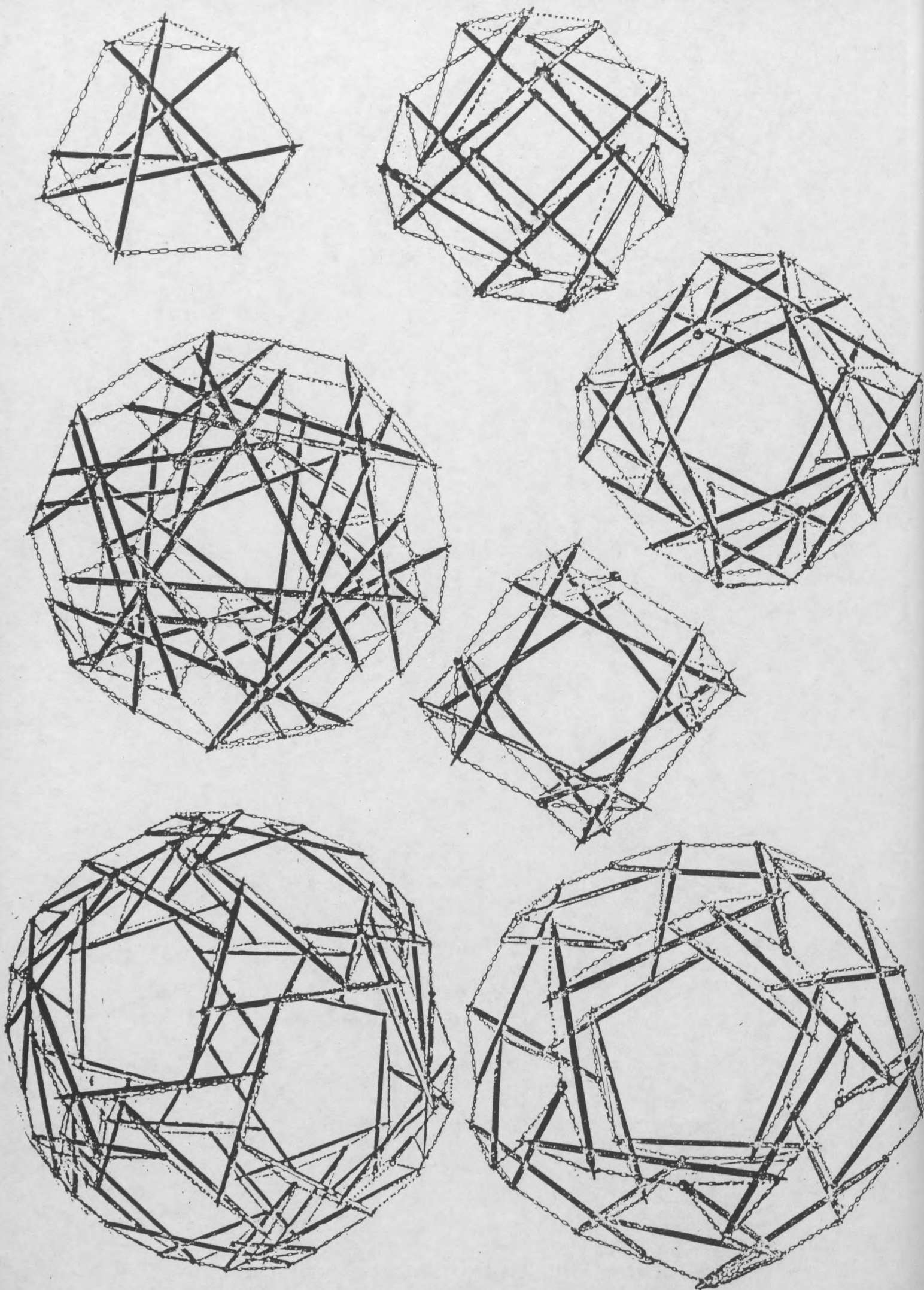
16

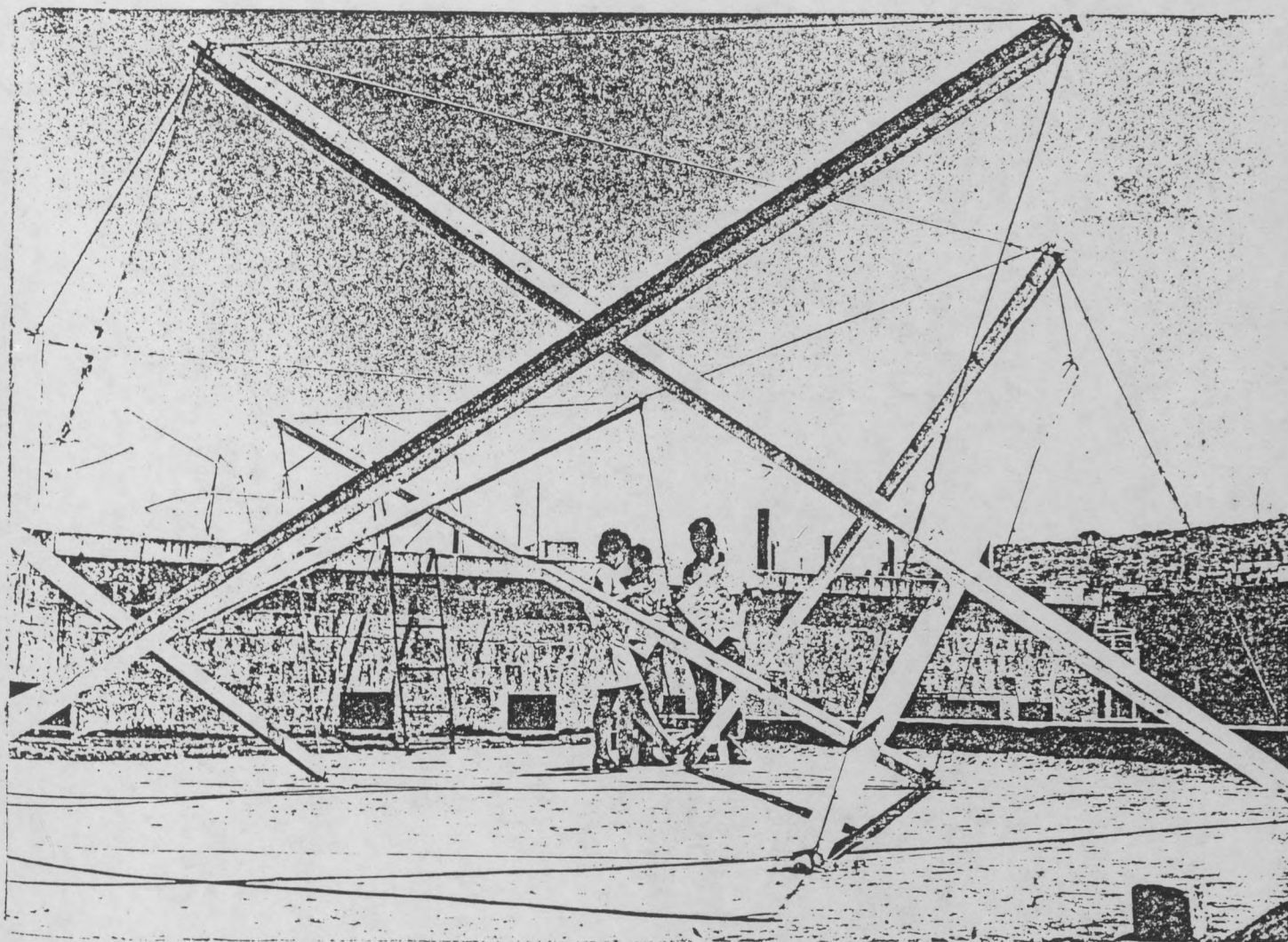


17



POLYEDRES REGULIERS AUTOTENDANTS

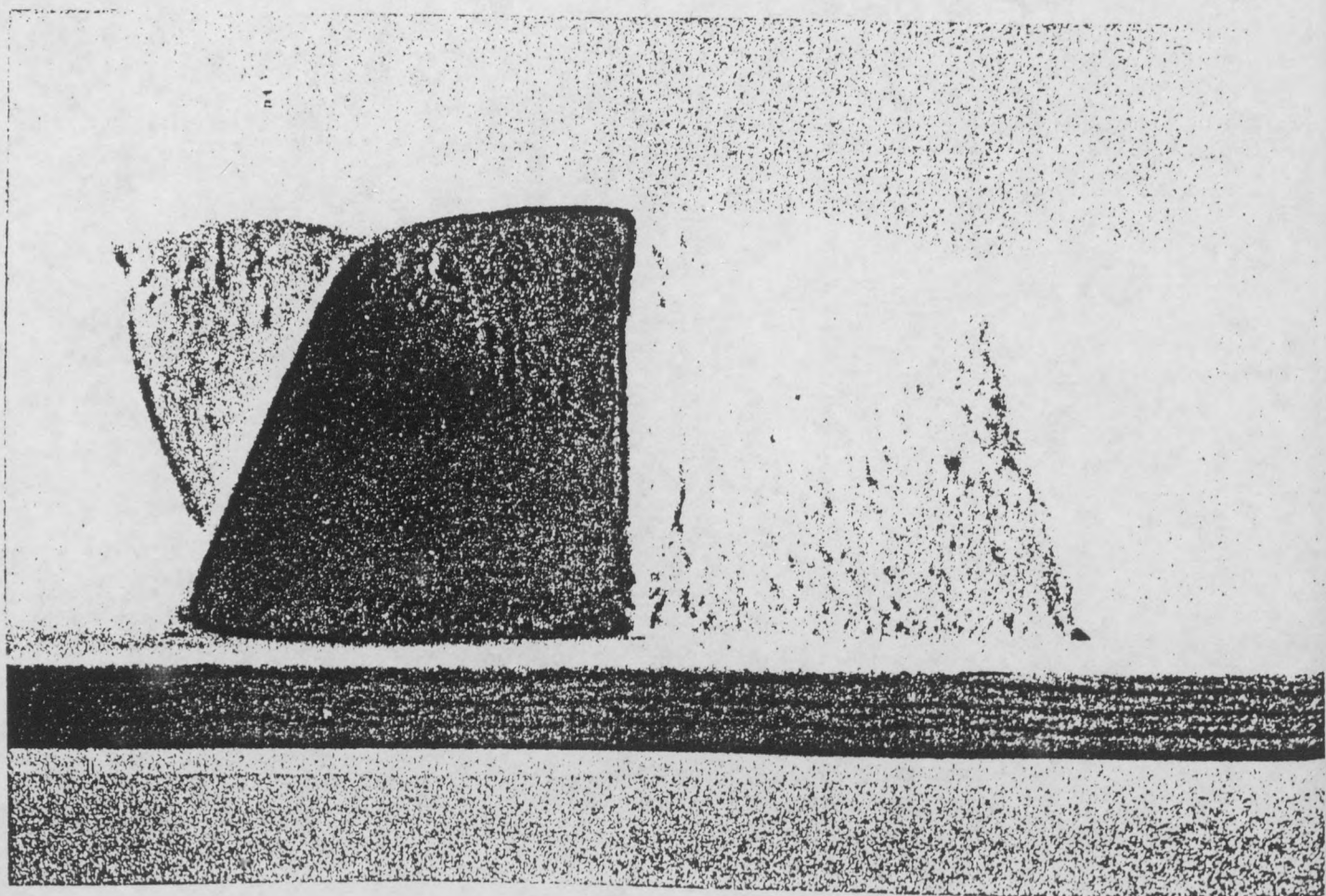
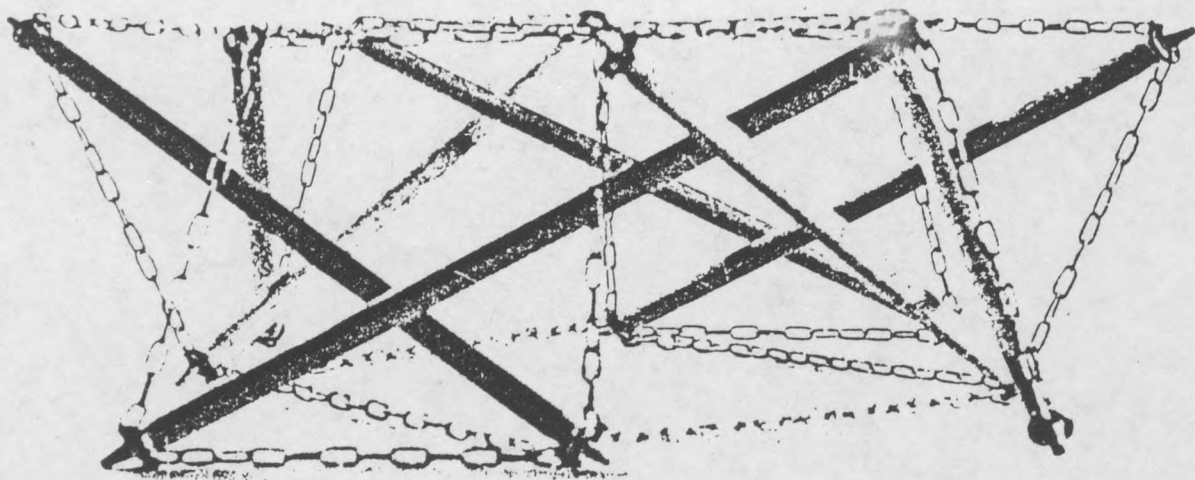


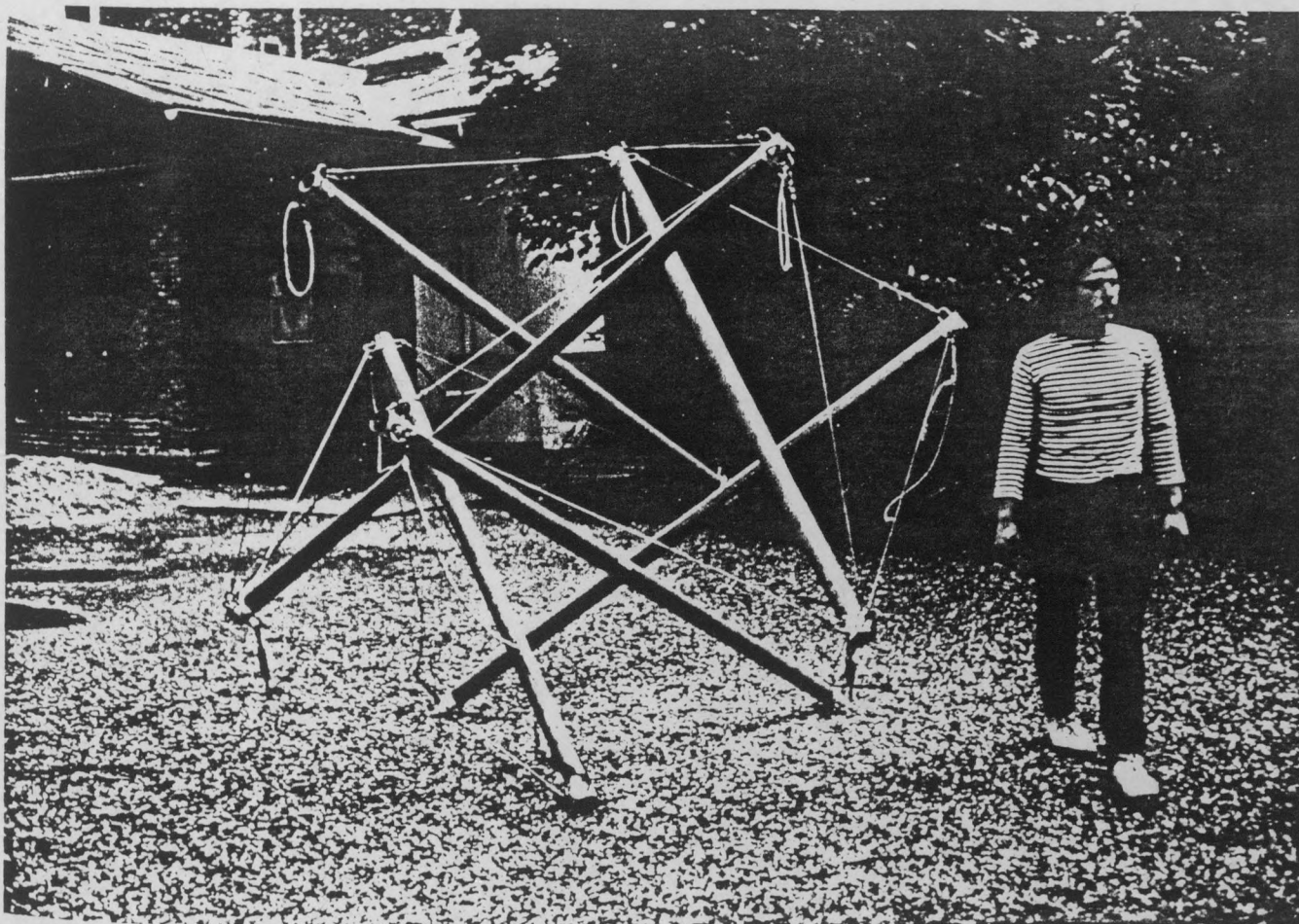


Habitacle autotendant. Technion 1970

CONCLUSION

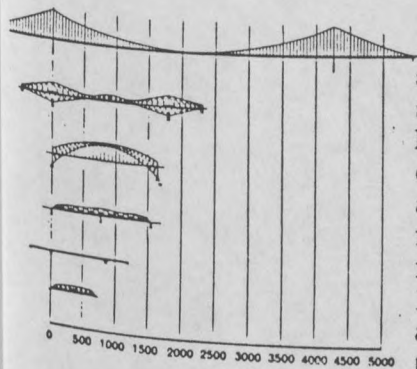
Ces systèmes constructifs nouveaux sont utilisables directement en tant que volumes habitables ou partiellement comme couverture de grande portée en forme de coupole, voûte, etc. Leur empilement en réseaux cristallographiques remplissant tout l'espace d'une manière compacte ou élaguée constitue autant d'ossatures de bâtiments qui bien qu'étant transformables, démontables et récupérables restent cependant rigoureusement stables au point d'être même antisismiques. Ces structures sont, en effet, quasi indestructibles.



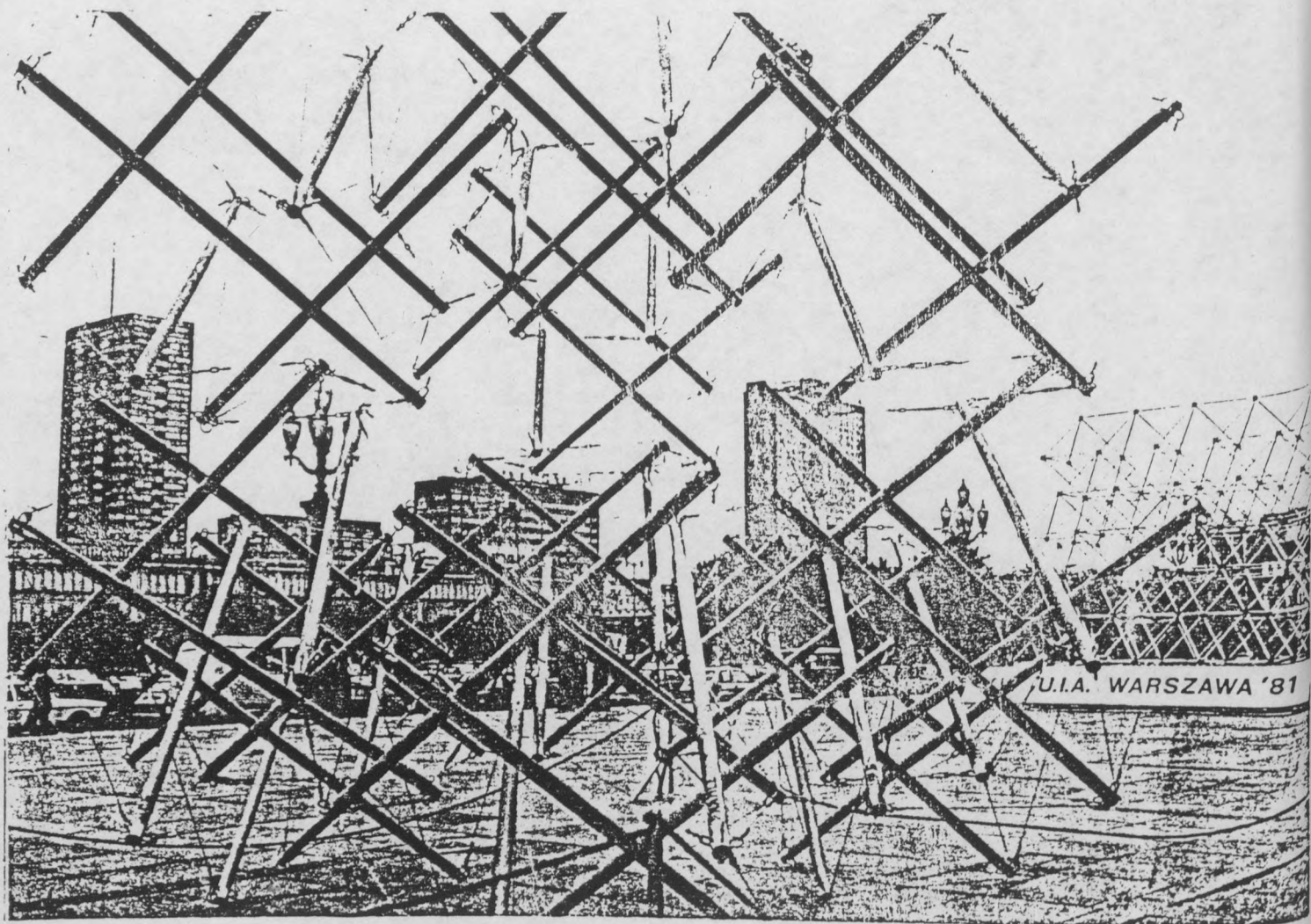
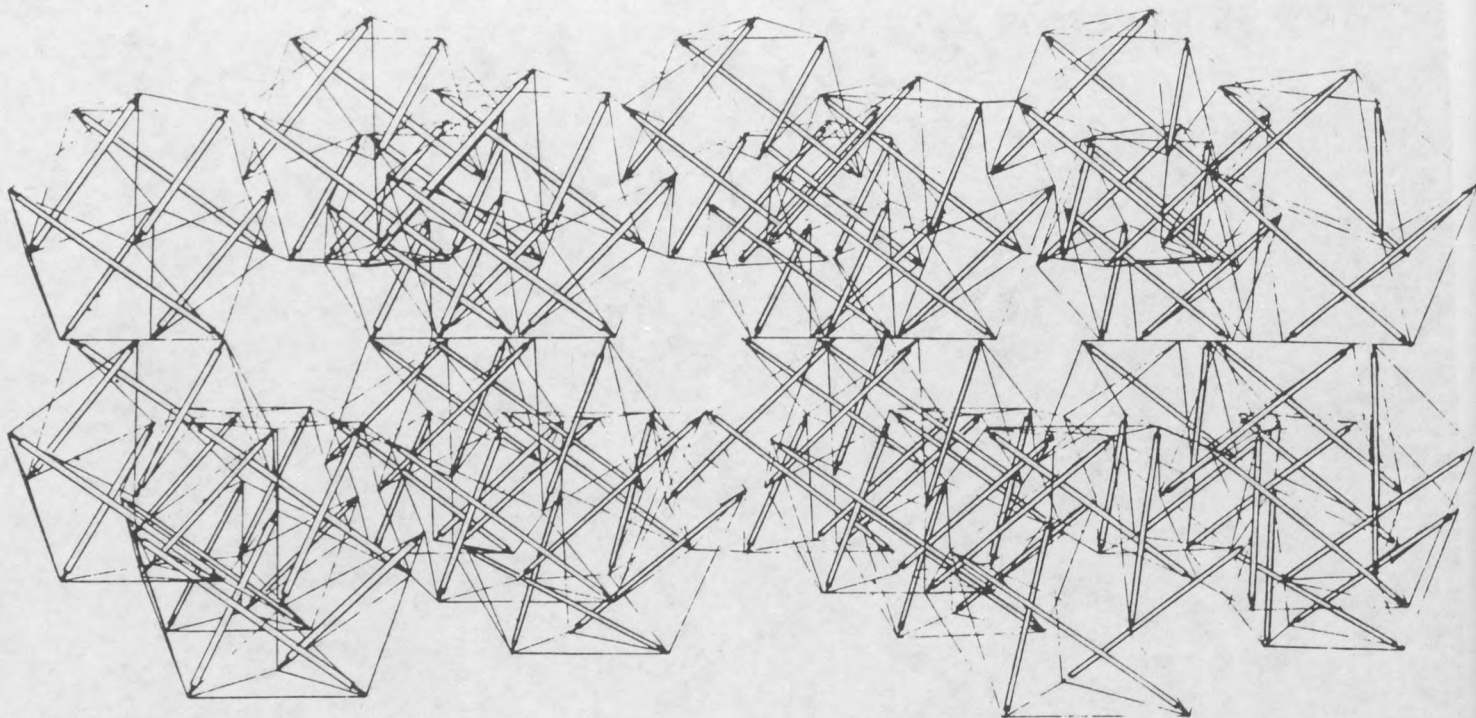


Icosaèdre autotendant pliant. EAPLV. 1981

A plus grande échelle, ces réseaux pourraient être employés comme infrastructure urbaine agençant l'espace par des points porteurs permanents sur lesquels les gros oeuvres architectoniques seraient disposés librement. Dans un tel contexte technique, la ségrégation entre l'intérieur et l'extérieur, la notion de façade les séparant sans transition ni altération possible, le concept de plan masse seraient autant de problèmes dépassés. L'espace devient à la fois fluide rythmé et en même temps plus abondant.

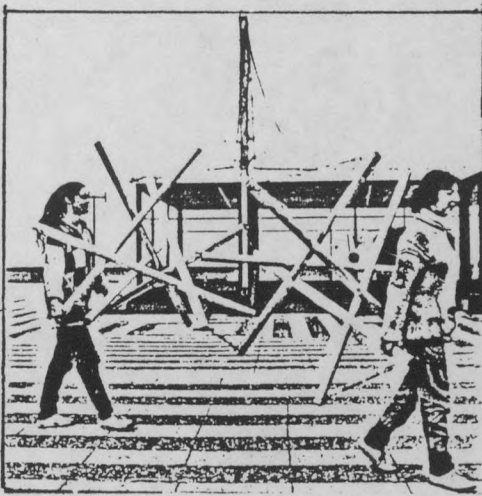
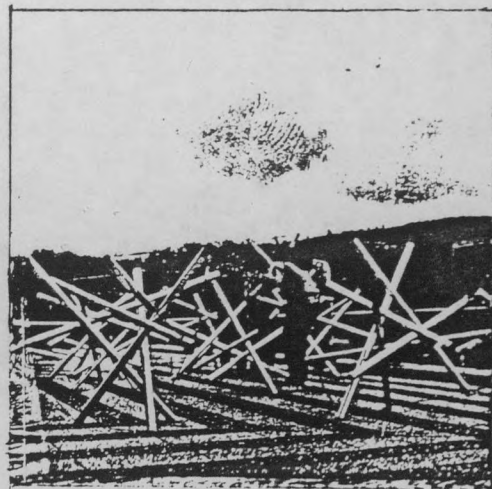
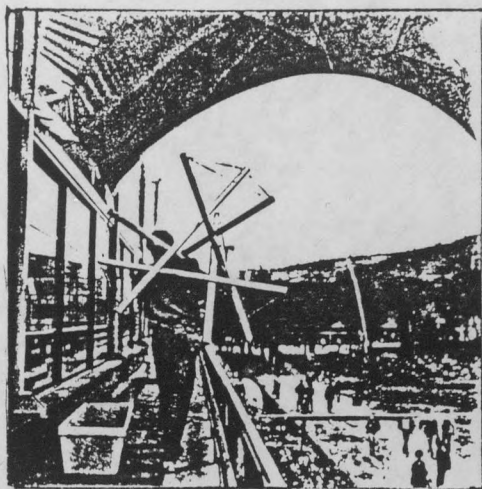
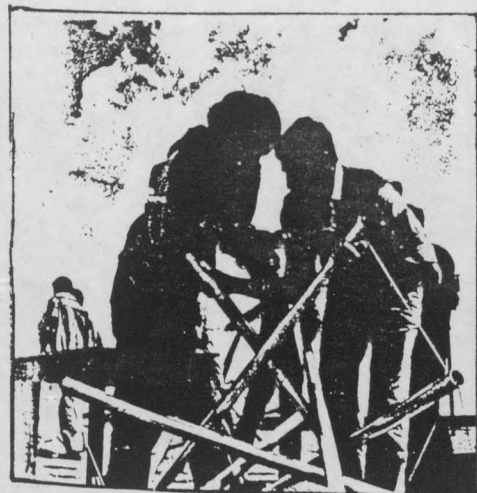


Par une ultime inversion, grâce à l'étude des simplex stables et de leurs assemblages dans les systèmes constructifs d'une meilleure rigidité, le bâtiment, l'architecture et l'urbanisme perdraient en contre partie leur indésirable rigidité. Grâce à la performance technique des structures nouvelles, l'art de bâtir accomplira ainsi par rapport aux constructions actuellement en vogue le même bond en avant que les ponts suspendus ont accompli depuis longtemps par rapport au pont de pierre ou de béton armé.

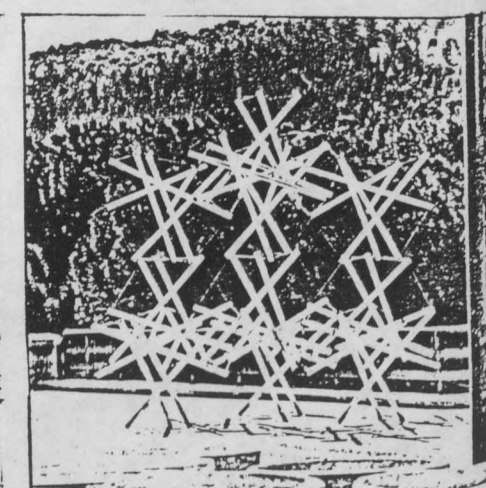
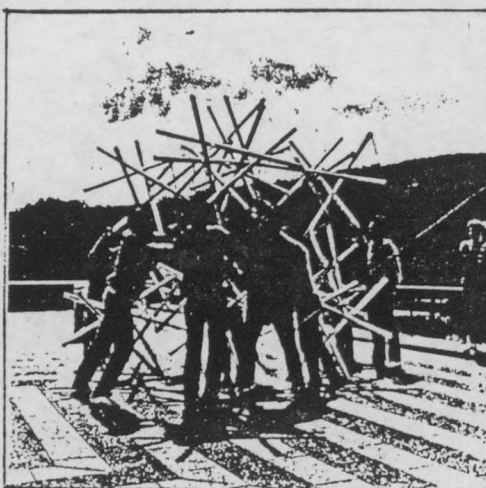
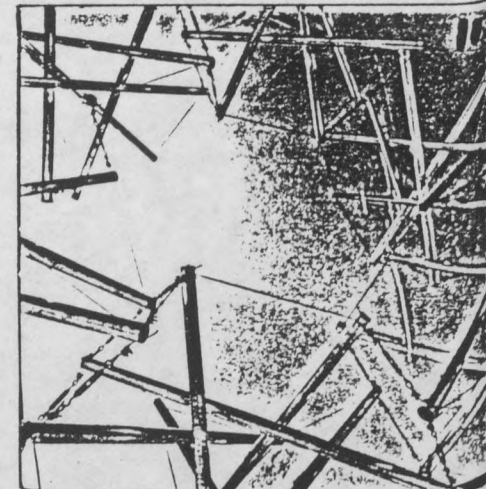
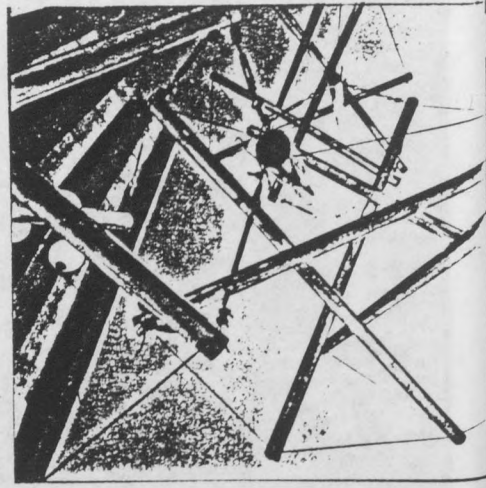


Empilement autotendant à barres orthogonales dans un réseau tétrakaïdécaédrique tendu

EAPLV. 1981

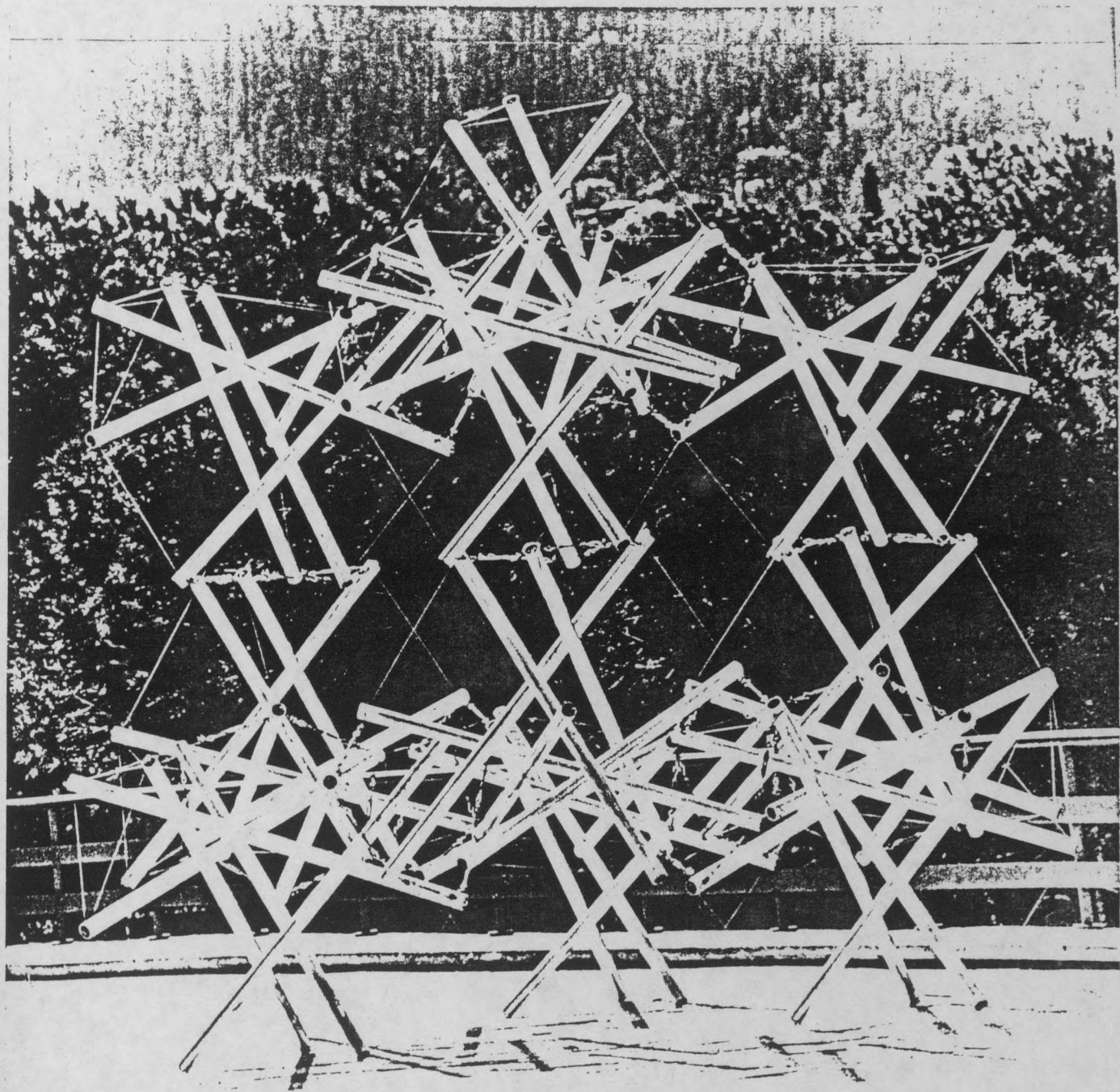


Réalisation d'une structure autotendante : un empilement non compact à base de tétraèdres tronqués à six barres; ces sous-ensembles associables à l'infini forment la configuration périodique régulière la plus distendue; un espace spongieux où dominent les trous entourés par des volumes structurants d'ailleurs également vides. Les enveloppes, parois externes et internes, sont prévues de surfaces minimales gauches de double courbure inverse formant membranes, qui sont les compléments naturels des constructions étudiées et modélisées.



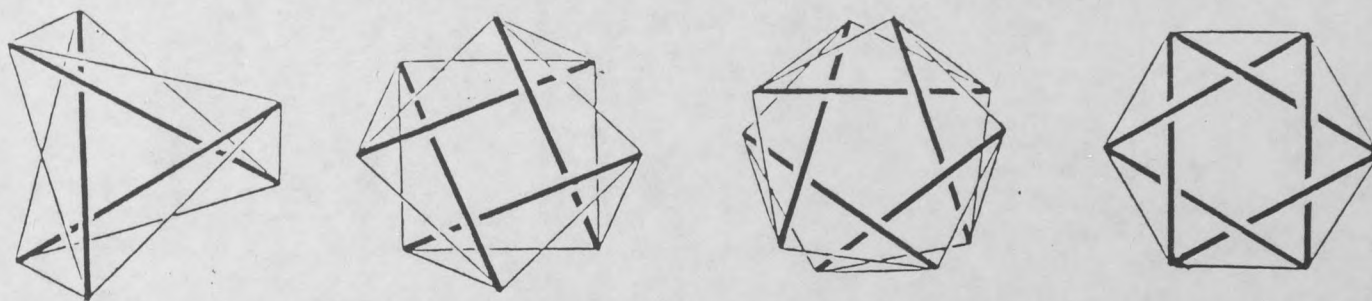
Photos Drora Spitz

Empilement non compact à tétraèdres tronqués Technion 1986



Empilement non compact à tétraèdres tronqués Technion 1986

ANNEXES



HYPERSIMPLEX TORIQUES AUTOTENDANTS

RIGIDITE DES SIMPLEX AUTOTENDANTS

La forme générale des autotendants élémentaires est un anti-prisme; solide comparable à un prisme dont les deux bases polygonales ont subi une dérotation relative. Un simplex de n côtés se compose de deux n -agones tendus et de n -tirants obliques, d'une part, et de n -barres de compression, en principe obliques, d'autre part; donc au total : de $3n$ tirants et de n barres.

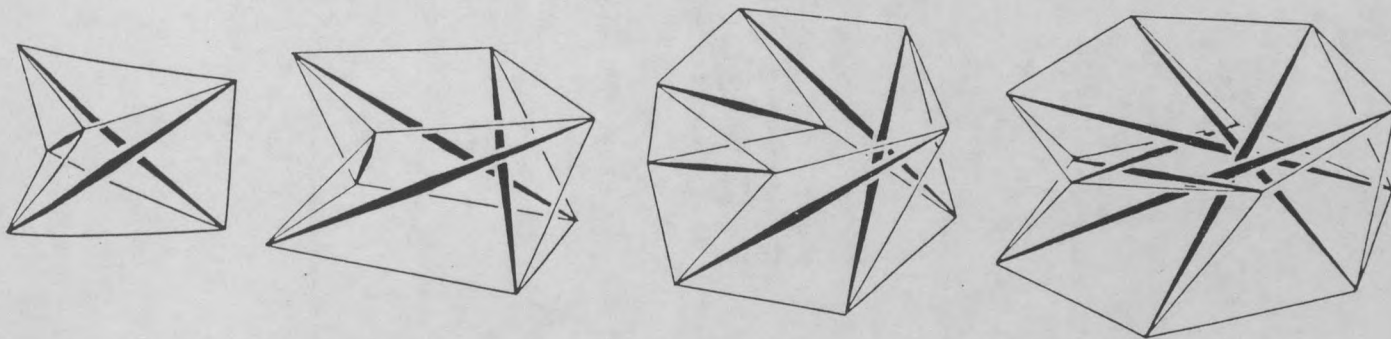
La forme idéale de ces solides serait, évidemment, l'anti-prisme régulier à faces triangulaires équilatérales. Mais, ceci n'est possible qu'en cas de tétrapode; les trois autres simplex - tripode, pentapode et hexapode - s'ils sont constitués de tirants identiques ne trouvent leur équilibre que sous une forme modifiée. L'antiprisme régulier, en effet, peut être modifié par les opérations suivantes :

Translation : en variant la distance entre les deux bases, donc l'élanement du solide.

Dilatation : en variant l'ampleur des deux bases donnant au corps une allure de pyramide tronquée.

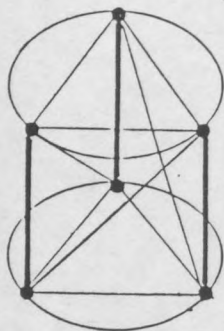
Rotation : en variant le degré de dérotation relative des bases.

Les deux premières opérations modifient la hauteur et le profil, mais n'ont pas d'influence décisive sur la rigidité. Par contre, la dérotation des bases, qui peut être la même quelque soient la hauteur ou le profil choisis, a une influence primordiale. En principe, plus forte est la dérotation, plus grande est la rigidité du simplex.



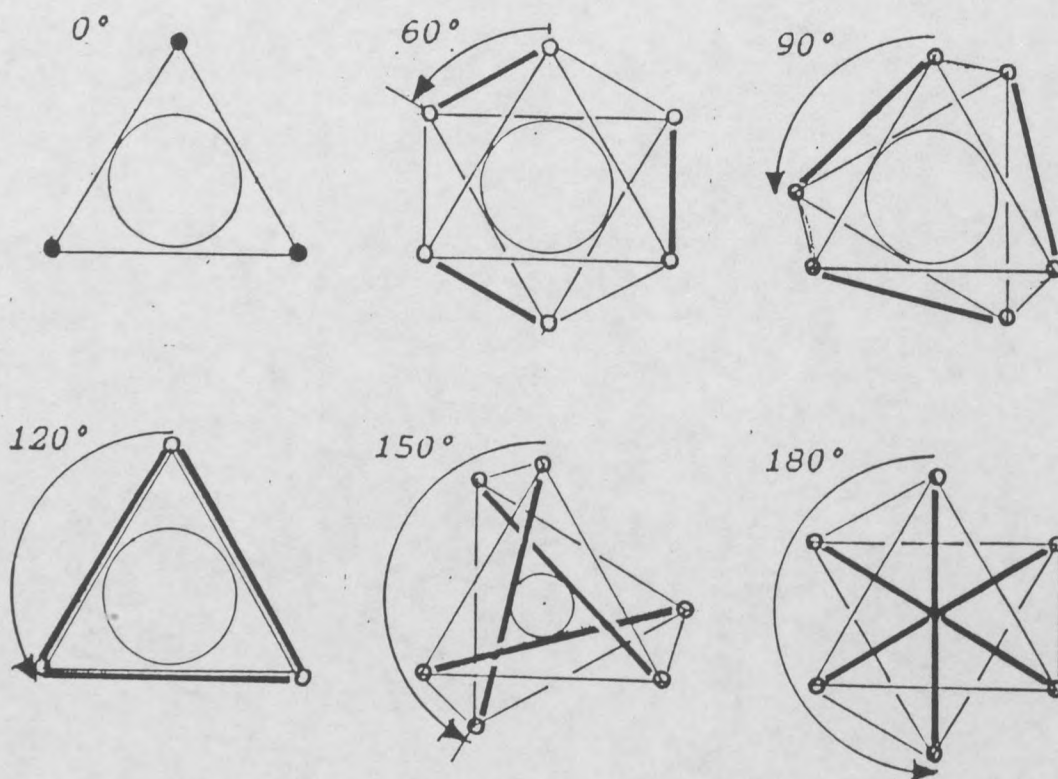
En choisissant les formes les plus régulières, les angles de dérotation par rapport à la génératrice verticale d'un prisme sont les suivants : a étant la dérotation des arêtes latérales tendues et b celle des barres de compression.

	a	b
Tripode	30°	150°
Tétrapode	45°	135°
Pentapode	54°	126°
Hexapode	60°	120°

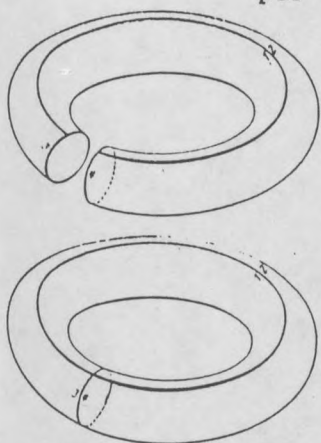


Ces valeurs correspondent à des situations optimales de régularité ou de combinabilité. L'équilibre, c'est à dire la rigidité, intervient entre deux limites de dérotation, minimale et maximale.

En examinant par exemple le processus de dérotation des barres dans un tripode, on constate que partant de la forme prismatique à 0° de dérotation, où les barres sont verticales, et passant par des stades de 60° et 90° de dérotation, où les barres occupent une position oblique correspondant à l'arête saillante d'un antiprisme, et jusqu'à 120°, où les barres deviennent les diagonales d'un prisme, la structure reste instable. Ce n'est qu'à partir du point critique de 120° et jusqu'à 180° - l'autre point critique provoquant la rencontre des barres et au delà duquel on passe dans la forme énantiomorphe - que la structure est rigide.



Curieusement, bien que ces données figurent dans notre "Exercices de Géométrie Constructive" édité en 1970, ce problème de dérotation a depuis fait l'objet de nombreuses études analytiques sous forme de publications et même d'un Doctorat d'Etat à Montpellier en 1983. Un des exercices exécutés sous notre direction et publié dans ce volume sous le titre "Tore" précisait déjà les limites critiques et la position optimale de la rigidité du tripode. De plus, il a été avancé que ces limites, c'est à dire la dérotation minimale, peut être considérablement réduite sous certaines conditions. Notamment, en provoquant le blocage de la dérotation par une contre torsion, qui peut être obtenue :



en cas de structure oblongue ouverte en stabilisant les deux bases par des moyens extérieurs au système;

en cas de juxtaposition de plusieurs structures par la création de rouages autobloquant en alternant le sens de rotation des structures voisines;

ou bien, en cas d'une structure torique, sorte de couronne ou anneau, où la dérotation des simplex est compensée par une torsion inverse du tore.

LES CONFIGURATIONS TORIQUES

Ce qui est hypo-statique dans un ensemble convexe, ou simplement connexe, peut donc devenir isostatique ou rigide dans un système de plus haute connectivité tel le tore.

Pour rendre plus évident la supériorité mécanique du tore par rapport à un corps simple, considérons un faisceau composé de brins élastiques qu'on essaie de torsader en spirale. Même si les deux extrémités sont ligaturées, l'ensemble se déroule une fois relâché et les brins redeviennent droits. Mais, si on attache les deux extrémités l'une à l'autre après avoir appliqué la torsion, le mouvement de dérotation de l'anneau torsadé est bloqué.

En vue de réduire la dérotation, on construit donc avec des simplex superposés une structure torique, laquelle, à l'instar d'un ruban de Moebius, subit une torsion.

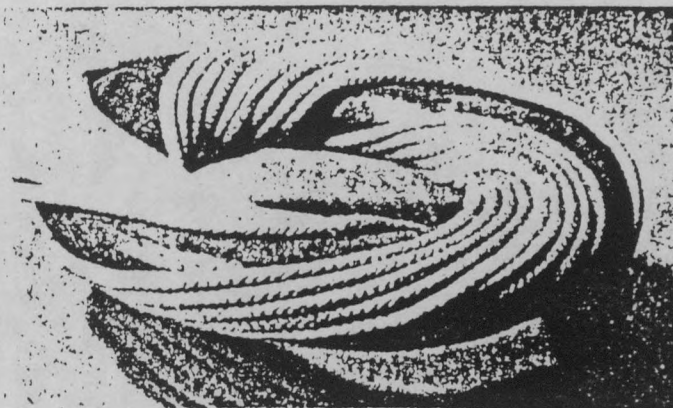
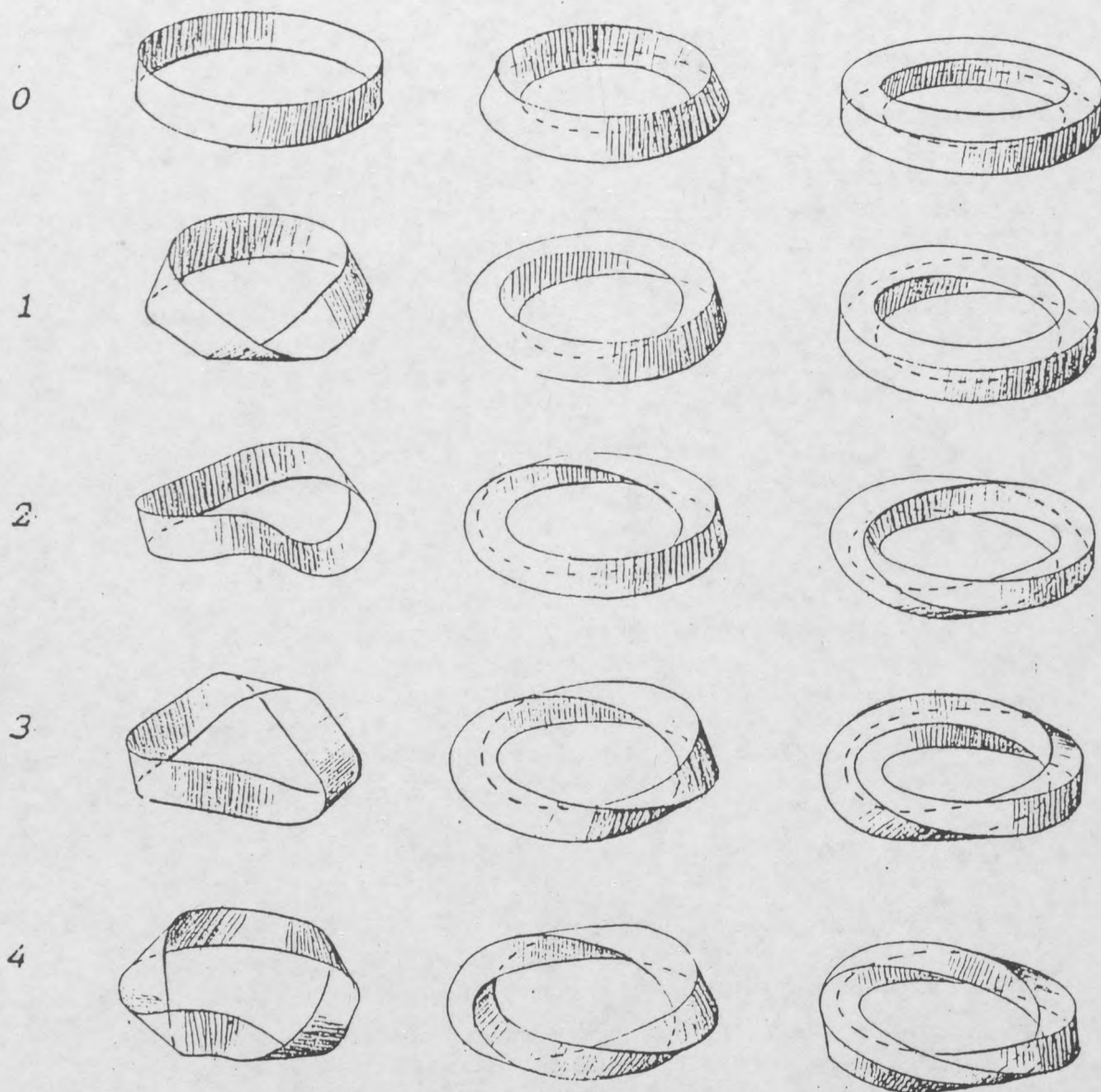
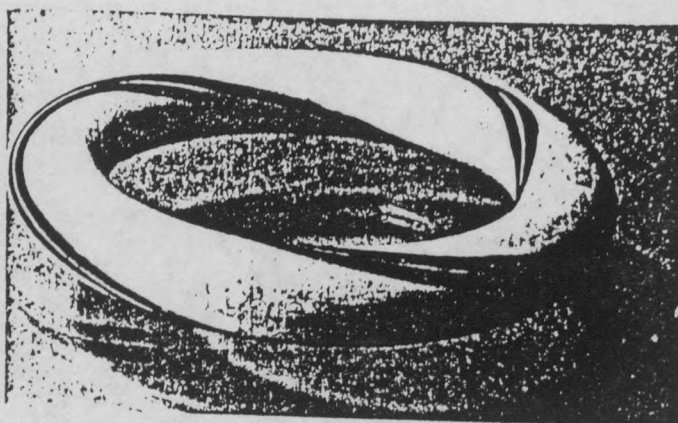
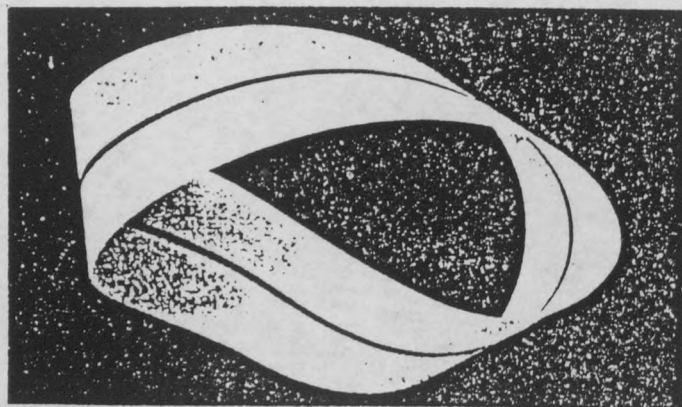
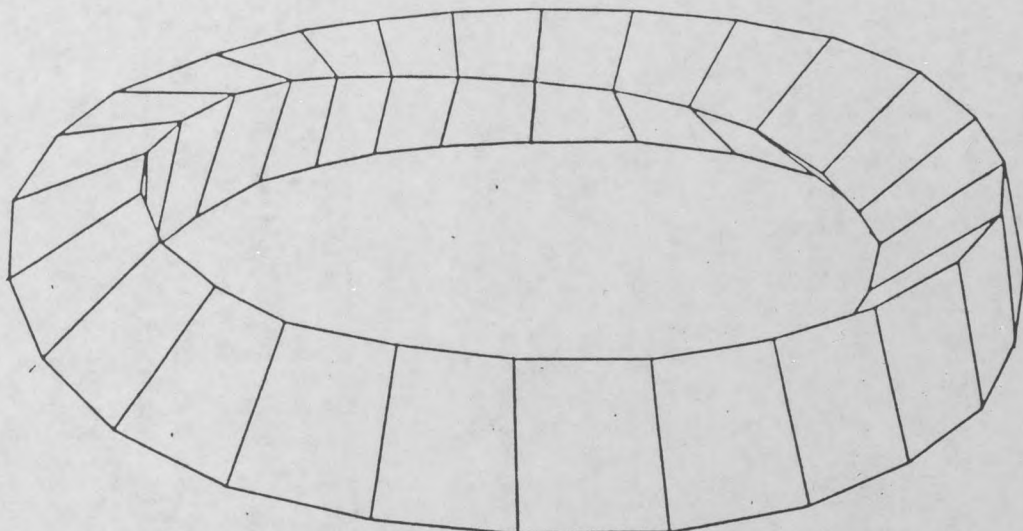


Planche XII



En cas d'un ruban, cette torsion est un demi-tour ou ses multiples. En cas de tore de section triangulaire, carrée... le "cran" de torsion est respectivement un tiers, quart... de tour. Selon le nombre de crans de la torsion subie et le nombre de côtés du polygone de section, les surfaces enveloppantes des tores obtenus seront uni- ou multilatérales, orientables ou non orientables. Les configurations toroïdales les plus simples, qui étant gauches ou droites existent sous leur forme énantiomorphe, sont représentées sur la planche XII.

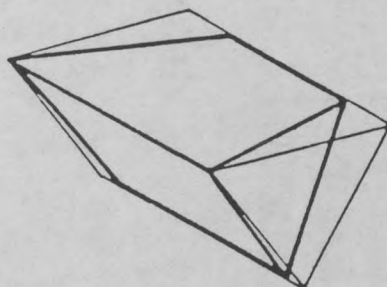
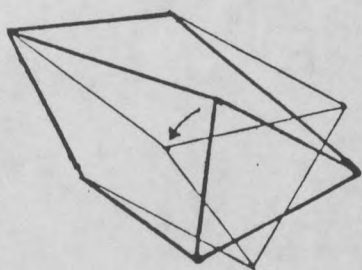


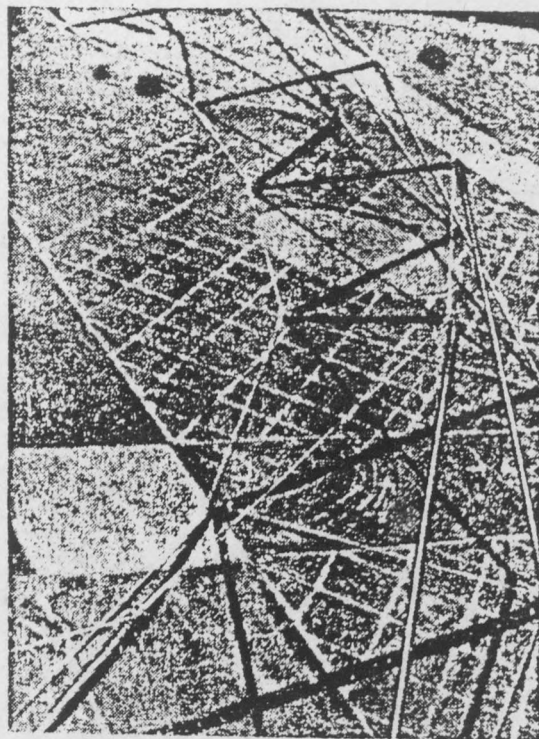
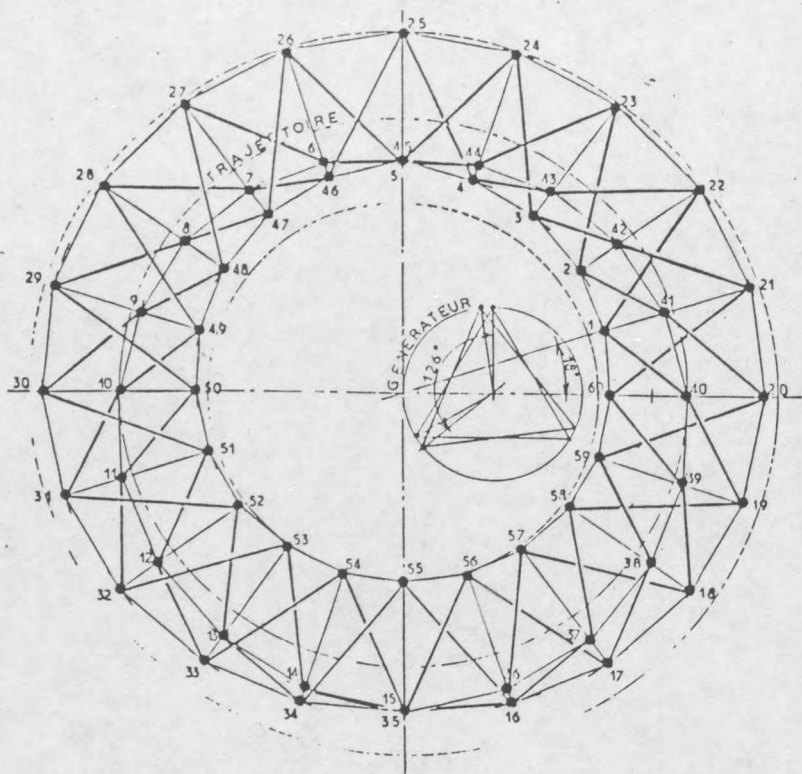


Ces tores, en outre, peuvent être subdivisés en un certain nombre de secteurs qui correspondent à autant de simplex autotendants. Ce nombre n'est pas arbitraire. En principe dans un tore fortement torsadé, le nombre des simplex doit être relativement plus élevé. Pratiquement, il n'est guère possible de descendre en dessous de douze sous-ensembles pour construire un tore autotendant, du fait de la disparallélité des plans de jonction entre les secteurs.

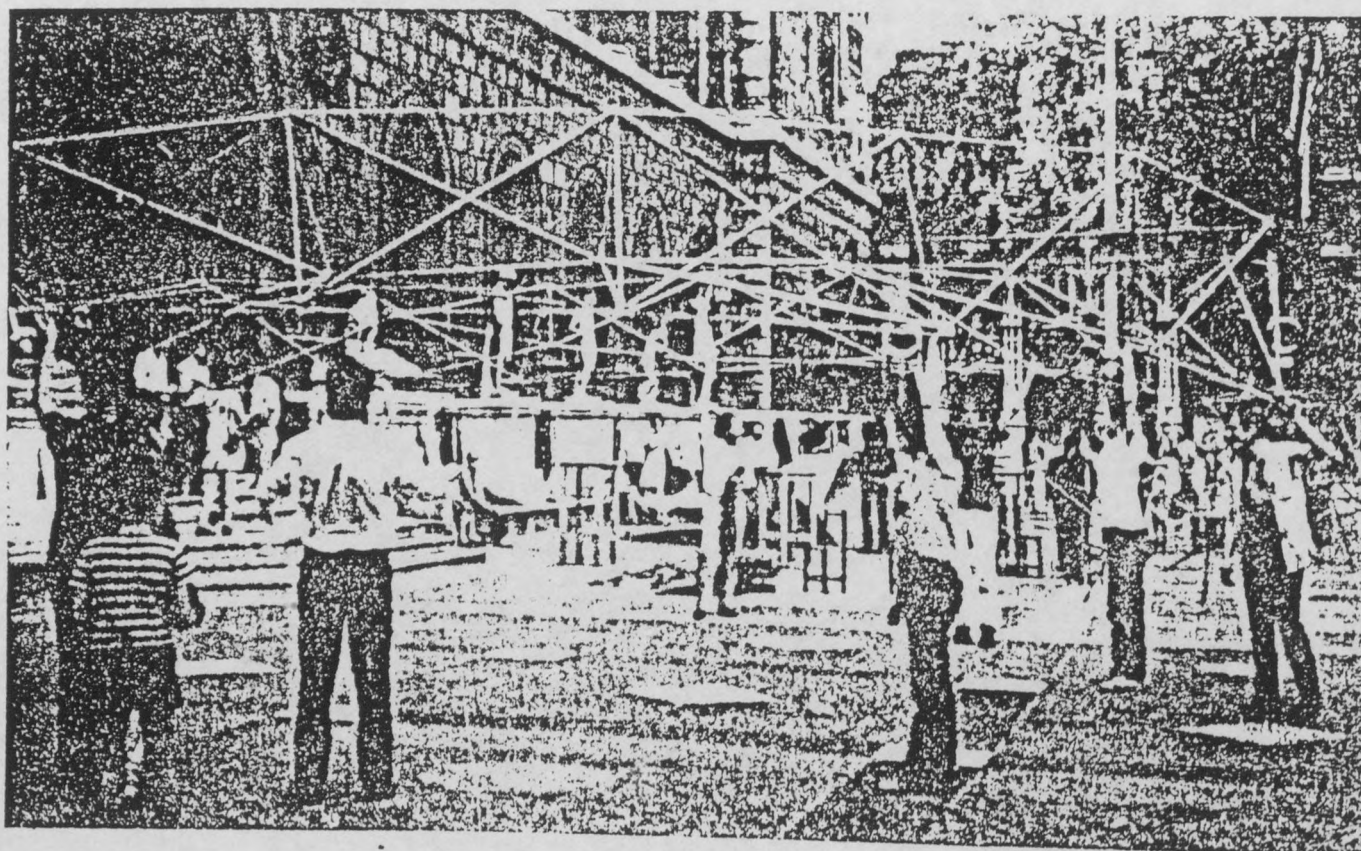
Une composition racémique, où s'alternent des simplex lévogyres et dextrogyres, est faisable mais elle n'est logique qu'en cas de tore sans torsion appliquée, laquelle déroulerait certes la moitié des simplex mais augmenterait encore la dérotation de leurs énantiomorphes. En principe, un autotendant torique est donc composé de simplex monogyres dont le sens de rotation s'oppose au sens de torsion d'un tore moebiusien.

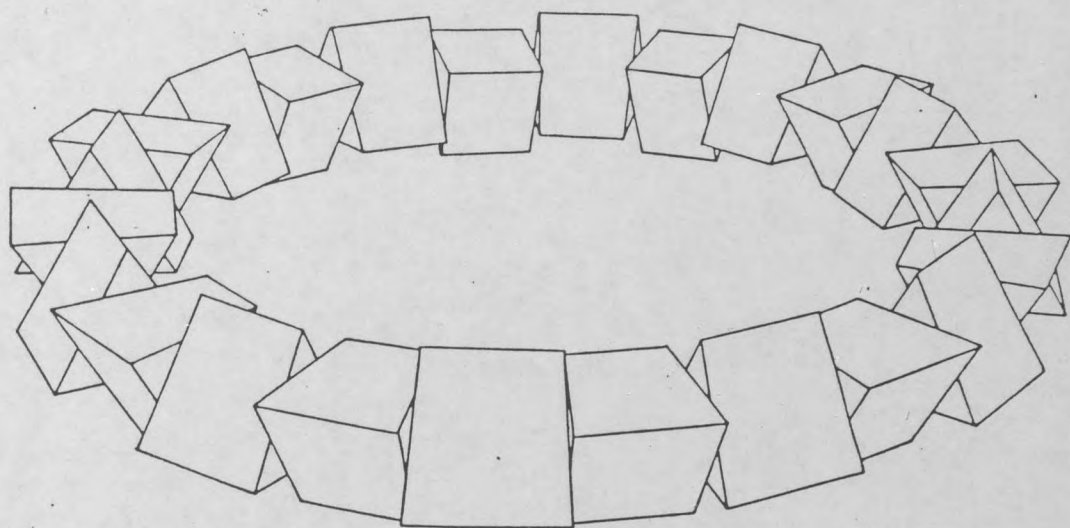
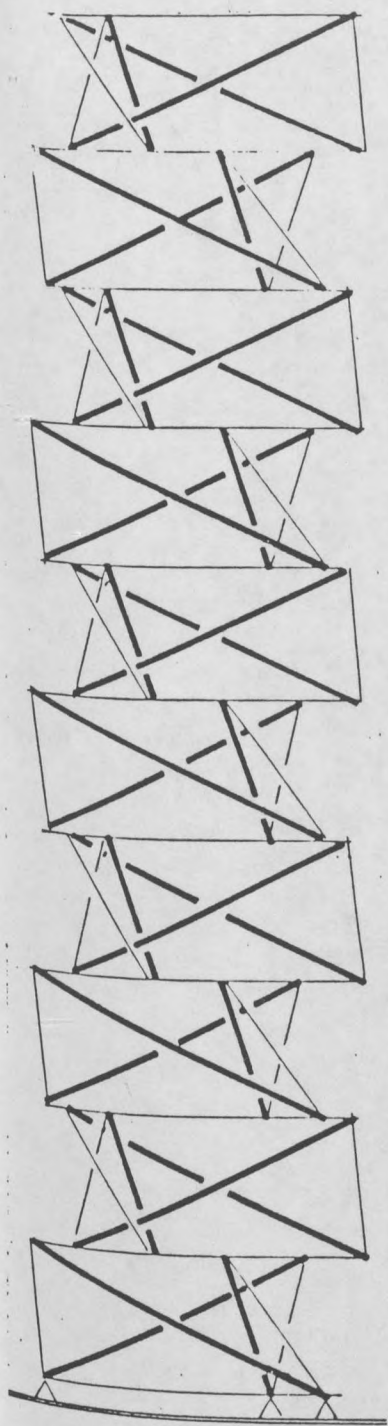
Il se peut, cependant, que précisément après l'effet de dérotation obtenu, le tore ne présente plus de torsion apparente; les antiprismes préalablement relâchés étant redressés en prismes, la forme paraît dépourvue de tout caractère moebiusien. Il ne faut pas s'y tromper : il y a un tour caché!





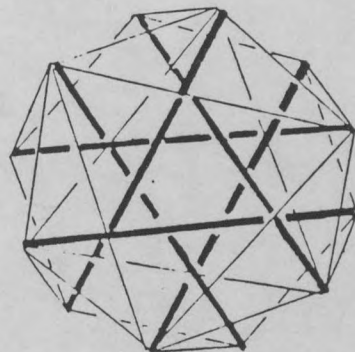
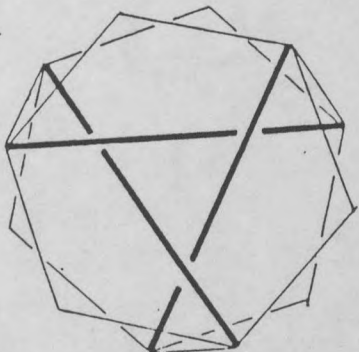
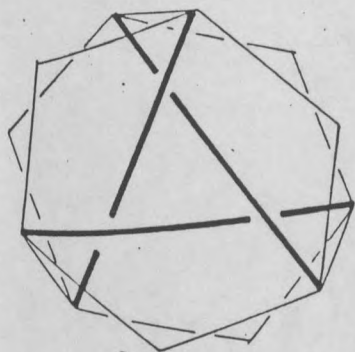
En fait, ce sont deux rotations, celle des simplex et celle du tore, qui en s'équilibrant forment un système morphologiquement complexe, mais qui n'est pas un simple empilement de tripodes autotendants et isolément stables. Dans ces structures à dérotation compensée et à barres redressées grâce à la contre-torsion torique, les sous-ensembles ne sont pas stables. Ce n'est qu'une fois fermé que le système devient rigide en entier. Il s'agit donc d'une sorte de hypersimplex statique où les deux sortes de rotations en s'opposant créent un équilibre supérieur produisant, en quelque sorte, une structure exponentiellement autotendante.

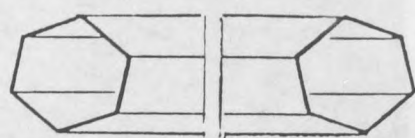
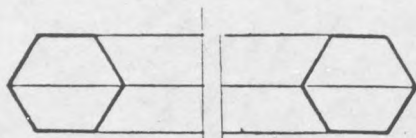




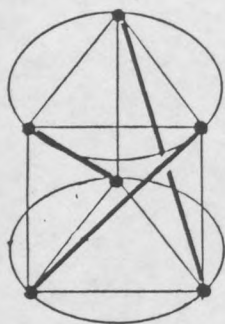
JONCTION DES SIMPLEX DANS UN TORE

De même que pour obtenir une structure oblongue droite partant de simplex, dans un tore il faut joindre en chaîne les solides par leurs bases. Ceci peut être fait de sorte que les deux polygones, et par conséquent les extrémités des barres, coïncident. Dans certains cas, cela peut représenter une facilité du point de vue technique. Mais pour sauvegarder le principe de dissociation des éléments de compression, il convient de décaler les bases à l'aide d'un polygone de jonction dont le nombre des sommets est égal à la somme des sommets des deux bases réunies : hexagones, octogones, décagones... respectivement en cas de tri-, tétra-, pentapodes. Les polygones de jonction, qui constituent autant de ceintures, peuvent être plans ou déformés en un polytope en cas d'assemblage interpénétré ou entrelacé des sous-ensembles. Pour obtenir des tirants identiques, donc un polygone de jonction de forme régulière, le décalage doit se situer sur un point médian.





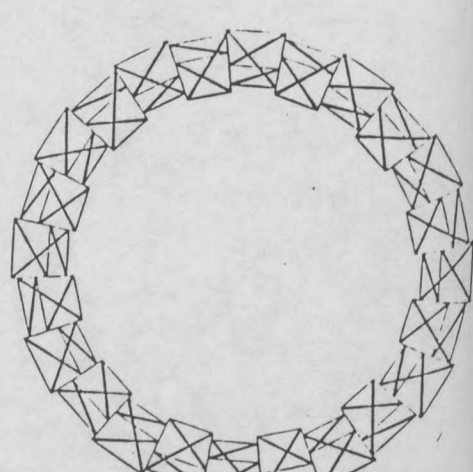
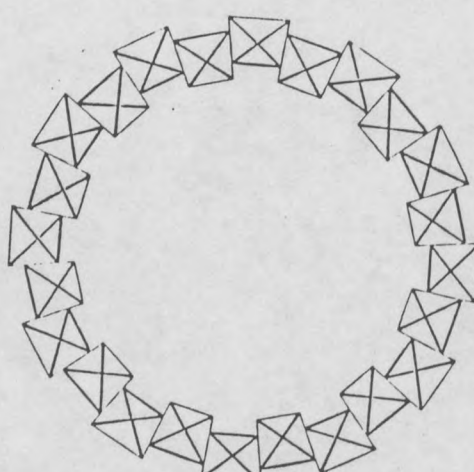
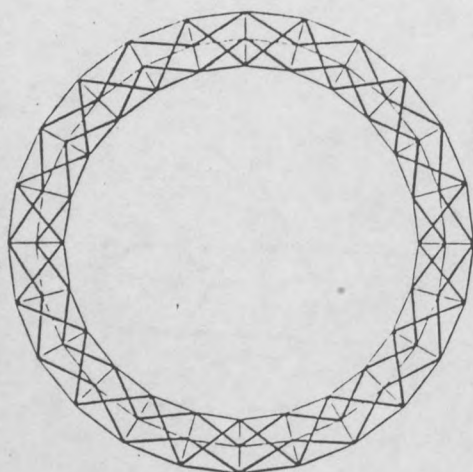
La position du polygone de jonction par rapport au plan du tore peut être variable, particulièrement en cas de torsion nulle ou faible du tore. Ainsi, on peut distinguer les positions : sommet pointant, arête parallèle ou situation intermédiaire - par rapport au plan.

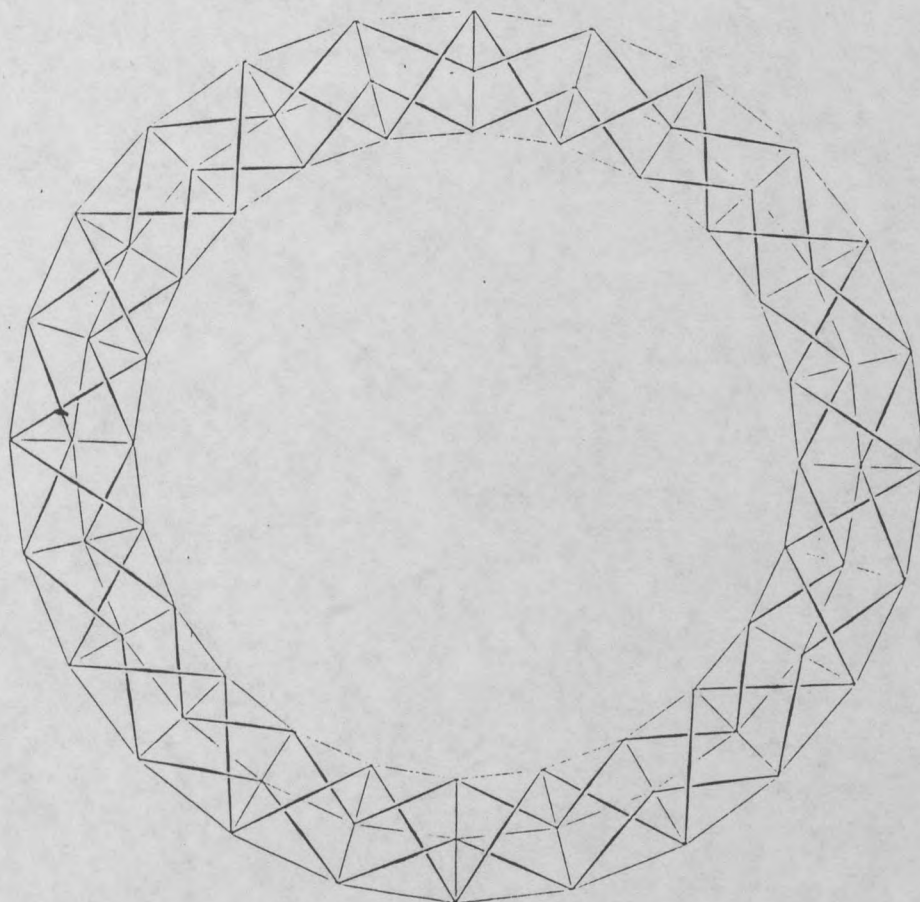
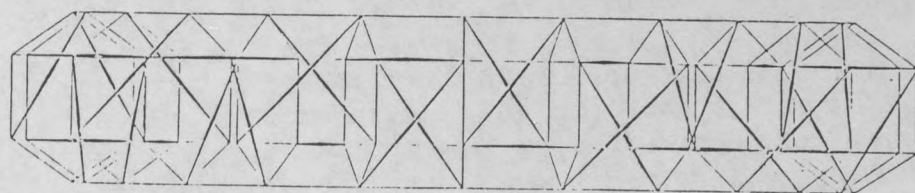
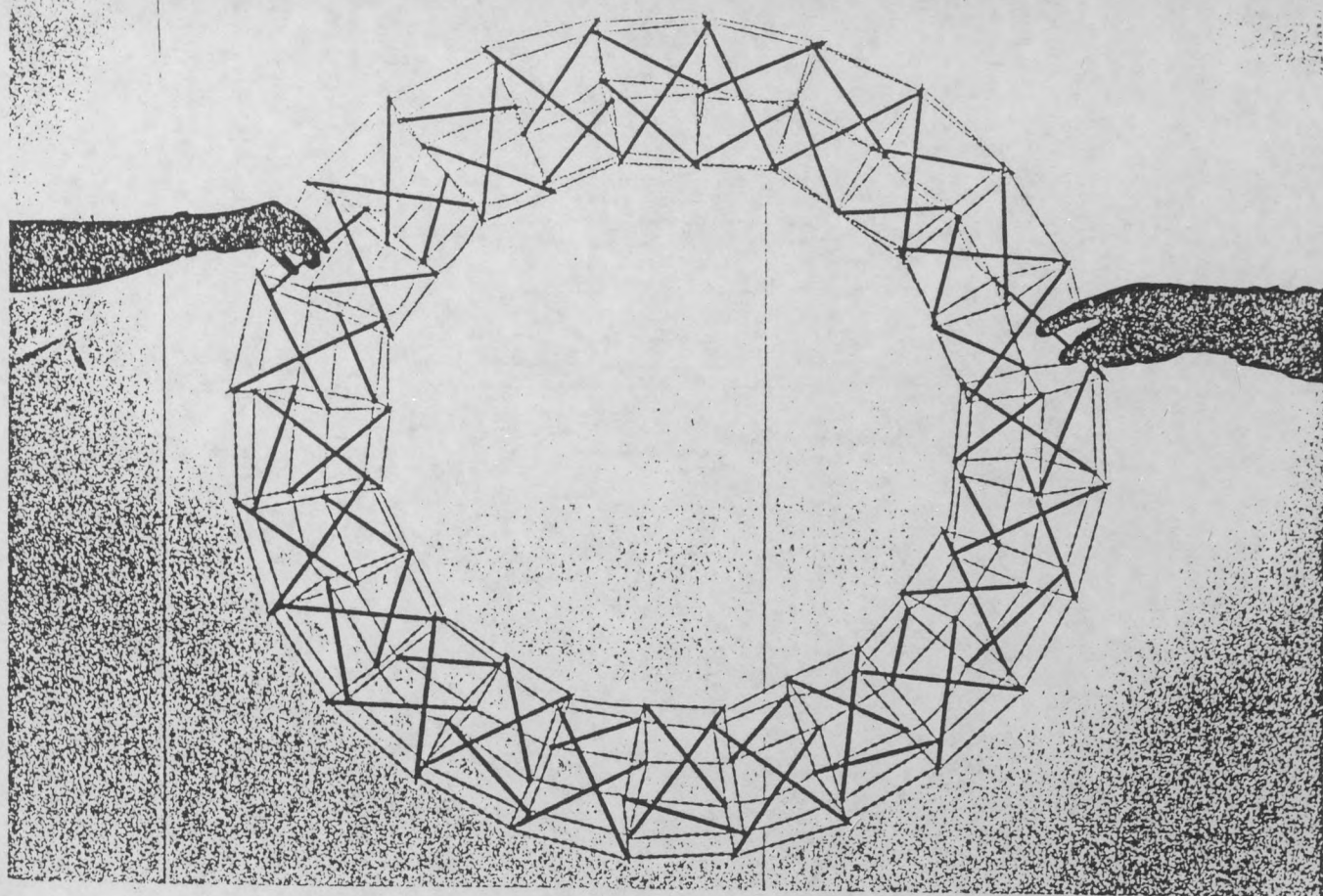


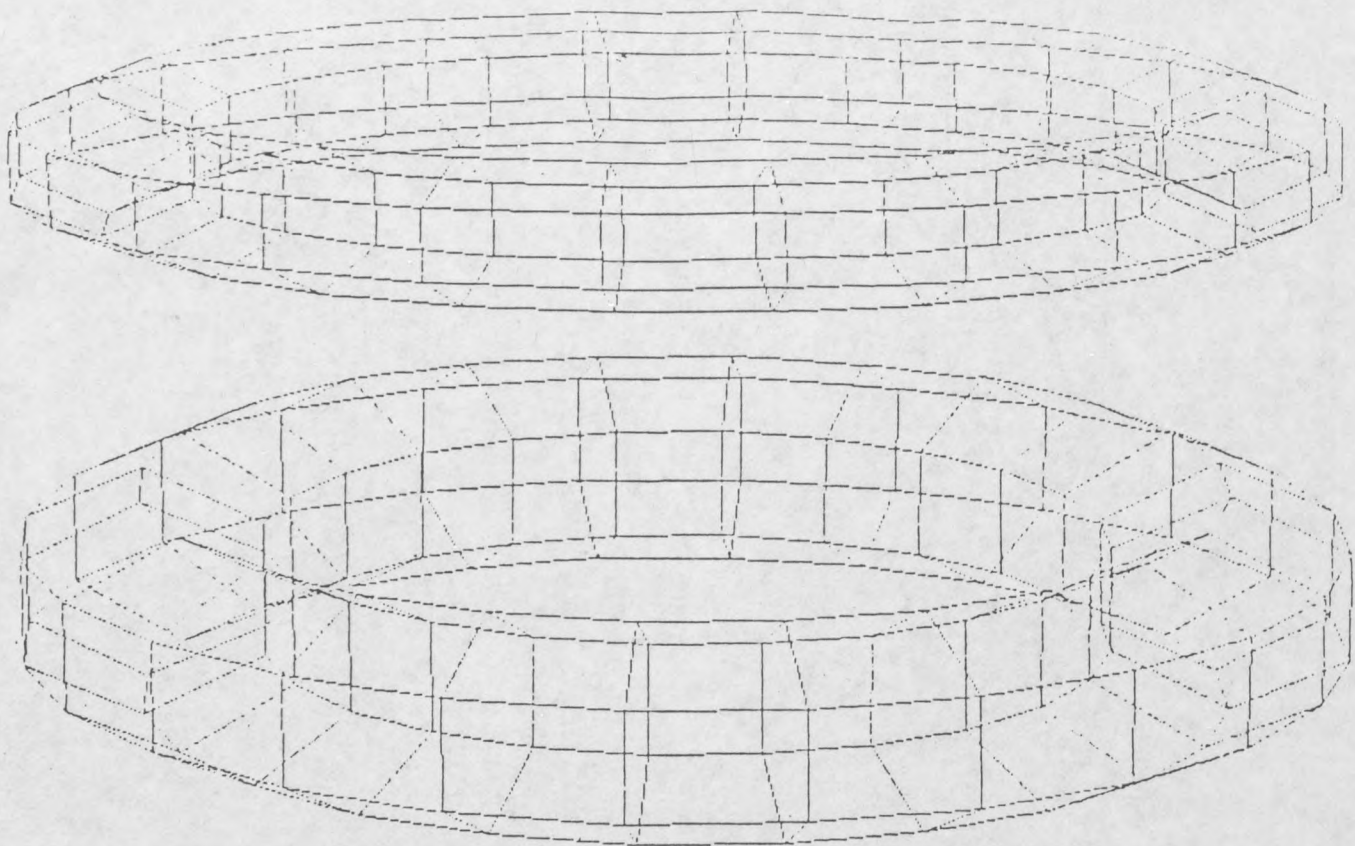
Par ailleurs, les secteurs étant situés entre deux plans de bases non parallèles, certains éléments des simplex, à l'origine réguliers, deviennent fatalement inégaux. On peut jouer sur la déformation de la ceinture ou des barres, mais le plus simple est de varier uniquement la longueur des tirants obliques, qui d'ailleurs en cas de composition judicieuse peuvent devenir horizontaux et d'allure circulaire. C'est le cas précisément des structures où la dérotation des simplex était réduite au minimum, et où donc, au lieu d'un antiprisme, la forme des secteurs sera un prisme; le tore lui-même devenant un hyper-polygone aux arêtes parallèles où la dérotation libère l'espace intérieur normalement encombré par les barres, laissant un passage dégagé pour un usage pratique.

En résumé, la construction d'un tore autotendant est déterminée par trois groupes de paramètres, ceux :

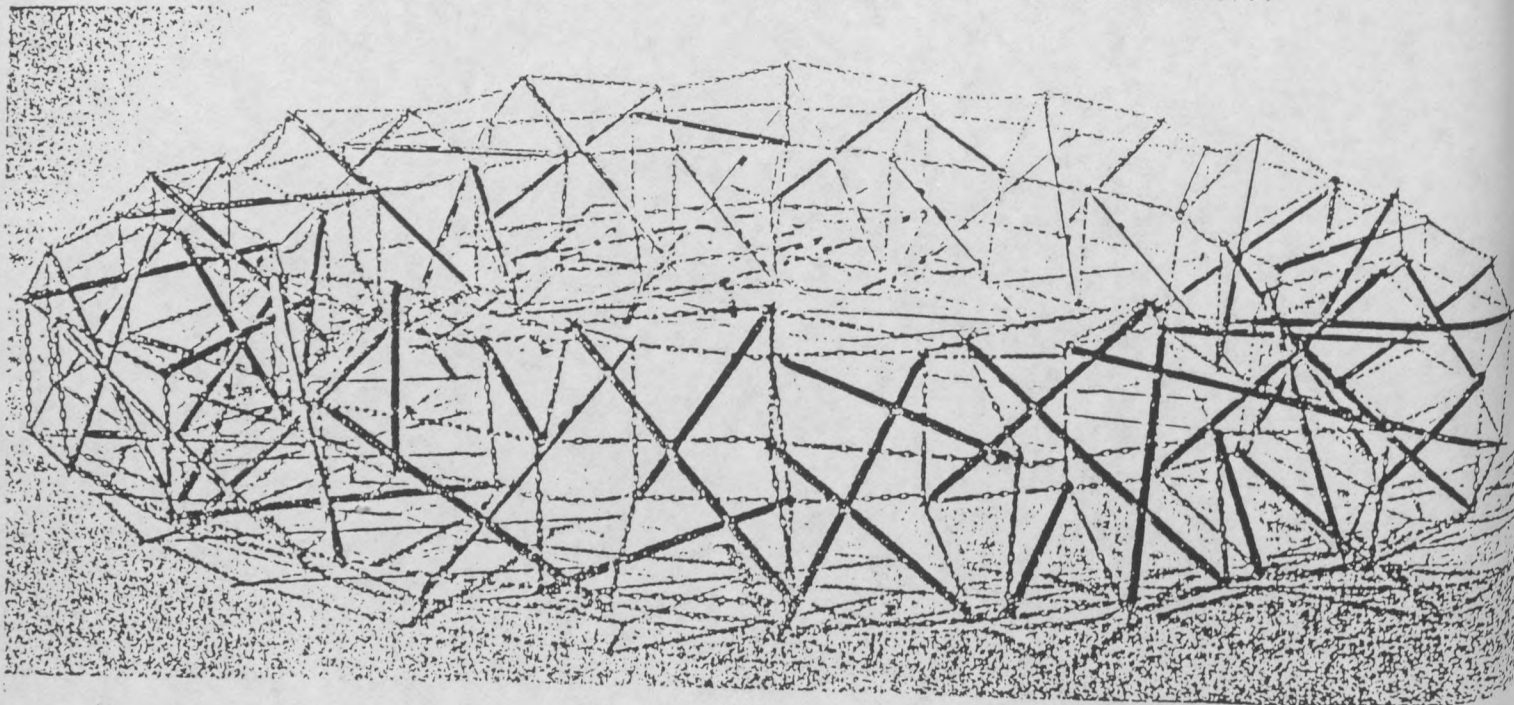
- | | |
|-------------------|---|
| des simplex : | nombre de barres
élancement
degré de dérotation |
| du tore : | torsion appliquée
nombre des secteurs
monogyre ou racémique |
| des assemblages : | décalage des sommets
déformation des jonctions
position des polygones |

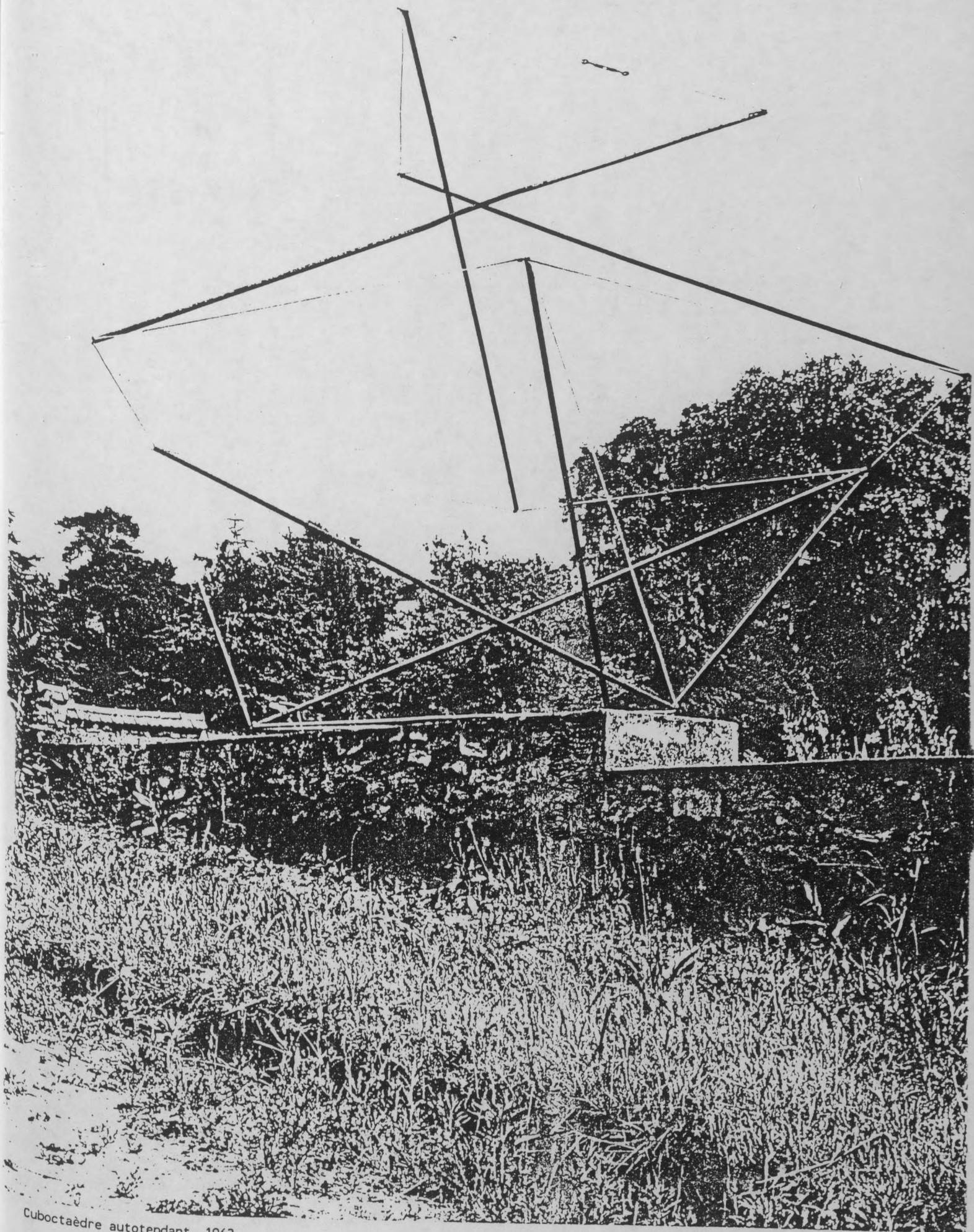






En variant ces paramètres, un très grand nombre de structures toriques peut être créé. Certaines, les moebiusiennes, garderont leur caractère tourbillonnaire, d'autres, de torsion à tour complet, seront cependant prismatiques. L'allure des unes sera svelte, telle la jante d'une structure en "roue de bicyclette" franchissant des grandes portées; d'autres seront épaisses pour être aménageables autour d'une cour ou d'une rotonde couverte. Elles seront horizontales ou verticales, selon qu'on leur assigne le rôle d'un cyclotron ou d'une bouée maritime habitable, ou encore celui d'une roue de turbine éolienne; à moins de la lancer fermée puis déployée comme un accordéon sur une orbite extraterrestre...





Cuboctaèdre autotendant. 1962

PRINCIPES ÉDIFIANTS

par D.G. EMMERICH, architecte, ingénieur.

Le constructivisme se bornait à couvrir le fer de béton, le béton de rainures de bois, le bois de son fac-similé, etc. Ces puristes avaient la structure dans la peau, mais pour sa valeur décorative et non pas pour ses vertus constructives. En fait, le modernisme restait ce qu'il a toujours été : une mode art-déco, qui habillait façon structure et devenait chronique en faisant habilement croire qu'habillées autrement les maisons s'effondreraient. Les « ismes » de l'âge machiniste avaient une remarquable technique de persuasion, mais ils étaient incapables de résoudre les problèmes réels de la production, et leur architecture est tombée en panne. Alors, les ingénieurs ont pris l'habitude de reprocher aux architectes de vouloir supprimer lorsqu'il faut rajouter, charger lorsqu'il faut alléger et surtout notoirement oublier le contreventement. En somme, ignorer les principes les plus élémentaires de la construction.

Cependant, les idées maîtresses épousées par les ingénieurs modernes se réduisaient de plus en plus à des formules toutes faites et aux résultats si étranges que ces principes édifians ont fini par compromettre également le dogme de l'infailibilité technocratique bâti justement sur la probité de la science de l'ingénieur. En fait, tout comme l'architecture, cette science souffre de scientisme : à la fois d'un purisme analytique dans l'abstrait et d'une inadaptation synthétique dans le concret.

Car, si tous les nouveaux moyens toujours plus puissants ne permettent pas de construire plus, ce n'est pas une question d'esthétique ni de financement, mais de technique. C'est que, de part et d'autre, depuis près d'un demi-siècle, au lieu d'attaquer le fond du problème on parlait à côté.

Construire comme l'indique le préfixe est une activité d'assemblage. Une construction est, par définition, le contraire du monolithe; c'est un ensemble, donc nécessairement arti-

culé : une multitude d'éléments liés en un système d'un seul tenant. Sous l'effet des efforts, les diverses combinaisons peuvent être déformables ou indéformables. L'architecture s'intéresse généralement à ces dernières, les stables.

La stabilité d'un édifice dépend de l'indéformabilité géométrique de sa forme et de la résistance physique de ses matériaux. Donc, l'esprit du compositeur y contribue autant que les propriétés des matériaux, puisque c'est lui qui choisit la forme.

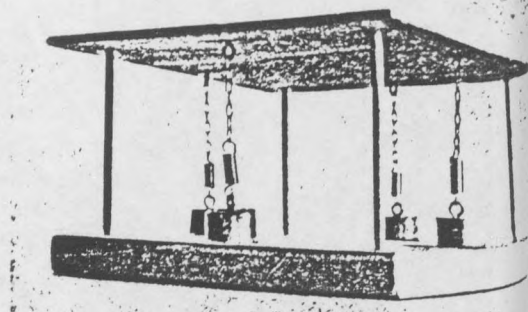
Évidemment depuis le quasi-désintéressement des architectes pour toute autre forme que le cube — avec ses poétiques angles droits éminemment déformables — seule subsistait la résistance pour conférer à la structure une stabilité toute relative. Dès lors parler avec onction de formes utiles et fonctions est futile. Des formes il en existe d'innombrables — plusieurs formes pour la même fonction ou la même forme pour plusieurs fonctions — l'important c'est de savoir choisir les stables et ainsi utiles.

Preuves compromettantes.

Exprimé dans un tableau il existe quatre possibilités extrêmes de stabilité (S) suivant que soit la forme (F) soit la matière (M) est bonne (1) ou mauvaise (0). Mais seule la combinaison d'une bonne forme et d'un bon matériau donne une construction stable sinon, aussi excellente que soit la résistance, on retombe, comme dans la plupart des cas, dans le monolithisme.

F	M	S
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Ainsi, un triangle formé de trois barres est un équilibre stable — même avec des joints



Ossature orthogonale indéformable : entièrement articulée, avec bielles sur rotules et tirants.

articulables, mais un carré ne devient stable qu'avec des encastresments qui le transforment en cadre nécessairement plus lourd. Voir figures 1a - 1b.

De même : un système planaire constitué d'éléments rigides et de nœuds articulés serait déformable sauf s'il est composé totalement de triangles en chaîne ou en cycles fermés ; seules les charpentes semblables aux figures 2a - 2b seraient donc indéformables, tout en restant sujet de déversement.

Dans ces ensembles, le triangle étant le plus simple équilibre autonome, joue en fait, le rôle du simplex, ou sous-ensemble caractéristique (voir « Réseaux » T.A. 1/26) et la relation entre faces et arêtes y sera en cas de chaîne simple :

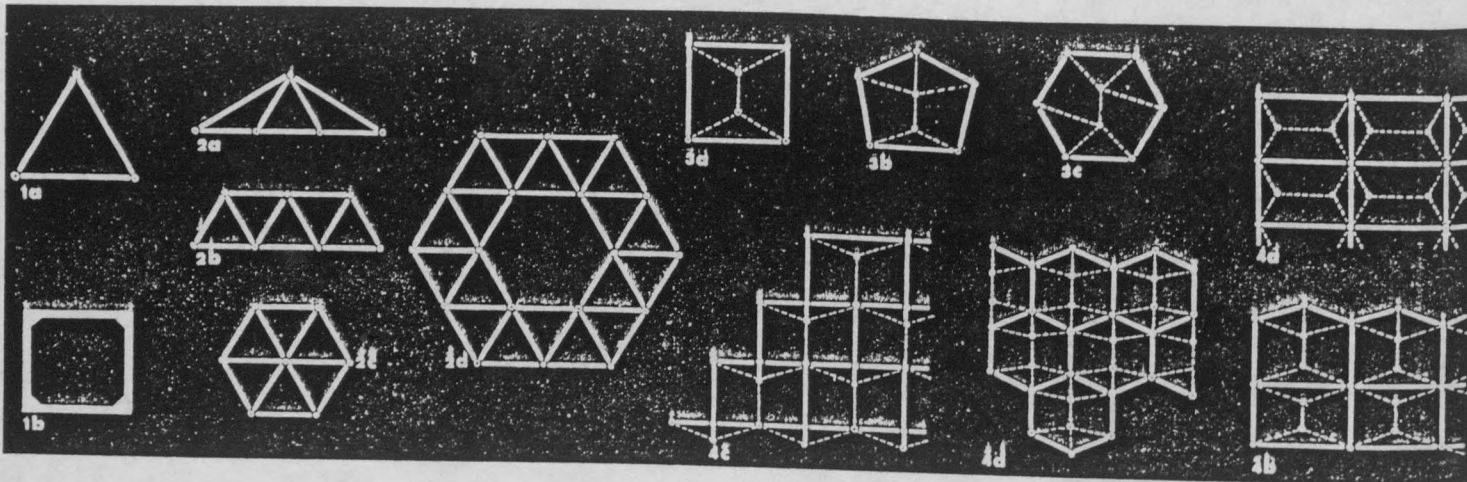
$$F = \frac{A - 1}{2}$$

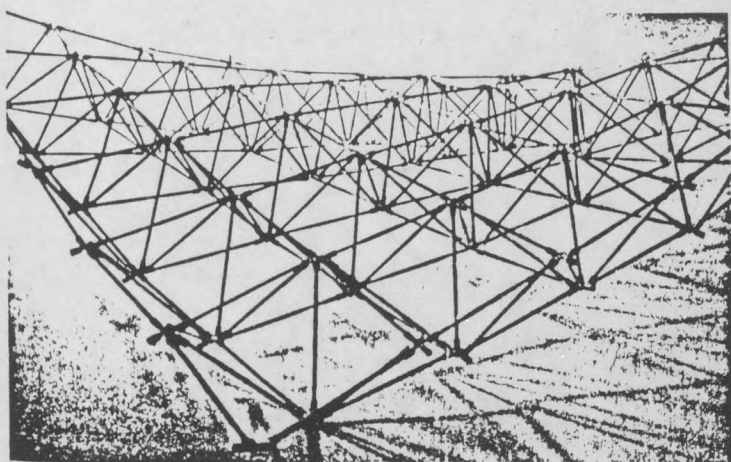
En cas d'anneau simple ou multiple, c'est le nombre des cycles fermés donc 0 en cas de rosace, la formule sera :

$$F = \frac{A + C}{2}$$

Mais, en flagrante contradiction avec la règle, il existe d'autres systèmes planaires avec des joints articulables et même avec des membrures non rigides, qui ne sont triangulées ni entièrement, ni même d'une manière continue et sont pourtant indéformables aussi bien en plan qu'en espace. Ils sont représentés sur les figures 3a, 3b, 3c, les éléments rigides étant marqués de traits pleins, les flexibles, de discontinus.

Ces équilibres étant indéformables, donc équivalents aux triangles du point de vue constructif, peuvent être considérés comme des simplex et juxtaposés en chaîne cycles ou même en solides. Ainsi les ossatures représentées sur les figures 4a - 4d sont indéformables tout en étant constituées de bielles avec joints orientables et de câbles — mais sans complète trian-





gulation ni contreventement. Ceci pour mettre d'accord et les architectes et les ingénieurs.

Mais, nouvelle surprise : en cherchant la relation topologique des faces et des arêtes, on constate que les précédentes formules, à l'origine déduites des triangulations, restent toujours valables; bien que ces configurations se composent aussi d'autres polygones que le triangle. Elles vérifient donc l'indéformabilité de toute structure planaire et ainsi entre autre celle des triangulées. En effet, les configurations planes dont les sous-ensembles sont construits d'un nombre impair d'arêtes, d'une manière dispartallèle et qui sont douées d'un certain degré de dissymétrie sont indéformables. C'est ce qu'on pourrait appeler la règle des trois « dis » : dispartité, dispartallèite et dissymétrie, ces principes restant valables pour les espaces de dimensions supérieures.

La seule formule connue par les ingénieurs pour juger l'indéformabilité d'une ossature en volume vient également de la triangulation : un système en espace composé de barres rigides et de nœuds articulés n'est indéformable qu'entièrement triangulé ; donc la relation entre les sommets (S), arêtes (A) et faces (F) vérifie la formule d'Euler et d'autre part, chaque face se définit par trois arêtes et chaque arête par deux faces :

$$\begin{array}{rcl} S - A + F & = & 2 \\ F & = & 2A \\ & & 3 \end{array}$$

d'où $A = 3S - 6$
Seulement en croyant que toute ossature est

strictement indéformable si $A = 3S - 6$, déformable si $A < 3S - 6$ et hyperstatique si $A > 3S - 6$ on ignore que cette loi n'est valable que pour le cas particulier des corps convexes, et que le caractère eulérien $c = \text{ici } 2$ change suivant les propriétés topologiques des formes selon leur connectivité; et si le nombre de connection est k , la formule générale sera :

$$S - A + F = 2 - k$$

Ainsi dans le cas d'un corps triangulé du genre anneau simple, la formule sera $A = 3S$; d'où économie de six barres par rapport à un solide convexe; et dans le cas général de surfaces riemaniennes supérieures de connectivité k , tels les anneaux multiples ou les nappes de second ordre composées de polyèdres, la formule sera : $A \rightarrow 3S + 6k$

Mais en respectant la règle des trois « dis » on peut composer également des solides plus complexes où le nombre relatif des segments rigides diminue davantage donnant des corps dans lesquels le rapport entre volume bâti et matière est sans précédent. Par exemple, une charpente en forme d'équilibre autotendant, tout en étant non triangulée mais topologiquement convexe, est strictement indéformable avec seulement une membrane rigide sur quatre, donc : $A = 2S$ ce qui est bien loin de la formule $A = 3S - 6$ comme prescrivent les lois en vigueur sans lesquelles d'ailleurs des structures articulées de bielles et tirants pouvaient très bien exister; voir les halles et les galeries du XIX^e, cette véritable architecture industrielle d'une légèreté inégalée qu'on s'acharne à faire disparaître comme une preuve compromettante.

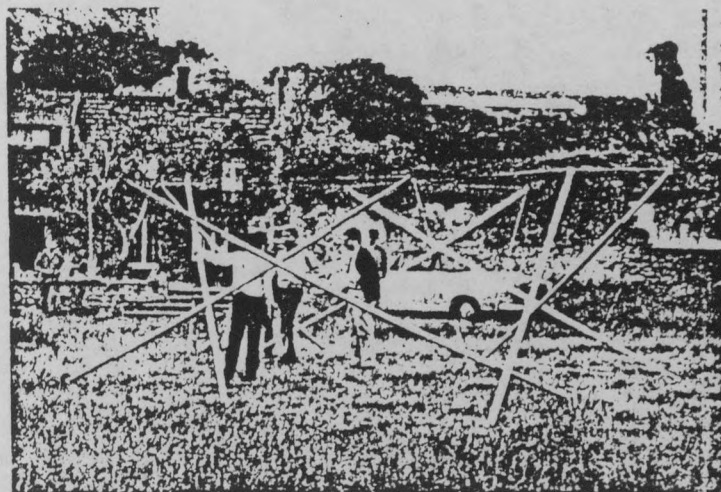
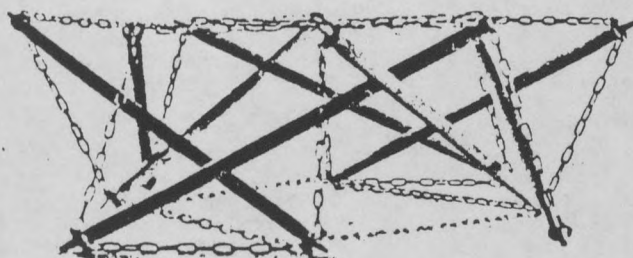
Les préceptes des anciens.

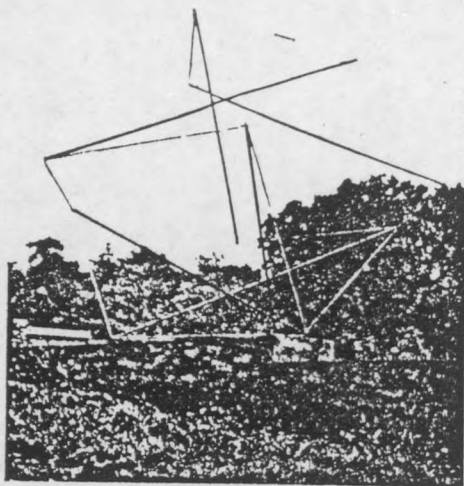
En effet, on ne peut pas construire du solide avec des lois qui ne tiennent pas debout — ni parler de la forme sans connaître le fond — l'indéformabilité.

Des matériaux, on en a assez découvert, examiné, perfectionné mais on oubliait l'autre facteur — la forme — en tant que principal générateur de stabilité. A quoi bon alors traiter doctement, par exemple, les tribulations internes d'un I.P.N. à force de triple intégrale, strain-gauge et ordinateur, si, placé dans une composition instable, sa tenue dépendra des impondérables de la soudure ou du rivetage ?

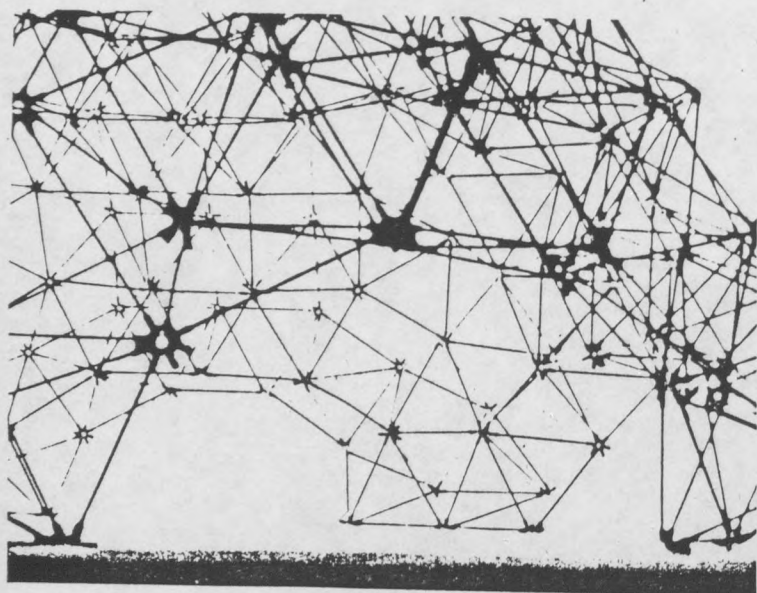
A l'opposé de la technicité actuelle, les bâtisseurs de cathédrales n'avaient ni engins, ni calculs, ni matériaux résistants, homogènes et de grande dimension; seulement de la pierre, friable et de petites dimensions. Qu'elles soient blanches ou polychromes, les cathédrales sont donc des ensembles composés de matériaux de dimensions réduites et de résistance quelconque. Et fatalement, ni leur conception ni l'abondance de leur production n'auraient été possibles sans justes connaissances de l'indéformabilité — le véritable secret des bâtisseurs. Certes, ceci n'est pas de l'art de bâtir en béton armé, que son inventeur Hennebrique a défini comme : « Bloc monolithique cellulaire, dont les résistances sont en tous points supérieures à toutes les fatigues. »

Et actuellement, bien qu'industrialiser soit s'affranchir du monolithisme pour arriver à l'assemblage, toute la recherche se concentre

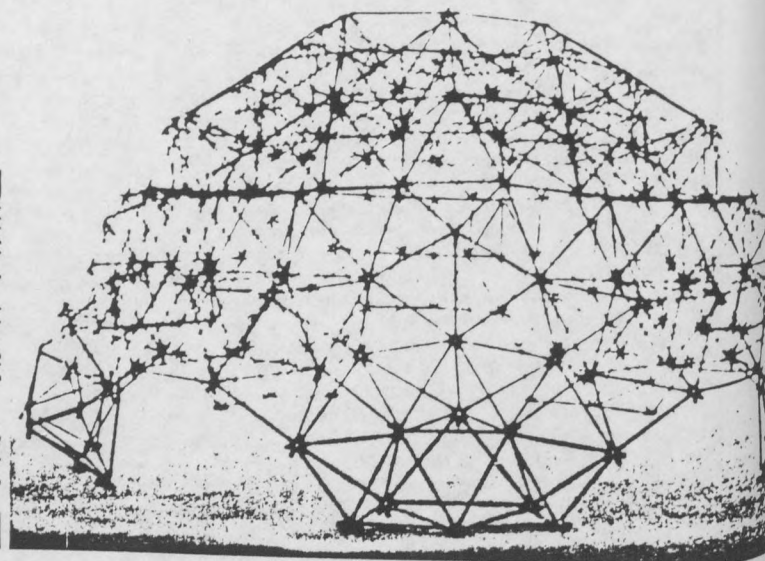




3



4



5

PRINCIPES ÉDIFIANTS

- 1 Nappe de second ordre (4848) constituée de barres identiques avec joints articulables, transformée en réseau autoportant de forme parabolique hyperbolique.
- 2 Équilibre autotendant de base carrée servant de structure pour maison individuelle.

a - Maquette.

b - Montage grandeur.

c - Parois en P.H. avec matière plastique projetée sur treillis tendu. La surface étant devenue autoportante après durcissement, la charpente peut être enlevée et réutilisée.

Réalisation équipe : H. Blumenfeld, Ph. Boudon, N. Grumbach, B. Hamburger, G. Naizot, O. Perrot, F. Mathieu, M. Stephan.

- 3 Monument à la forme fûtée près de Rambouillet.

- 4 et 5 Coupole isotropique construite — de 840 barres de longueur identique — de faces carrées et de triangles équilatéraux, capable de couvrir des hectares de surfaces et assez forte pour supporter des « terrains artificiels » suspendus à l'intérieur (voir T. A., N° 4 - 25° s. r. « Libre service »).

sur la résistance au lieu de l'indéformabilité des compositions articulées. En vue de l'industrialisation on ne cherche qu'à casser, concasser, homogénéiser des petits matériaux... à les reconstituer en gros... à les encastrier en continuité avec goussets, platines sabots... à améliorer les procédés de collage, moulage, soudage...

à calculer des efforts, composés eux mais incertains... à déterminer des taux d'insécurité « précise »... autant de sources de lourdeur, de haut prix et en fin de compte de la pénurie... tout ceci pour faire du monolithe — l'anticathédrale.

Pourtant, tout comme au temps des anciens, aujourd'hui encore construire véritablement c'est construire articulé. En effet, en architecture tout comme en paroles, sans articuler on n'arrive qu'à braire.

c

Mais les grégaires de l'architecture moderne croient que pour être grand il suffit de faire de grands bâtiments, oubliant qu'un des plus importants monuments de l'antiquité, celui de Lysicrate, était à peine plus grand qu'une colonne Morris. Et le concours d'érection des prestige-buildings sous forme de signes phalliques se poursuit un peu partout cassant cette fois les paysages même les plus renommés, battant les records de monolithisme à la gloire d'une société anonyme et à responsabilité limitée.

Pour moderne qu'il soit, le principe constructif poteau-traverse de ces impasses verticales, plus encore que les ordres colonne-architrave, se maintient dans la tradition des meïrs mégalithiques, dont le suprême accomplissement — en acier — est atteint par ce qu'on appelle l'école de Chicago. Là, d'après les connaisseurs, la « doctrine » était poussée

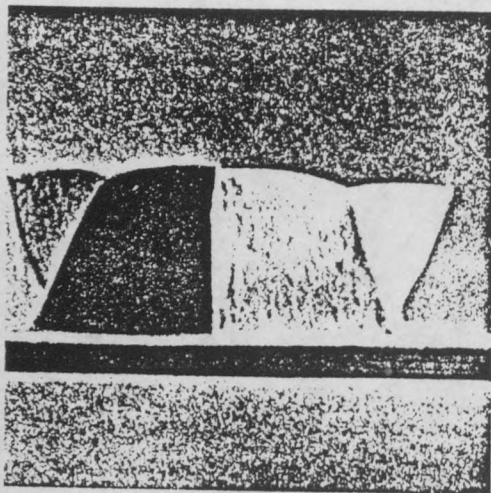
jusqu'à ses conséquences ultimes conférant à la charpente une esthétique dépouillée et nécessairement ascétique. Evidemment, ceci au prix d'un maximum de matériaux pour un minimum de réflexion — donnant enfin son sens au slogan : « less is more ».

Mais à part ces grandes réussites symboliques de la technique moderne, dès qu'il s'agit d'autres programmes que des bureaux, on répète sans cesse que nos moyens de production sont si puissants qu'on ne peut plus se permettre de construire ni bien ni assez. La crise de logement devient le drame de l'architecte breton qu'on ne peut ni cueillir, ni acheter.

Malgré une aussi évidente non-concordance entre les moyens et les fins, les possibilités matérielles de la recherche restent réservées au service de ces moyens et non des fins. Mais en perfectionnant les vieilles techniques, on ne fait que les rendre encore plus inaptes sinon plus ineptes.

Par contre, la recherche structurale que les uns prennent pour de l'op-art les autres pour des math. pures, mais qui est, en fait, à la base même d'une technique plus efficace sinon plus rentable, est condamnée à rester théorique. Pourtant, les structures spatiales — légères, adaptables, diversifiées — sont bel et bien la nouvelle technique, celle de l'architecture post-moderne qui donne plus pour moins.

D.G. Emmerich



«...Un corps est au repos si les forces le sollicitant sont en équilibre... le vecteur d'une force se définit par son intensité et sa situation dans l'espace...». Les cours de stabilité commencent par ces notions élémentaires, auxquelles est rituellement jointe la réserve du genre : «...qu'on se limite dans ce qui suit à un système de forces situées dans le même plan...». Après les appuis, poutres, voûtes, fermes, ils abordent les ossatures en volume et ceci sans avoir jamais traité les systèmes de forces situées dans l'espace.

Alors il faut s'y prendre par des artifices : considérer un ensemble par plans perpendiculaires statiquement indépendants — transversal, longitudinal, horizontal — et encore reconsidérer ses contrevenements autant de fois séparément et enfin le remplir d'une ou plusieurs structures secondaires autonomes, où chaque plan est inutile, pire : poids mort l'un pour l'autre. Et structure étant poids mort, l'inutile nuit.

Cette routine nuisible est le sous-produit du développement des mécanismes intermédiaires entre la pensée et l'œuvre, tels les expressions graphiques, les calculs graphiques, qui secrètent finalement le plan-cellule, le projet-type en même temps que l'abaque universel. Le conformisme technique trouvait enfin une matière de choix. Contemporain surtout des guerres — lourd, sonore, thermoductile, incertain... mais excellent pour les travaux publics et militaires — le béton, brut et armé, venait se fossiliser comme une architecture moderne définitive au garde-à-vous, vers un angle droit... exprimant son temps comme tout art se doit.

Erigés en un jeu occulte, irresponsable et bureaucratique, ces syndromes conduisaient à l'aliénation de l'architecte, de l'ingénieur, à l'insuffisance de la production et à l'indigence plastique — bref — à l'antiarchitecture. A l'époque, c'était au fond l'idée de Dada : faire la grève de l'art pacotille. Mais toute grève devient stérile dès qu'elle a atteint son but, et contre l'antiarchitecture devenue orthodoxie, il faut pratiquer la vraie architecture, qui est : articuler l'espace, créer des structures, vaincre la pesanteur — celle des maîtres anciens, romains, gothiques, du XIX^e siècle.

Le temps change avec ses évidences : l'armature se porte mieux sans béton ; les matières nouvelles isolent mieux ; une structure plus légère gagne à être flexible, et enfin s'il était plus facile de construire on construirait certainement plus. Et parce qu'en espace il est plus facile de construire qu'en plan, il convient de ne plus se limiter aux systèmes situés dans un même plan. Revenons donc à la statique.

Articuler l'espace.

Le plan se divise en polygones, l'espace en polyèdres. Le tétraèdre ici paraissait correspondre au triangle comme élément primitif indéformable, mais réguliers, ces tétraèdres ne sont pas empilables. Les réseaux tridimensionnels utilisent donc la combinaison octaèdre-tétraèdre, de la famille cristalline régulière.

Ces charpentes efficaces, standard, adaptables ont aussi leurs inconvénients ; des joints complexes où se rencontre un trop grand nombre de barres, travaillant indifféremment à la traction ou à la compression, l'hyperstaticité. Les calculer comme dalle pleine, supposer flexion et cisaillement là où il n'y a qu'effort axial est une hypothèse mais serait hérésie

en cas d'une ossature libre. Il convenait donc de trouver d'autres solutions, quitte à abandonner l'a priori du tétraèdre et même tout le système régulier.

L'hypothèse de recherche était de supposer l'existence de structures stéréométriques minima, statiquement déterminées, composées de polyèdres aux nœuds desquels se rencontrent le moins de membrures possibles dont un minimum travaillant à la compression et toutes de nature connue. A noter qu'en principe, l'équilibre d'un point de l'espace se définit par quatre vecteurs.

Une configuration stable devait donc vérifier un groupe de relations invariables qui correspondent respectivement aux caractères de connectivité, continuité, orientabilité, convexité :

— Quatre vecteurs sont incidents à un sommet.

— Chaque vecteur est incident à un couple de sommets.

— Un vecteur par sommet est poussoir.

— Les segments de vecteur forment un graphe ferme.

Une telle configuration est un équilibre autotendant construit de barres et de tirants, où poussées et tractions toutes connues s'équilibrent en écartant et solidarissant les éléments les uns aux autres. L'ensemble précontraint est comparable à un filet à provision tendu par un certain nombre de baguettes qui ne se touchent pas. Le plus simple de ces filets n'a que cinq mailles, six nœuds et trois barres. Il existe un nombre limité d'équilibres élémentaires ou simplex autotendant ; mais on peut créer aussi par l'interpénétration de deux ou plusieurs équilibres élémentaires identiques ou différents un équilibre composite ou complexe autotendant.

La configuration de chaîne souple est le groupe de connexions minima nécessaires à l'érection d'un équilibre ; elle est homéomorphe à un polyèdre convexe, la pyramide tronquée en général ou le prisme en particulier. Dans un simplex autotendant, la déformation topologique se caractérise par une rotation de la maille supérieure par rapport à la base. Le déplacement se produit selon l'orientation des poussoirs imbriqués, à droite ou à gauche, donnant deux solides énantiomorphes — lévogyre et dextrogyre — qui ne comportent ni plan ni centre de symétrie. Ces corps ont tendance à une action hélicoïdale et l'effet des sollicitations extérieures se traduit par une flèche de torsion.

Un équilibre composite peut dériver de la combinaison de simplex d'orientation identique ou opposée ; par conséquence, l'action peut être cumulée ou compensée, partiellement ou totalement, le complexe est dans ce dernier cas racémique ou inactif.

Créer des structures.

Donc ces polyèdres possèdent des propriétés remarquables : semi-réguliers, dissymétriques, à isotropie axiale, doués d'un potentiel mécanique comparable au spin. Et précisément, ces propriétés mêmes rendent possible la construction d'ensembles solides où il n'existe aucune continuité entre les composants solides — ce qui paraît à première vue contraire au bon sens. Pourtant, on connaît les émulsions où des particules en suspension dans un milieu liquide donnent un état consistant. C'est ainsi que les barres restent en suspension entre les tirants formant une structure stéréométrique, statiquement déterminée, indéformable.

Ces briques assemblées — juxtaposées ou superposées selon les divers appareillages — constituent un ouvrage quelconque : mât, poutre, voûte, coupole, ossatures...

(Voir suite page XLV.)

Mât autotendant constitué des sous-ensembles à trois barres, qui peut être employé indifféremment comme poutre, point-d'appui, pont...

CONSTRUCTIONS AUTOTENDANTES (suite de la page XLII)

On peut organiser un réseau en mettant en contact tous les sommets des polyèdres, ou seulement une partie, ou de telle façon qu'aucun des sommets, par conséquent aucun élément rigide ne soit en contact. Les appareillages ou schémas combinatoires dérivent des tessellations ou équipartitions stéréométriques : régulières, semi-régulières, automorphiques, leurs duales, qui sont d'un nombre limité. Certains schémas possèdent même une dissymétrie propre, à effet tournoyant d'orientation gauche ou droite : propriété très précieuse, qui à son tour peut agir par interférence sur le pouvoir rotatoire inhérent aux polyèdres.

Il existe donc des ensembles autotendants à divers degrés de contact et de saturation, et qui sont à diverses classes combinatoires, animés de tourbillon de forces, celles-ci s'alternent et se compensent entre elles selon leurs situations respectives. On peut constater que manifestement un élément de situation peut avoir un effet mécanique, agir comme l'équivalent d'une force — devenir dimension.

Etant donné qu'il existe tout un registre d'éléments de situation, un groupe peut par conséquent avoir un nombre quelconque de dimensions ; trois dans le cas de la stricte symétrie. Les dimensions affectant nombre, espace, intensité et succession des éléments sont susceptibles de transformation ; une incidence peut se substituer à une ou plusieurs autres équivalentes, à condition que reste invariable le degré de symétrie indispensable au phénomène. De même, un système devient variable — extensible, rétrécissable — en jouant par alternance sur le registre des incidences. En outre, leur enrichissement ou différenciation par la substitution d'une incidence à plusieurs équivalentes peut rendre une structure plus immatérielle, plus légère.

Cependant, il est étonnant que depuis une cinquantaine d'années en particulier, la préférence aille au système orthogonal parfaitement symétrique et au gerbage de masses monolithiques.

Vaincre la pesanteur.

Dans une structure autotendante, la verticale n'est plus une direction préférentielle et la gravitation perd son rôle de vecteur dominant. Elle n'est même plus indispensable, d'autant plus que le poids de la structure représente une force quasi négligeable par rapport à sa cohésion, et de toute façon les forces au lieu de se cumuler en descente de charge, se répartissent et se compensent dans toutes les directions. Le flambage collectif est absent, seules les barres unitaires y restent sujettes.

Les précédents concepts énoncent les éléments d'une théorie de la stabilité spatiale et quelque peu dynamique, en établissant le

principe qu'un ensemble de corps est en situation stable si les forces le sollicitant produisent des déséquilibres contrôlés. Cela étant applicable aussi aux structures non stéréométriques. Ces principes ne seraient au fond que l'extension de concepts analogues, déjà généralisés dans tous les domaines de la science moderne.

Depuis les découvertes fondamentales de Pasteur sur la dissymétrie moléculaire en 1860, il est devenu notoire que toutes les manifestations de la vie minérale ou organique proviennent d'un défaut quelconque de symétrie. Dans le domaine de la physique nucléaire, Pierre Curie constate : « Ce qui est nécessaire, c'est que certains éléments de symétrie n'existent pas. C'est la dissymétrie qui crée le phénomène. » Et en mécanique ondulatoire, d'après Louis de Broglie, une particule matérielle ne peut être caractérisée sans « son spin, son moment de rotation propre ». Ces études s'inspiraient de ces exemples et d'autres dans la mesure même où notre ignorance l'a permis, donc beaucoup et pas assez.

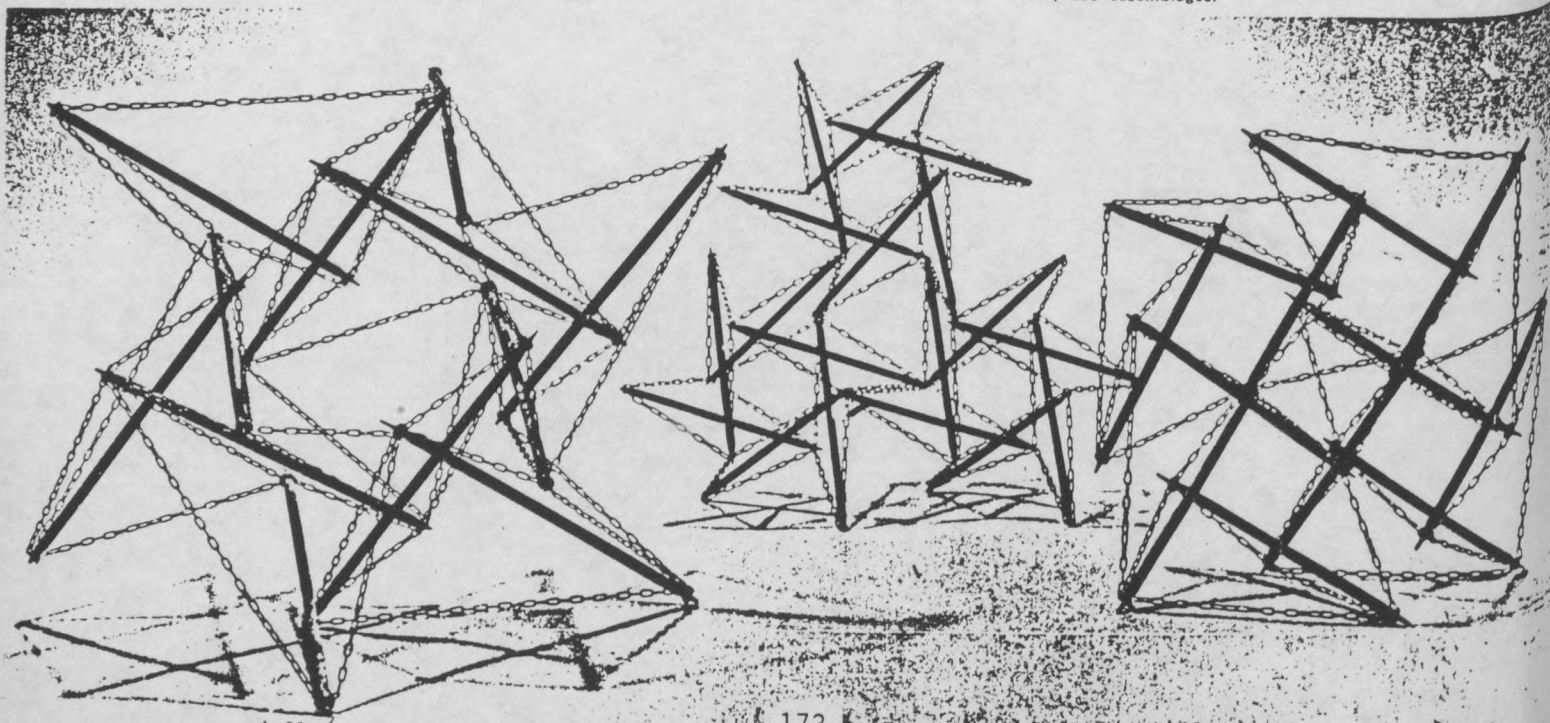
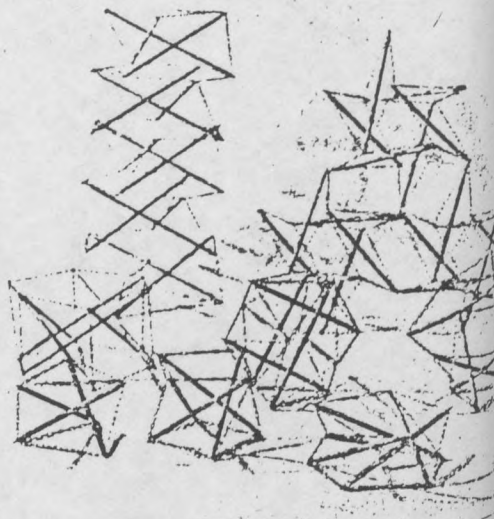
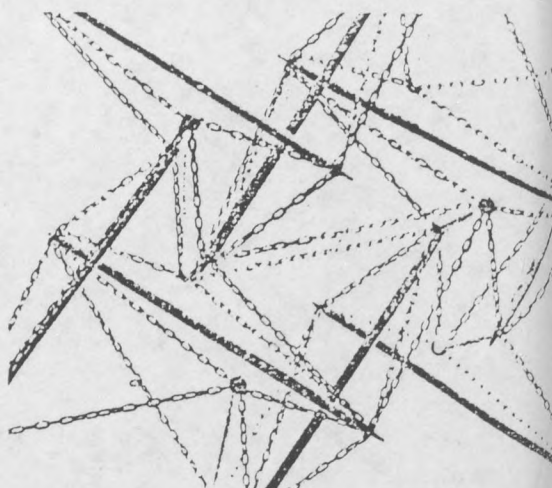
Une structure peut être réalisée avec des barres et des tirants isolés ou par solides pré-assemblés. Il est possible aussi de procéder de telle façon qu'on établisse toutes les connexions sauf une par équilibre, obtenant ainsi un ensemble qui s'ouvrira comme un accordéon au cours du montage final. D'ailleurs elle peut être conçue de manière à devenir mobile, extensible ou déformable même sans démontage par l'allongement ou le raccourcissement des tirants ou des barres. Ces éléments peuvent être pour les uns câble, chaîne, corde, tige..., les autres en métal, bois, plastique, bambou, d'un profilage constant ou d'une inertie variable... Leur assujettissement ne demande aucun joint particulier, les tirants s'orientent naturellement dans le sens de l'effort.

L'application de ces structures a des possibilités aussi variées que leurs formes, donc d'un nombre pratiquement illimité. Elle peut se présenter comme une charpente dense pour envelopper un volume quelconque ou au contraire comme des mailles assez grandes pour servir d'habitation individuelle, en bande, en collectif..., offrant ainsi un gros œuvre léger, prêt à recevoir des aménagements, séparations, etc., et qui est solide au point d'être transportable, insensible aux séismes. Outre le bâtiment, elle intéresse évidemment les autres domaines de la construction, ponts, télécommunications, transports..., et naturellement, elles sont réalisables même sans industrie lourde.

Les études présentées ont l'illusion d'être protégées par plusieurs brevets.

D. G. EMMERICH.

Ci-dessus détail et vue d'ensemble de quelques équilibres autotendants : élémentaires, composites, des assemblages.



MÉCANIQUE THÉORIQUE. — *Efforts et déformations dans les assemblages en treillis critiques et surcritiques en élasticité linéaire*. Note (*) de MM. Jean Tardiveau et Raymond Siestrunck, présentée par M. Maurice Roy.

L'existence des systèmes critiques fut remarquée au siècle dernier dès les débuts de la construction en treillis (¹) : on apprit à les connaître afin de les éviter, et les traités en citent usuellement des exemples élémentaires pour montrer les conséquences d'une contravention à l'hypothèse de rigidité de la statique. Des tentatives récentes d'utiliser des configurations surcritiques dans des structures spatiales pour leurs qualités de légèreté ou d'esthétique (²) justifient la recherche d'une méthode générale de calcul qui, à notre connaissance, fait encore défaut.

a. On considère des treillis plans ou spatiaux à articulations parfaites, non dégénérés : leurs liaisons extérieures et leur structure interne sont telles que ces systèmes ont un indice de mobilité $m > 0$, donc que leurs configurations sont présumées dépendre de m paramètres de position. Nous désignons par *surcritiques* ceux dont, par fortuité géométrique, le champ de fonctionnement en mécanisme, c'est-à-dire l'ensemble des positions géométriques compatibles avec une longueur rigoureusement constante des barres, se réduit à un point isolé. Du point de vue analytique, l'équation du fonctionnement qui définit, par exemple sous forme implicite $H = 0$, les valeurs d'une variable de sortie en fonction des m entrées reconnues du mécanisme, présente en ce point une forme différentielle linéaire nulle et une forme quadratique définie : il n'y a pas de chemin réel d'évolution du système à partir de la position considérée. Du point de vue physique, l'assemblage de la construction n'est possible que dans cette unique configuration, où elle présente une apparence de rigidité d'autant plus séduisante, pour m grand, qu'elle est obtenue avec un nombre de pièces plus nettement inférieur au minimum demandé à un treillis rigide classique.

La condition du premier ordre pour l'existence d'un point singulier du fonctionnement ($\text{grad } H = 0$) est aussi celle d'abaissement du rang du système linéaire qui exprime l'existence d'un ensemble de torseurs cinématiques non nuls pour les mouvements relatifs permis aux différentes pièces par leurs liaisons dans l'assemblage [système $C^{(3)}$] : le caractère surcritique s'accompagne donc de la possession, par le treillis, de la compatibilité locale d'un mécanisme à $m+1$ paramètres, ou, corrélativement [système $S^{(3)}$], d'un état propre de contrainte. Ce dernier critère est généralement le plus aisé à mettre en œuvre dans une recherche de structures particulières : l'étude au second ordre est toutefois nécessaire pour départager les configurations réellement surcritiques des simples positions de *branchement*, communes à plusieurs mécanismes de course finie utilisant les mêmes pièces du treillis.

Il résulte de ces remarques que les systèmes étudiés ont quel que soit m le caractère hyperstatique d'ordre 1 vis-à-vis des chargements extérieurs et des éventuels réglages de dimensions de leurs barres, à condition que ces opérations soient cinématiquement inactives ou que les libertés qu'elles pourraient exciter dans le mécanisme soient interdites par des liaisons appropriées. Dans l'utilisation courante, c'est-à-dire en l'absence de ces blocages, l'équilibre sous charge générale est impossible dans la position d'assemblage et n'est atteint qu'après des déformations importantes, essentiellement non linéaires par rapport aux charges appliquées ; il est intuitif qu'une précontrainte obtenue en suscitant l'état propre par un réglage géométrique convenable peut améliorer ce comportement en raidissant le système.

C. R., 1975, 1^{er} Semestre, (T. 280, N° 3)

Série A — 11

Les dispositifs communément appelés *critiques* entrent dans la définition précédente pour $m = 0$: systèmes présumés isostatiques, en fait mécanismes à un paramètre, à plage de fonctionnement nulle : leur intérêt en construction est, *a priori*, improbable, mais leur simplicité permet une mise au point aisée des méthodes de calcul.

b. Les b barres du treillis relient entre eux certains des n nœuds d'articulation A_i dont les cotes d'assemblage sont données ; les longueurs de construction des pièces sont $A_i A_j = l_{ij}$. Les efforts exercés par une barre sur ses liaisons d'extrémités, repérés respectivement en A_i sur l'unitaire u_{ij} de $A_i A_j$ et en A_j sur $u_{ji} = -u_{ij}$, ont dans tout état d'équilibre du système même intensité $F_{ij} = F_{ji}$. Si, pour la simplicité des décomptes, nous bornons l'analyse aux ensembles dont l'autorigidité approchée justifie la tenue par les liaisons extérieures d'un solide isostatique, l'indice de mobilité est $m = 3n - b - 6$, et le caractère surcritique général implique l'existence simultanée :

- d'une solution f_{ij} , une fois indéterminée (état propre de contrainte), au système homogène $3n \times b$,

$$(1) \quad \sum_j f_{ij} u_{ij} = 0 \quad (i = 1, \dots, n; A_j \text{ relié à } A_i),$$

exprimant l'auto-équilibre des nœuds, et dont le rang est exactement $b - 1$;

- d'une solution δA , indéterminée d'ordre $m + 1$, au système homogène $b \times 3n$:

$$(2) \quad u_{ij} \cdot (\delta A_j - \delta A_i) = 0 \quad (A_j \text{ relié à } A_i),$$

traduisant, par équiprojectivité sur chaque barre, la compatibilité cinématique des déplacements d'extrémités (dont six composantes sont fixées par les liaisons), et dont le rang est également $b - 1$. Dans le cas particulier d'une structure plane, les f_{ij} résultent généralement de manière immédiate d'un tracé d'autocrémona, tandis que les δA peuvent être composés à partir de $m + 1$ diagrammes unitaires des déplacements rabattus donnant l'influence des variables prises pour base.

c. Pour l'étude des déformations, nous attachons aux extrémités de chaque barre dans sa position d'assemblage des trièdres u, v, w orthornomés opposés, dont les axes u sont ceux précédemment définis, les v, w étant choisis au mieux ; les composantes sur ces axes des déplacements relatifs d'extrémités

$$u_{ij} = u_{ij} \cdot (\delta A_j - \delta A_i), \quad v_{ij}, \quad w_{ij},$$

ont, dans la permutation des indices, la parité, donc le caractère intrinsèque, des variables de forces ($u_{ij} = u_{ji}$, etc.). Pour un ensemble de déplacements arbitraires des nœuds, u, v, w sont généralement non nuls pour chaque barre, mais il résulte immédiatement du principe des travaux virtuels appliqué au système d'autocontrainte que les déplacements relatifs longitudinaux sont toujours *orthogonaux* aux efforts propres sur l'ensemble des barres du treillis :

$$(3) \quad \sum_b u_{ij} f_{ij} = 0;$$

en particulier, le jeu, solidifiant, du mécanisme, défini par $u_{ij} = 0$, satisfait évidemment à cette relation, tandis que v_{ij}, w_{ij} obtenus de la solution δA de (2) sont des formes linéaires homogènes à $m + 1$ paramètres.

Parmi les déplacements *réels* des nœuds, il convient de distinguer entre les états de contrainte propre ou de chargements cinématiquement inactifs (les composantes u, v, w y sont, comme pour une structure normale, de même ordre entre eux et proportionnels à leurs causes), et ceux des chargements actifs : l'expression des variations de longueur δl_{ij} des barres par rapport aux déplacements d'extrémités montre que les termes longitudinaux u sont alors de l'ordre du carré des transversaux. Au quatrième ordre en v, w , et sans répéter les indices, on a pour chaque barre :

$$(4) \quad \delta l = u + \frac{v^2 + w^2}{2}, \quad a \mathbf{F} = (\delta l + \delta l^0) \left[\mathbf{u} + \frac{v \mathbf{v} + w \mathbf{w}}{l} \right],$$

a_{ij} étant la déformabilité longitudinale de $A_i A_j$ en élasticité linéaire et δl_{ij}^0 la déformation due à une éventuelle précontrainte.

d. On obtient une description aisée des déformations modérées et de la partie principale des efforts dans les pièces des treillis surcritiques sous l'action d'un chargement actif quelconque $\mathbf{P}_i (A_i)$ dans les deux hypothèses suivantes :

α . Les intensités F_{ij} sont proportionnelles aux efforts propres correspondants f_{ij} ; si k est l'intensité d'un éventuel état propre de précontrainte, on a alors par (3) et (4) :

$$(5) \quad \frac{F_{ij}}{f_{ij}} = K = k + \frac{B}{2A} \quad \text{si} \quad A = \sum_b a_{ij} f_{ij}^2, \quad B = \sum_b (v_{ij}^2 + w_{ij}^2) \frac{f_{ij}}{l_{ij}}.$$

β . Les paramètres cinématiques reconnus en (2), soit λ, μ, \dots , sont pertinents pour la formation du potentiel thermodynamique ψ en variables de déplacements (⁴) à partir de la forme quadratique B :

$$(6) \quad \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = \frac{K}{2} \frac{\partial B}{\partial \lambda} = \sum_i \mathbf{P}_i \frac{\partial \delta A_i}{\partial \lambda} = \mathbf{P}_\lambda, \dots,$$

les composantes généralisées \mathbf{P}_λ du chargement sur les différents modes du mécanisme, combinaisons linéaires des \mathbf{P}_i , étant les variables actives de la déformation. On obtient de (6) le système linéaire homogène $m \times (m+1)$

$$\frac{1}{\mathbf{P}_\lambda} \frac{\partial B}{\partial \lambda} = \frac{1}{\mathbf{P}_\mu} \frac{\partial B}{\partial \mu} = \dots,$$

qui détermine les variables cinématiques en proportion d'une d'entre elles, λ par exemple : l'équation (6), réduite par substitution à une équation algébrique en λ , montre alors les propriétés fondamentales des systèmes surcritiques : *en l'absence de précontrainte, les paramètres de déplacement* (rapportés à une longueur l caractéristique de la structure), *varient comme la racine cubique, la partie principale des efforts internes adimensionnels* $F_{ij} A/l$ *comme la puissance 2/3, du groupement* $p = PA/l$, ou P est l'intensité des chargements proportionnels \mathbf{P}_i . *Une précontrainte rend finie la déformabilité des treillis à charge nulle et leur confère un domaine de déformations quasi-linéaires d'autant plus étendu sous charges croissantes que la précontrainte est plus élevée.*

e. L'hypothèse (α), relevant du comportement asymptotique des efforts à déformation nulle, ne permet pas, en général, de satisfaire à la condition d'équilibre des nœuds du système déformé. Il est donc nécessaire de poursuivre le développement $F_{ij}(p)$ au-delà de

la partie principale en $p^{2/3}$ et on voit aisément que les termes suivants, linéaires en p , correspondent à la solution, classique, d'équilibre du treillis non déformé sous l'action du chargement *inactif*

$$Q_i = P_i + \sum_j K_{ij} \frac{v_{ij} v_{ij} + w_{ij} w_{ij}}{l_{ij}} \quad (A_j \text{ relié à } A_i),$$

évalué à partir des éléments déjà connus; à cette approximation, le calcul initial des déformations reste inchangé. Les termes suivants, en $p^{4/3}$, peuvent être négligés aux charges modérées, principalement lorsque la précontrainte est élevée.

(*) Séance du 13 novembre 1974.

(¹) M. LÉVY, *La statique graphique et ses applications aux constructions*, Gauthier-Villars, Paris, 1888; partie 4, p. 308 *sequ.*

(²) D. G. EMMERICH, *Architecture d'aujourd'hui*, 116, 1964; *Technique et Architecture*, 26, 1966, p. 10-12.

(³) R. SIESTRUNCK, *Rev. Fr. de Mécan.*, 45, 1973, p. 5-12.

(⁴) M. ROY, *Mécanique*, II, Dunod, Paris, 1966.

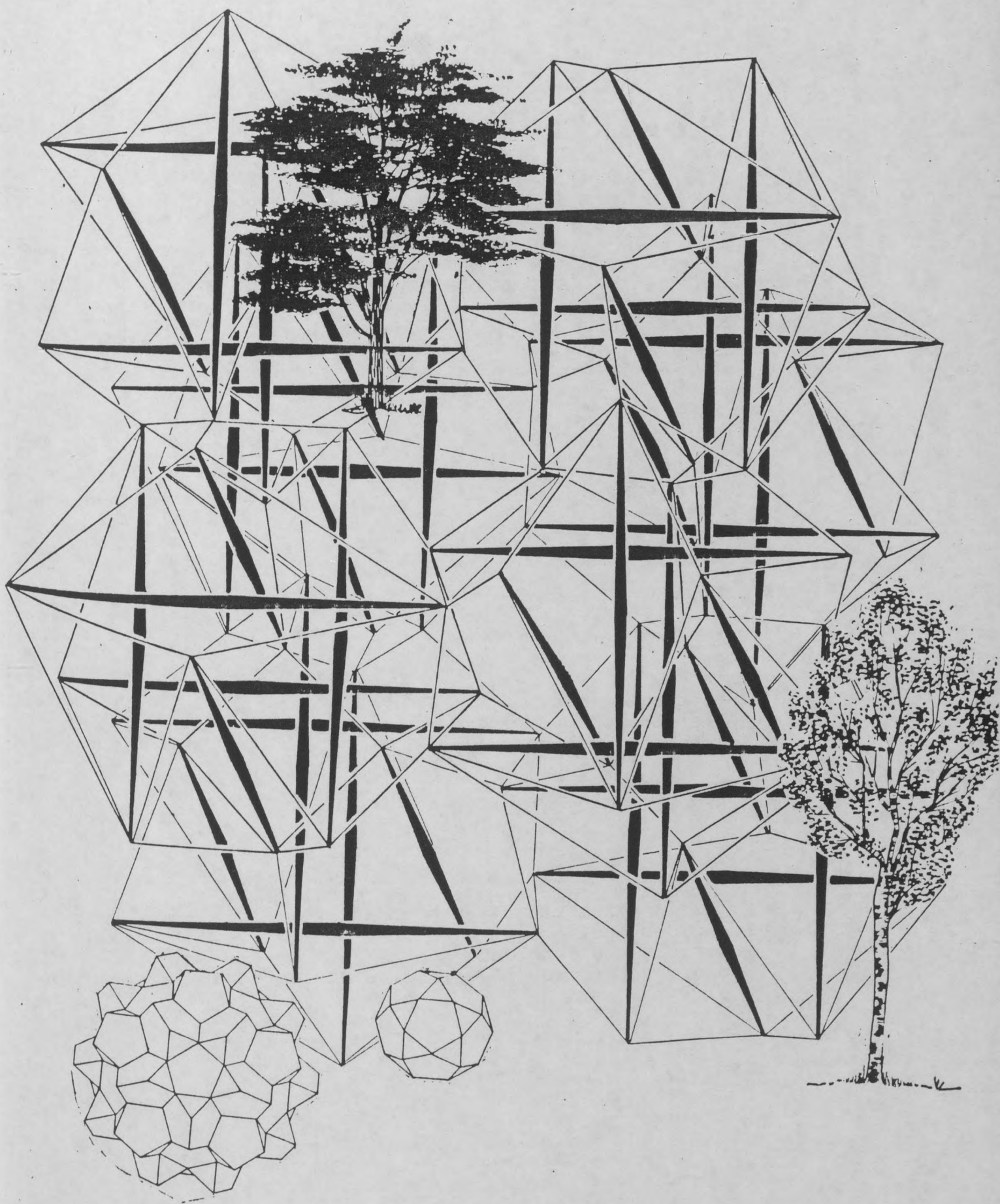
École Normale supérieure,
de l'Enseignement technique,
61, avenue du Président-Wilson,
94230 Cachan;

Université de Paris VI,
Laboratoire de Mécanique physique,
2, place de la Gare-de-Ceinture,
78210 Saint-Cyr-L'École.

BIBLIOGRAPHIE

- | | |
|--|---|
| ALMGREN F.J.
TAYLOR J E | Geometry of soap films
Scientific American 6-1976 |
| BARACS J. | Juxtapositions
Topologie structurale 1-1979 |
| BARBEROT E. | Constructions civiles
Lib. Polytechn. Beranger Paris 1924 |
| CAUCHY A.L. | Mémoire sur les polygones et les
Journal Ecole Polytechn. 16-1812 |
| CHOMARAT A.
CHASSAGNOUX A.
SAVEL J. | Etudes des caractéristiques
morphologiques particulières aux
structures autotendantes
CERMA-UPAN Nantes 1983 |
| CSONKA P. | Statika I-II
Tankönyvkiado Budapest 1951 |
| INTERNATIONAL CONFERENCE ON SPACE STRUCTURES | University of Battersea
Ed. Blackwell Londres 1966 |
| DARKOV A.
KOUZNETSOV V. | Cours de mécanique des
constructions
Ed. Mir Moscou 1968 |
| EMMERICH D.G. | Cours de géométrie constructive
ENSBA Paris 1967 |
| | Exercices de géométrie constructive
ENSBA 1970 Paris la Villette 1985 |
| | Possibilités d'application des
structures autotendantes
Rapport de Recherche MULT Paris 1985 |
| | Equipartitions 1 et 2
EA Paris La Villette 1987 |
| | Structures tendues et autotendantes
EA Paris La Villette 1988 |
| FULLER R.B. | Synergetics
M.C. Millan New York 1975 |
| GHEORGHIU A.
DRAGOMIR V. | Représentation des structures
constructives
Eyrolles Paris 1970 |
| HARARY F. | Graph theory
Adison Wesley 1969 |

HILDEBRANDT S. TROMBA A.	Mathematic and ideal form Scientific American Lib. 1985
LE RICOLAIS R.	A la recherche d'une mécanique des formes Palais de la Découverte 1965 IA Graduate School of Fine Arts University of Pennsylvania 1973
MAINSTONE R.J.	Developments in structural forms M.I.T. Press Cambridge 1965
MINKE G. SCHOFEL G.	Minimal Netze Deutsche Bauzeitung 5-1969
OTTO F.	Tensile structures M.I.T. Press Cambridge 1969
PELIKAN J.	Szerkezettervezés Műszaki Könyvkiadó Budapest 1968
SALVADORI M. HELLER R.	Structure in architecture Prentice hall 1962
TARNAI T.	Polyhedra and structural rigidity Topologie structurale 4-1980 Mécanismes finis Topologie structurale 14-1988
VIOLLET LE DUC E.	Entretiens sur l'architecture Morel Paris 1863
WACHSMANN K.	Turning Point in Building Reinhold New York 1961
ARCHITECTURE D'AUJOURD'HUI	84-1959 91-1960 99-1961 108-1963 115-1964 141-1968 155-1971 160-1972 224-1982
ARCHITECTURAL DESIGN	3-1960 7-1961 7-1965 7-1966 7-1967 4-1969 9-1970 10-1971
BAUWELT	52-1957
TECHNIQUES ET ARCHITECTURE	4-1959 5-1960 5-1963 6-1964 1-1965 2-1966 4-1967 1-1968 5-1969 2-1970 5-1970 5-1972 309-1976
ZODIAC	21-1972 22-1973



TABLES DES MATIERES

INTRODUCTION A LA RESISTANCE DES FORMES	4
Classification des formes constructives	6
Classification des systèmes porteurs	8
Simplex stables dans les systèmes articulés	12
SIMPLEX PLANAIRES	22
Triangles	26
Quadangles	28
Pentagones	32
Hexagones	56
SIMPLEX SPATIAUX	66
Pyramides	72
Bipyramides	88
Prismes	104
Antiprismes	114
Antiprismes bipyramidés	120
Autotendants élémentaires	130
POLYEDRES REGULIERS AUTOTENDANTS	142
ANNEXES	157
Hypersimplex toriques autotendants	158
Principes édifiants	168
Constructions autotendantes	172
Mécanique théorique J.Tardiveau R.Siestrunck	174
BIBLIOGRAPHIE	178

Couverture de face: Simplex polyédrique
Couverture de dos: Empilement autotendant

Diffusé par les Editions de la Villette
144, Rue de Flandre 75019 Paris - Tel 40 36 79 70
Prix: 90 Frs

