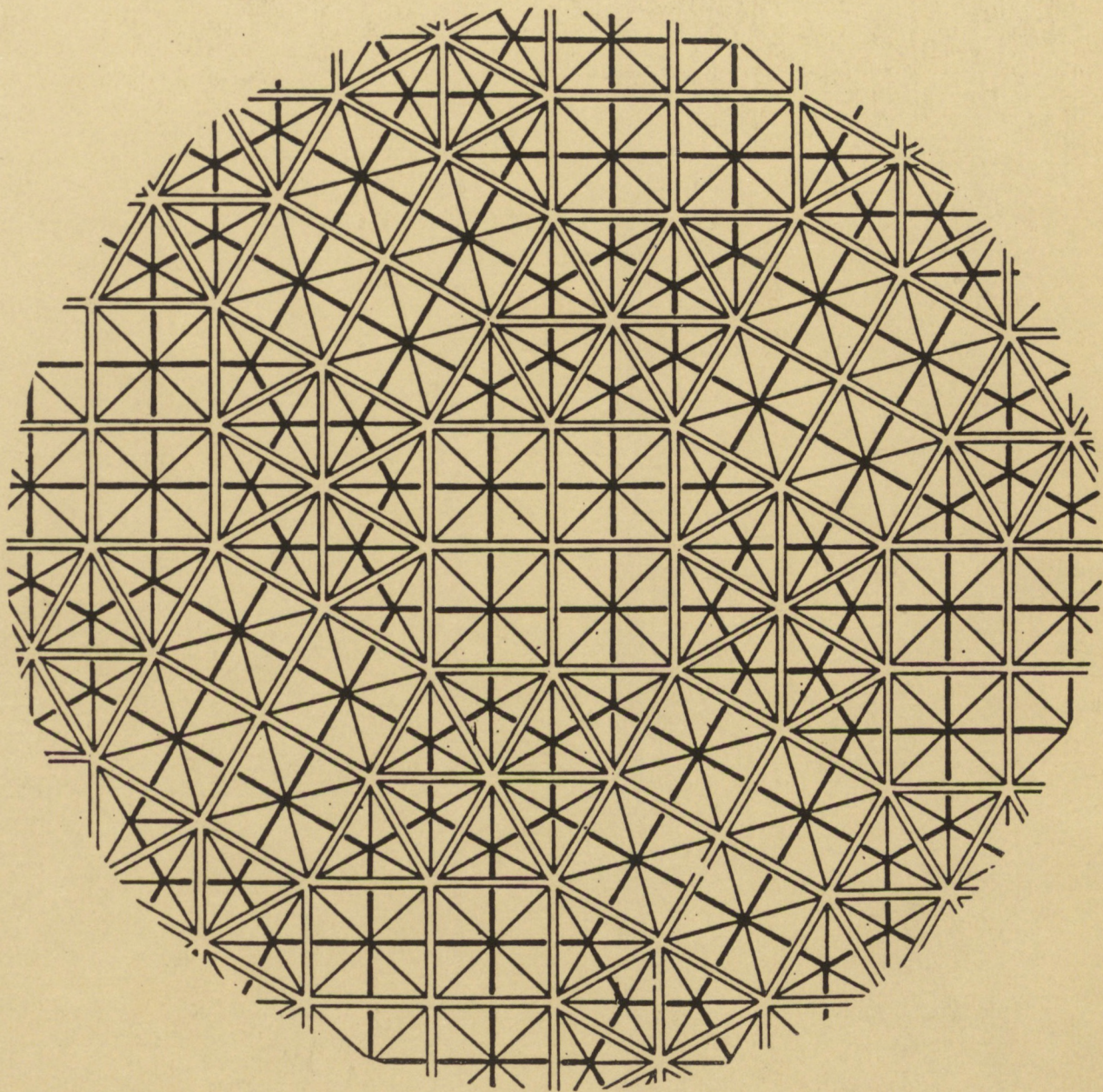


MONOGRAPHIES DE GEOMETRIE CONSTRUCTIVE

521

EQUIPARTITIONS 1
TESSELLATIONS ET RESEAUX PLANAIRES



DAVID GEORGES EMMERICH

Ecole d'Architecture de Paris la Villette

MONOGRAPHIES DE GEOMETRIE CONSTRUCTIVE

INTRODUCTION

EQUIPARTITIONS 1

TESSELLATIONS ET RESEAUX PLANAIRES

DAVID GEORGES EMMERICH

Ecole d'Architecture de Paris la Villette

Le présent ouvrage est issu du rapport de fin d'étude d'une recherche remise en 1976 au secrétariat du comité de la Recherche et du Développement en Architecture (C.O.R.D.A.), en exécution du programme général de recherche architecturale mené par le Ministère de l'Environnement et du Cadre de Vie avec la Direction Générale de Recherche Scientifique et Technique (D.G.R.S.T.) depuis 1972.

CONTRAT N° 76 73 035 00 202 75 01

Ont collaboré à l'établissement des documents graphiques illustrant ces recherches : Michèle Roumégoux, en 1976, qui a tracé la plupart des figures, et Karine Denevert, en 1987, qui les a complétées et en a assuré la mise en page.

Tous droits réservés par l'auteur © 1987

INTRODUCTION

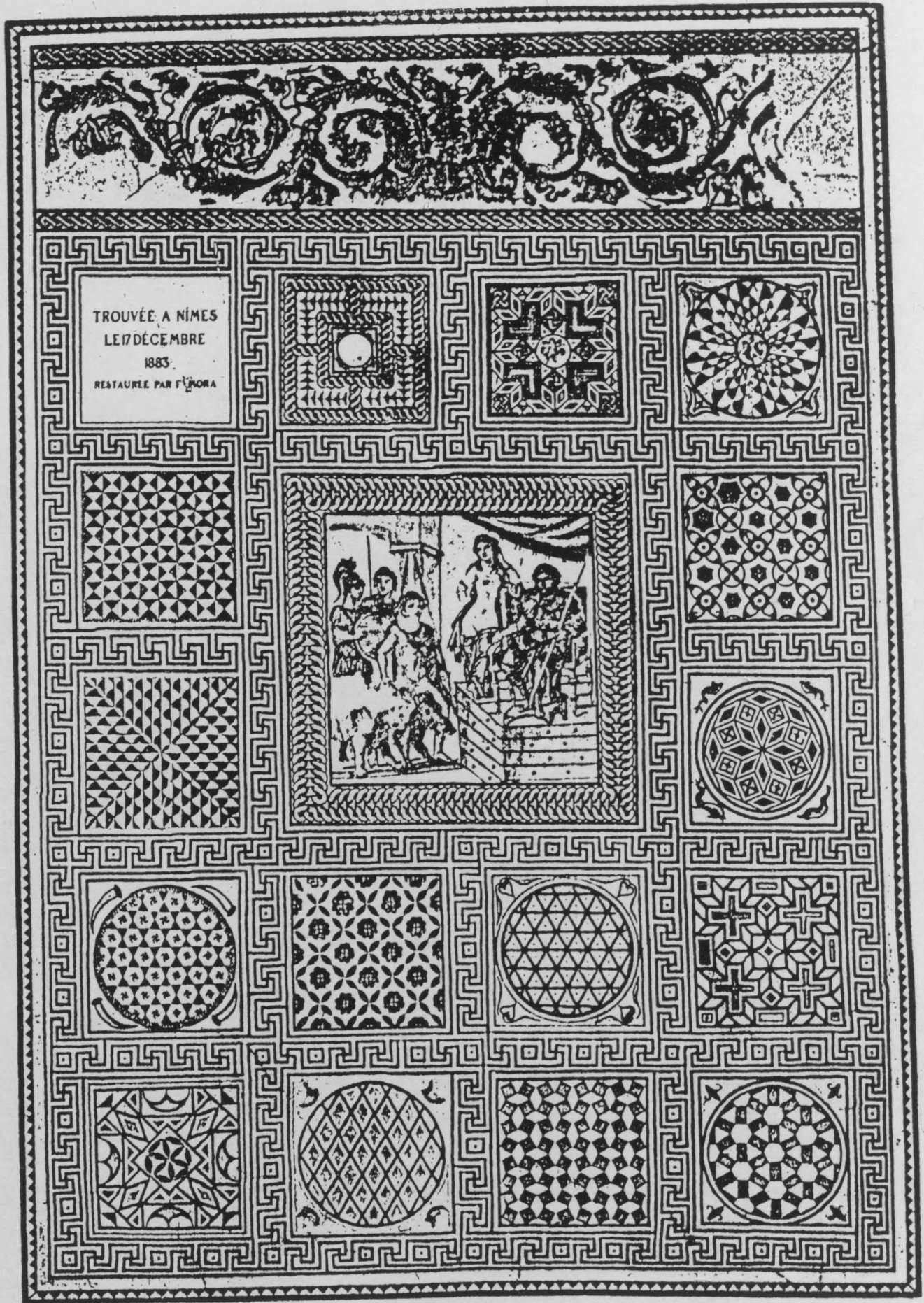
L'équipartition d'une ligne ouverte et droite constitue la base de toute mensuration de l'espace. L'équipartition d'une ligne close et circulaire produit les polygones convexes et réguliers. L'équipartition d'une surface plane en compartiments en forme de polygones convexes réguliers donne les trames ou réseaux planaires dont dérivent les surfaces gaufrées et les réseaux à double nappe.

L'origine des équipartitions planaires peut être attribuée aussi bien à l'invention des appareillages de maçonnerie d'où dérivent les pavages, les mosaïques et les marquetteries, qu'à la découverte de la vannerie et des tissages dont les formes raffinées sont les tricots, crochets et autres dentelles.

En architecture tout autant que dans tous les domaines des arts décoratifs, la volonté d'ordonner l'espace planaire par des motifs répétitifs a abouti tout naturellement à des schémas fondamentaux, des équipartitions, qui ont fini par attirer l'attention des scientifiques.

Parmi les premiers philosophes et mathématiciens, c'est à Pythagore, né à Samos vers 580 avant notre ère, qu'on attribue la proposition selon laquelle : "L'assemblage de six triangles équilatéraux, ou de quatre carrés, ou de trois hexagones remplit exactement l'espace autour d'un point". Cette dernière expression implique non seulement la connaissance des propriétés des polygones réguliers, mais également la première application d'une méthode d'approche combinatoire utilisant la composition sommitale pour étudier les diverses possibilités d'assemblage.

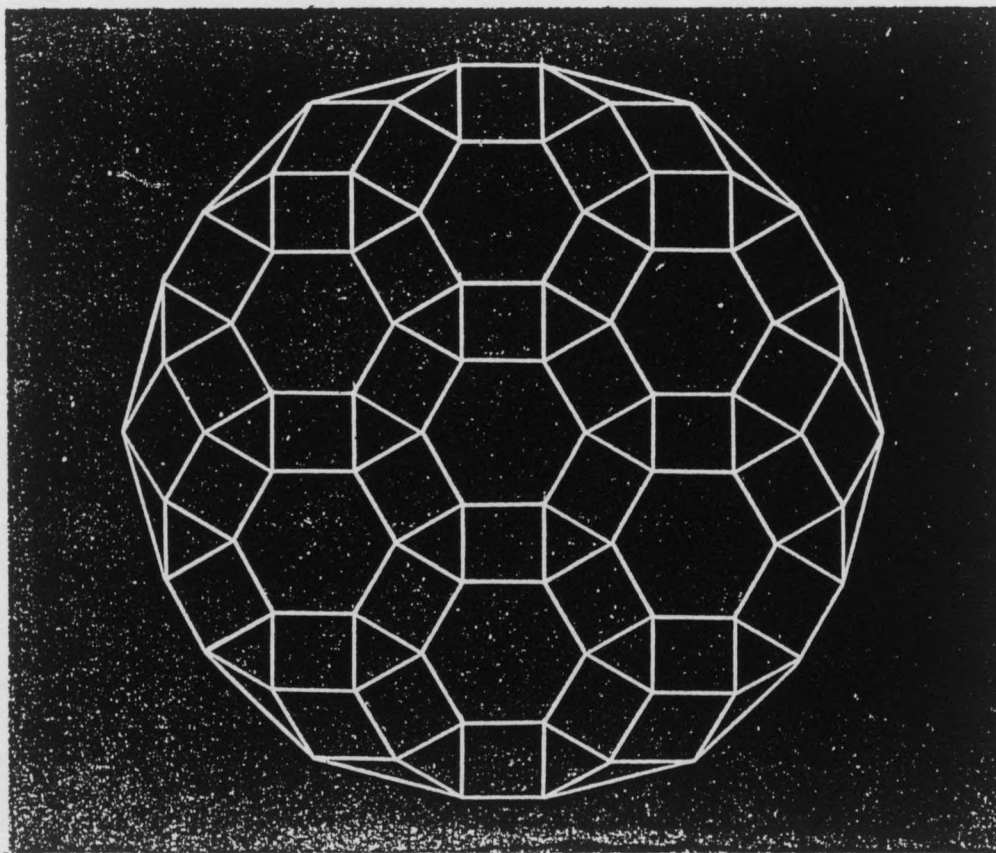
Avec la création de l'École d'Alexandrie vers 300, et Euclide dont le XIII^{ème} livre des Éléments est déjà consacré aux polygones et polyèdres réguliers, la discipline de la géométrie combinatoire, dont est issue la topologie structurale actuelle, est donc fondée.

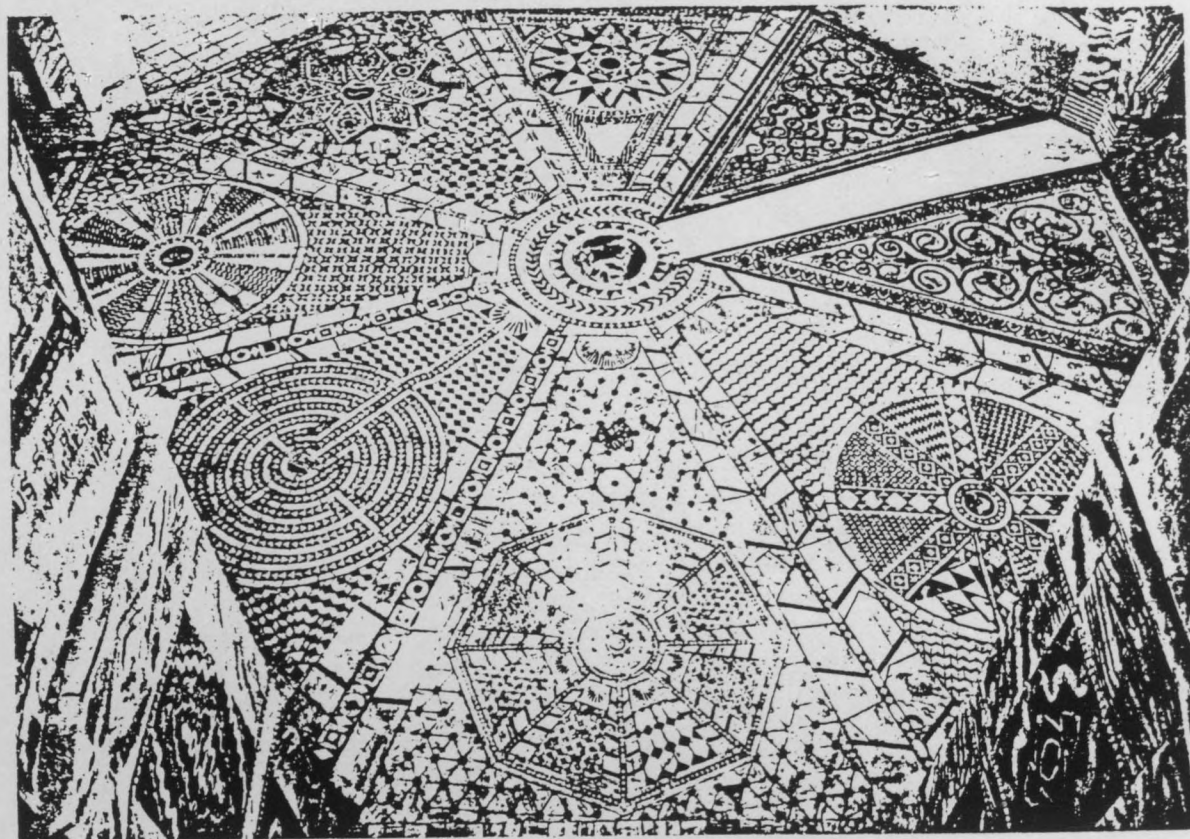


C'est à partir de ce grand foyer culturel hellénistique que les acquis de cette période faste de la pensée scientifique se sont répandus partout en alimentant le langage formel des époques et des cultures les plus diverses, en enrichissant le vocabulaire ornemental dans tous les domaines de l'art et de l'industrie. L'art du tapis, de la broderie, l'impression des tissus, la gravure sur bois et métaux, le traitement décoratif des parois et des sols... sont tous tributaires de cette spéculation à l'origine purement abstraite.

Les progrès géométriques des grecs restaient pendant vingt siècles non seulement inégalés mais quelque peu éclipsés, du moins en occident. La prédilection des romains pour les mosaïques s'alimentait probablement aux sources orientales; c'est dans ce domaine en effet qu'on retrouve résiduellement la trace des réflexions sur l'équipartition du plan, comme en témoigne le pavage synoptique rassemblant les divers types de mosaïques trouvés dans la région de Nîmes, conservé au Musée municipal. C'est dans cette ville également que se trouve dans le Temple de Diane la pierre représentant une des premières approximations de la valeur de π à l'aide d'une tessellation archimédienne composée de triangles, carrés et hexagones.

Rosace du temple de Diane à Nîmes, évaluant à 3.12 le π à l'aide d'une tessellation semi-régulière.

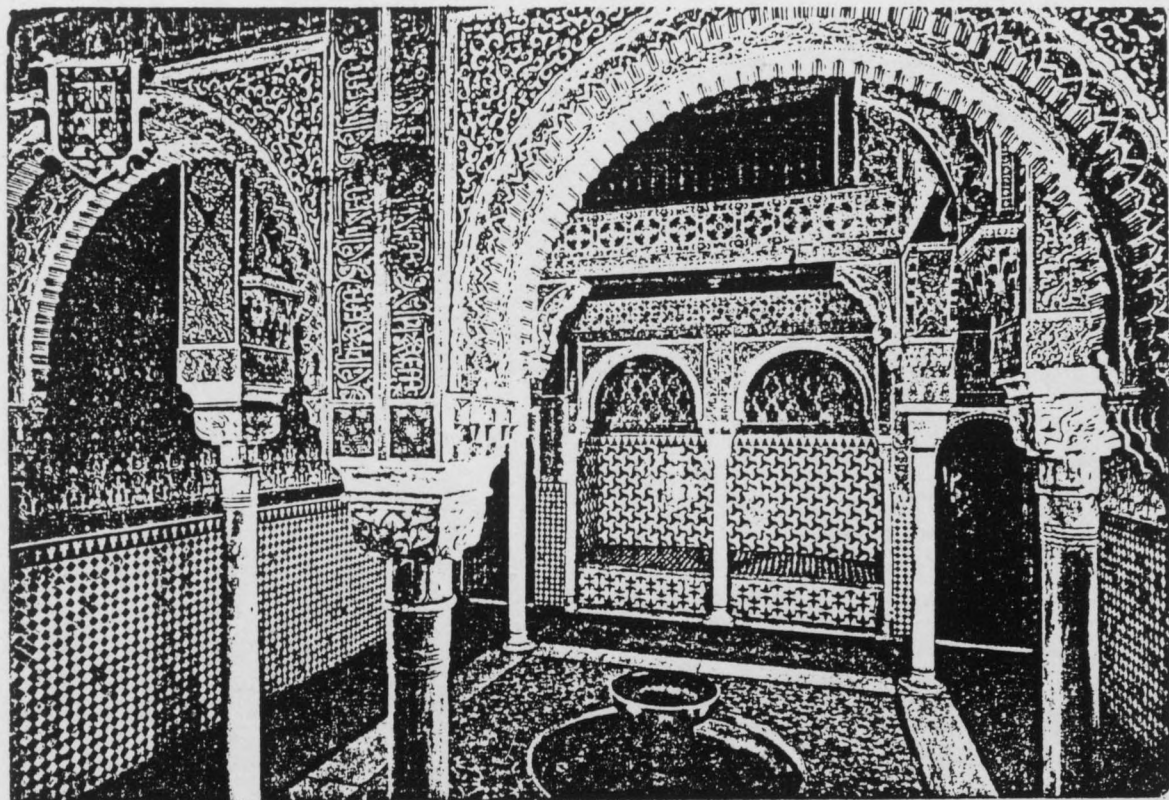




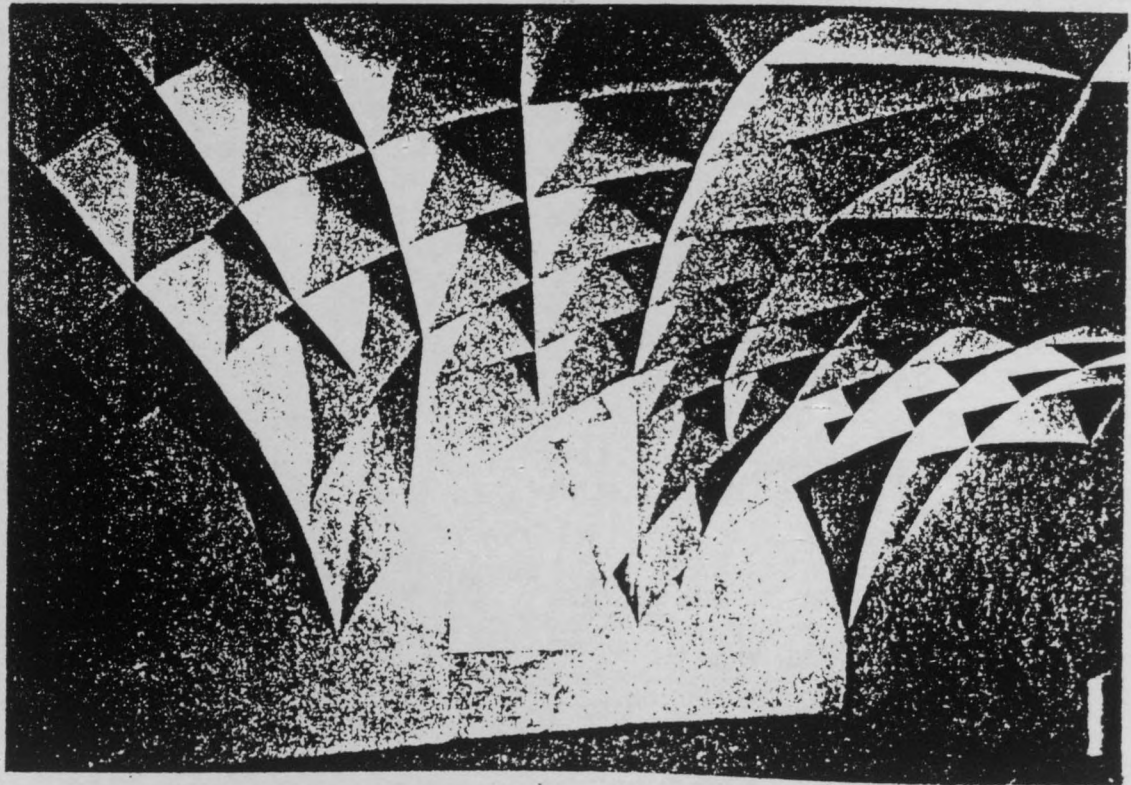
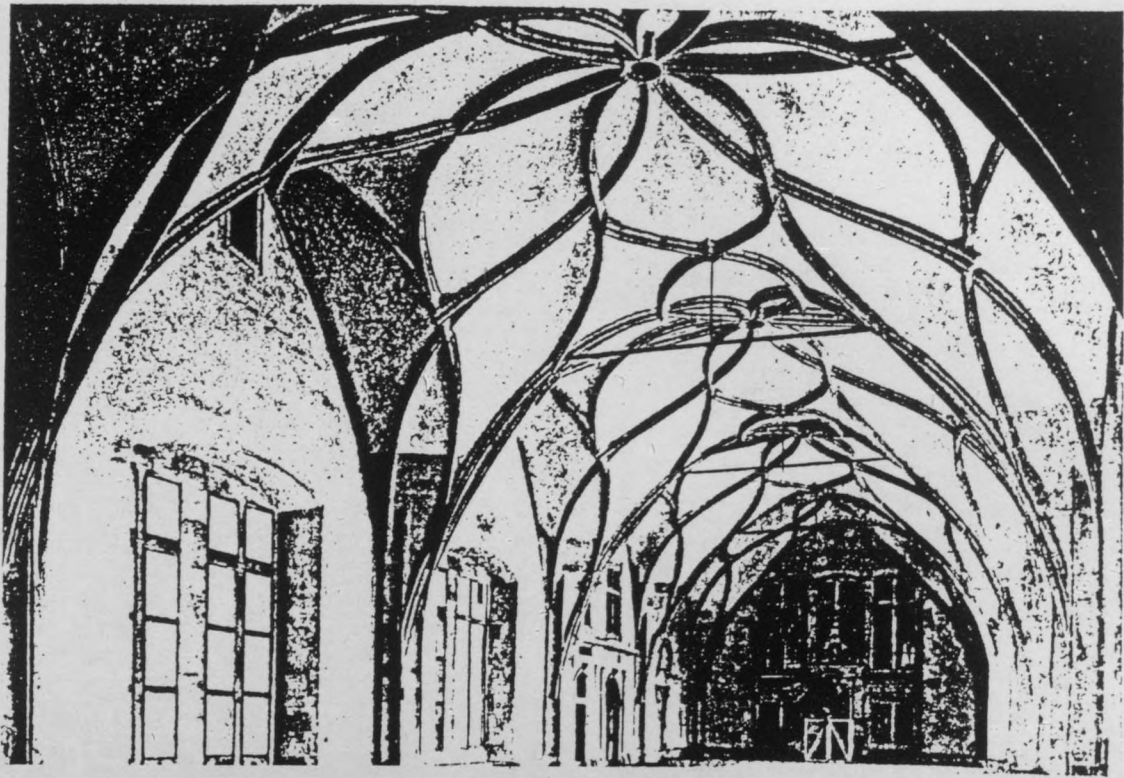
Pavage en marbre de l'Eglise St Vitale à Ravenne, constitué d'équipartitions et d'autres compositions morphologiques.

Un autre exemple remarquable de la permanence de cette préoccupation combinatoire se trouve dans le sol en marbre marqueté de l'église St Vitale à Ravenne, d'époque justinienne, qui montre presque toutes les équipartitions platoniques et archimédiennes jusqu'alors connues.

Pendant ce temps en orient, la tradition alexandrine a trouvé meilleur accueil; plus particulièrement dans la civilisation hispano-mauresque. La religion coranique interdisant, en principe, les figurations, cette contrainte se révéla être la source d'une formidable dynamique pour la création d'une ornementation fondée uniquement sur les partitions géométriques. Lieux ou objets, sacrés ou profanes, tout le milieu est imbibé là par la science des nombres : peintures, tissages, tapis, carrelages, faïences murales composées des "zéliges", jusqu'aux coupes stalactites assemblées de prismes et de trompes polygonaux, qui au delà des schémas de translation simples, obéissent à des ordonnancements radio-concentriques et parfois même multipolaires, dérivés souvent de formes pentagonales et décagonales, aussi bien étoilées que convexes et non seulement congruentes, mais interpénétrantes et entrelacées - les arabesques.



Le Sacré et le Profane, deux intérieurs hispano-mauresques décorés de revêtements de zéliges.



Salle de Wladislav au Hradsin, Prague. Salle de cloître à Greinberg. Deux exemples du savoir faire du gothique tardif, vers 1500.

Dans le monde occidental, il faut attendre jusqu'à la Renaissance et son engouement pour les incrustations, les in-tarsia, pour redécouvrir les polygones et en général les corps réguliers et leurs combinaisons. A cette époque, les maîtres maçons de certaines régions d'Europe centrale, nourris encore du savoir faire extraordinaire de l'architecture gothique flamboyante, ont déjà construit des voûtes composées de solides réguliers dont la modernité paraît étonnante. Pendant que Léonard, Dürer, Jammitzer Ventzel ... leur consacrent des ouvrages, Kepler (1571-1630) reprend les antiques théories pythagoriciennes sur le caractère sacré des polyèdres jusqu'à en bâtir sa cosmogonie fondée sur la croyance de l'existence d'un univers harmonieux.

Les théories mystiques de Kepler, puis ses découvertes dans le domaine de la physique astronomique ont repoussé dans l'ombre ses contributions originales dans le domaine de la géométrie combinatoire. C'est à lui pourtant que revient le

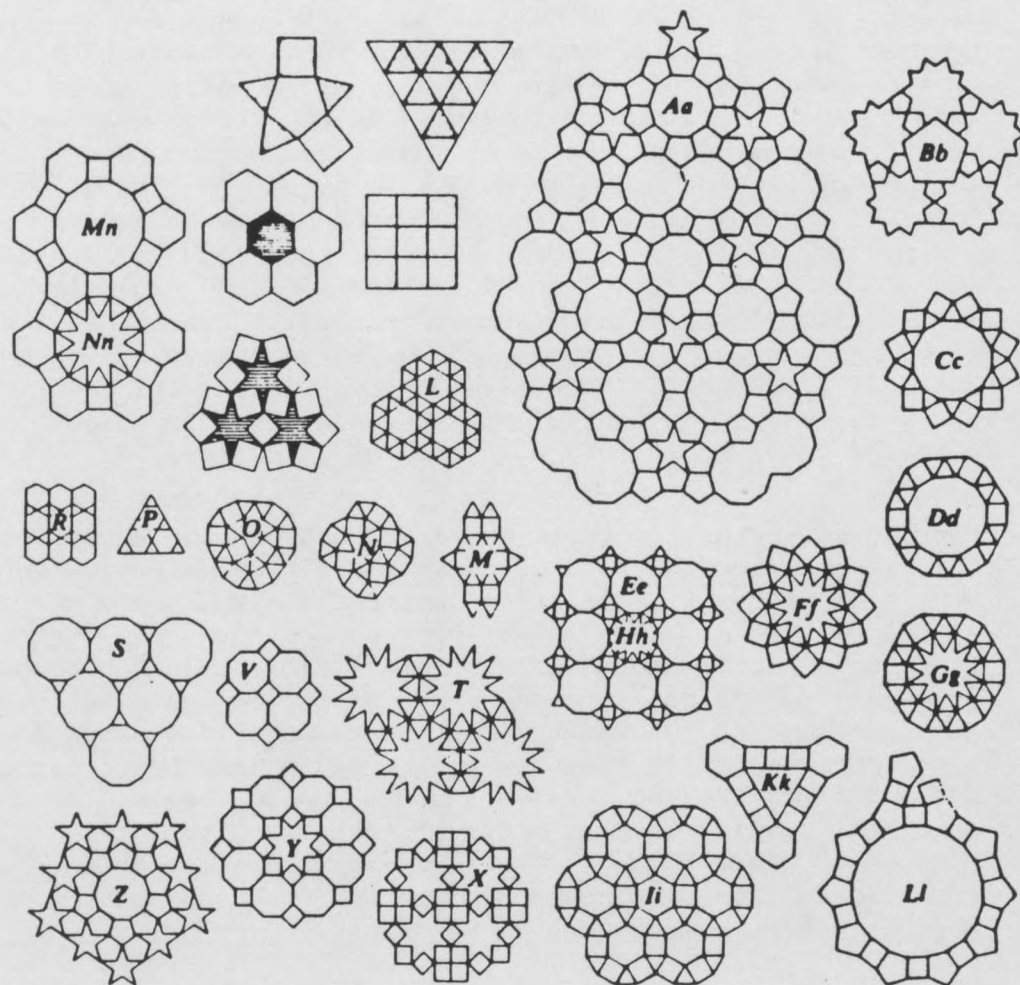
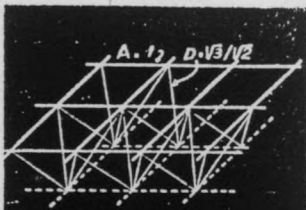
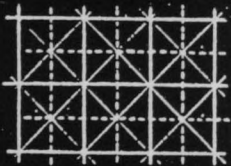


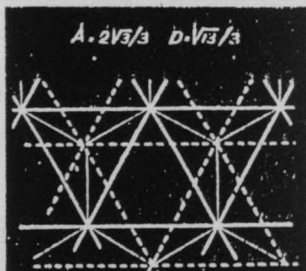
Planche de figures de "Harmonices Mundi", livre de Kepler traitant les partitions régulières de l'espace.



$$A \cdot 1,2 \quad D \cdot \sqrt{3}/\sqrt{2}$$

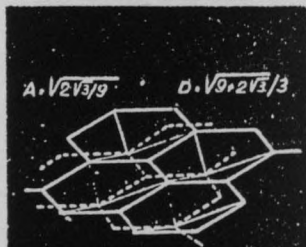


$$L \cdot 4A + 9/4D = 6,76$$



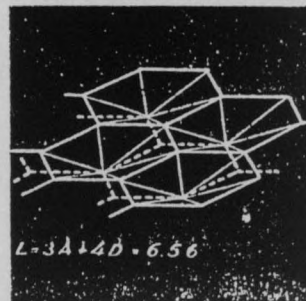
$$A \cdot 2\sqrt{3}/3 \quad D \cdot \sqrt{3}/3$$

$$L \cdot 5A + 4D = 9,37$$



$$A \cdot \sqrt{2\sqrt{3}/9} \quad D \cdot \sqrt{9+2\sqrt{3}/3}$$

$$L \cdot 3A + 3D = 4,21$$



$$L \cdot 3A + 4D = 6,56$$

mérite d'avoir traité la première fois le problème des partitions planaires dans des termes mathématiques, dans son livre, le "Harmonices Mundi", publié en 1619, qui contient outre les trois partitions platoniques parfaitement uniformes connues depuis les temps immémoriaux, les huit partitions archimédiennes à sommets uniformes, ainsi que certains assemblages étoilés et concentriques.

Cet aspect pionnier de l'oeuvre de Kepler a été oublié pendant près de trois cents ans, et jusqu'à la fin du XIXème siècle peu d'études ont été consacrées à ces questions, du moins de la part des mathématiciens. Ce sont, par contre, les ingénieurs puis les cristallographes et chimistes qui ont pris le relai, publiant depuis le début du XIXème siècle de nombreuses études dont le dénominateur commun est la question du partage congruent de l'espace aussi bien bi- que tridimensionnel.

Pour ces fondateurs de la science et de la technologie modernes, au delà de la trigonométrie, consacrée à ce polygone premier qu'est le triangle, élément indispensable de l'arpenteur géomètre, et au delà du carré et d'autres quadrangles depuis longtemps entrés dans le répertoire des bâtisseurs, ce sont les polygones et les polyèdres dans leur multitude qui deviennent enfin sujets d'attention. Après les premiers "Mémoires sur les Polygones et les Polyèdres" de l'ingénieur français Cauchy (1811-12) qui pousse l'étude jusqu'à la définition de leurs conditions de rigidité, ce sont surtout les cristallographes français Bravais, Haüy et Lévy, ainsi que le russe Fedorov et l'anglais Kelvin qui sont les chefs de file des savants poursuivant les recherches sur les équipartitions spatiales, s'intéressant, en principe, à la constitution interne de la matière.

Leurs découvertes, montrant que les substances de toute nature s'organisent de volumes caractéristiques assemblés suivant des réseaux répétitifs, ne manquaient pas d'éveiller l'idée de leur utilisation en architecture. Dans son "Entretien sur l'Architecture" paru en 1863, Viollet-le-Duc propose déjà l'emploi des arrangements cristallographiques dans la construction. Pourtant, c'est l'inventeur universel Alexandre Graham Bell qui met en oeuvre cette idée pour la première fois en 1907 en réalisant une structure selon l'ordonnement spatial le plus dense et totalement triangulé, qui n'est rien d'autre que le réseau tétraèdre-octaèdre d'où sont issus les deux réseaux planaires utilisés aujourd'hui presque exclusivement dans le bâtiment.

Après l'apport des cristallographes et les incursions ponctuelles et sans suite immédiate de ces bâtisseurs considérés alors comme utopistes, l'axe des recherches est de nouveau défini par les mathématiciens. Après Euler qui découvre la formule régissant la relation entre le nombre respectif des

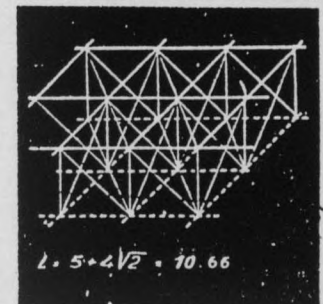
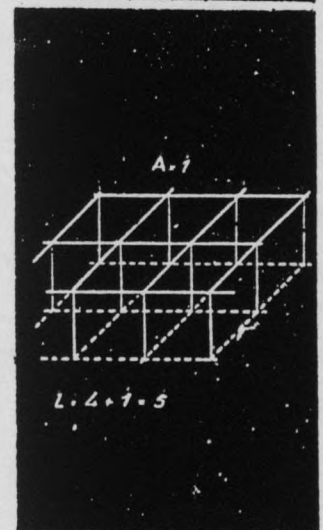
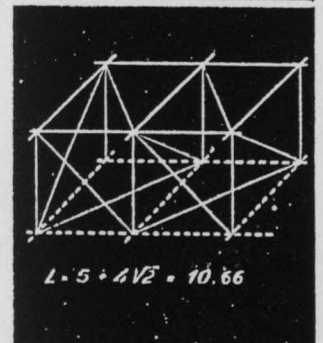
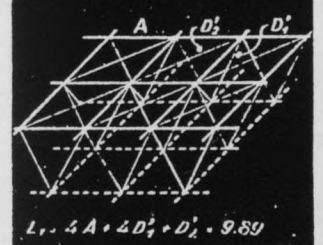
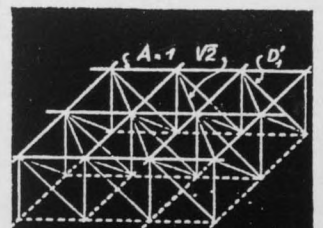
Réseaux tridimensionnels issus des trois tessellations platoniques, proposés par R. Le Ricolais en 1940.

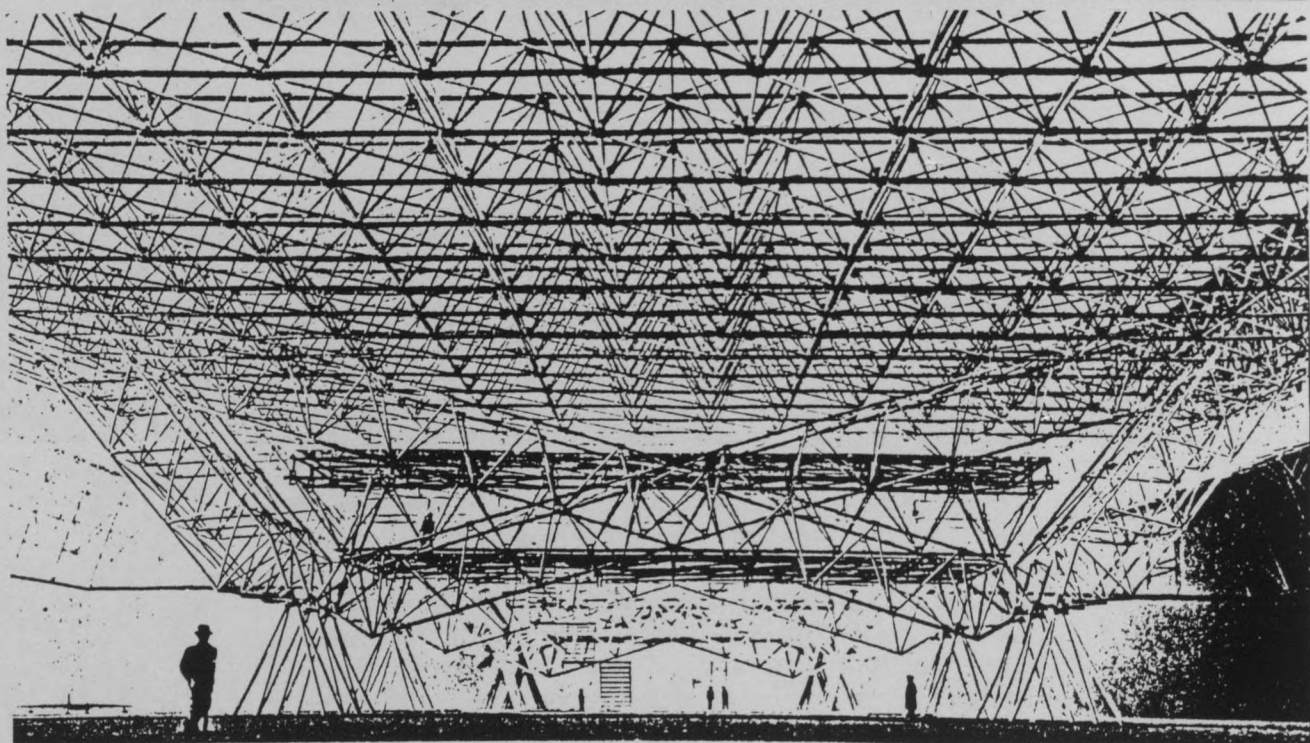
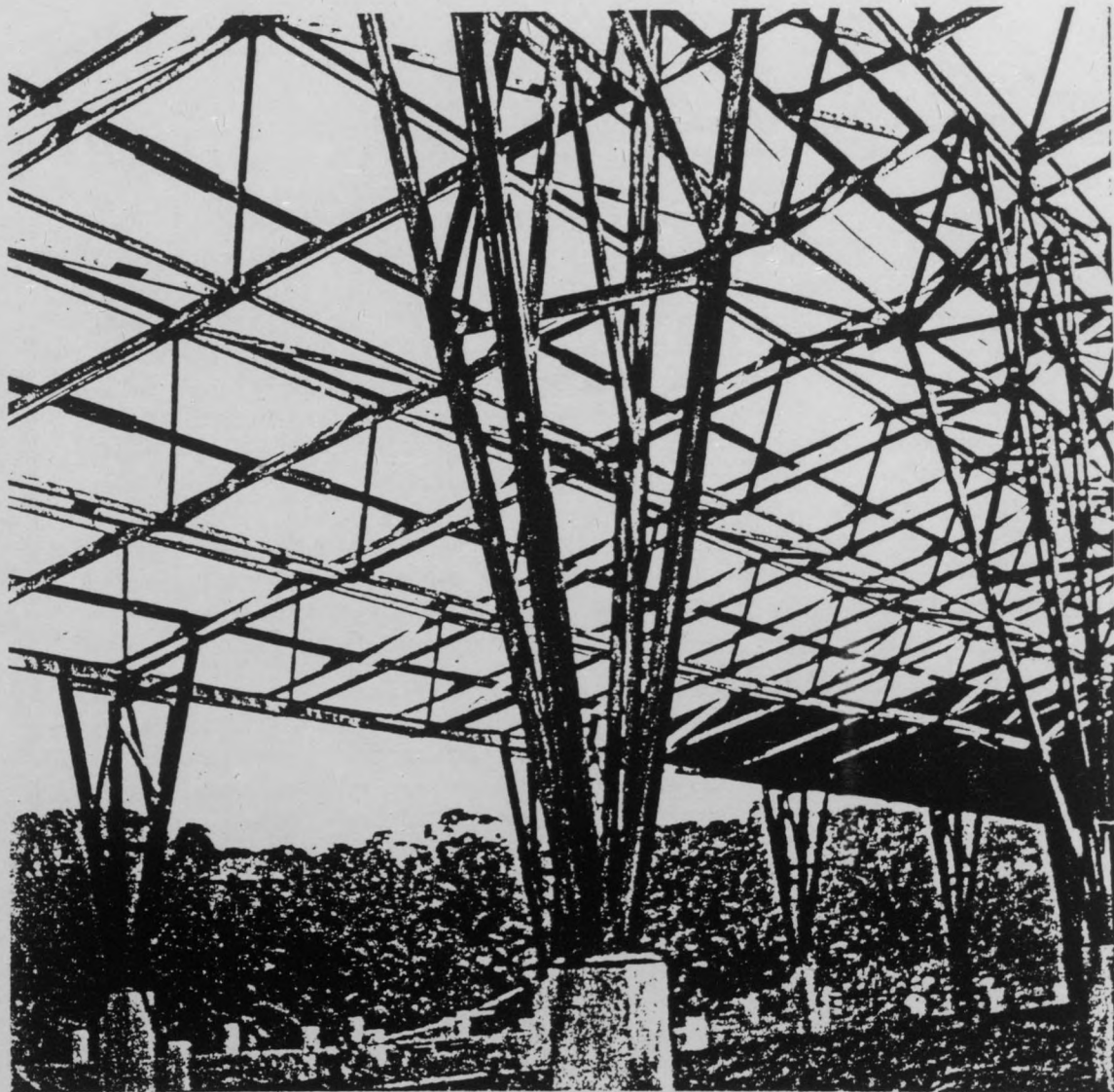
sommets, arêtes et faces d'une configuration - entrevue déjà par Descartes - c'est Félix Klein, dans son programme d'Erlangen, qui élabore, il y a plus d'un siècle, les bases d'une recherche systématique fondée sur la définition des invariants qui aboutira plus tard à la classification rigoureuse des êtres géométriques. En matière des partitions notamment, cet essor nouveau de la géométrie - appelée bientôt dans un sens élargi, la topologie - donnait d'abord naissance à la cristallographie mathématique, ou théorie des groupes de symétrie, créant des méthodes d'identification morphologiques précises et systématiques avec des modes de représentation et de notation plus aisées que les projections classiques de la géométrie descriptive. Tels sont, entre autres, le code Schläfli, un symbolisme pratique pour distinguer les arrangements, et les diagrammes Schlegel, rendant plus aisée la lecture des volumes convexes que les figures orthogonales et perspectives habituelles.

Depuis quelques décades, plus particulièrement depuis la parution de l'ouvrage de Hilbert et Cohn Vossen : "Geometry and imagination", et après la parution de "Anschauliche Topologie" de Lietzman puis le "Mathematical Models" de Martyn Cundy et Rollet, les géométriciens d'aujourd'hui n'ont pas cessé d'inventer et de raffiner les connaissances. Dans le domaine des partitions planaires, les travaux de Coxeter, Fejes-Toth, Grünbaum et Schephard, entre autres, ont considérablement élargi le répertoire morphologique.

Presque parallèlement ces connaissances ont cessé d'être le domaine réservé des mathématiciens spécialistes répondant à des questions que personne ne leur a posées. Outre les physiciens, chimistes et biologistes, particulièrement concernés par les structures moléculaires de la matière ou des cellules vivantes, le problème de la nature et de la division de l'espace a attiré l'attention de ceux qui se définissent quelque peu présomptueusement comme les créateurs d'espace. En fait, ce sont les créateurs des premières structures dites spatiales qui ont prêté attention une fois de plus aux résultats des recherches des autres disciplines pour en puiser des exemples. Cependant, les structures tridimensionnelles de le Ricolais, ainsi que les réseaux de Wachsman et de Fuller, apparus seulement depuis les années cinquante, ne se sont inspirés que des trois premières équipartitions - triangulaire, carrée et hexagonale - connues, comme on l'a dit, depuis des temps immémoriaux.

Voulant élargir la typologie des réseaux tridimensionnels, la première incursion de l'auteur dans le domaine des équipartitions date des débuts des années soixante, aboutissant à une série de publications de recherches structurales parues dans la revue "Techniques et Architecture", et dont le résumé a été présenté lors de la première conférence internationale sur les structures spatiales de Londres sous le titre "Réseaux", édité par Blackwell, en 1966.





Hangars - réalisation par R. Le Ricolais et projet de K. Wachsmann - utilisant le même réseau régulier, env. 1948.

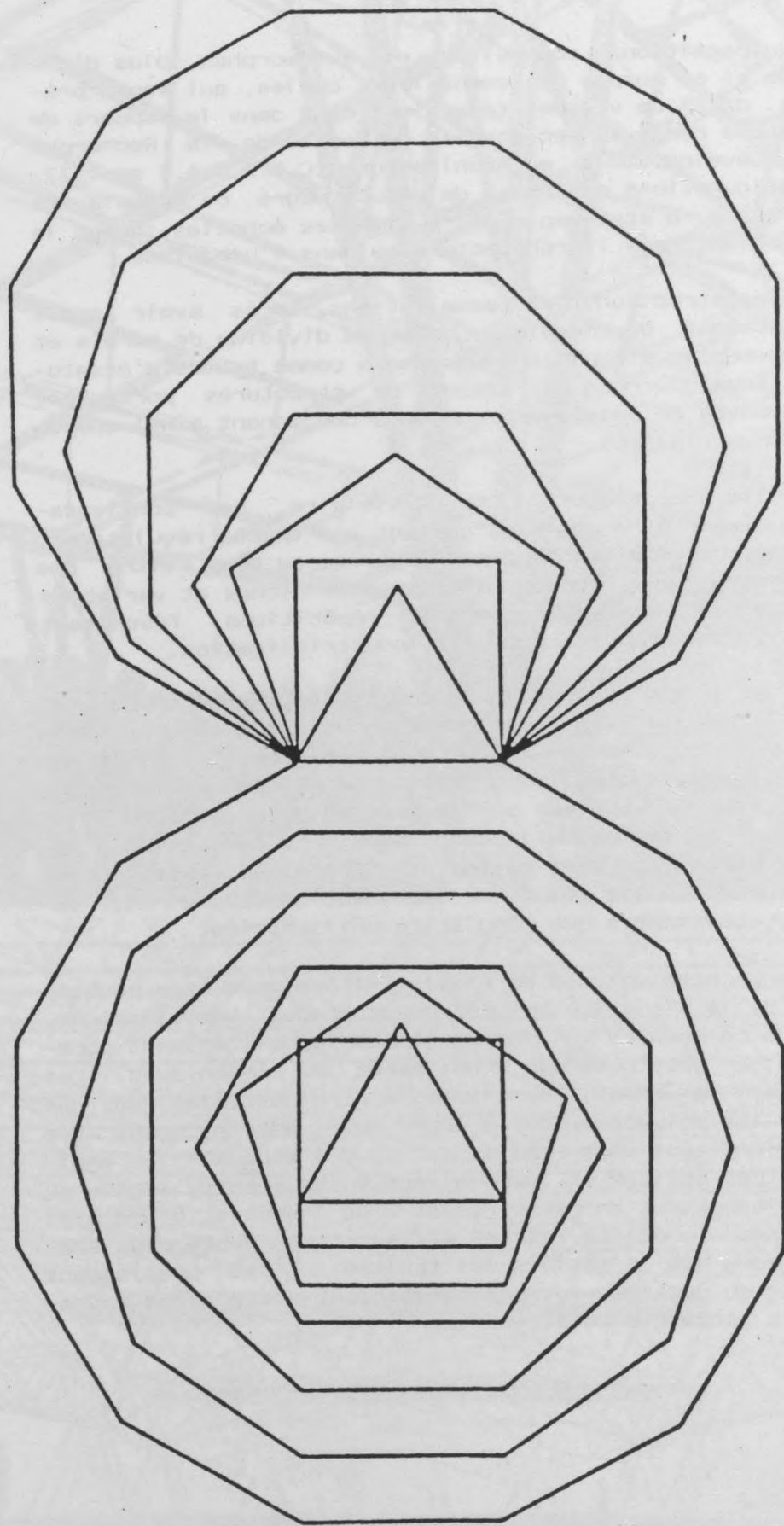
Les équipartitions composites et automorphes, plus d'une centaine si on compte également leurs duales, qui sont présentées dans ce volume, figuraient déjà dans le rapport de fin d'étude remis au secrétariat du Comité de la Recherche et du Développement en Architecture (C.O.R.D.A.) en 1977. Ces configurations nouvelles de tout degré de régularité sont prêtes à être employées à diverses échelles : dans la construction, dans l'architecture ou dans l'urbanisme.

Dans la construction, les tessellations, après avoir servi comme schémas de carrelage, ou comme division de parois et de revêtements, s'emploient désormais comme trames d'ossature, surfaces gaufrées ou réseaux de structures porteuses; les composés de polygones réguliers deviennent ainsi composants industrialisés.

A l'échelle architecturale, ou tissulaire, ces configurations peuvent être choisies en tant que tracés régulateurs, ou modénatures régissant un plan rythmé, au même titre que l'orthogonal, qui, tout en étant plus riches et variables que ce dernier, restent cependant répétitives, favorisant également la préfabrication ou l'industrialisation.

Enfin, au niveau urbanistique, ces tracés planaires peuvent définir aussi l'articulation des espaces bâtis et non bâtis selon une composition réticulaire et proliférante, à l'opposé des tours ponctuelles ou des barres linéaires, les unes et les autres parachutées sur le terrain d'une manière discontinue. Ces trames définissent ainsi une succession d'espaces - places, cours et patios - de formes diverses, entourés de volumes bâtis selon une implantation souple et, cependant, obéissant à une régularité unificatrice.

Evidemment cette volonté de régularisation peut être poussée au delà de la planarité des polygones et des tessellations, sujet de ce premier volume, de géométrie délibérément constructive car destinées aux architectes et ingénieurs. Les polygones, en effet, sont aptes à être assemblés dans des solides, les polyèdres, qui à leur tour entrent dans les compositions spatiales remplissant tout l'espace - les empilements. Ces solides et leurs divers entassements, denses ou élagués, composent un autre registre de l'espace, d'une plus haute dimensionnalité, certes et sans aucun doute plus spatiale encore que la matière ici traitée. C'est précisément le sujet du deuxième ouvrage constituant cette série consacrée à la géométrie constructive.



Polygones réguliers entrant dans la composition des équi-partitions régulières.

POLYGONES ET LEURS ASSEMBLAGES

POLYGONES

Les systèmes stéréométriques répétitifs sont des équipartitions spatiales composées de polygones réguliers.

Un polygone est une région du plan délimitée par des segments droits, ses côtés, qui s'intersectent par des points, ses sommets, formant une configuration fermée qui divise le plan en deux régions intérieure et extérieure. Quand tous ses angles intérieurs sont convexes, le polygone est convexe. Quand ses côtés et ses angles sont identiques, il est équilatéral et régulier, et peut alors être inscrit dans un cercle. De ce fait, le polygone régulier convexe peut être considéré comme une équipartition : celle du cercle. Evidemment, suivant le nombre des divisions, il en existe une infinité.

Sept polygones, ceux de 3, 4, 5, 6, 8, 10 et 12 côtés, suffisent, cependant, pour construire tous les systèmes stéréométriques. Les caractéristiques de ces polygones appelés : triangle, carré, pentagone, hexagone, octogone, décagone et dodécagone sont résumées dans le tableau n°1. L'illustration les montre comparativement : d'abord construits sur la même base, puis autour d'un centre commun.

TABLEAU 1 POLYGONES REGULIERS CONVEXES

n côtés	nom	angle intérieur	angle central
3	Triangle	60°	120°
4	Carré	90°	90°
5	Pentagone	108°	72°
6	Hexagone	120°	60°
8	Octogone	135°	45°
10	Décagone	144°	36°
12	Dodécagone	150°	30°

Dans les configurations duales, on rencontre des polygones non réguliers banals, tels des triangles scalènes, des rhombes, des trapèzes, des deltoïdes et des pentagones isocèles.

ASSEMBLAGES DES POLYGONES

Plusieurs polygones réguliers convexes se rencontrant par des côtés congruents autour d'un sommet commun forment des constellations ou assemblages. Chaque système stéréométrique répétitif est caractérisé par un assemblage typique quand la configuration est simple ou par plusieurs assemblages typiques quand elle est composite.

Outre l'ordre de voisinage exprimé par le code Schläfli, chaque assemblage est défini par le nombre (n) montrant le nombre de faces se rencontrant dans un sommet, et la somme des angles des polygones (Σa) qui le constituent. Le plus petit assemblage possible est le tétraédrique composé en pyramide de trois triangles équilatéraux totalisant 180° , le plus grand étant l'empilement compact formé de 24 triangles avec 1440° . Entre ces deux extrêmes s'échelonnent toutes les autres configurations stéréométriques dont on peut ébaucher, selon les limites inférieure et supérieure de n et Σa , une première classification, qui est résumée dans le tableau n°2.

TABLEAU 2 CLASSIFICATION DES CONFIGURATIONS STERÉOMETRIQUES PAR n ET Σa

Classe	n		Σa	
	min.	max.	min.	max.
Polyèdres convexes	3	5	180°	348°
Tessellations	3	6	360°	360°
Polyèdres composites	3	10	180°	630°
Surfaces gaufrées	3	12	180°	720°
Polyèdres infinis	4	12	390°	720°
Empilements	5	24	570°	1440°

Homogénéité et hétérogénéité

L'ordre de voisinage ou l'ordonnement entre les polygones à l'intérieur d'un assemblage typique est défini à l'aide du code Schläfli, par l'énumération, dans l'ordre et dans le sens rotatoire autour d'un sommet, des polygones qui sont désignés par le nombre de leurs côtés respectifs. Un assemblage est homogène s'il est construit d'une seule sorte de polygones réguliers et hétérogène dans les autres cas.

Ainsi, dans la tessellation orthogonale, le damier, composé homogènement de carrés, l'assemblage typique est exprimé par le code 4.4.4.4, indiquant les quatre carrés se rencontrant dans chaque sommet. Tandis que dans la tessellation archimé-

dienne, le code 3.6.3.6 signifie que le sommet est composé non homogènement de deux triangles et de deux hexagones assemblés alternativement. Dans la configuration allomorphe et également non homogène où les deux triangles et les deux hexagones sont accolés, le code est 3.3.6.6, indiquant la différence dans l'ordre de voisinage.

Assemblages réguliers et semi-réguliers

Une configuration composée homogènement d'assemblages identiques, eux-mêmes constitués homogènement de polygones identiques, est appelée parfaitement régulière ou platonique. Une configuration composée homogènement d'assemblages identiques mais hétérogènes, donc composés de polygones divers, est semi-régulière ou archimédienne.

Assemblages composites

Une configuration composée de deux ou plusieurs sortes d'assemblages homogènes ou hétérogènes est composite. Par ailleurs, les configurations régulières et semi-régulières, ayant un assemblage typique, sont appelées toutes deux isocèles, tandis que les composites de divers degrés, suivant le nombre des assemblages différents, sont non isocèles. Dans toutes les classes stéréométriques on distingue les arrangements suivant ces catégories.

ASSEMBLAGES PLANAIRES ET TESSELLATIONS

Les tessellations, ou pavages, sont des partitions du plan par des polygones réguliers groupés dans des assemblages planaires : la somme des angles polygonaux autour d'un sommet commun étant 360° .

Le plus petit polygone régulier, le triangle équilatéral, ayant un angle de 60° , un assemblage planaire ne peut comporter plus de six polygones, ni moins de trois, étant donné que le plus grand polygone convexe a un angle inférieur à 180° . Un assemblage planaire, suivant qu'il se compose de 3, 4, 5 ou 6 éléments polygonaux, ne peut donc être que ternaire, quaternaire ou sénnaire.

D'après les solutions indiquées par Badoureau en 1881, il existe seulement dix sept possibilités d'assemblages entre polygones réguliers convexes, qui sont énumérées dans le tableau n°3.

TABLEAU 3 ASSEMBLAGES DE POLYGONES REGULIERS

	classe	p1	p2	p3	p4	p5	p6	concentrique	tessel- lation	poly- morphe	énantio- morphe
1	ternaire	3	7	42				•			
2		3	8	24				•			
3		3	8	18				•			
4		3	10	15				•			
5		3	12	12					•		
6		4	5	6				•			
7		4	6	12					•		•
8		4	8	8					•		
9		5	5	10				•			
10	quaternaire	6	6	6					•		
11		3	3	4	12				•	•	•
12		3	3	6	6				•	•	
13		3	4	4	6				•	•	•
14	quinaire	4	4	4	4				•		
15		3	3	3	3	6			•		
16		3	3	3	4	4			•		
17	sénaire	3	3	3	3	3	3		•		

Cependant, les assemblages n°1, 2, 3, 4, 6 et 9 ne produisent pas de tessellations, les sommets périphériques voisins ne laissant pas de secteurs résiduels correspondant à un polygone régulier. Ils forment tout au plus des arrangements radio-concentriques. Il subsiste donc onze solutions qui sont composées uniquement de polygones réguliers de 3, 4, 6, 8 et 12 côtés.

Ce résultat, cependant, ne tient pas compte des possibilités d'allomorphie ou d'énantiomorphie de certains assemblages, provenant des permutations dans l'ordonnement des mêmes polygones autour d'un sommet.

Il existe ainsi une allomorphie entre les assemblages 3.3.6.6 et 3.6.3.6; 3.4.4.6 et 3.4.6.4; 3.3.4.12 et 3.4.3.12; et une énantiomorphie entre 4.6.12 et 6.4.12; 3.4.4.6 et 3.6.4.4; 3.3.4.12 et 3.3.12.4. A la rigueur, dans la notation et par un souci de simplification, on peut éventuellement faire abstraction, du fait de leur symétrie, de la différence existant entre deux assemblages énantiomorphes. Par contre, les assemblages allomorphes sont fondamentalement différents, et il convient d'en tenir compte en recherchant toutes les combinaisons possibles.

La méthode employée est la suivante : les valeurs d'angles des polygones réguliers ont comme dénominateur commun 15°. En divisant l'angle de 360° en 24 parts de 15°, les angles du carré, hexagone, octogone et dodécagone valent respectivement 4, 6, 8, 9 et 10 parts de 15°. Grâce à ce chiffre exprimant la valeur angulaire, on trouve par une méthode combinatoire toutes les possibilités d'assemblages polaires planaires en recherchant toutes les combinaisons de 3, 4, 5 et 6ème classe, même répétitives, du nombre 24 à base de la série 4, 6, 8, 9, 10. A partir des combinaisons numériques possibles, on obtient, transcrits en code Schläfli, les 18 assemblages planaires présentés dans le tableau n°4.

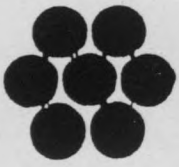
Chaque assemblage polygonal peut être considéré comme une configuration convexe d'un nombre N de noeuds, d'un nombre S de segments et d'un nombre R de régions fermées. Entre les trois sortes d'articulations il existe, si on fait abstraction de la région extérieure entourant la configuration, une relation définie par la formule d'Euler :

$$N - S + R = 1$$

TABLEAU 4 ASSEMBLAGES POLAIRES

	N°	combinaison de 24 par 4, 6, 8, 9, 10						transcription en code Schläfli						N	S	R
		n1	n2	n3	n4	n5	n6	p1	p2	p3	p4	p5	p6			
Homogènes	1	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	7	12	6
	2	6	6	6	6	6	6	4	4	4	4			9	12	4
	3	8	8	8				6	6	6				13	15	3
Hétérogènes	4	4	4	4	6	6		3	3	3	4	4		8	12	5
	5	4	4	6	4	6		3	3	4	3	4		8	12	5
	6	4	4	4	4	8		3	3	3	3	6		9	13	5
	7	4	4	8	8			3	3	6	6			11	14	4
	8	4	8	4	8			3	6	3	6			11	14	4
	9	4	6	6	8			3	4	4	6			10	13	4
	10	4	8	6	6			3	6	4	4			10	13	4
	11	4	6	8	6			3	4	6	4			10	13	4
	12	4	4	6	10			3	3	4	12			15	18	4
	13	4	4	10	6			3	3	12	4			15	18	4
	14	4	6	4	10			3	4	3	12			15	18	4
	15	4	10	10				3	12	12				22	24	3
	16	6	9	9				4	8	8				15	17	3
	17	6	8	10				4	6	12				17	19	3
	18	6	10	8				4	12	6				17	19	3

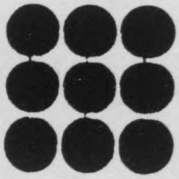
1



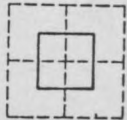
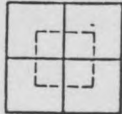
555555



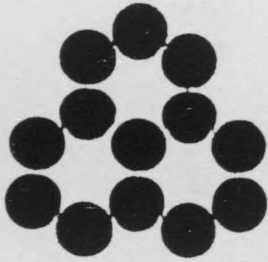
2



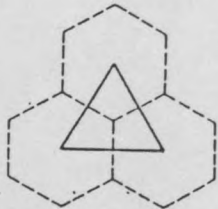
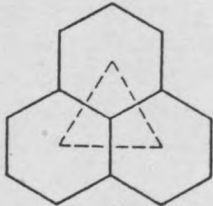
4444



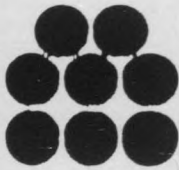
3



666



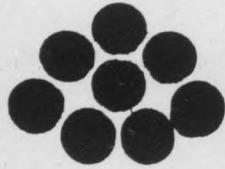
4



55544



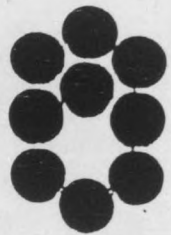
5



55454



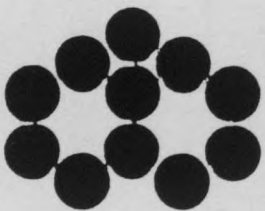
6



55556



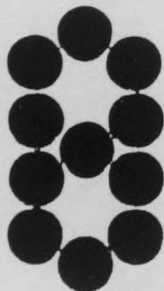
7



5566



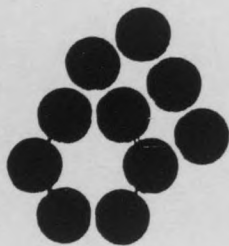
8



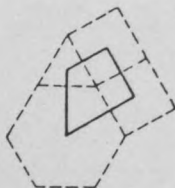
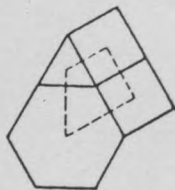
5656



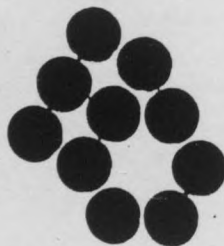
9



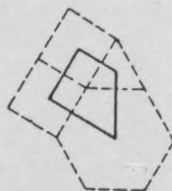
5446



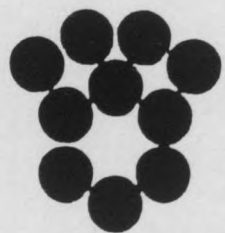
10



5644



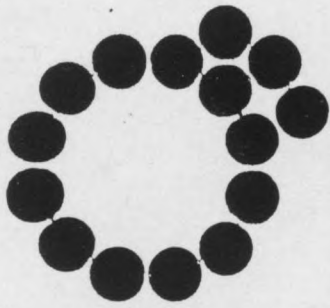
11



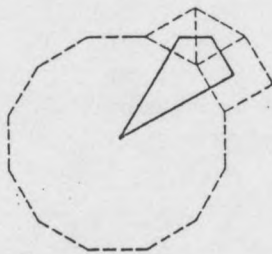
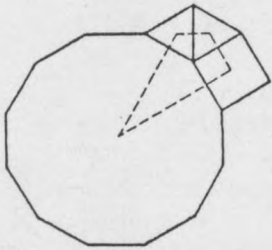
5464



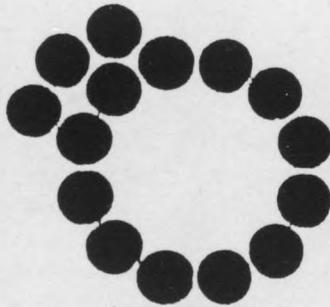
12



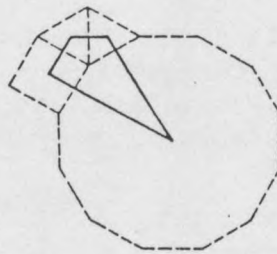
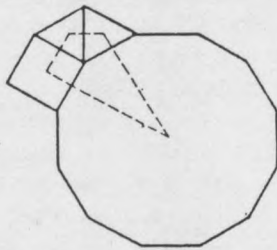
5 5 4 12



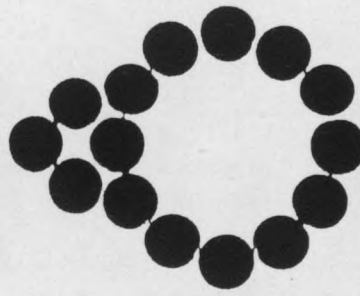
15



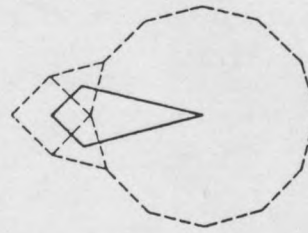
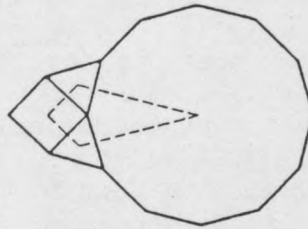
5 5 12 4



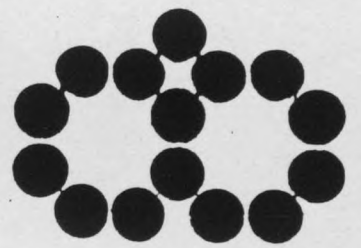
14



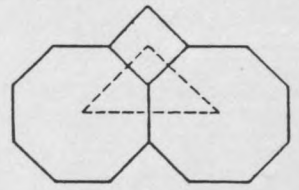
5 4 5 12



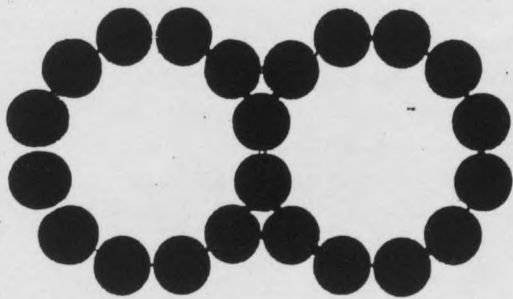
16



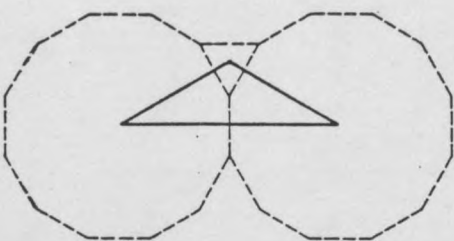
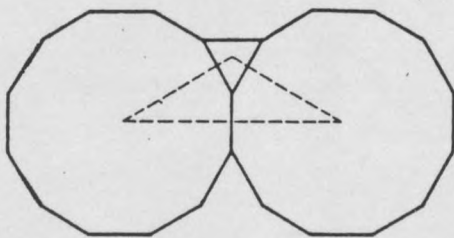
4 8 8



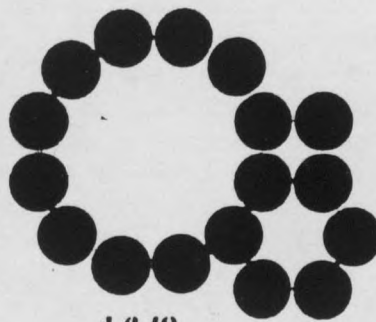
13



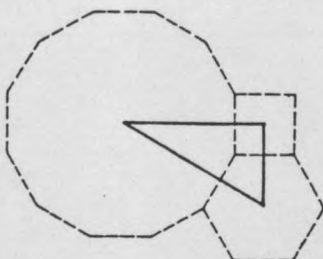
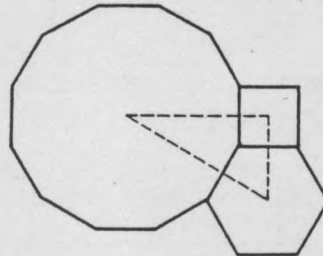
5 12 12



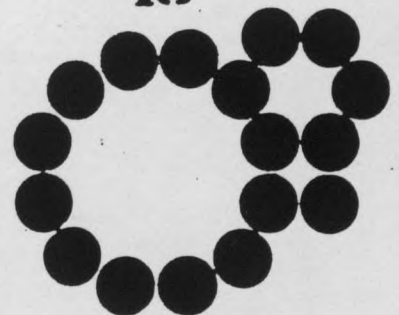
17



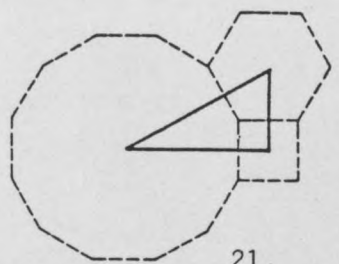
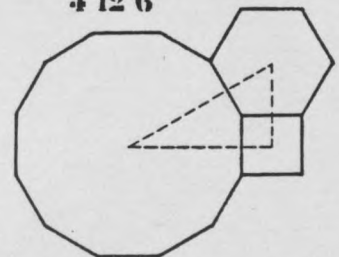
4 6 12



18



4 12 6



Les dix huit assemblages possibles sont visualisés par des cercles tangents identiques, comme un groupement de points équidistants distribués autour d'un sommet central.

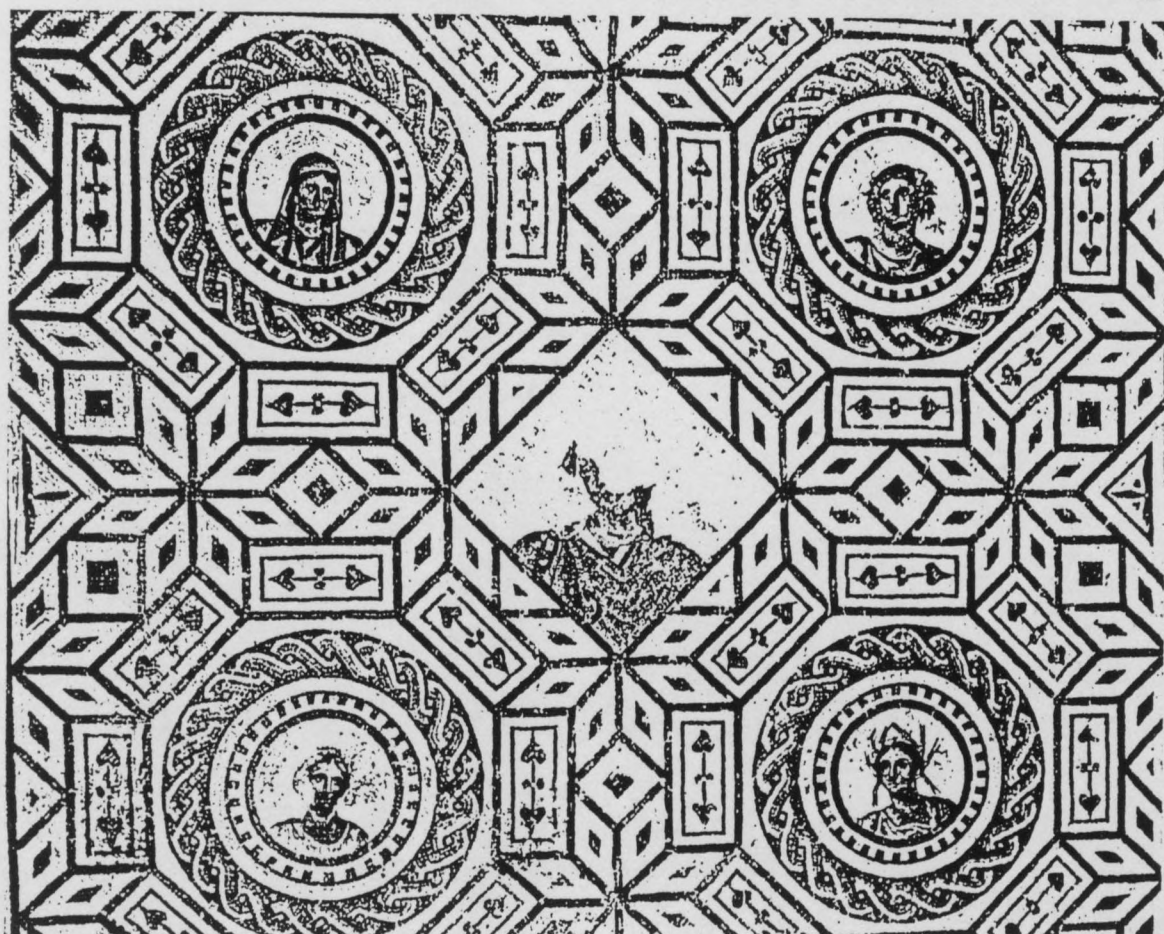
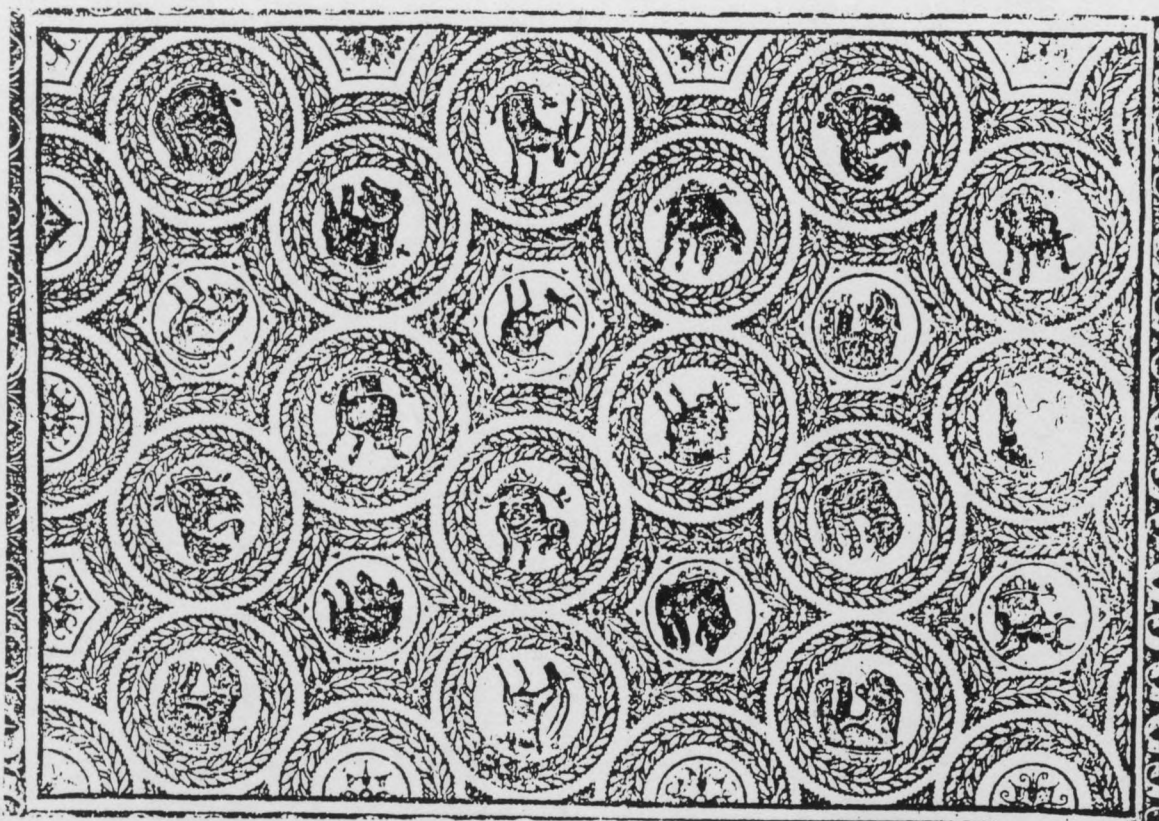
Les planches suivantes montrent le motif caractéristique de chaque assemblage formé de polygones réguliers et le polygone dual obtenu en reliant les centres des polygones précédents. Par le déplacement du motif, par translation ou rotation dans le plan, chaque point périphérique peut devenir à son tour point central et produire ainsi toutes les tessellations isocèles et non isocèles. Les assemblages 1, 2, 3 seuls forment des tessellations isocèles homogènes. Les 4, 5, 6, 8, 11, 15, 16, 17 et 18 en forment des isocèles non homogènes. Les 7, 9, 10, 12, 13 et 14 ne figurent que dans les tessellations non isocèles. A remarquer que l'assemblage 6, bien que lui-même symétrique, produit une tessellation rotatoire gauche ou droite, tandis que les assemblages 9 et 10, 12 et 13, 17 et 18 ayant des structures dissymétriques, forment deux par deux des couples d'assemblages énantiomorphes qui sont présents simultanément dans les tessellations composites.

Assemblages automorphes

Outre ces assemblages polaires, où les polygones se rencontrent uniquement par les sommets, il existe des assemblages semi-polaires où le centre autour duquel se groupent les polygones se trouve accolé à un point intermédiaire situé sur le côté d'un des polygones. L'assemblage semi-polaire est donc composé à moitié par une droite valant 180° , l'autre moitié étant partagée entre deux ou trois autres polygones se rencontrant par leurs sommets. Seuls les polygones réguliers à 3, 4 et 6 côtés entrent dans la composition de ces assemblages. L'angle à partager étant $180 : 15 = 12$ parts, les partitions du nombre 12 à base de la série 4, 6, 8 donnent trois combinaisons possibles, qu'il convient de compléter par le symbole du polygone de 3, 4 ou 6 côtés juxtaposé sur un point intermédiaire. Ces assemblages qui figurent uniquement dans les tessellations automorphes sont décrits dans le tableau n°5.

TABLEAU 5 ASSEMBLAGES AUTOMORPHES

combinaison de 12 par 4, 6, 8	transcription en code Schläfli	assemblages semi-polaires dérivés
4 4 4	3 3 3	3 3 3 $\bar{3}$
6 6	4 4	4 4 $\bar{4}$
4 8	3 6	$\bar{3}$ 3 6 et 3 3 $\bar{6}$



TESSELLATIONS

TESSELLATIONS REGULIERES, SEMI-REGULIERES ET COMPOSITES

Les trois tessellations régulières ou platoniques sont construites homogènement à base des trois assemblages réguliers, donc constituées des polygones réguliers identiques se rencontrant dans des sommets dont la composition reste régulière, identique et symétrique

Les huit tessellations semi-régulières ou archimédiennes sont également composées homogènement partant des huit assemblages semi-réguliers correspondants, donc construites de polygones réguliers de deux ou trois sortes se rencontrant dans des sommets identiques.

Certaines tessellations semi-régulières présentent malgré leur homogénéité des particularités. La trame 6.4.12 est composée en fait de deux noeuds : le 4.6.12 et son énantiomorphe le 4.12.6. La trame 3.3.3.3.6, bien que son noeud soit droit et symétrique, présente globalement une structure rotatoire et de ce fait il existe une tessellation soeur énantiomorphe avec des rotations gauche et droite, ce qui permet de la considérer comme amphicheirale. La tessellation 3.3.3.4.4 est composée par bandes parallèles suivant une direction ou tropisme, ce qui la rend anisotrope.

Tout comme les trois régulières, les quatre autres tessellations semi-régulières s'étendent uniformément dans toutes les directions, donc sans orientation préférentielle, ni rotation, elles sont de ce fait caractérisées comme isotropes. Ces onze trames régulières et semi-régulières forment ensemble la classe des tessellations isocèles.

Les tessellations composites ou non isocèles sont construites de deux ou plusieurs sortes de polygones réguliers, groupés autour de sommets de deux ou plusieurs types d'assemblages parmi les dix huit types existants.

Ces compositions non isocèles dérivent des tessellations isocèles par des transformations exécutées homogènement sur tous les éléments homothétiques de la trame originale. Ces opérations peuvent être les suivantes :

Translation : déplacement d'éléments parallèlement à une ligne droite.

Rotation : déplacement giratoire d'éléments autour d'un centre.

Saturation : implantation d'éléments densifiant la trame.

Elision : élimination d'éléments élaguant la trame.

Implosion : Rétrécissement de la trame par concentration d'éléments.

Explosion : distension de la trame par addition interstitielle d'éléments.

En observant la loi de composition homogène et en limitant à deux unités toute opération intercalaire provoquant une distension, on trouve un nombre fini de tessellations non isocèles dont vingt et une bicèles, vingt six tricèles, quinze tétracèles et une pentacèle, au total soixante trois trames composites.

Les codes Schläfli qui définissent ces trames sont souvent polymorphes. Parfois onze structures différentes peuvent répondre à la même dénomination étant composées des mêmes types d'assemblages, mais où l'ordonnement des assemblages entre eux est différent. En fait, ceux-ci forment à leur tour un assemblage hiérarchiquement supérieur ou groupe de translation dont le motif peut être rendu plus évident par la chromatisation des trames.

Dans le tableau récapitulatif n°6, la première colonne indique les trois classes de régularités; la deuxième le numéro d'ordre de la tessellation établi par ordre croissant de l'occurrence des polygones dans le code Schläfli; les cinq colonnes suivantes indiquent les 1, 2, 3, 4 ou 5 assemblages constituants exprimés par leurs codes Schläfli. La huitième colonne indique le numéro de la trame dont la tessellation non isocèle est dérivée; les neuvième et dixième colonnes, les nombres chromatiques respectifs de la tessellation primitive et de sa duale. Enfin, les trois dernières colonnes se rapportent à la qualité des structures - isotrope, anisotrope ou rotatoire - qui sont, en principe, des propriétés incompatibles entre elles.

TABLEAU 6 TESSELLATIONS REGULIERES, SEMI-REGULIERES ET COMPOSITES

N°	CODES SCHLÄFLI DES NOEUDS					Dérivée de	Nb.chromatique		iso-trope	aniso-trope	rota-toire
	n1	n2	n3	n4	n5		Primal.	Duale			
régulières	1r	3 3 3 3 3 3					2	3	.		
	2r	4 4 4 4					2	2	.		
	3r	6 6 6					3	2	.		
semi-régulières	1s	3 3 3 4 4					3	3	.	.	
	2s	3 3 4 3 4					3	3	.	.	.
	3s	3 3 3 3 6					3	3	.	.	.
	4s	3 4 6 4					2	3	.	.	.
	5s	3 6 3 6					2	3	.	.	.
	6s	4 8 8					2	3	.	.	.
	7s	4 6 12°					3	2	.	.	.
	8s	3 12 12					4	3	.	.	.
composites	1c	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4						.	.	
	2c	3 3 3 3 3 3	3 3 4 3 4				17 et 18	3	3	.	.
	3c	3 3 3 3 3 3	3 3 4 3 4				4s et 35	3	3	.	.
	4c	3 3 3 3 3 3	3 3 4 3 4				9	3	3	.	.
	5c	3 3 3 3 3 3	3 3 4 3 4				10	3	3	.	.
	6c	3 3 3 3 3 3	3 3 4 12°				11	3	3	.	.
	7c	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4				7s	2	3	.	.
	8c	3 3 3 4 4	3 4 6 4					3	3	.	.
	9	3 3 4 3 4	3 4 6 4				8s	3	3	.	.
	10	3 3 4 3 4	3 4 6 4				8s	3	3	.	.
	11	3 3 4 3 4	3 4 6 4				21	3	3	.	.
	12	3 3 3 3 6	3 6 3 6				62	3	3	.	.
	13	3 3 6 6	3 6 3 6					3	3	.	.
	14	3 4 4 6°	3 4 6 4					2	3	.	.
	15	3 4 4 6°	3 4 6 4				7s	2	3	.	.
	16	3 4 4 6°	3 4 6 4				19	2	3	.	.
	17	3 4 4 6°	3 6 3 6				20	2	3	.	.
	18	3 4 4 6°	3 6 3 6					2	3	.	.
	19	3 4 6 4	4 6 12°					3	3	.	.
	20	3 4 6 4	4 6 12°					3	3	.	.
	21	3 4 3 12	3 12 12					3	3	.	.
	22	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4						.	.
	23	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			34 et 33	3	3	.	.
	24	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			8c	3	3	.	.
	25	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			38	3	3	.	.
	26	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			52	3	3	.	.
	27	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			56	3	3	.	.
	28	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			39	3	3	.	.
	29	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			40	3	3	.	.
	30	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			41	3	3	.	.
	31	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			54 et 63	3	3	.	.
	32	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			42	3	3	.	.
	33	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4			43	3	3	.	.
	34	3 3 3 3 3 3	3 3 4 3 4	3 4 6 4			6c et 14	3	3	.	.
	35	3 3 3 3 3 3	3 3 4 3 4	3 4 6 4			14	3	3	.	.
	36	3 3 3 3 3 3	3 3 4 3 4	3 3 4 12°			6c	3	3	.	.
	37	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	4 4 4 4			20	3	3	.	.
	38	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 6 4				3	3	.	.
	39	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 6 4			21	3	3	.	.
	40	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 6 4			44	3	3	.	.
	41	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 6 4			44	3	3	.	.
	42	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 6 4			45	3	3	.	.
	43	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 6 4			47	3	3	.	.
	44	3 3 3 4 4	3 3 4 12°	3 12 12			47	3	3	.	.
	45	3 3 4 3 4	3 3 4 12°	3 4 3 12				3	3	.	.
	46	4 4 4 4	3 4 4 6°	3 4 6 4				3	3	.	.
	47	3 3 4 12°	3 4 3 12	3 12 12				3	3	.	.
	48	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	4 4 4 4		60	3	3	.	.
	49	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	4 4 4 4		58	3	3	.	.
	50	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	4 4 4 4		46	3	3	.	.
	51	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	4 4 4 4			3	3	.	.
	52	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 6 4		15	3	3	.	.
	53	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 6 4		36	3	3	.	.
	54	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 6 4		60	3	3	.	.
	55	3 3 3 3 3 3	3 3 4 3 4	3 4 4 6°	3 4 6 4		15	3	3	.	.
	56	3 3 3 3 3 3	3 3 4 3 4	3 4 4 6°	3 4 6 4		59	3	3	.	.
	57	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	4 4 4 4	3 4 6 4		60	3	3	.	.
	58	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	4 4 4 4	3 4 6 4		60	3	3	.	.
	59	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 4 6°	3 4 6 4		62	3	3	.	.
	60	3 3 3 4 4	4 4 4 4	3 3 4 12°	3 4 3 12			3	3	.	.
	61	3 3 3 3 6	3 3 6 6	3 6 3 6	6 6 6			3	3	.	.
	62	3 4 6 4	3 3 4 12°	3 4 3 12	4 6 12°		30	3	3	.	.
	63	3 3 3 3 3 3	3 3 3 4 4	3 3 4 3 4	3 4 4 6°	3 4 6 4	59	3	3	.	.

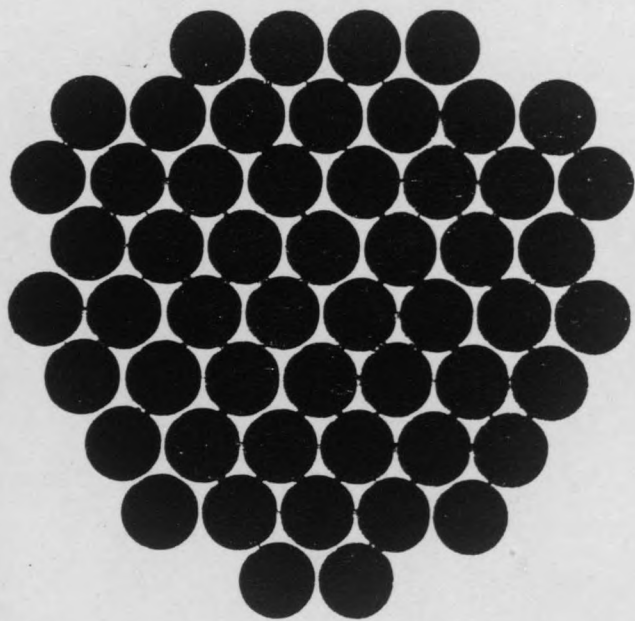
Le noeud marqué du signe "°" existant aussi dans sa version énantiomorphe ou symétrique

TABLEAU 5. TISSUS NERVEUX, SEMI-REGULIERES ET COMPLEXES

N°	Données de base					Date	Lieu
	1	2	3	4	5		
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							
13							
14							
15							
16							
17							
18							
19							
20							
21							
22							
23							
24							
25							
26							
27							
28							
29							
30							
31							
32							
33							
34							
35							
36							
37							
38							
39							
40							
41							
42							
43							
44							
45							
46							
47							
48							
49							
50							
51							
52							
53							
54							
55							
56							
57							
58							
59							
60							
61							
62							
63							
64							
65							
66							
67							
68							
69							
70							
71							
72							
73							
74							
75							
76							
77							
78							
79							
80							
81							
82							
83							
84							
85							
86							
87							
88							
89							
90							
91							
92							
93							
94							
95							
96							
97							
98							
99							
100							

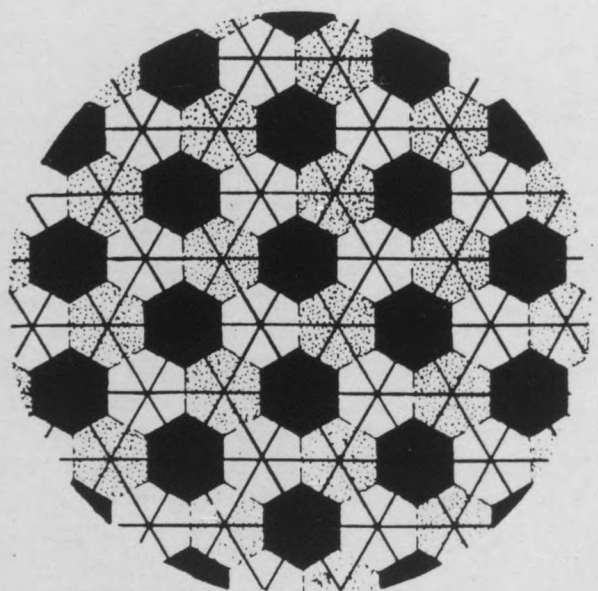
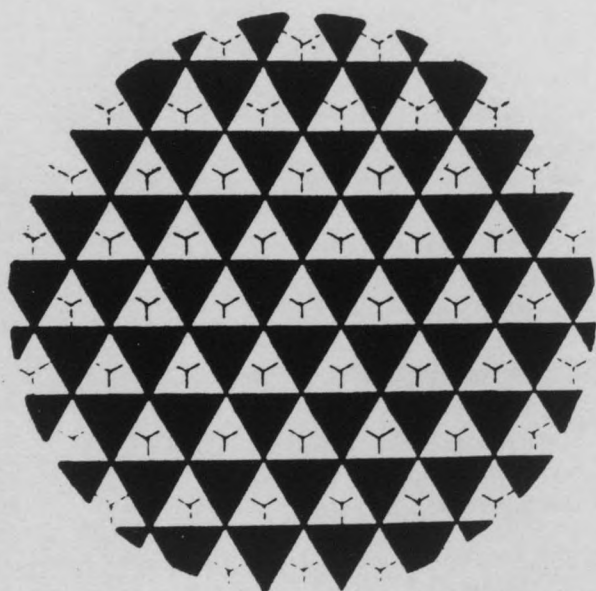
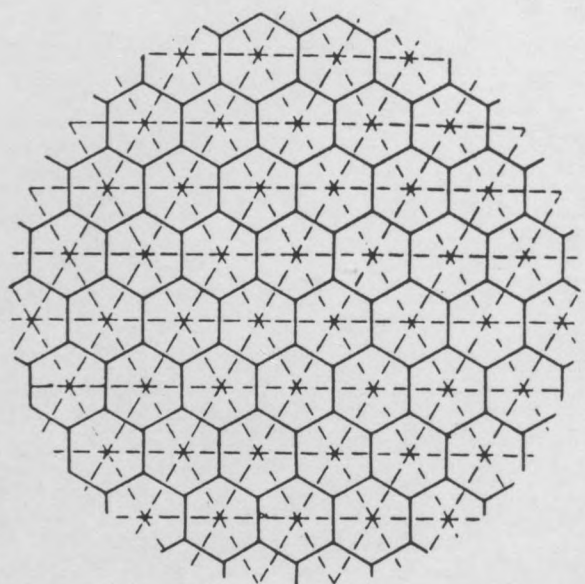
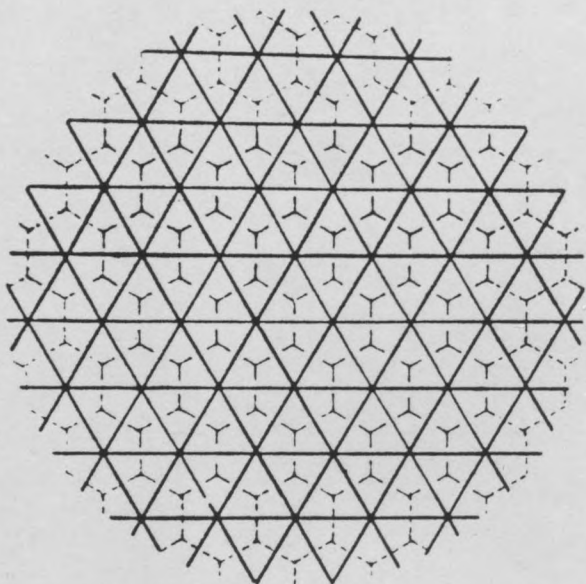
TESSELLATIONS REGULIERES

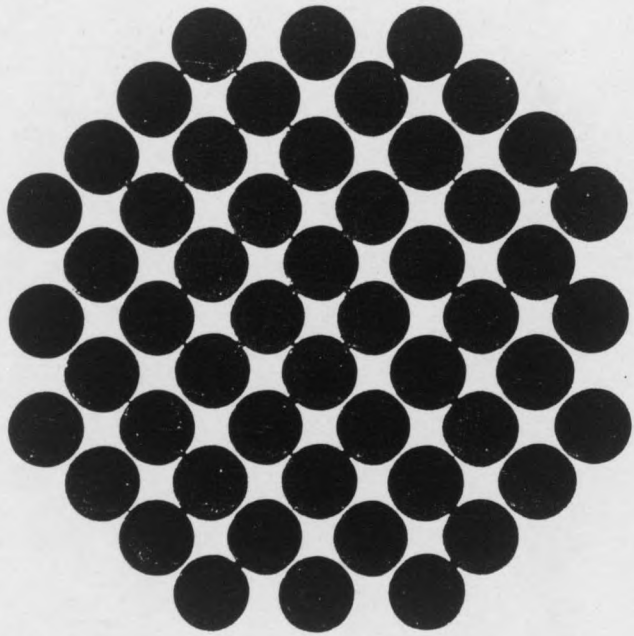
Sur les planches suivantes, chacune des soixante quatorze tessellations est représentée par quatre figures de découpe circulaire. La première montre la tessellation primitive composée de polygones réguliers; le réseau dual obtenu par des lignes diamétrales reliant le centre des polygones est indiqué par des traits discontinus. La deuxième figure montre le réseau dual, la trame initiale étant indiquée par des traits discontinus. Les troisième et quatrième figures montrent les deux trames chromatisées en utilisant le nombre minimal de couleurs, ce nombre, dit chromatique, étant une caractéristique topologique pour chaque trame dont aucune ne demande plus de quatre couleurs. Ainsi, il n'existe que des tessellations bi- tri- ou quadrichromes.



1R

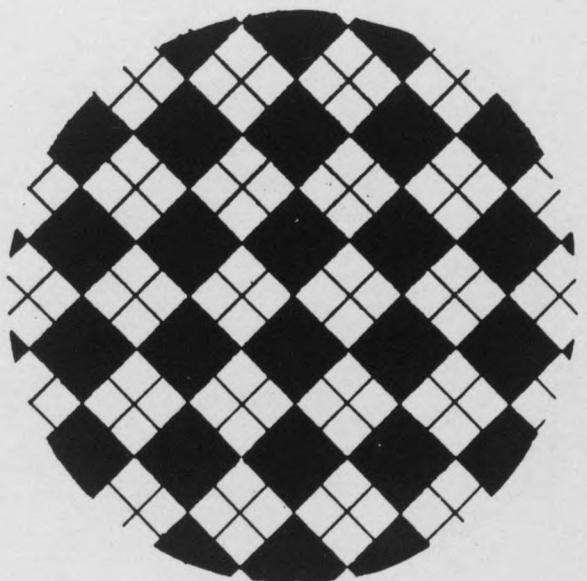
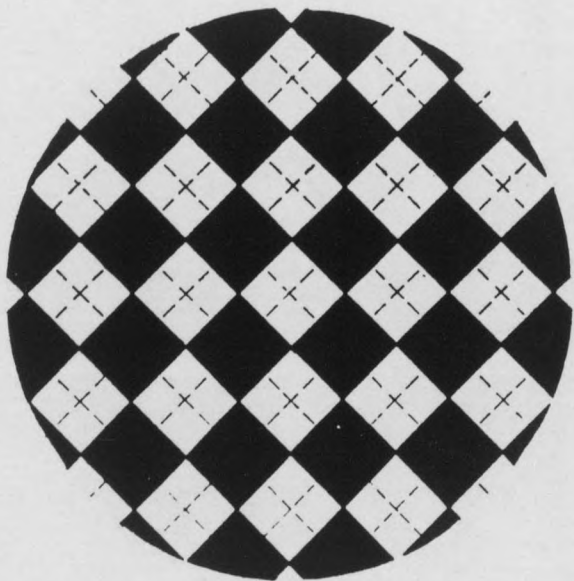
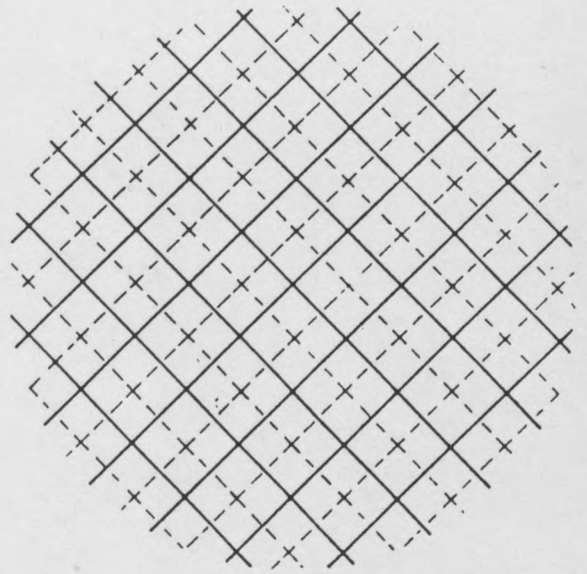
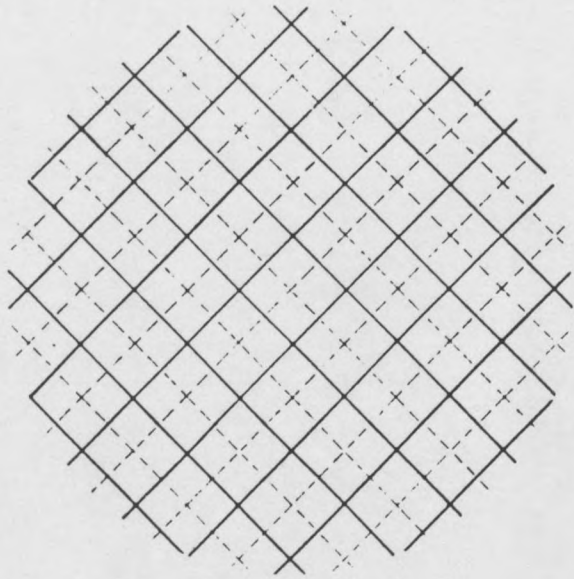
333333

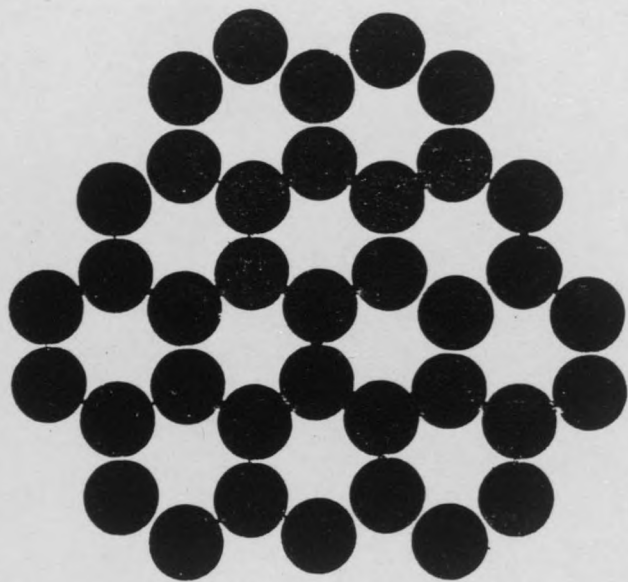




2_R

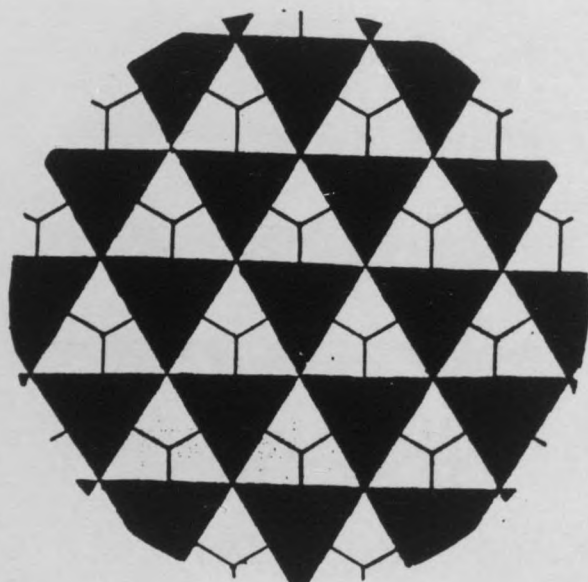
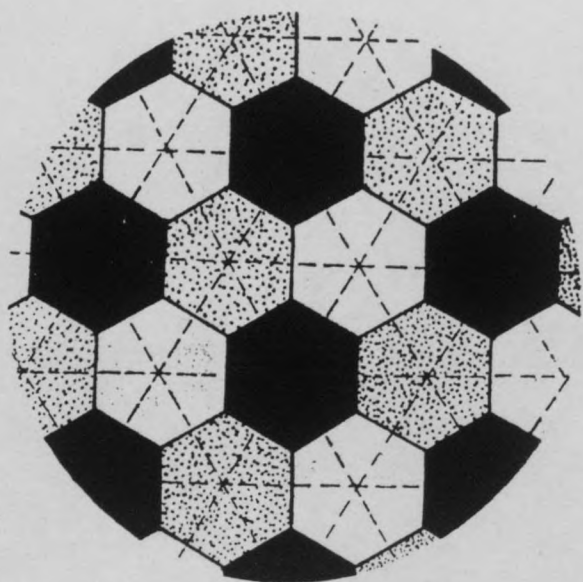
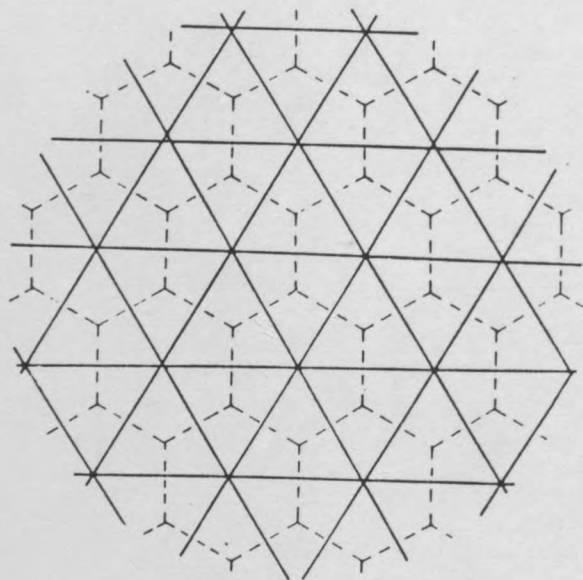
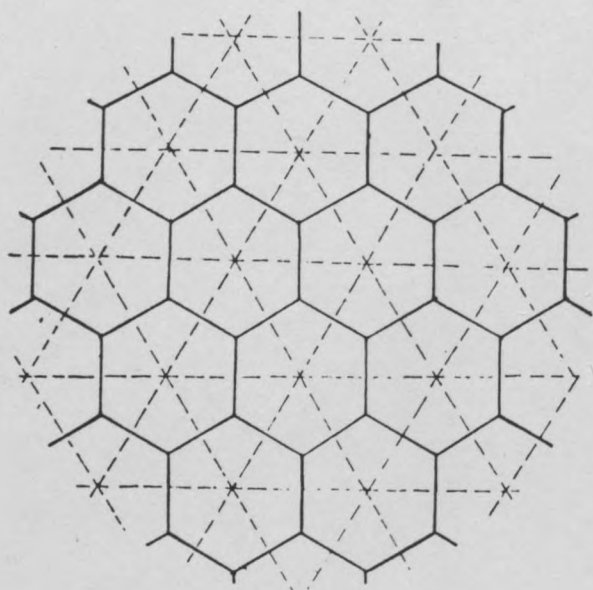
4444



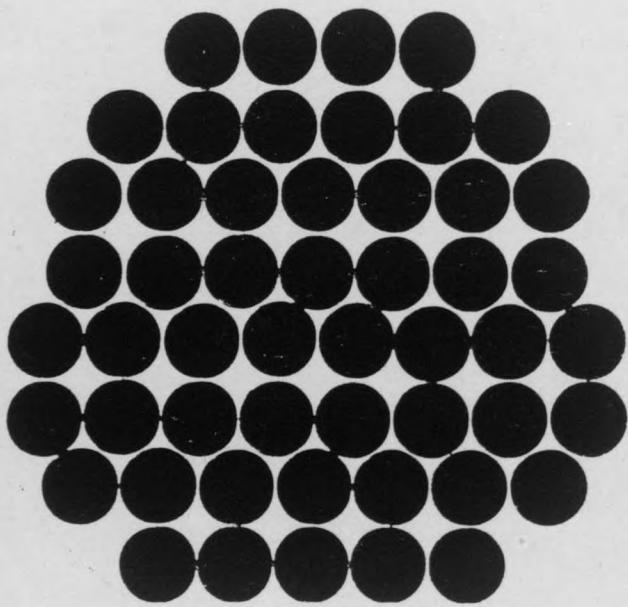


$\bar{3}R$

666

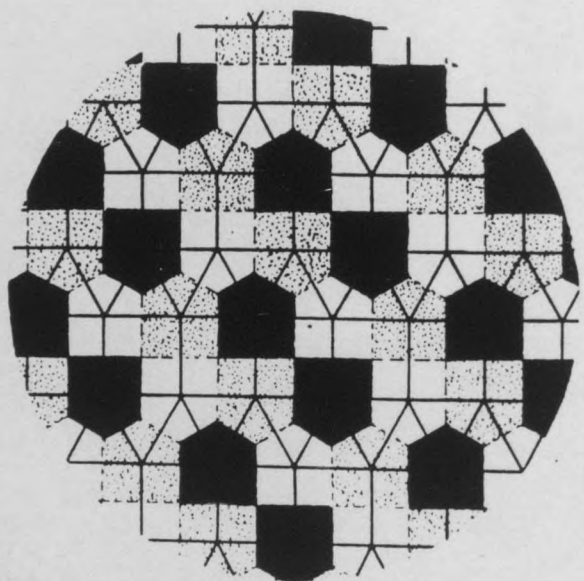
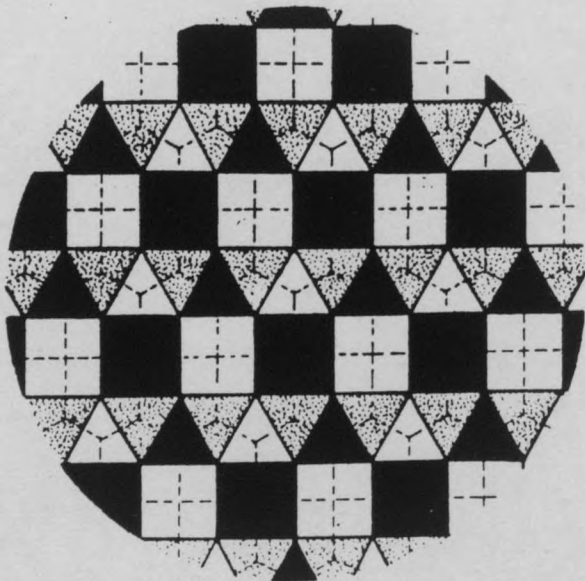
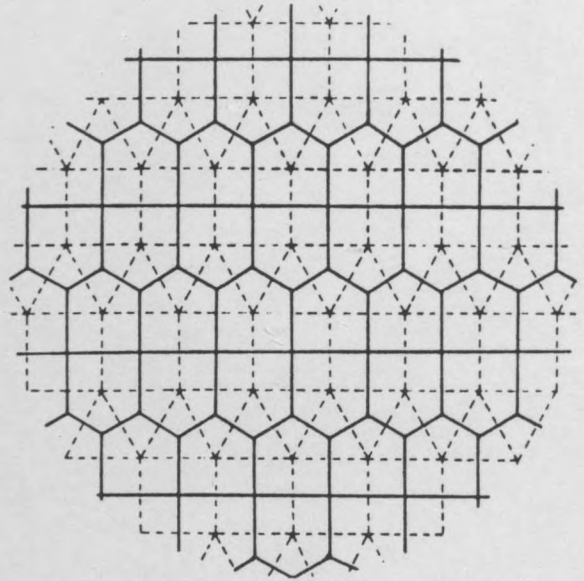
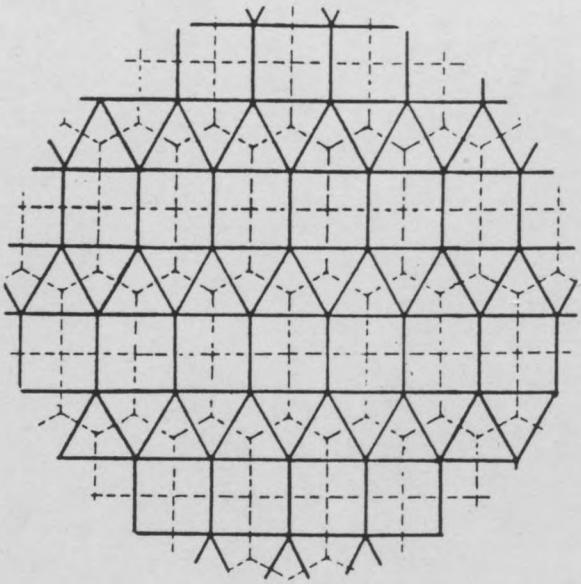


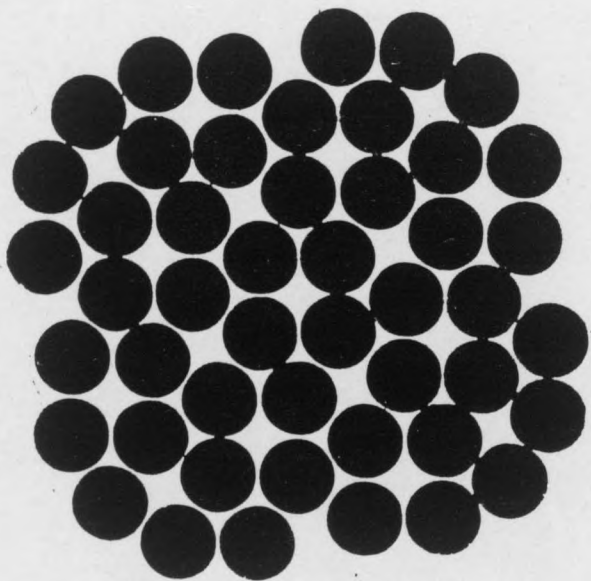
TESSELLATIONS SEMI-REGULIERES



1s

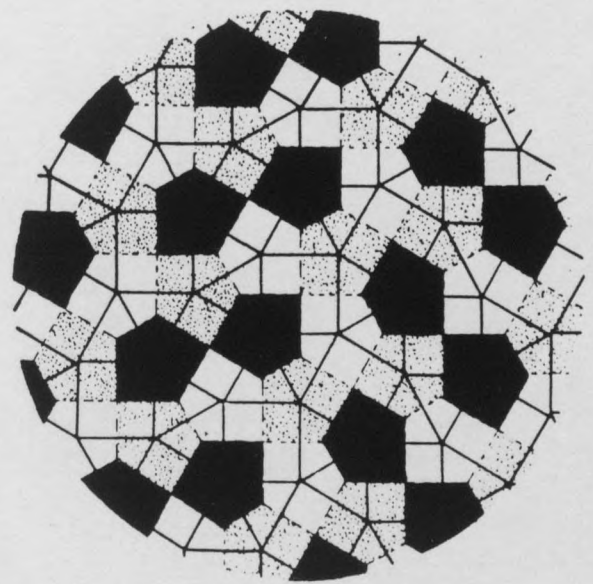
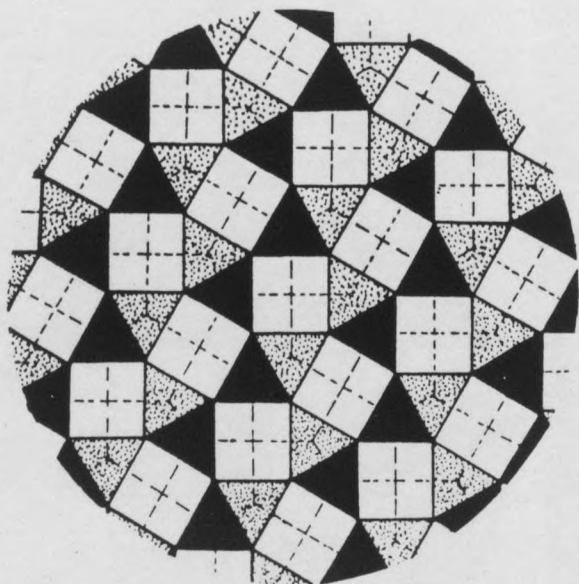
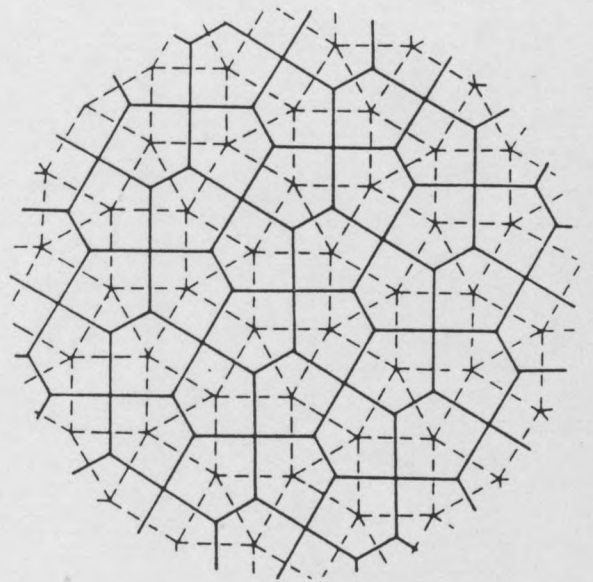
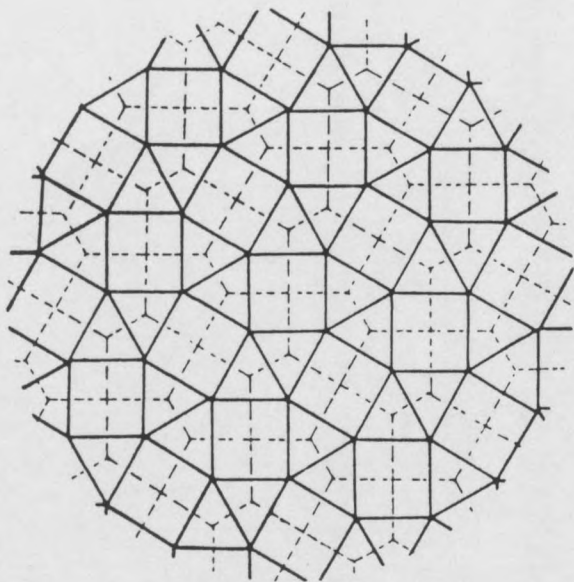
33344

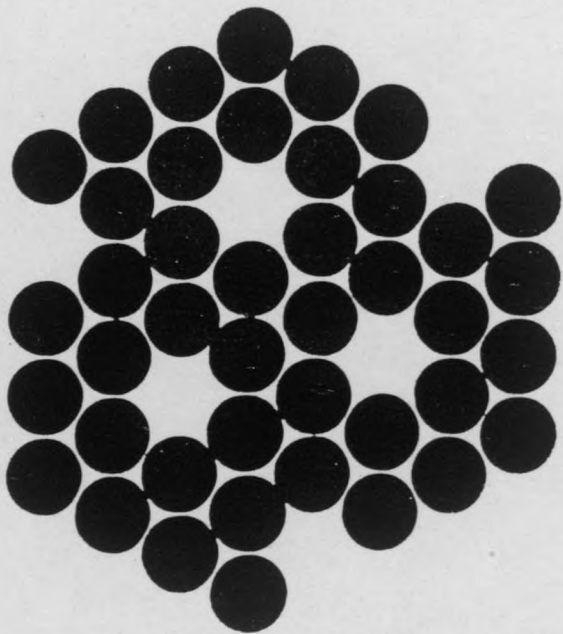




2s

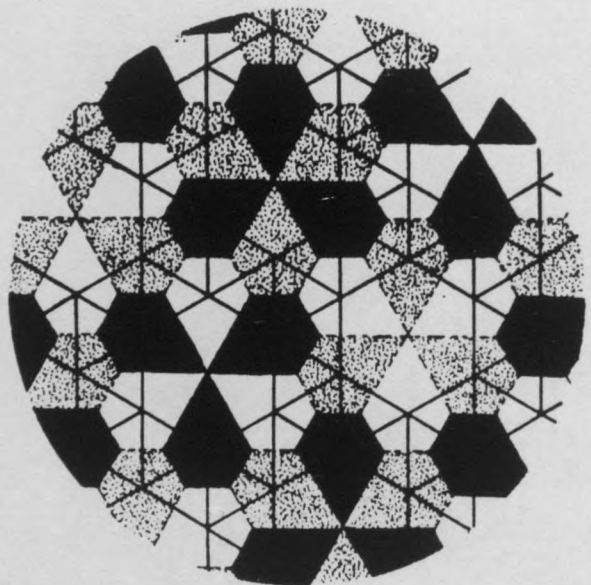
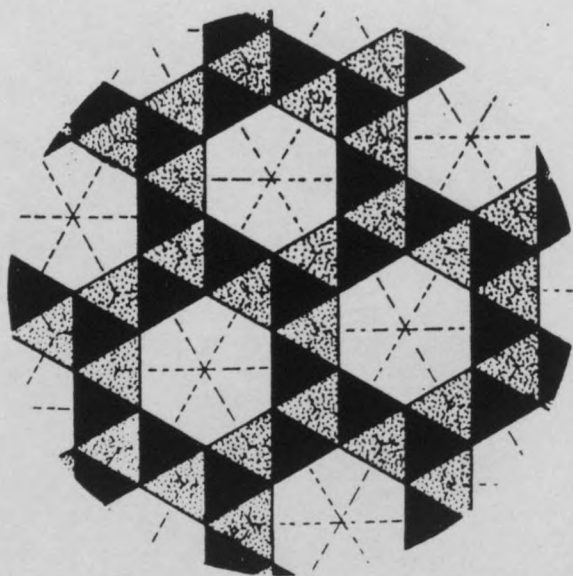
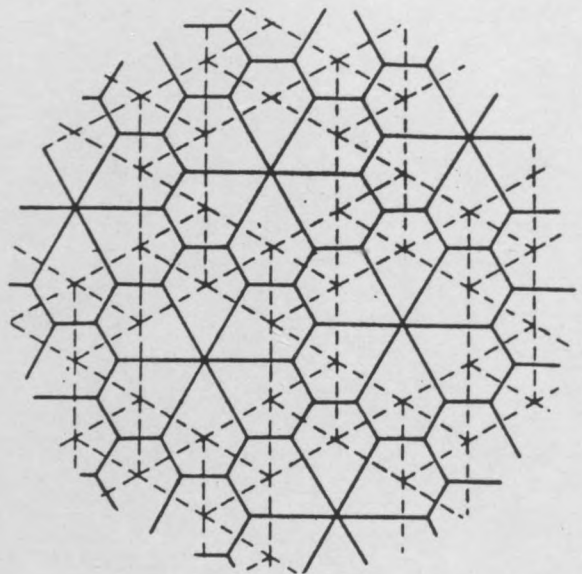
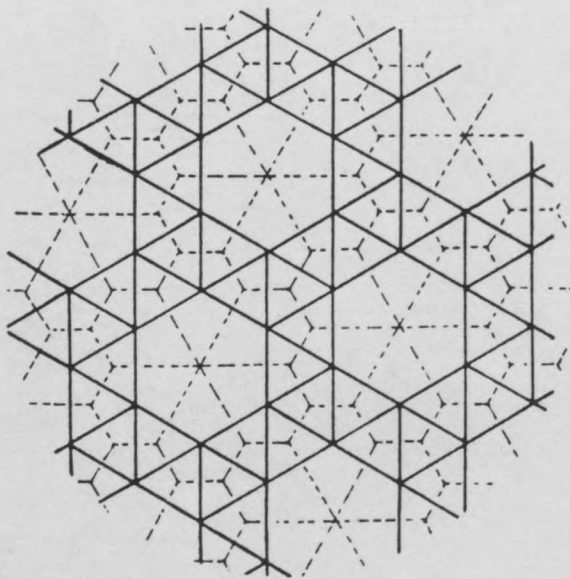
33434

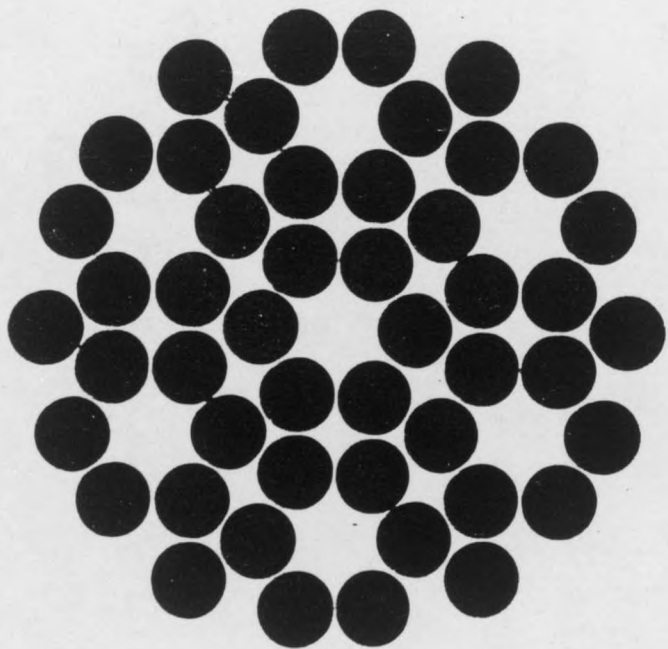




3s

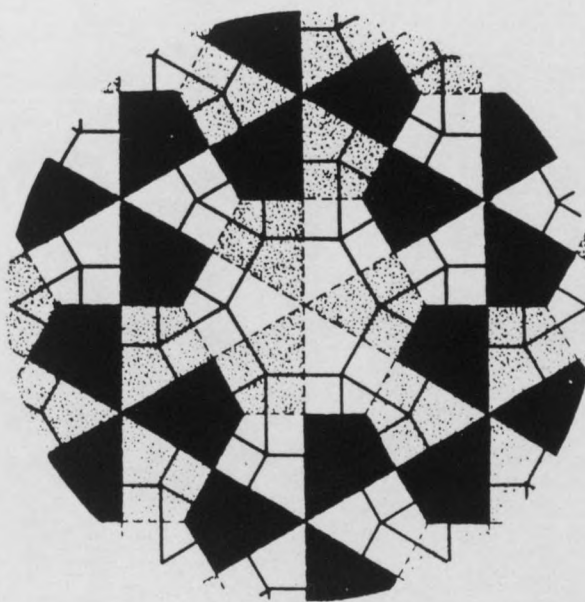
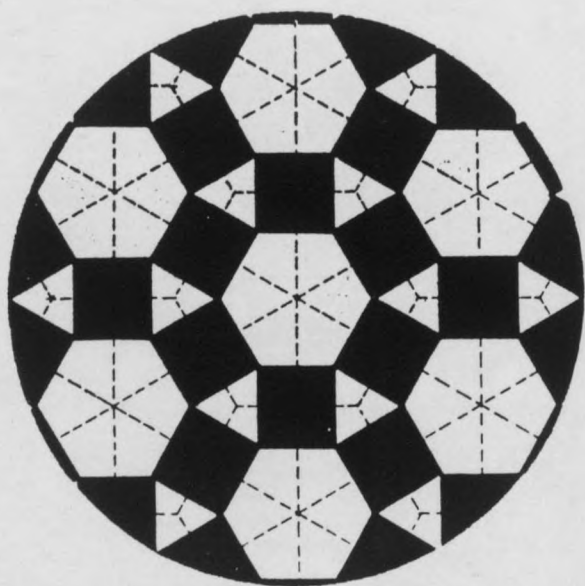
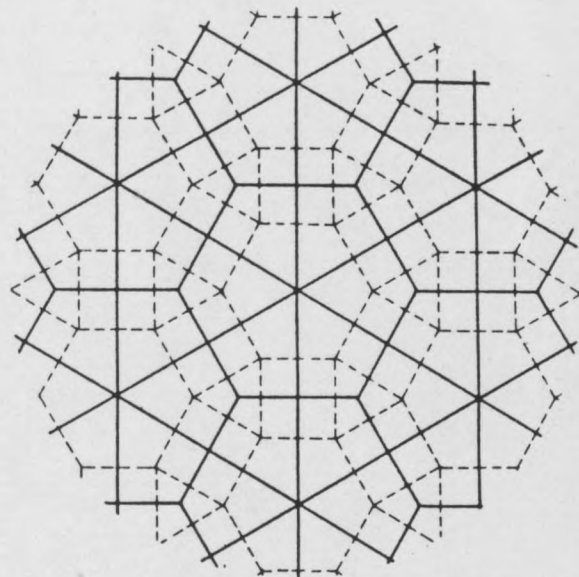
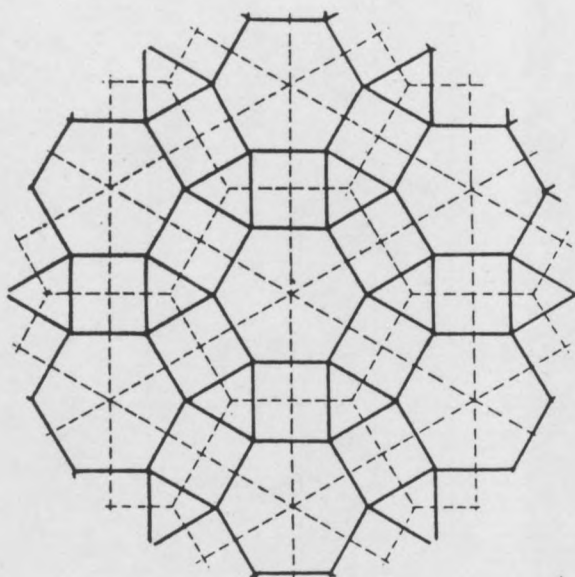
3 3 3 3 6

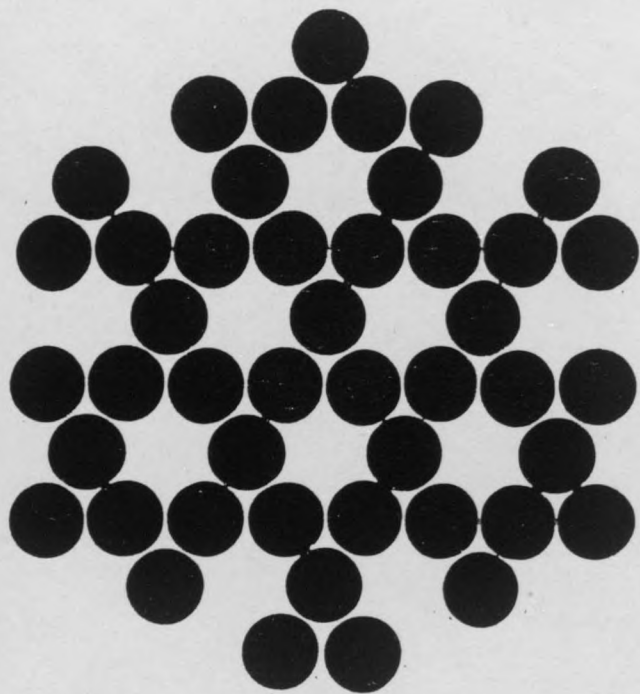




4s

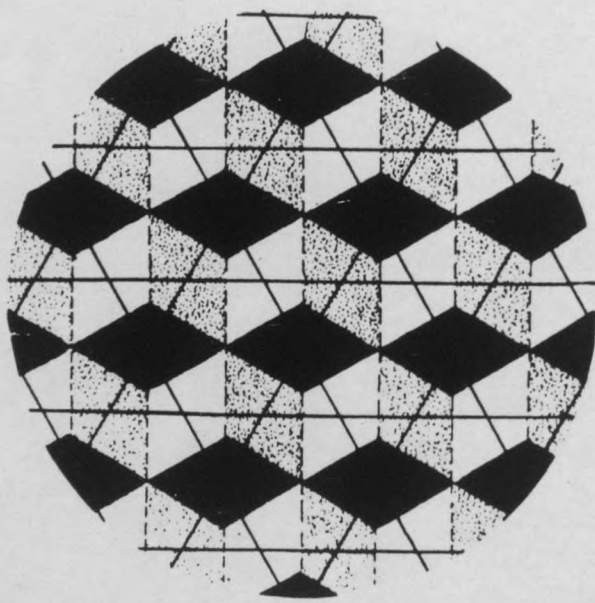
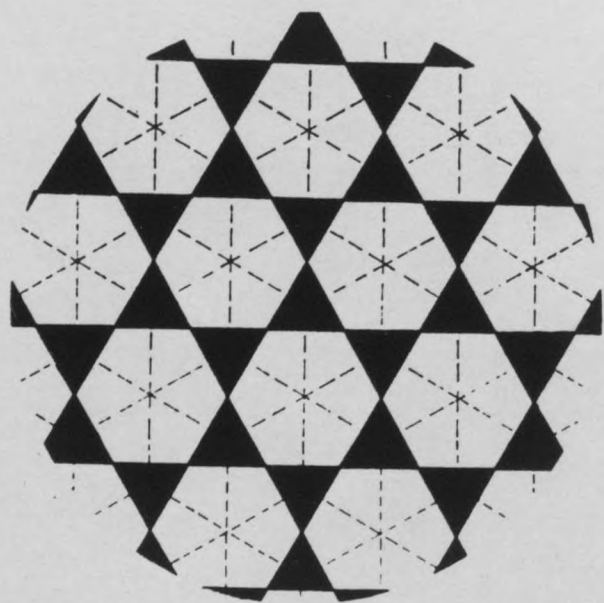
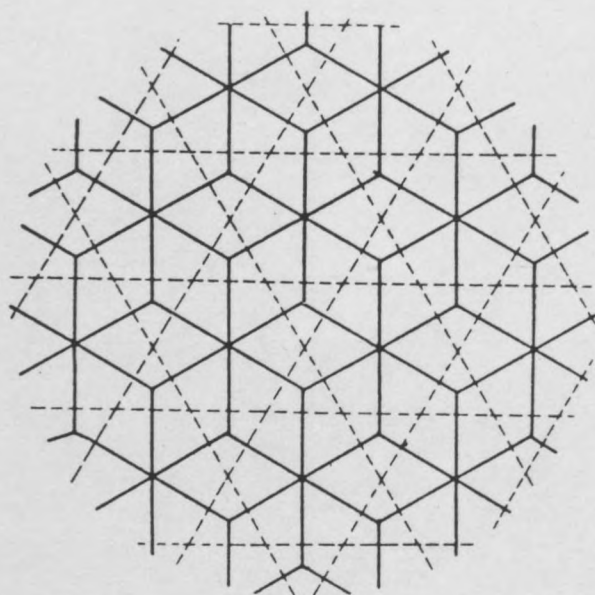
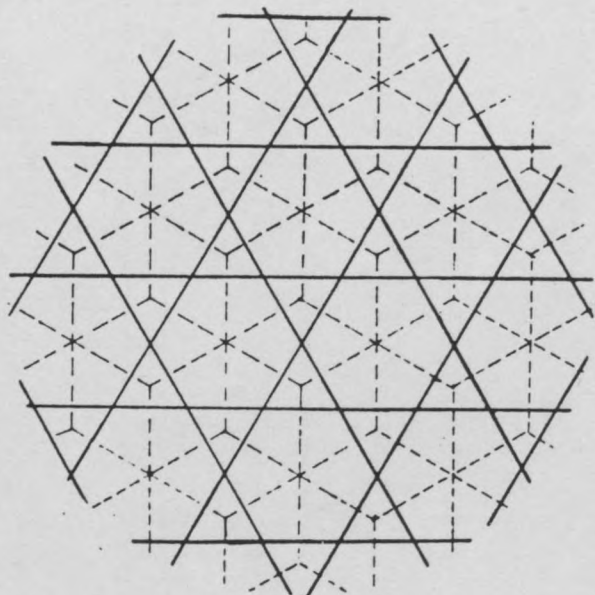
3464

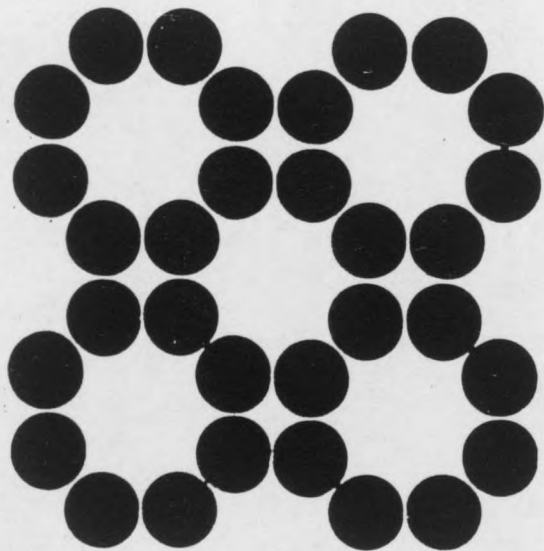




3s

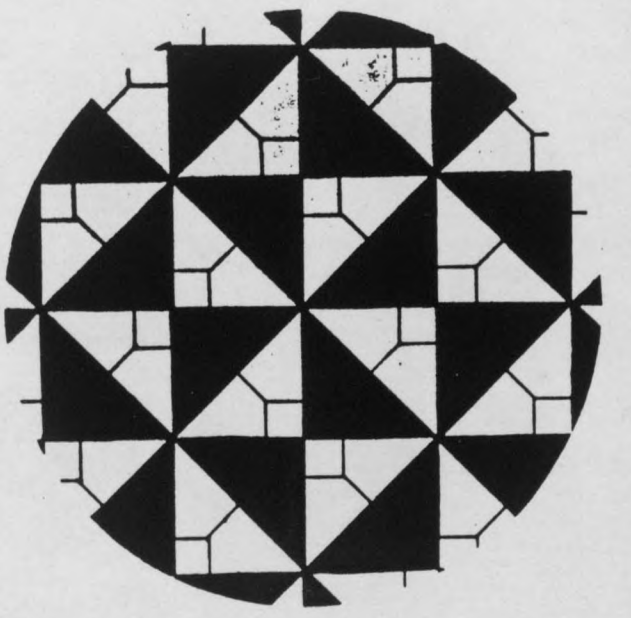
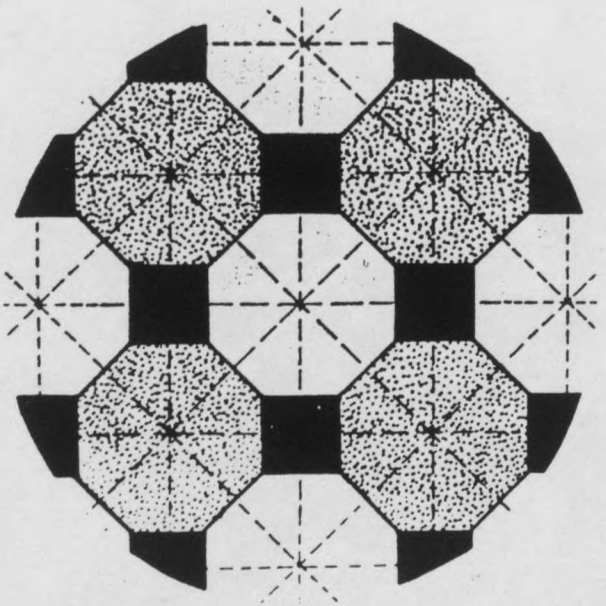
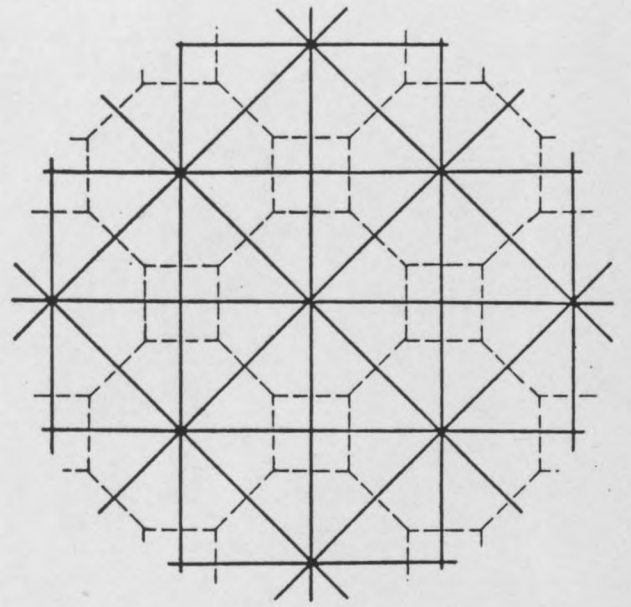
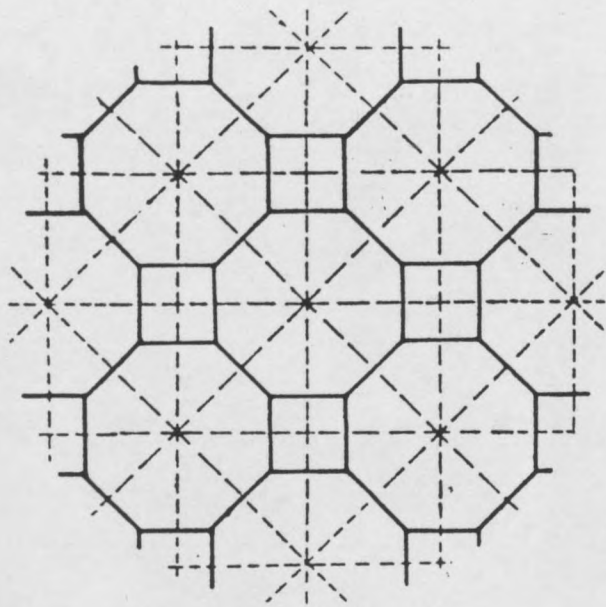
3636

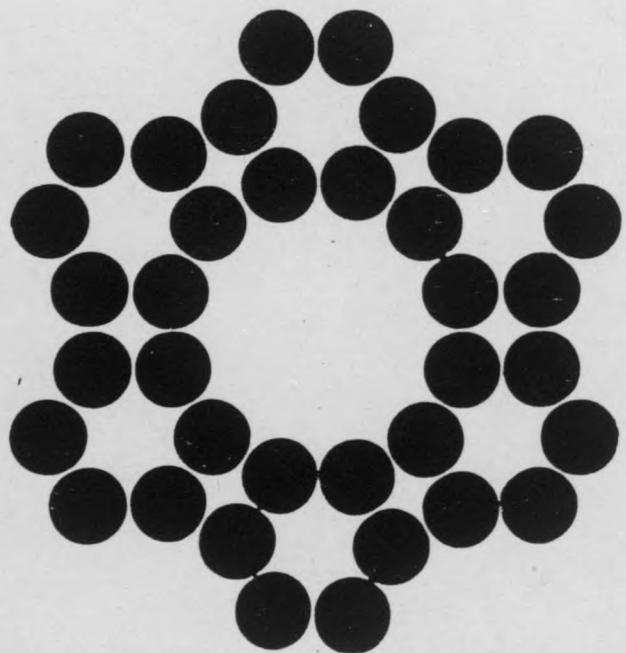




6s

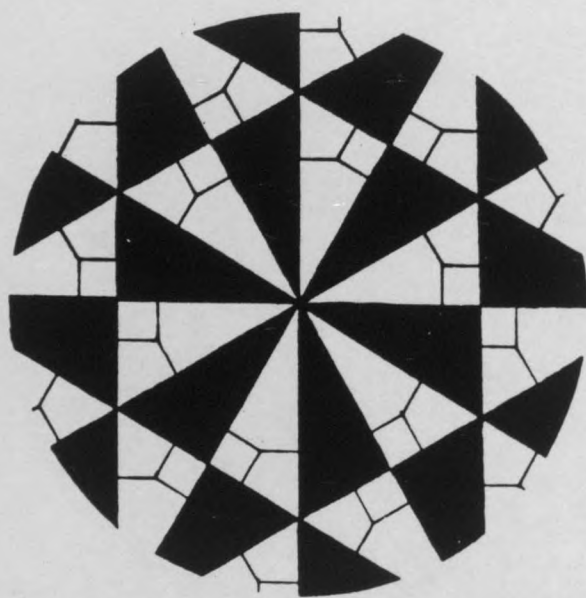
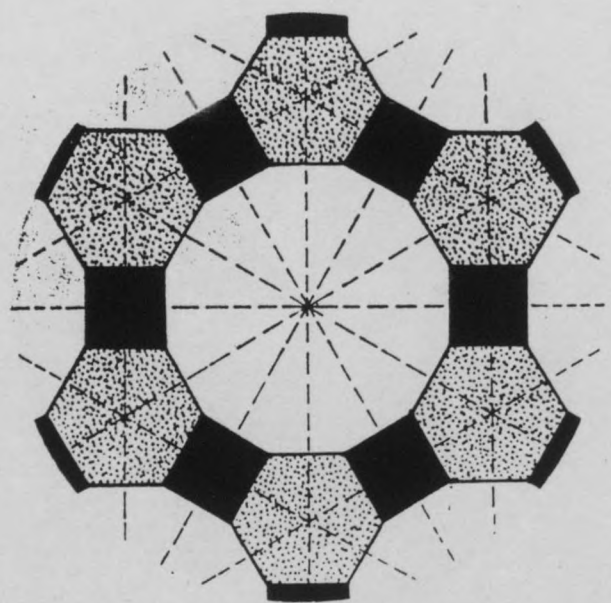
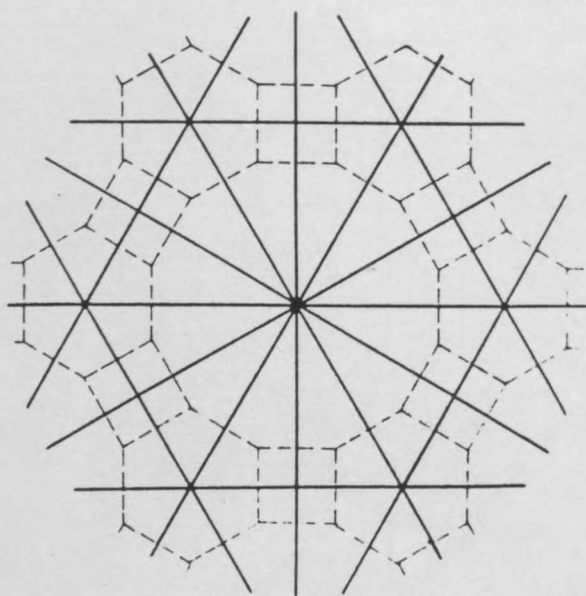
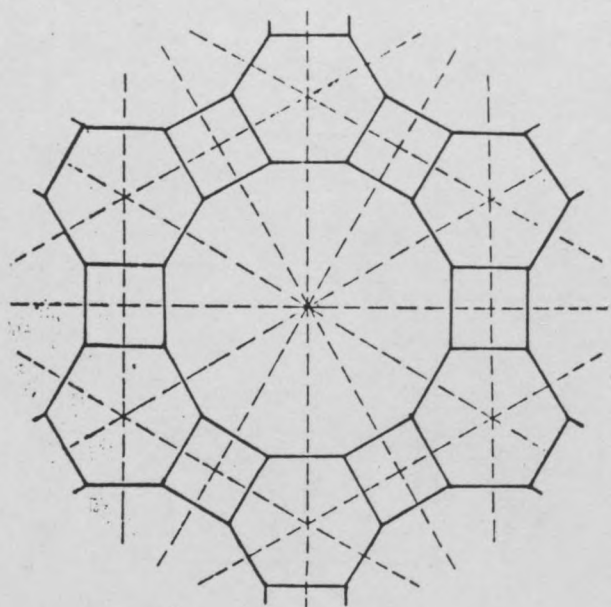
488

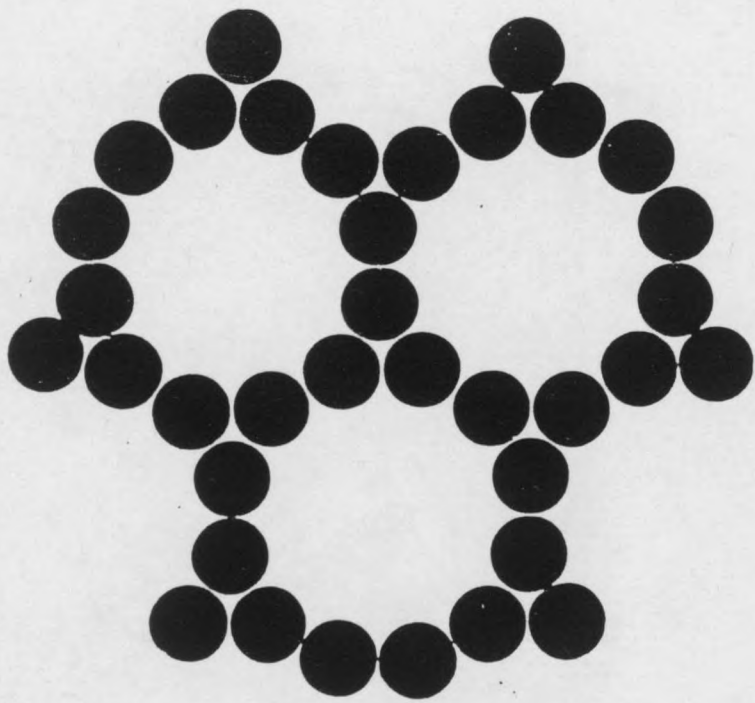




$\bar{4}2s$

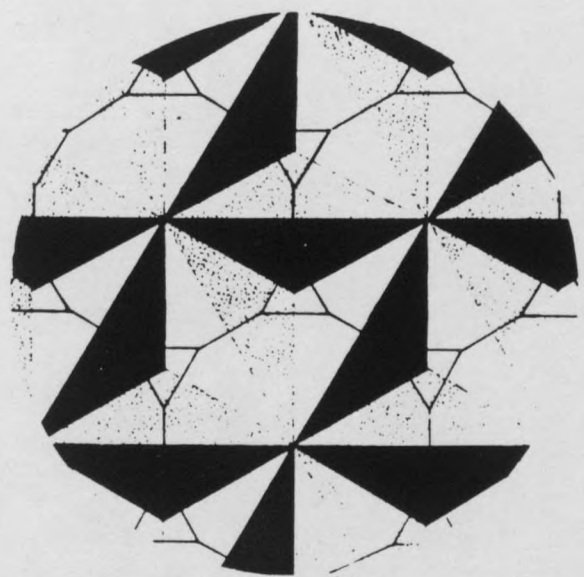
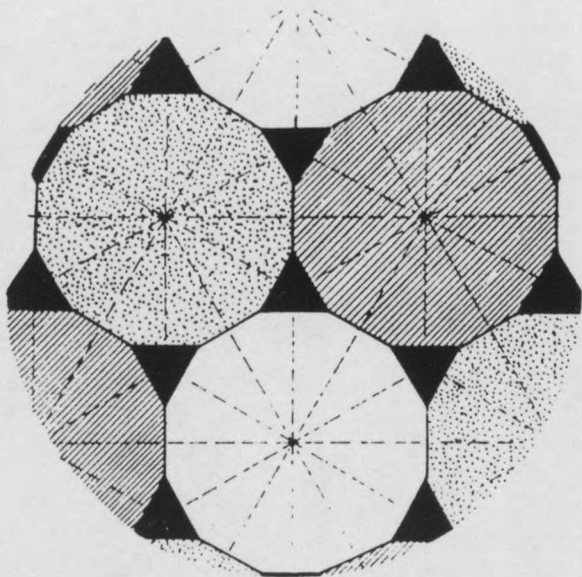
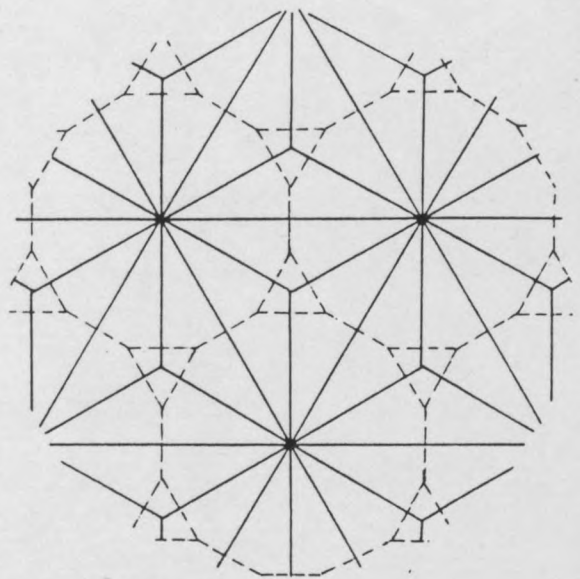
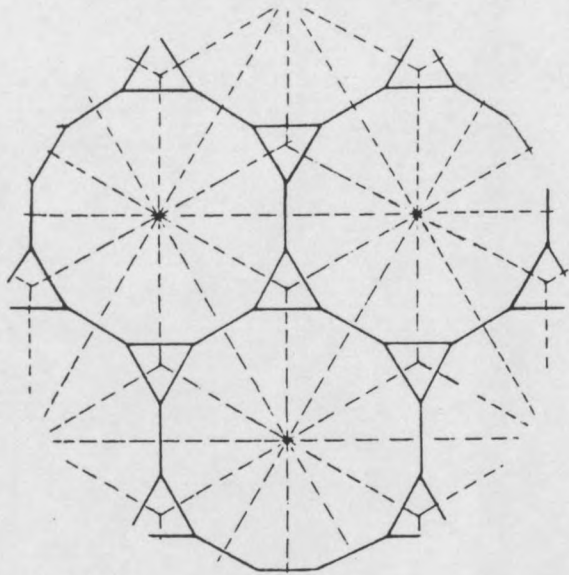
4612°





S_6

3 12 12



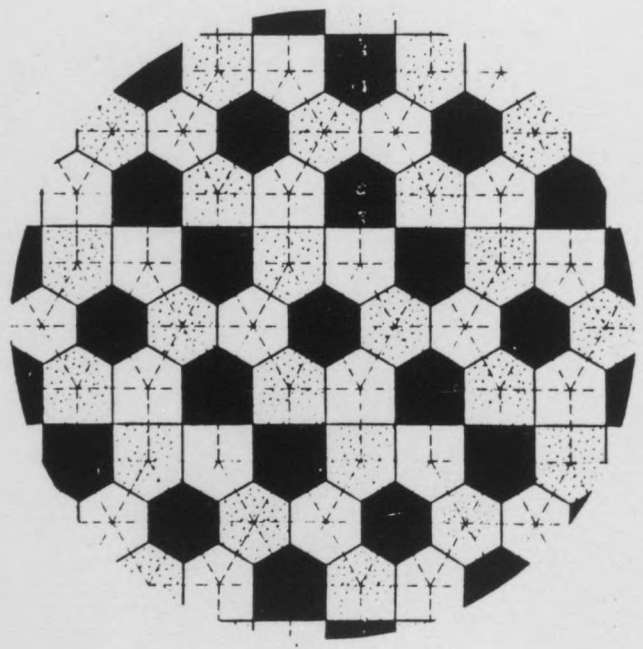
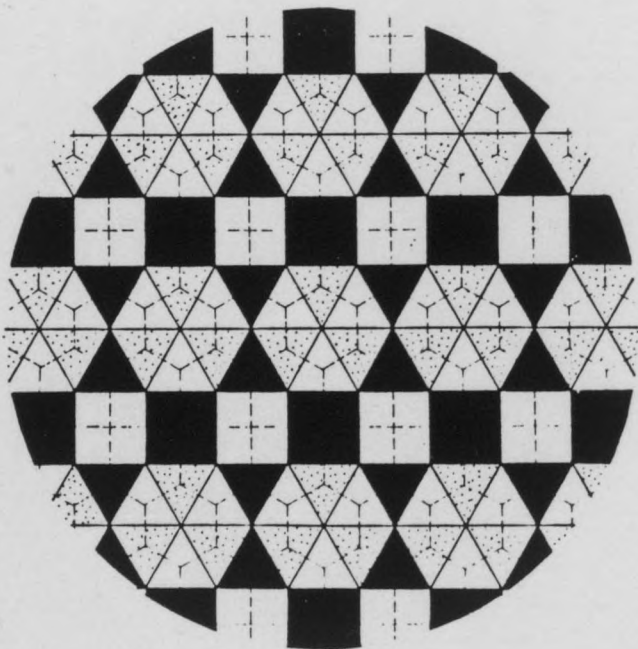
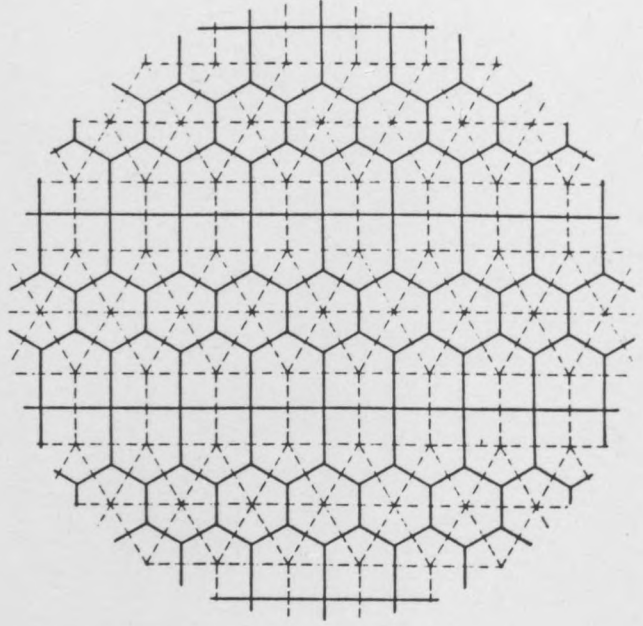
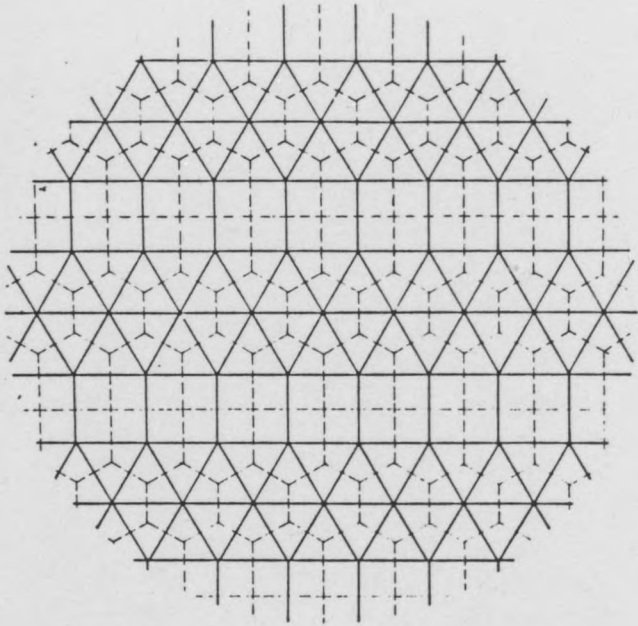
TESSELLATIONS COMPOSITES



FIGURE 1
FIGURE 2

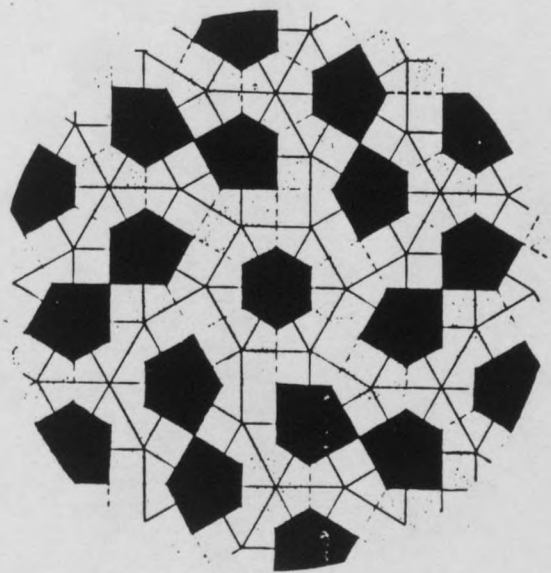
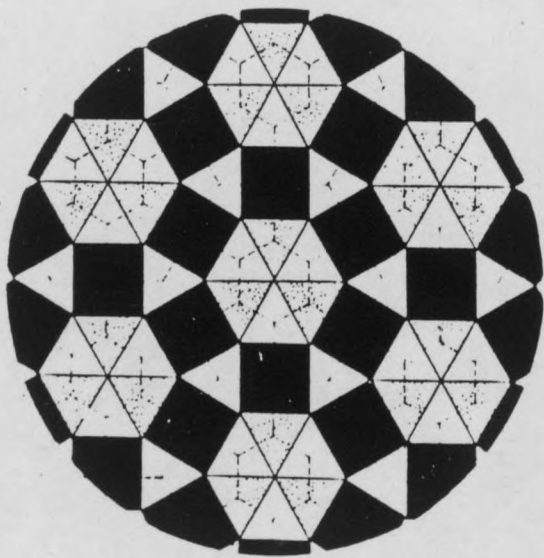
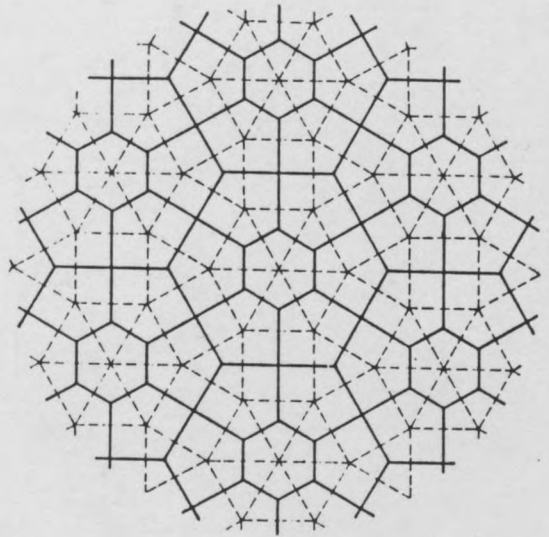
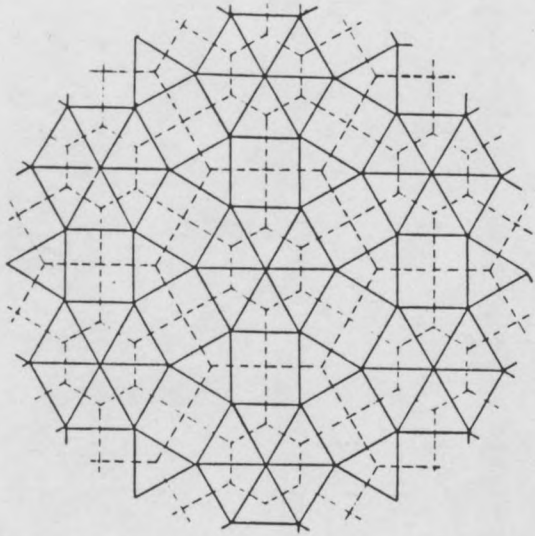
1c

TESSELLATIONS COMPOSITES



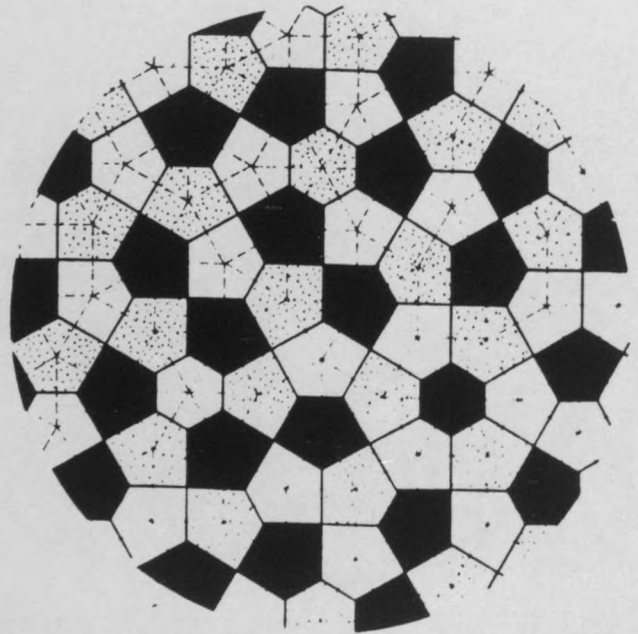
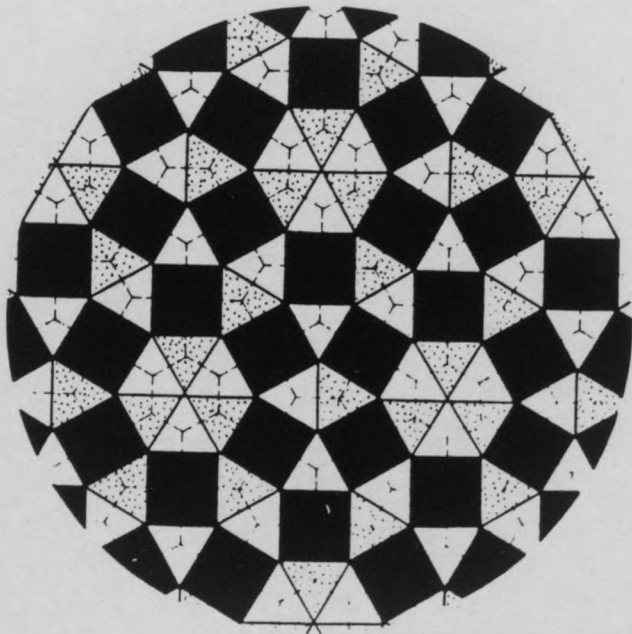
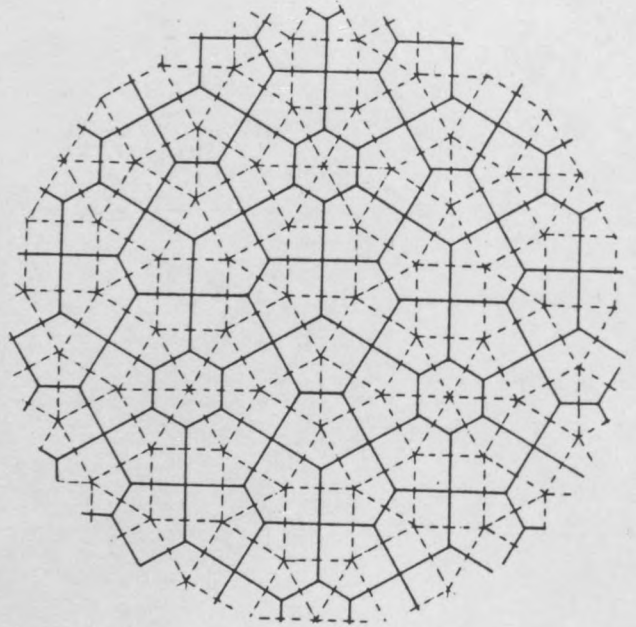
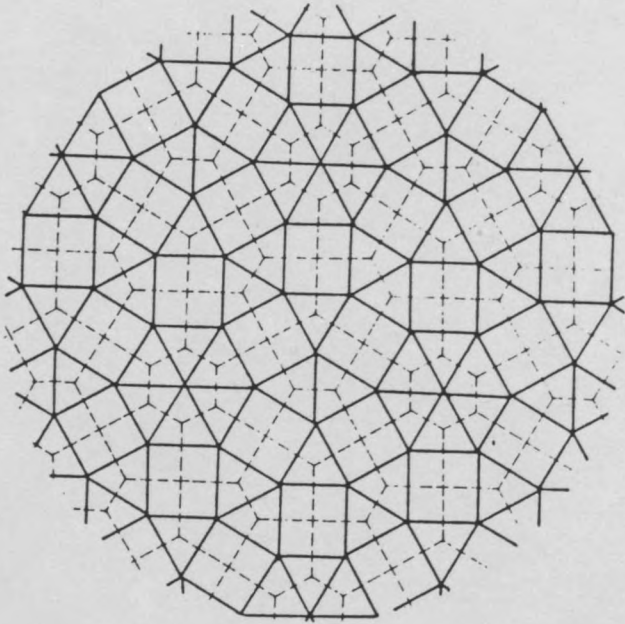
3 3 3 3 3 3
3 3 3 4 4

19c



3 3 3 3 3 3
3 3 4 3 4

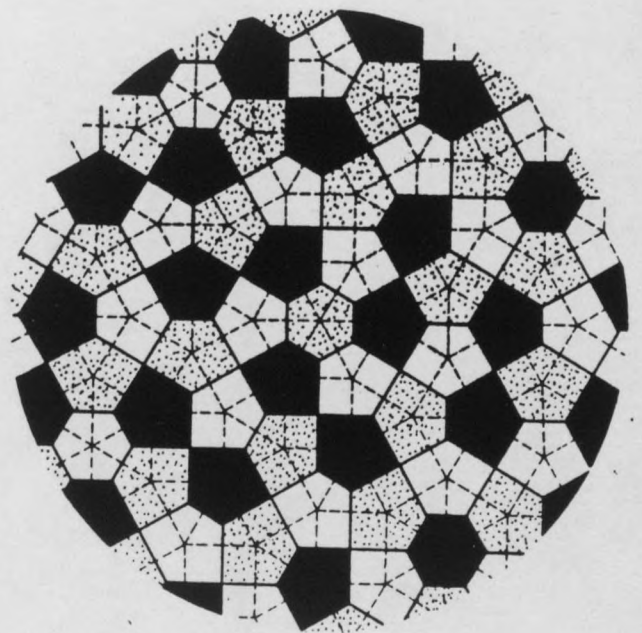
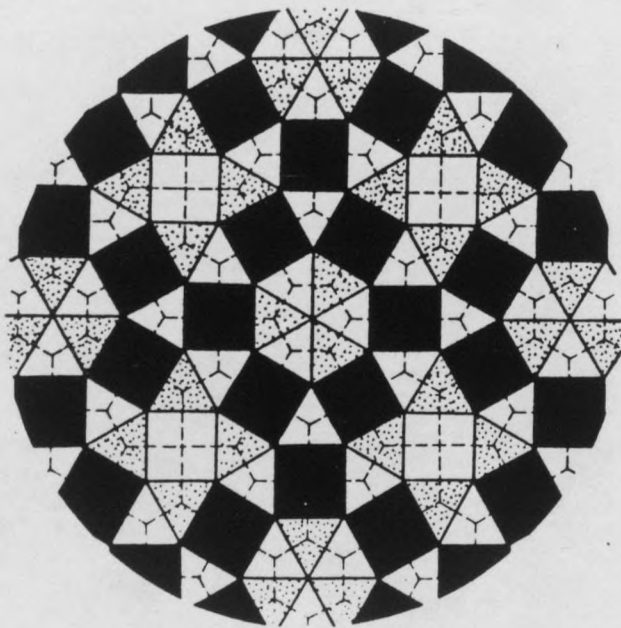
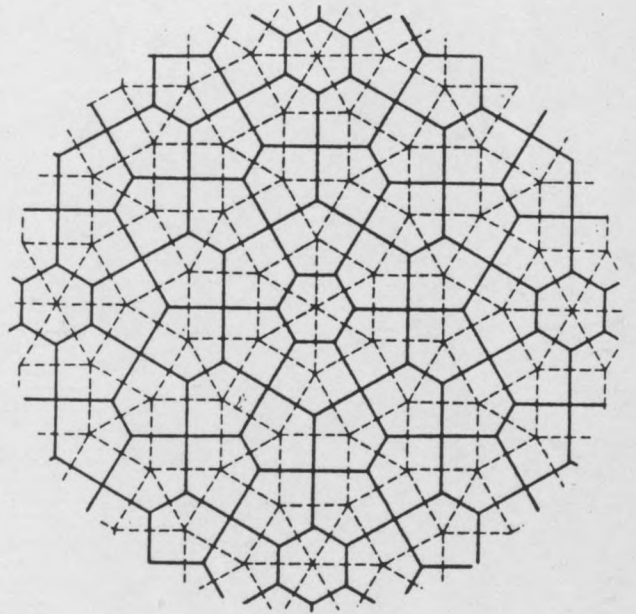
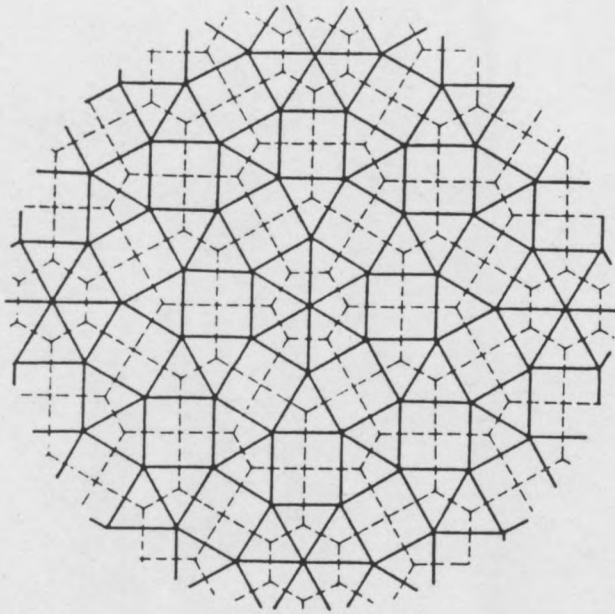
5c



333333

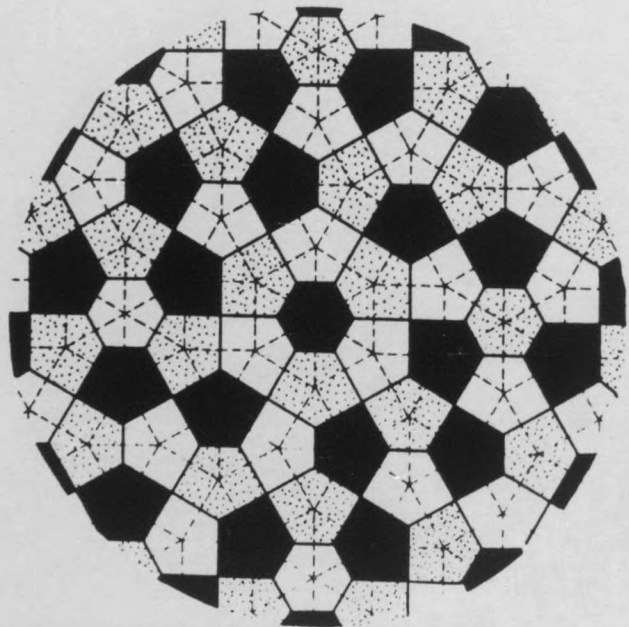
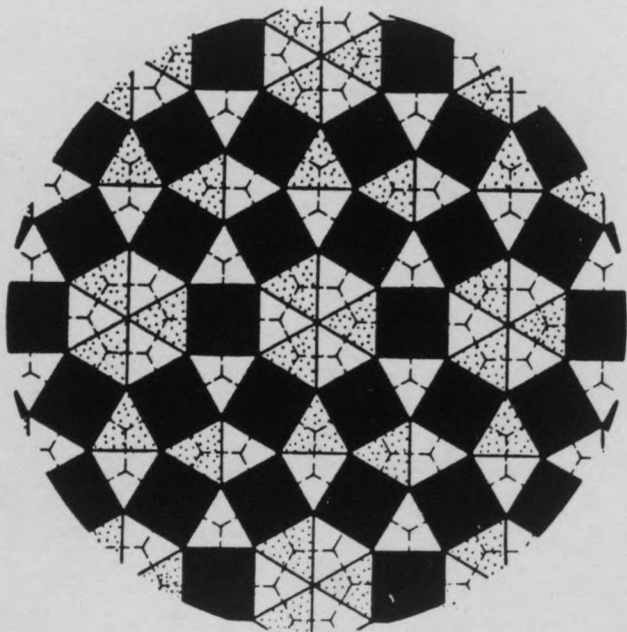
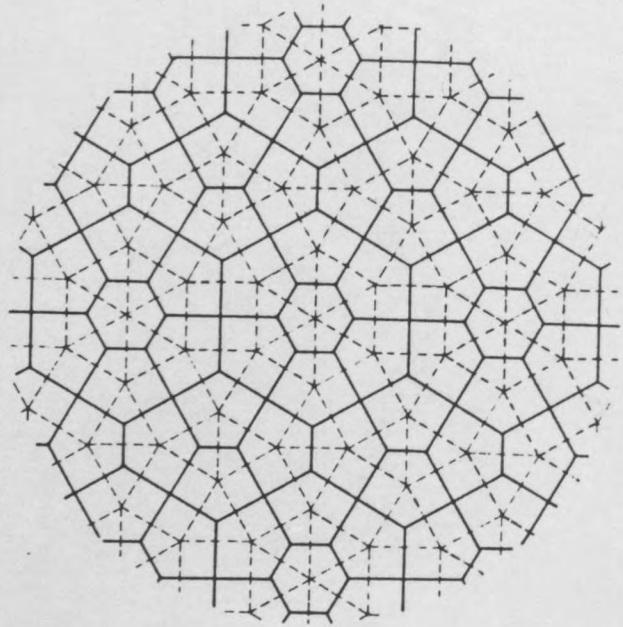
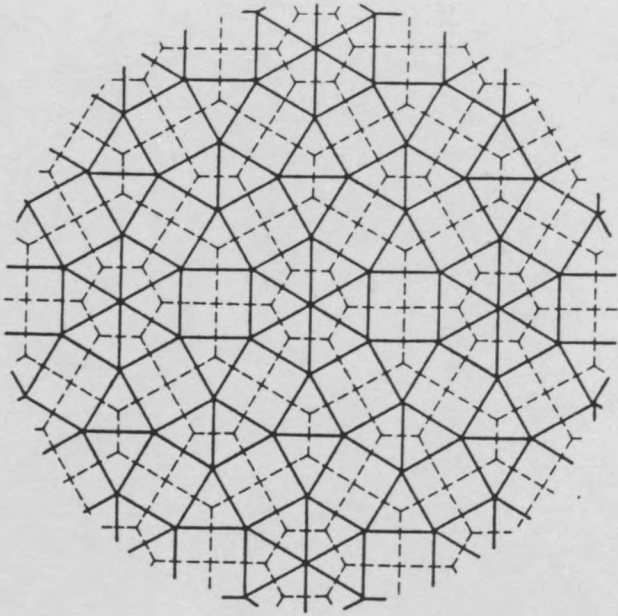
33434

4c



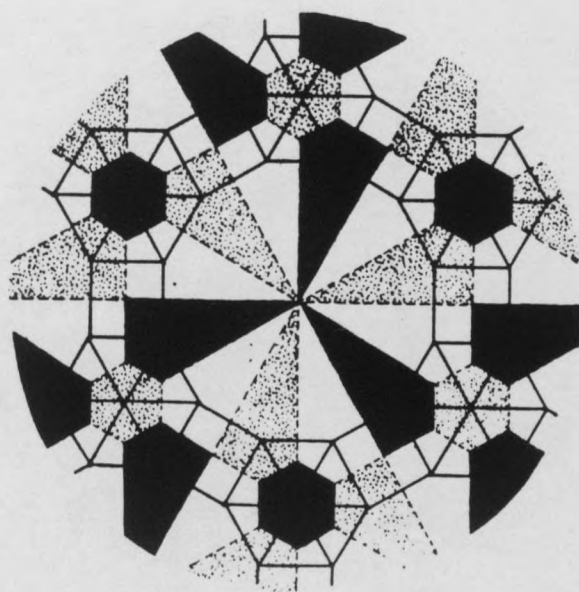
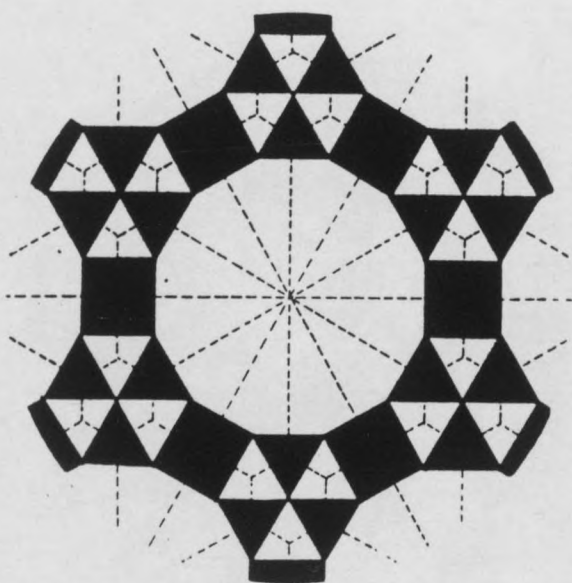
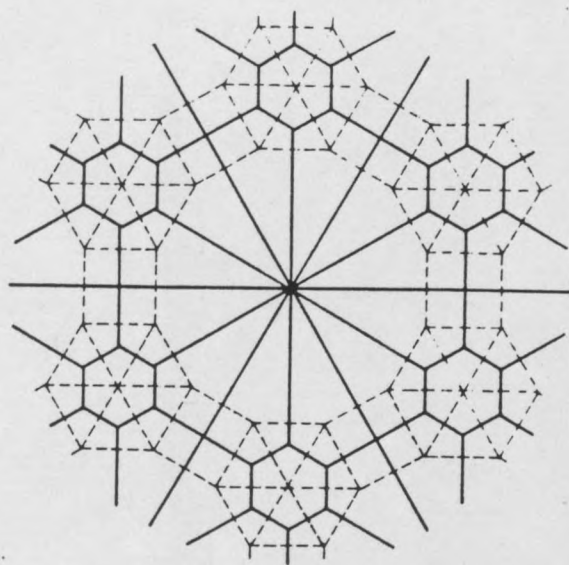
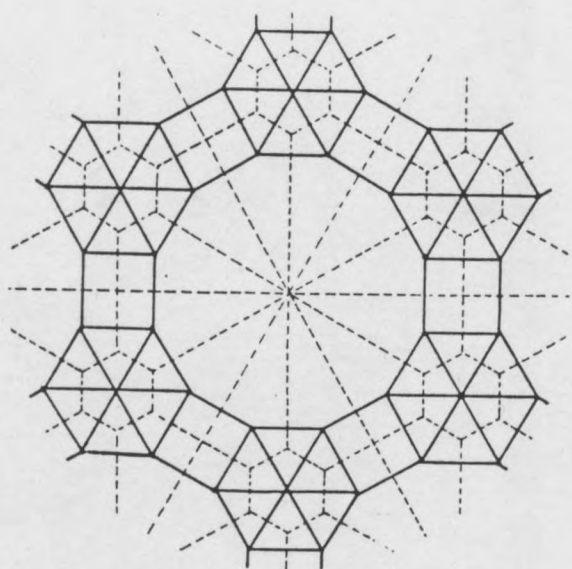
333333
33434

3c



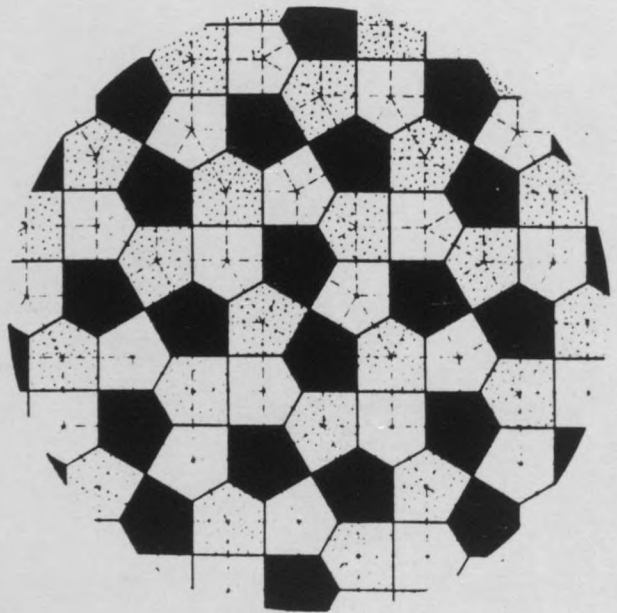
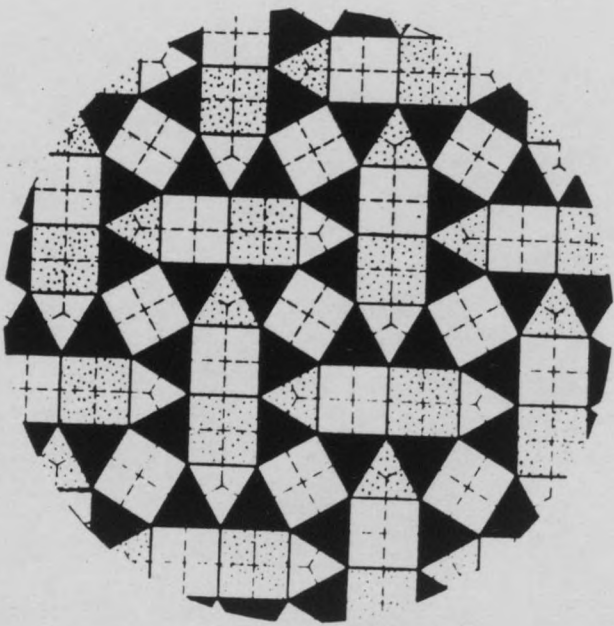
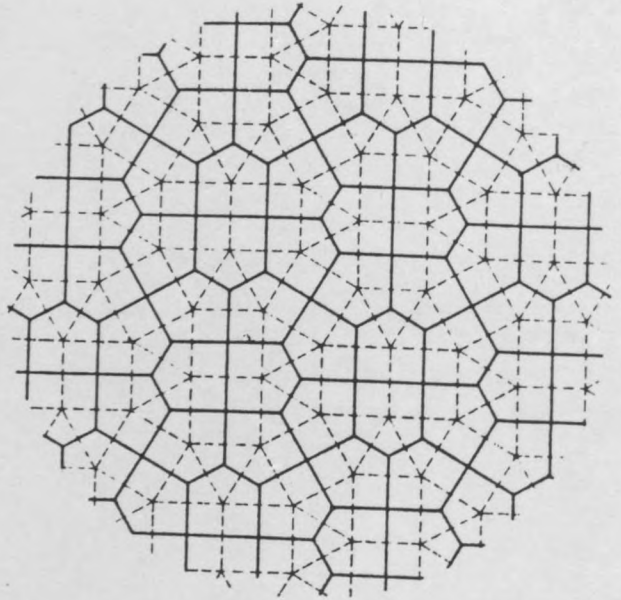
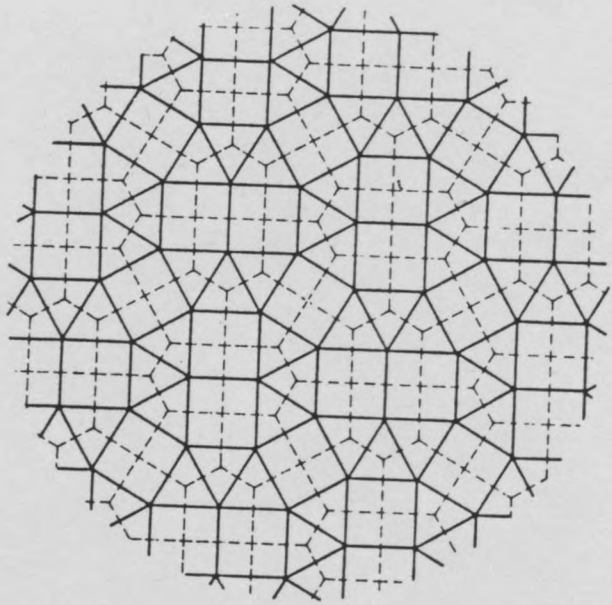
3 3 3 3 3 3
3 3 4 3 4

6c



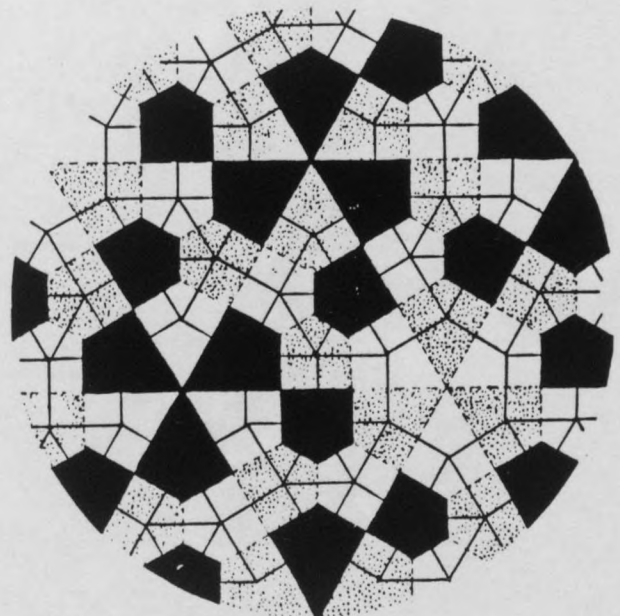
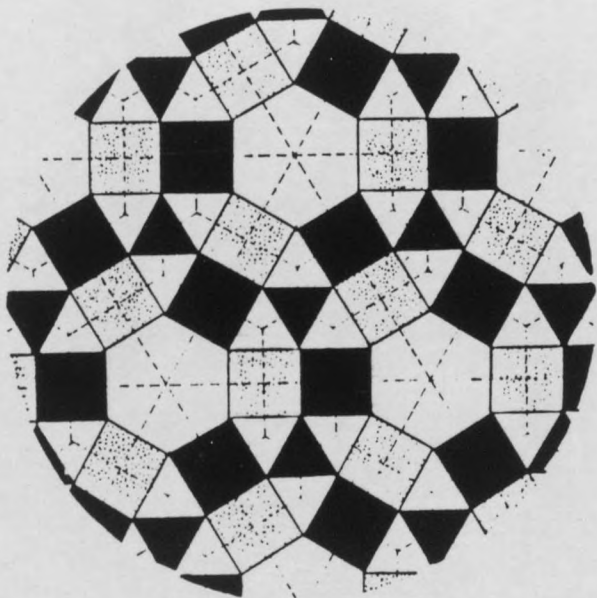
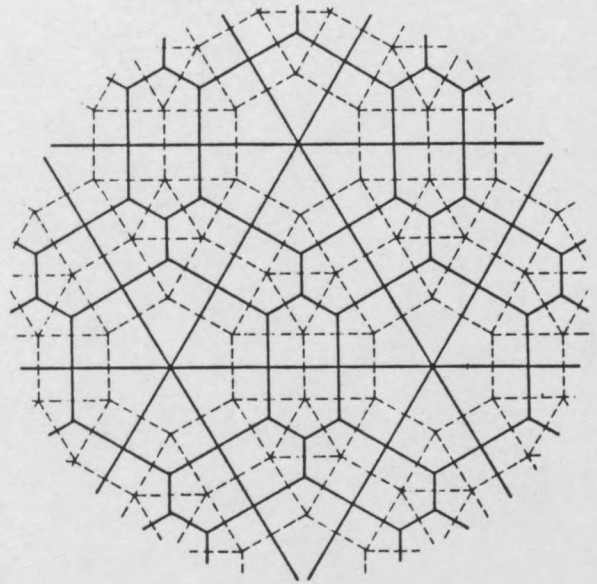
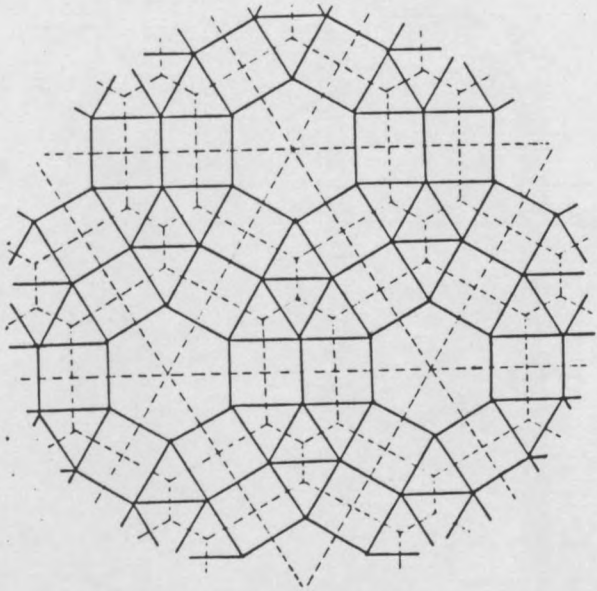
3 3 3 3 3 3
3 3 4 12 °

7c



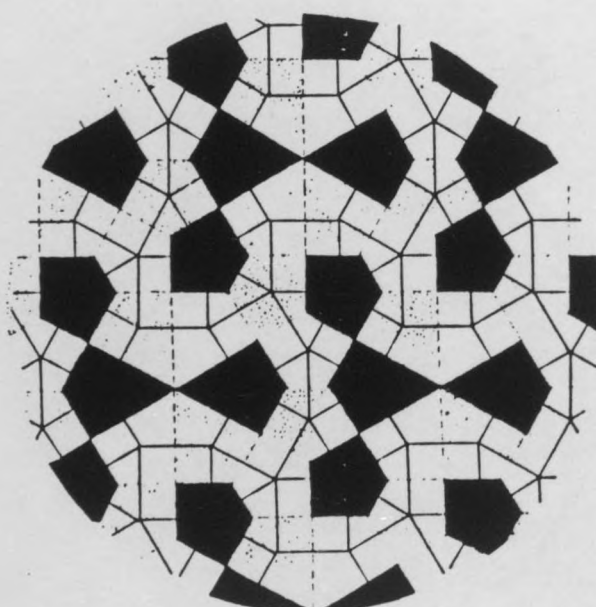
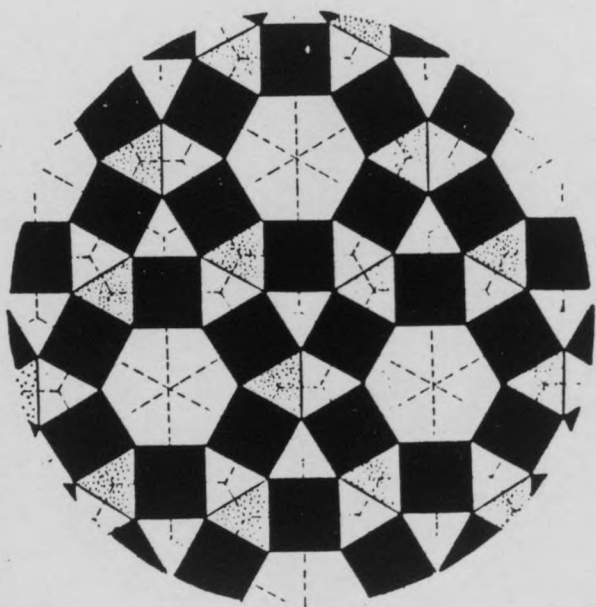
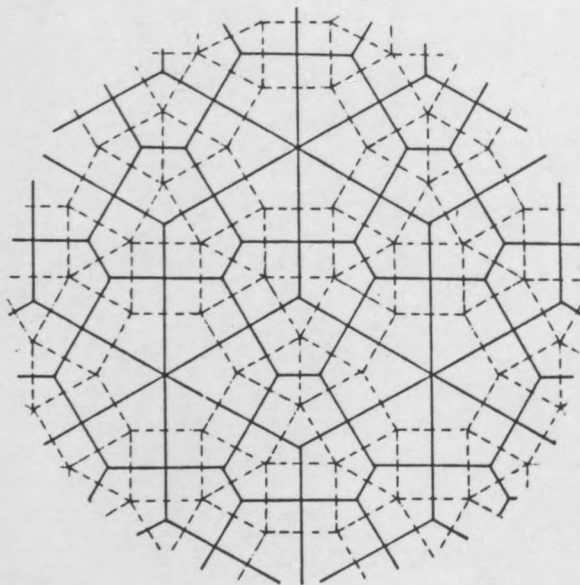
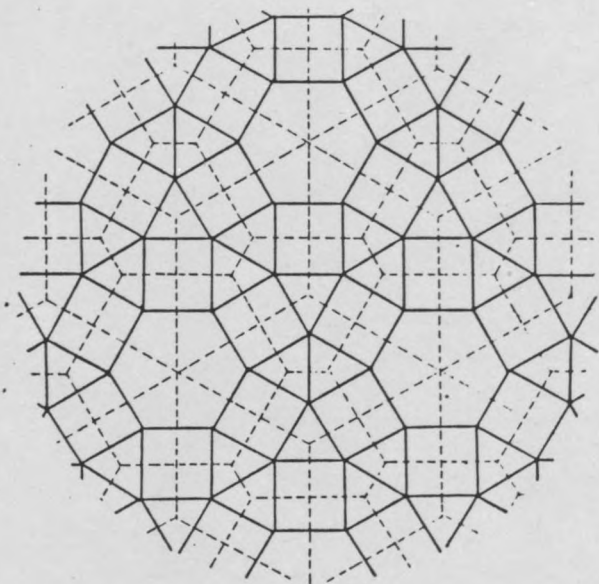
33344
33434

Sc

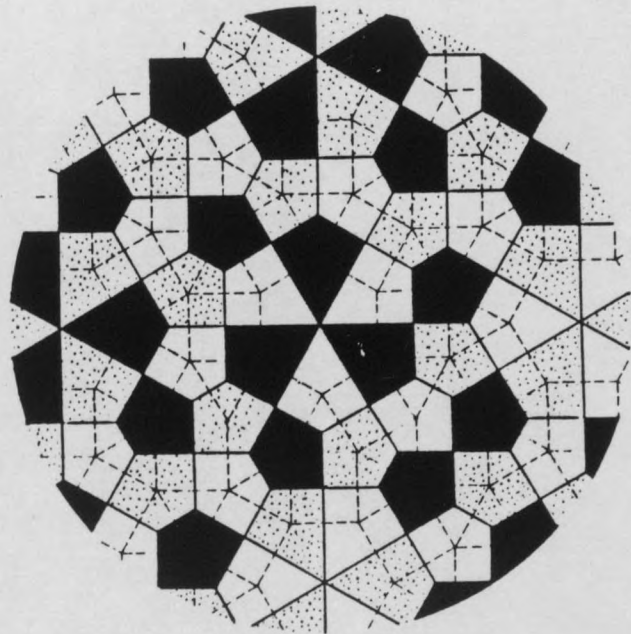
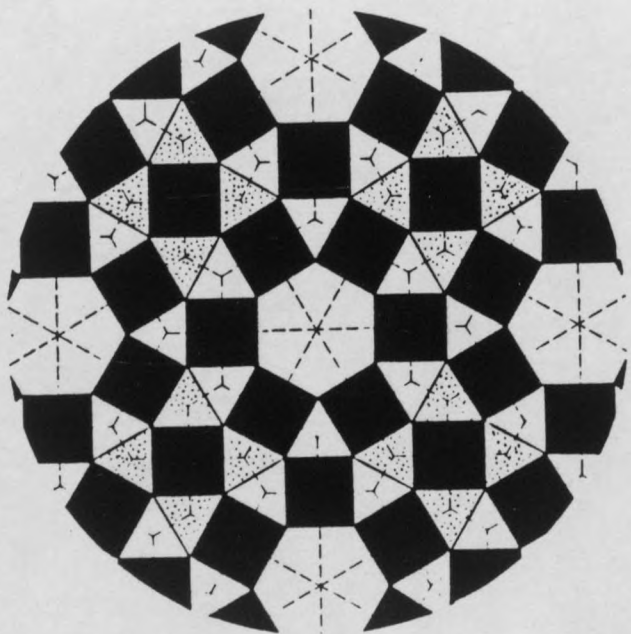
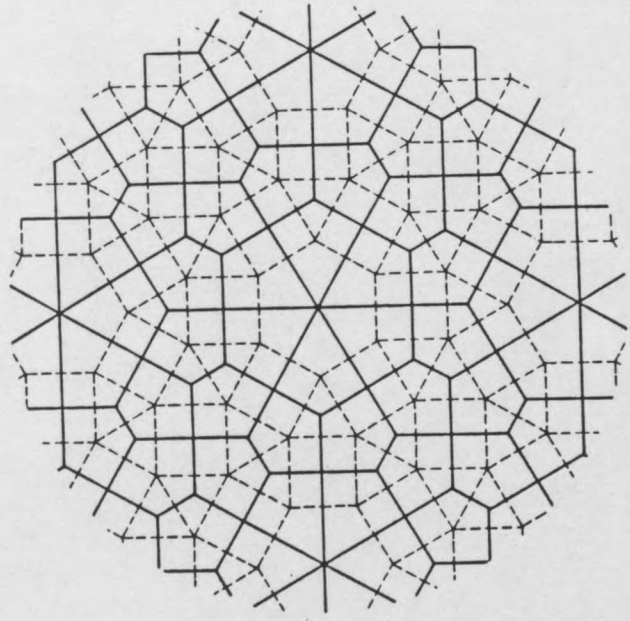
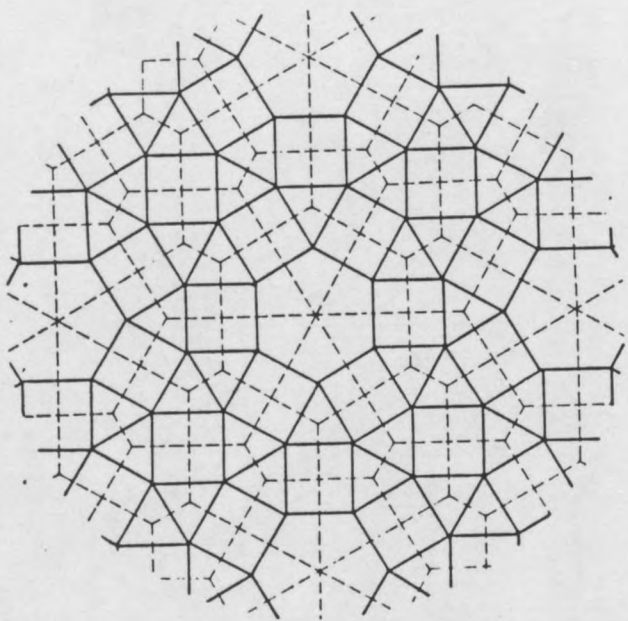


33344
3464

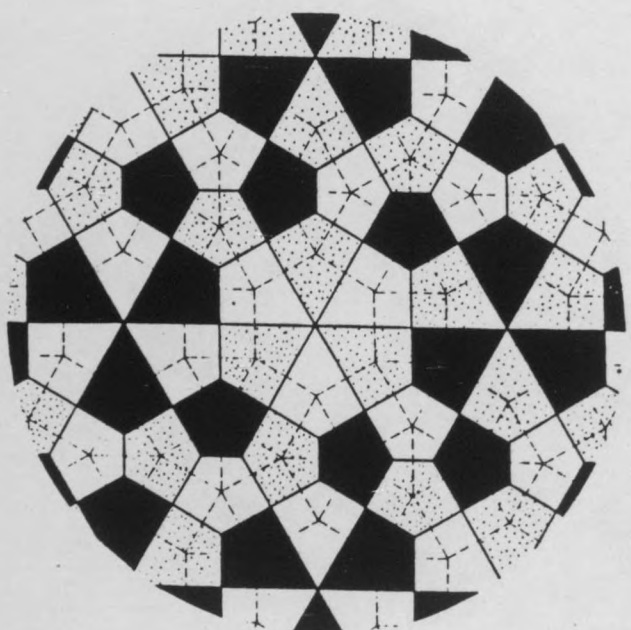
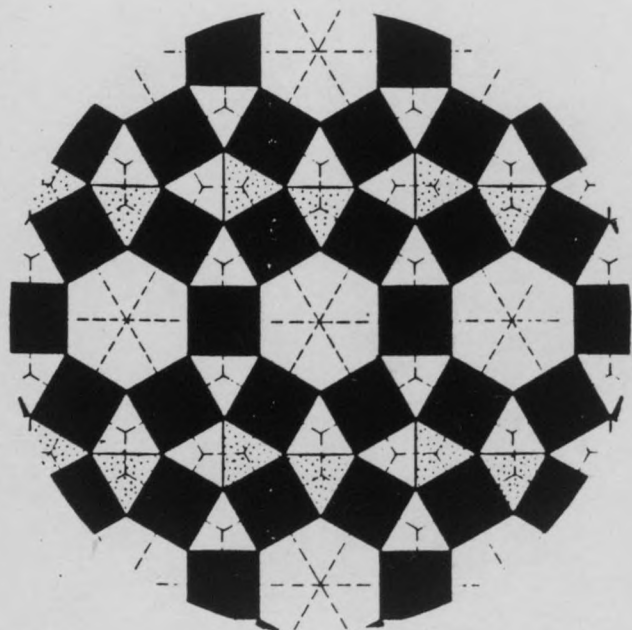
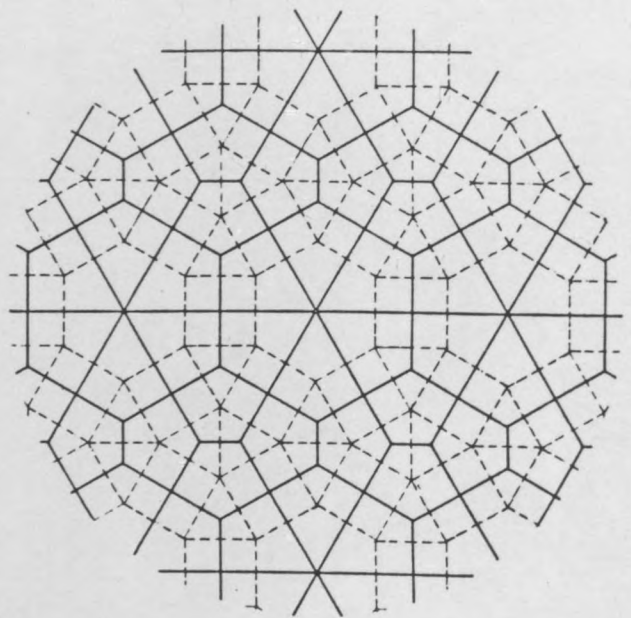
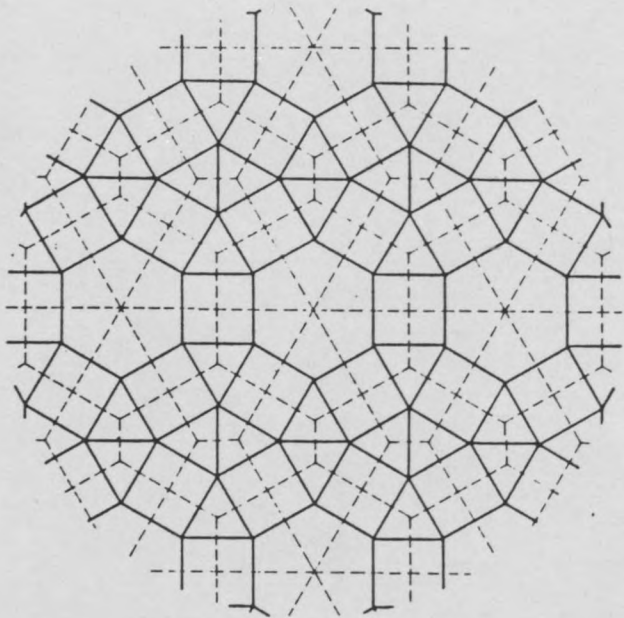
9



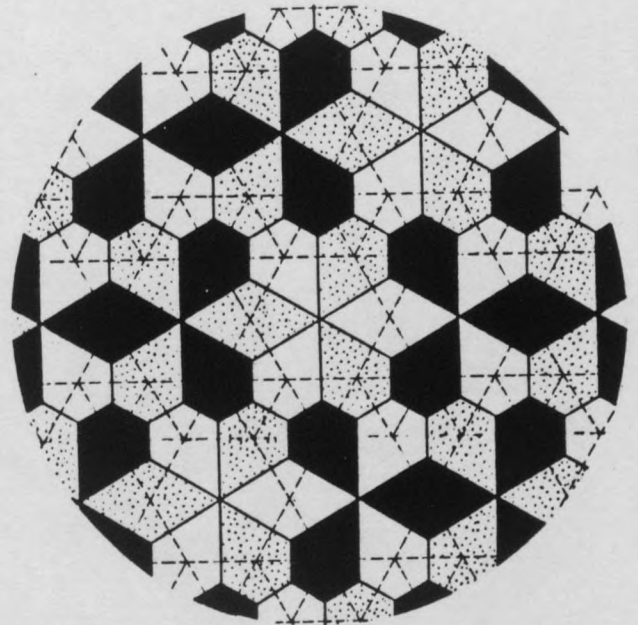
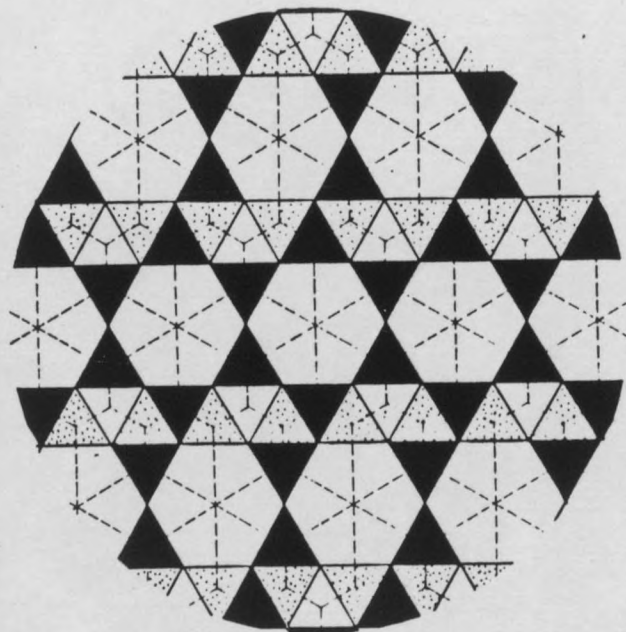
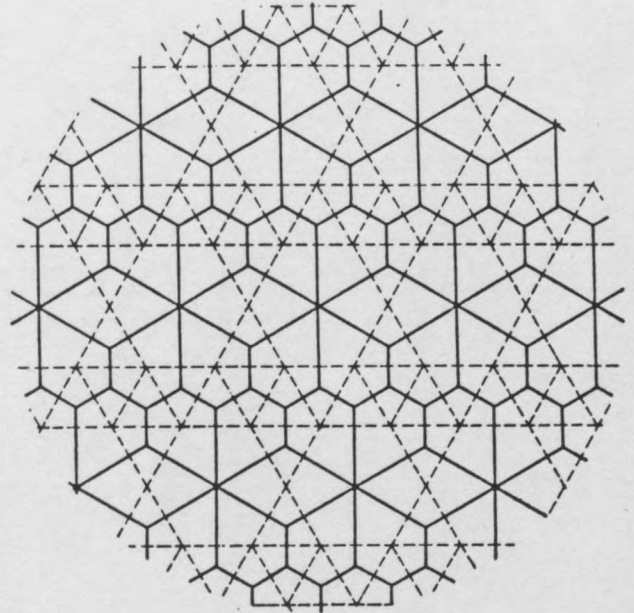
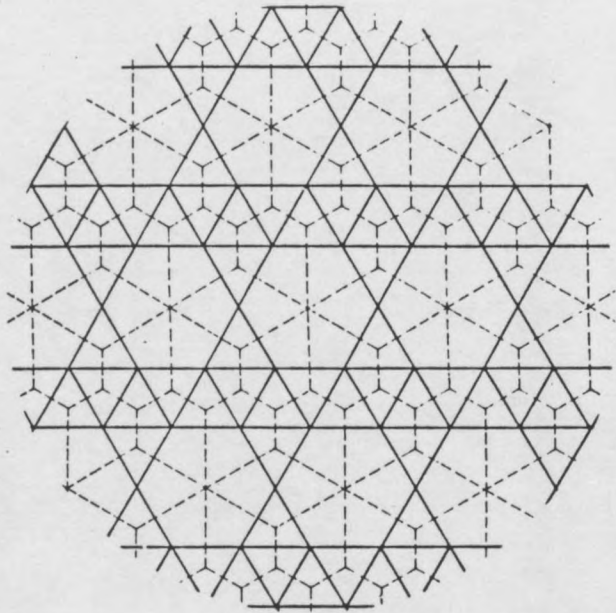
3 3 4 3 4
3 4 6 4



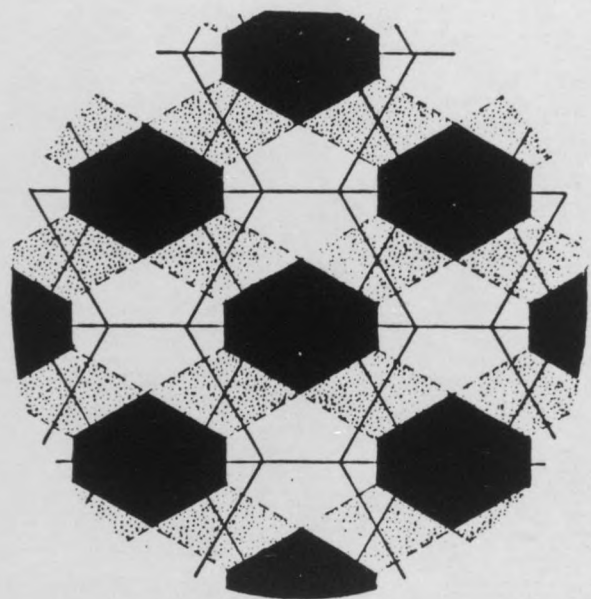
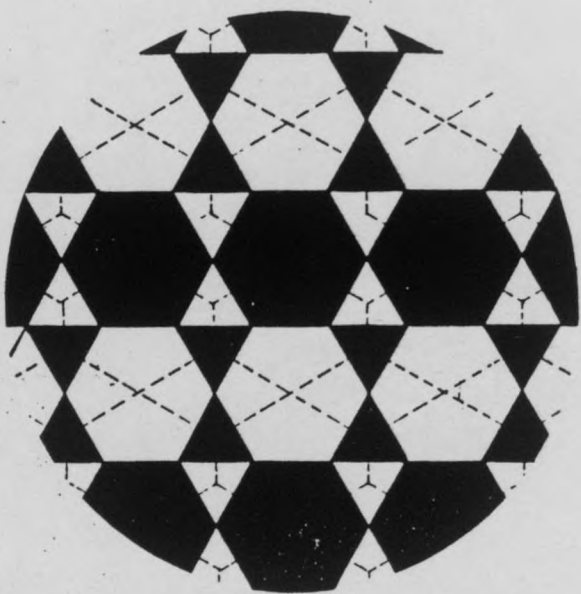
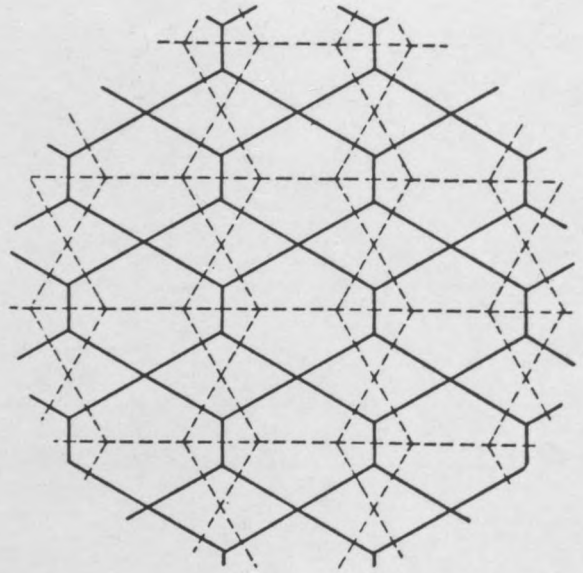
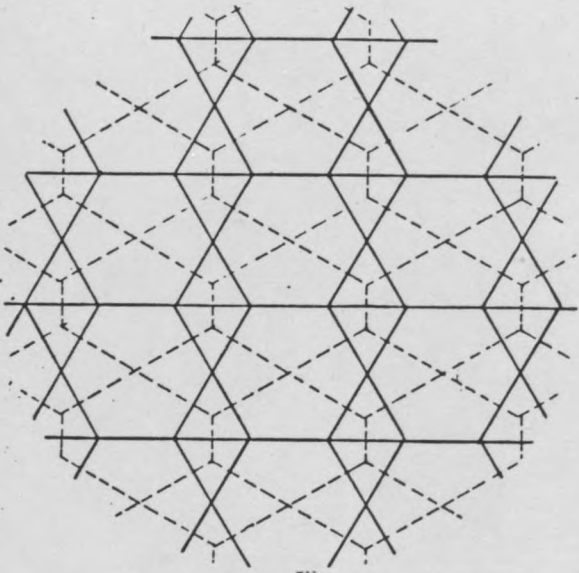
3 3 4 3 4
3 4 6 4



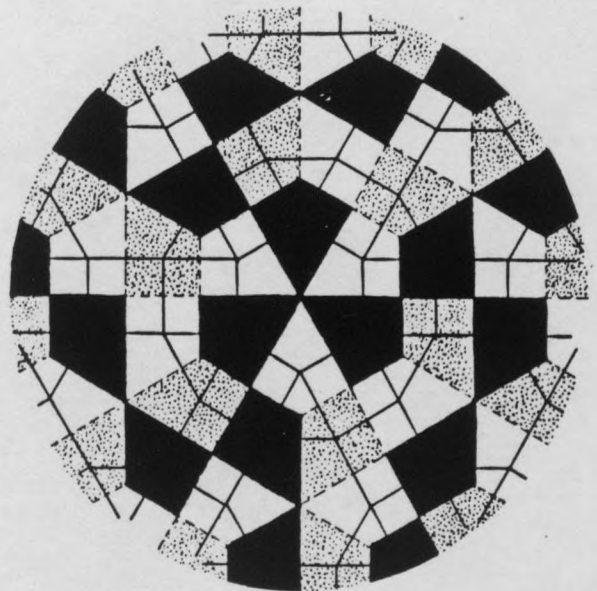
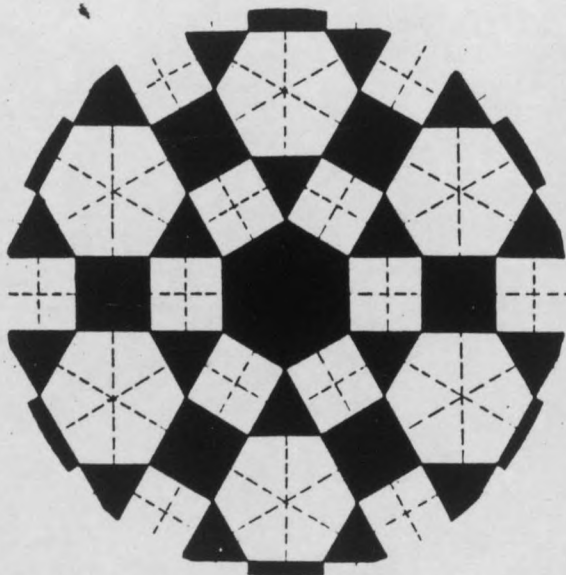
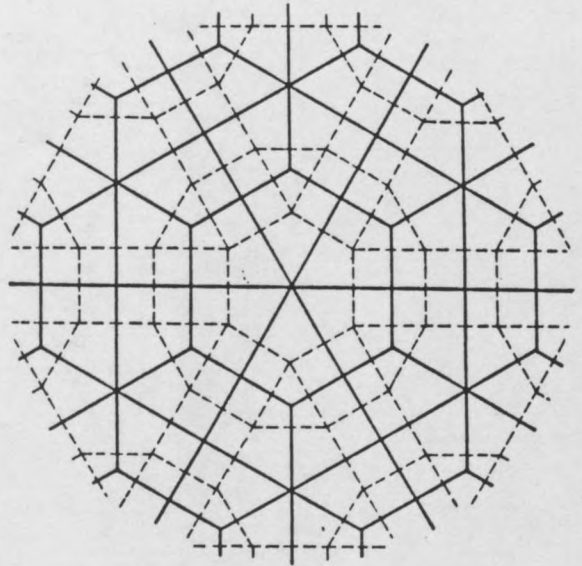
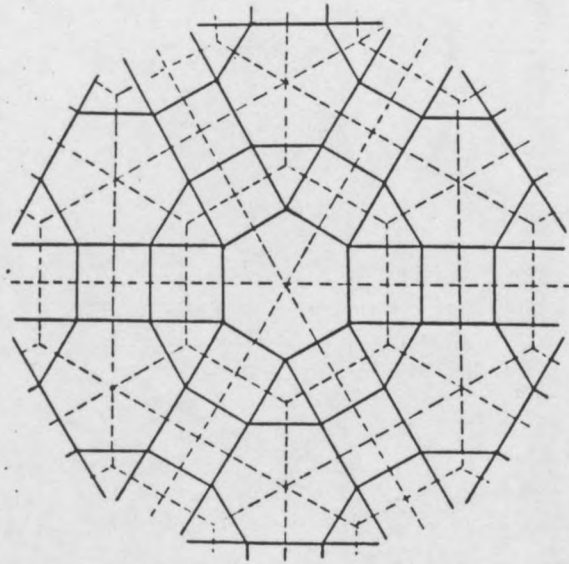
3 3 4 3 4
3 4 6 4



33336
3636

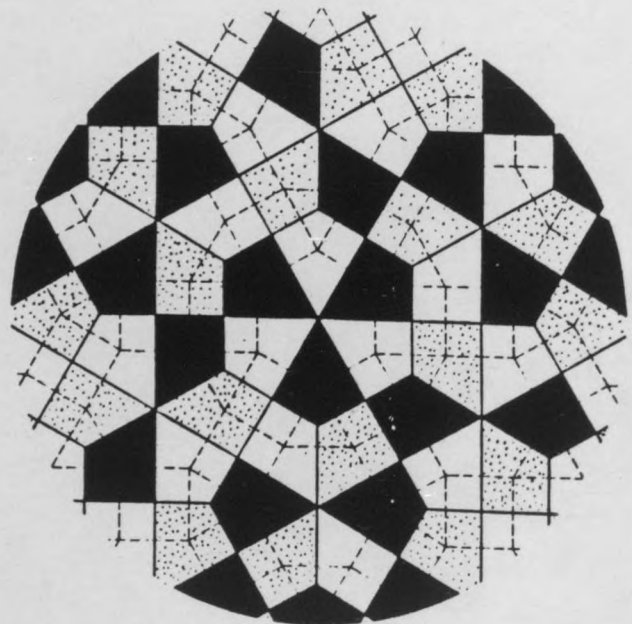
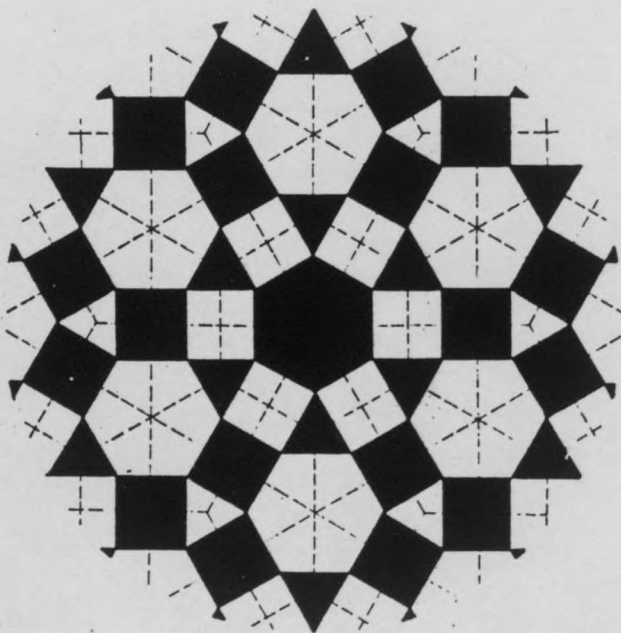
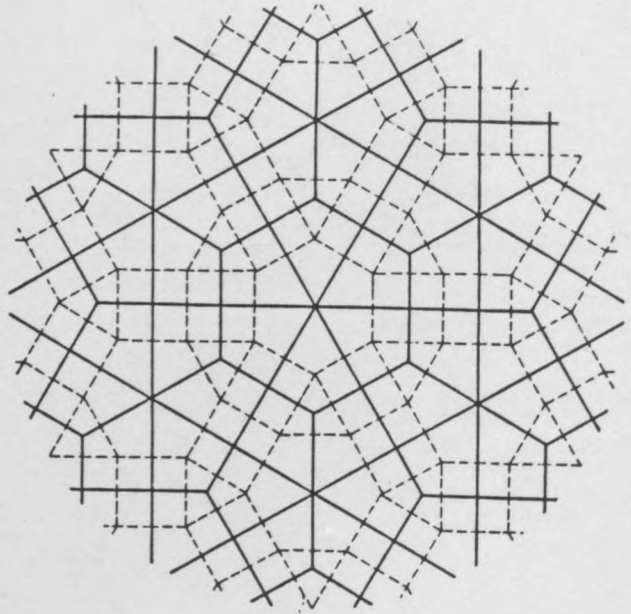
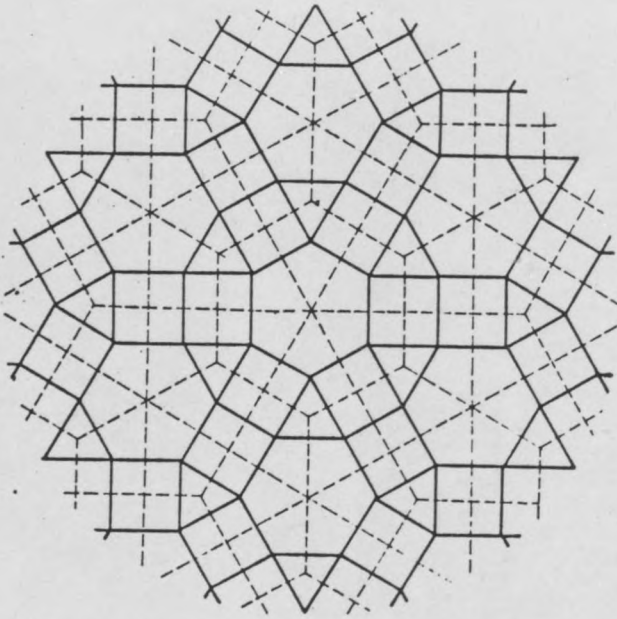


3366
3636

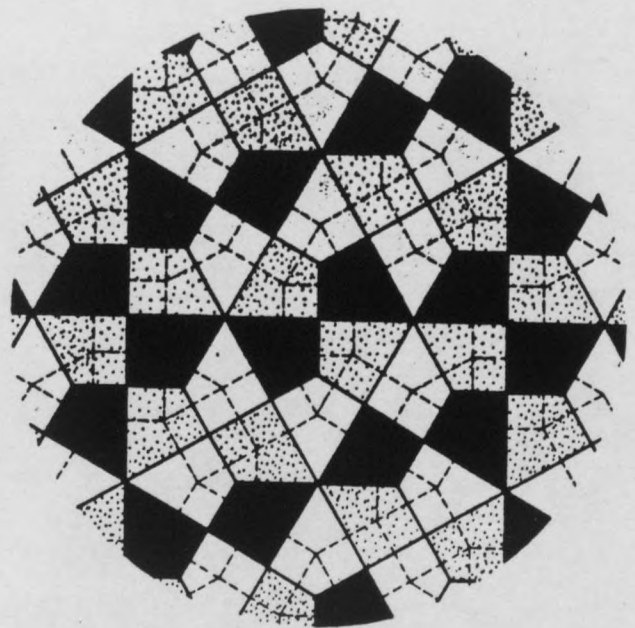
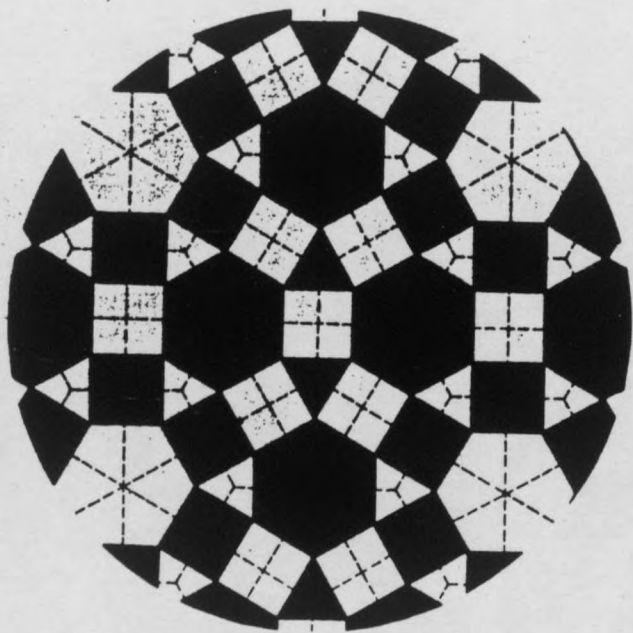
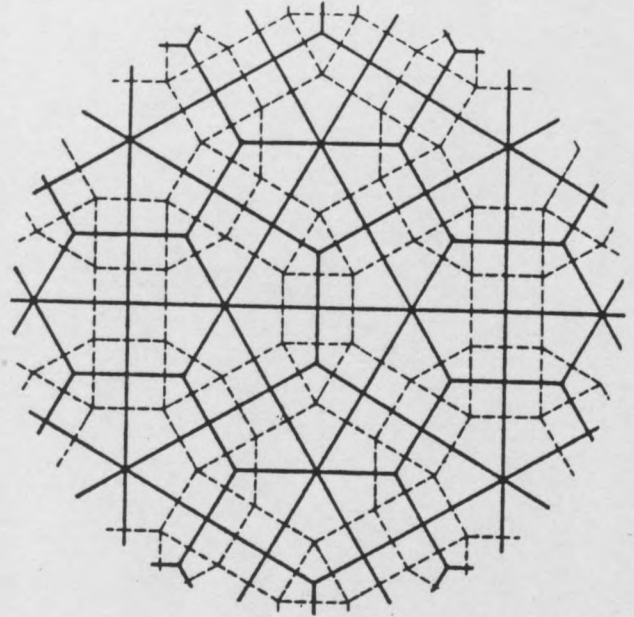
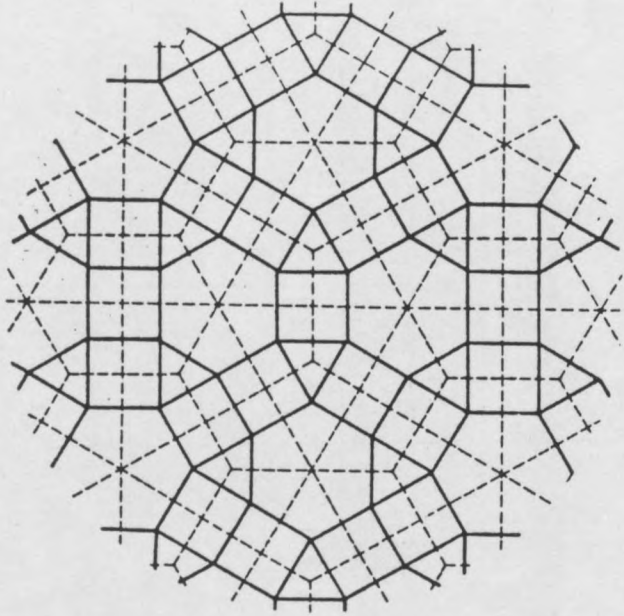


3446°
3464

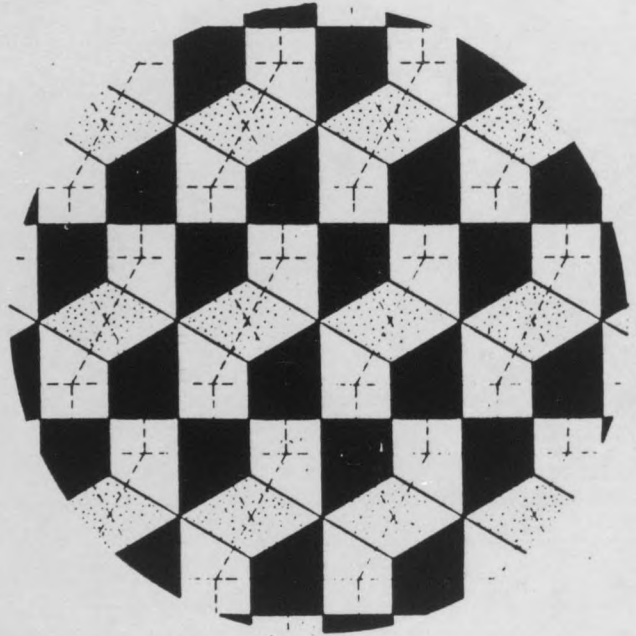
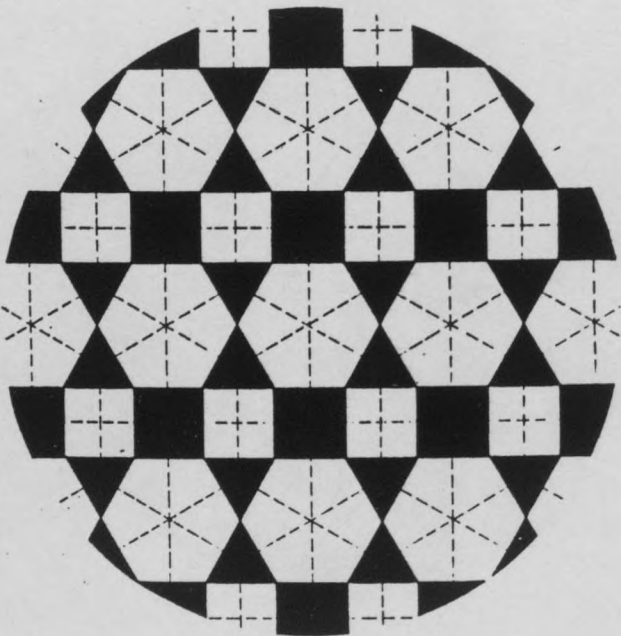
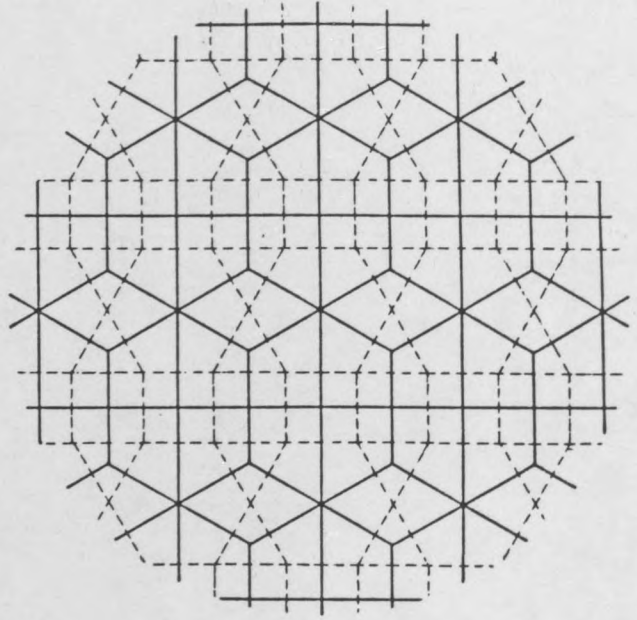
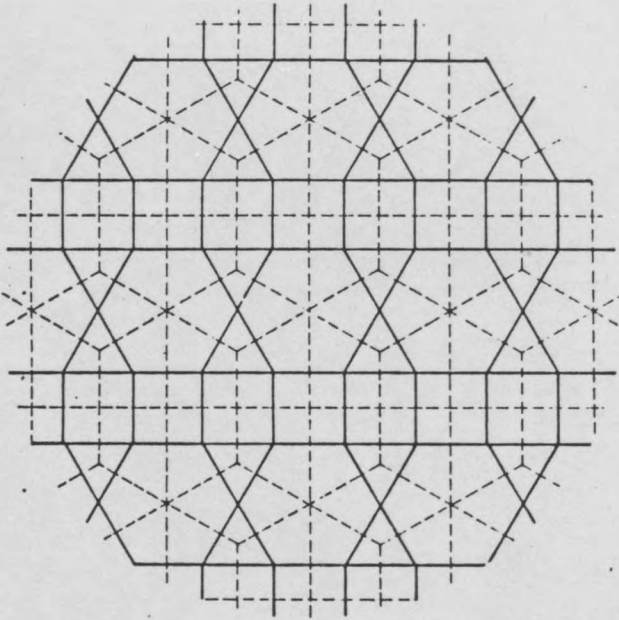
13



3 4 4 6^o
3 4 6 4

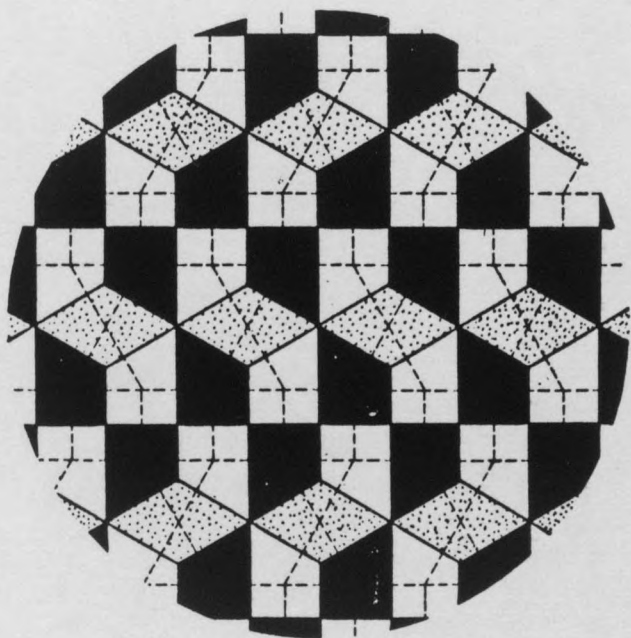
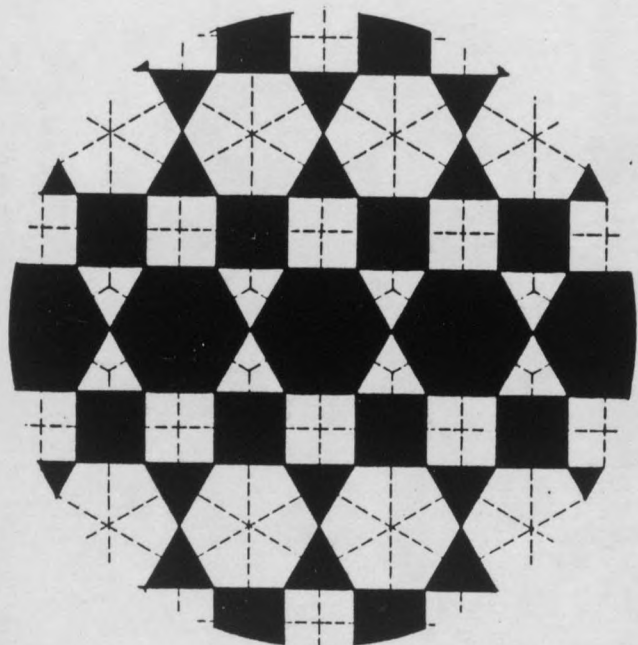
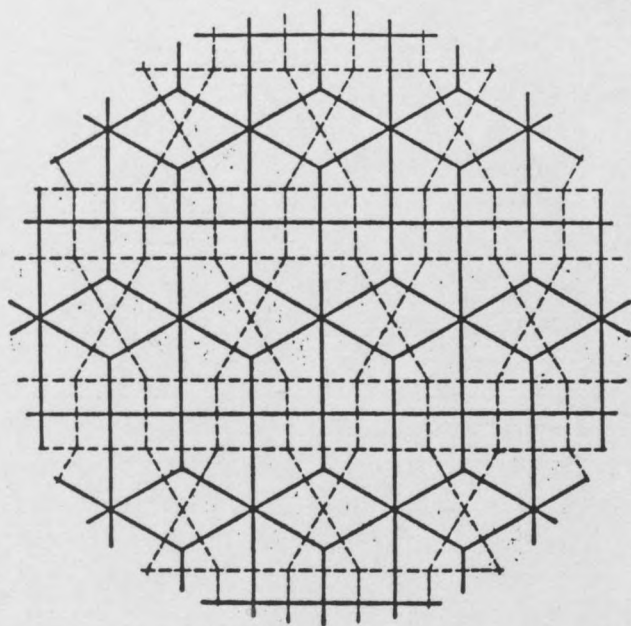
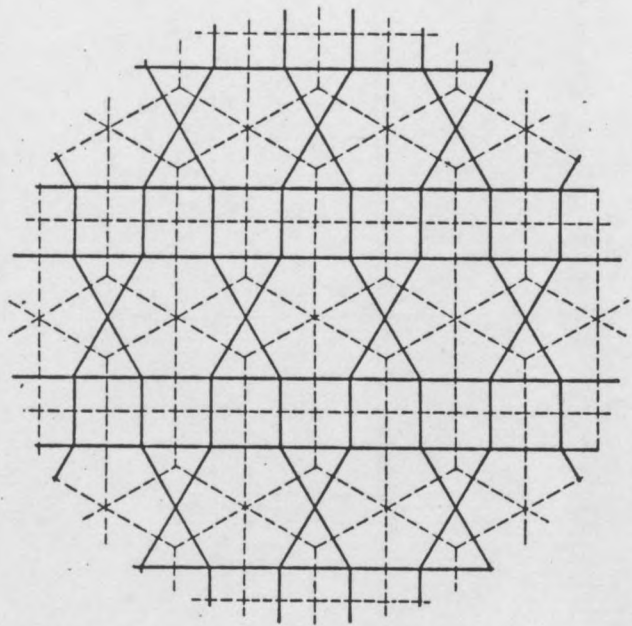


3446°
3464

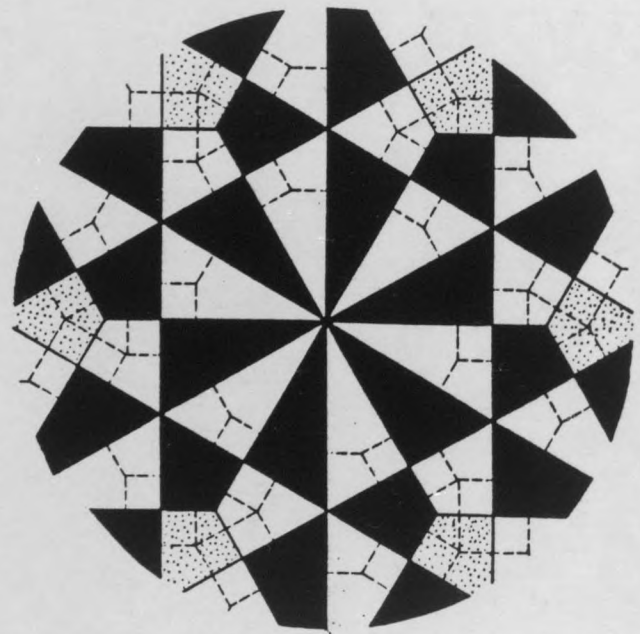
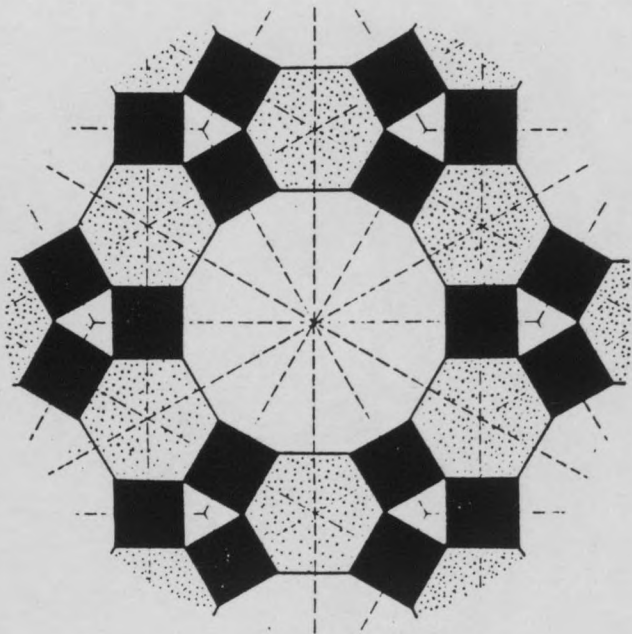
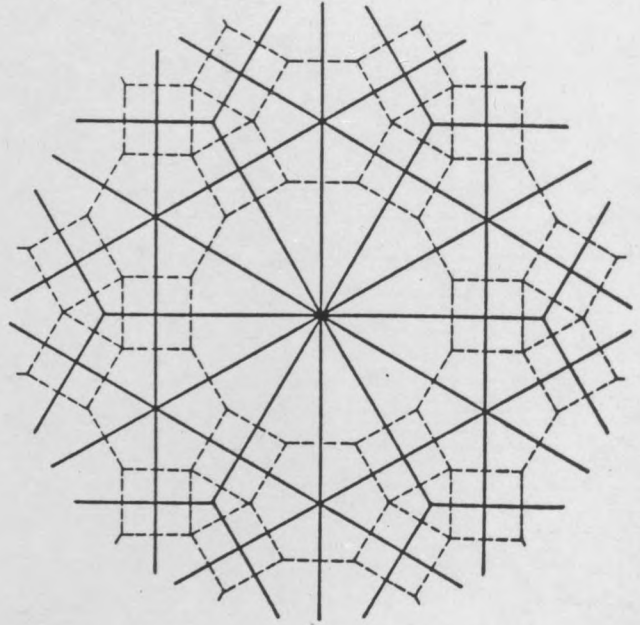
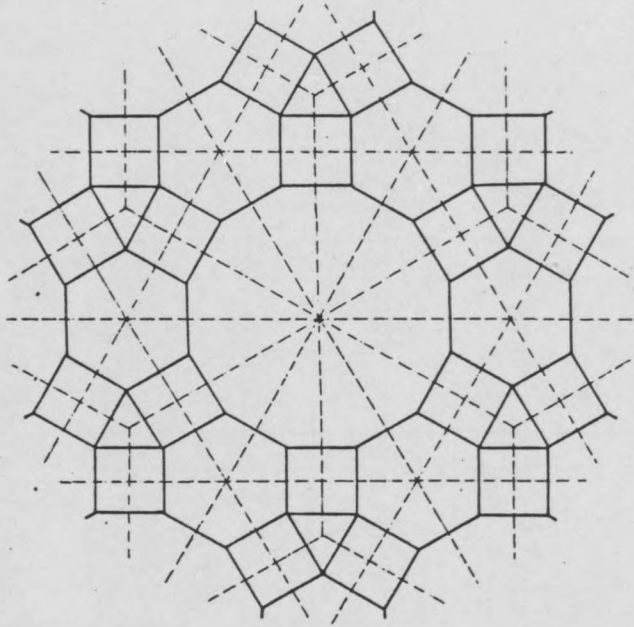


3446°
3636

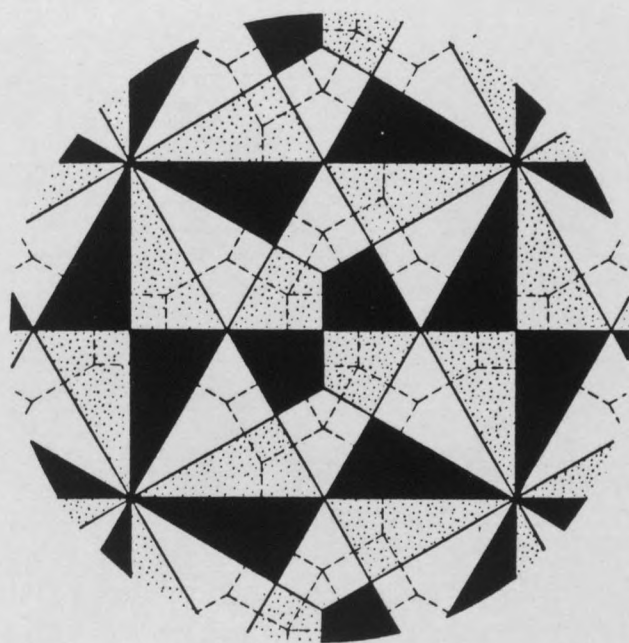
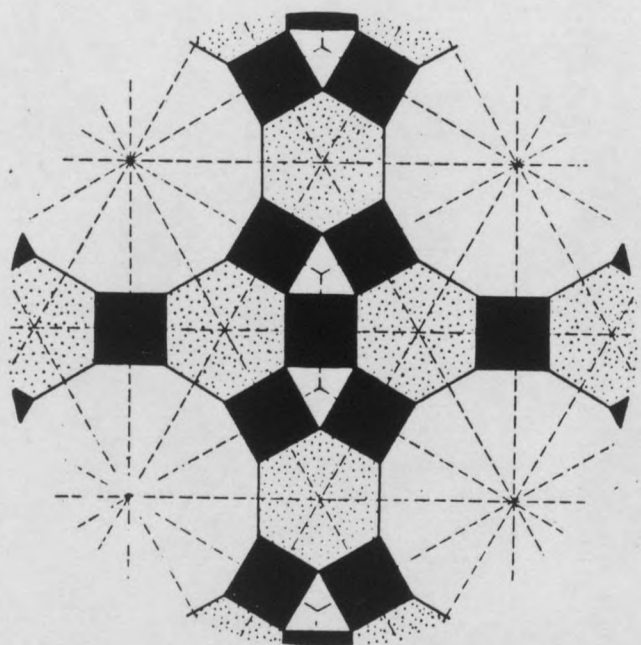
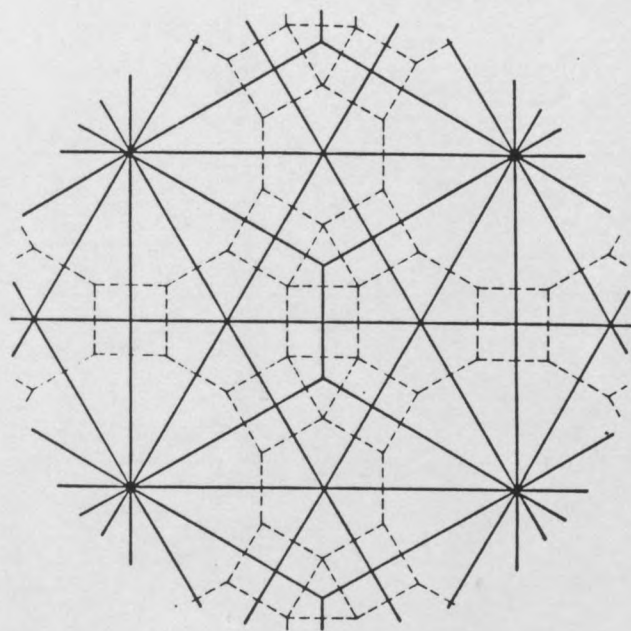
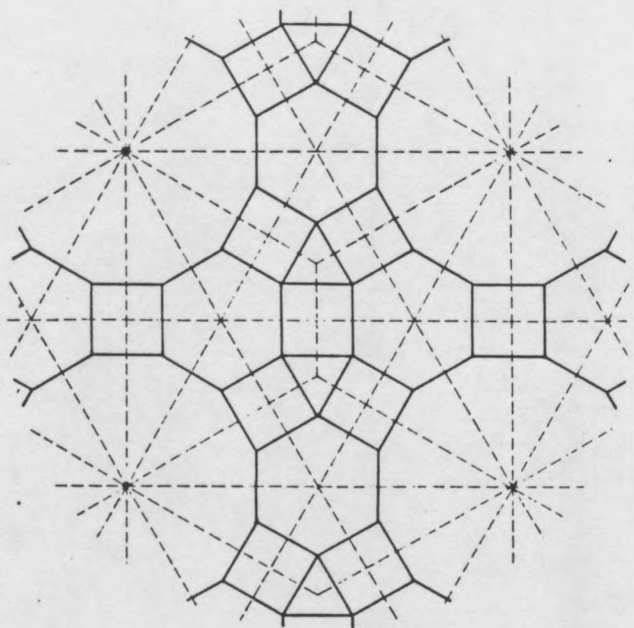
18



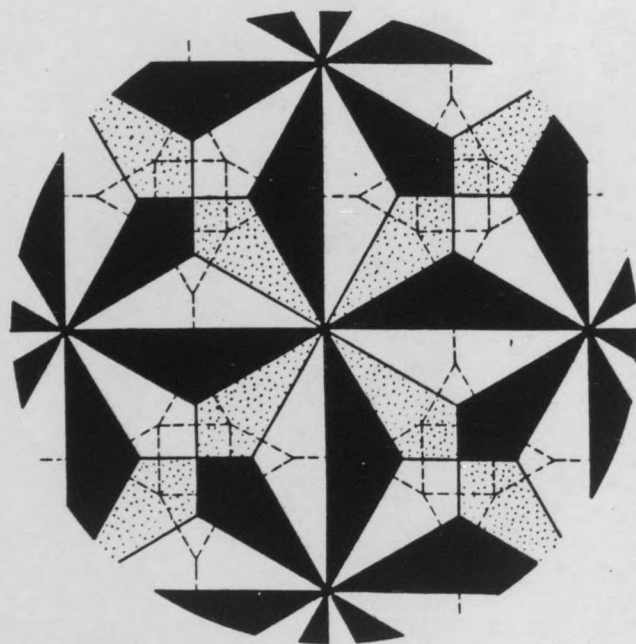
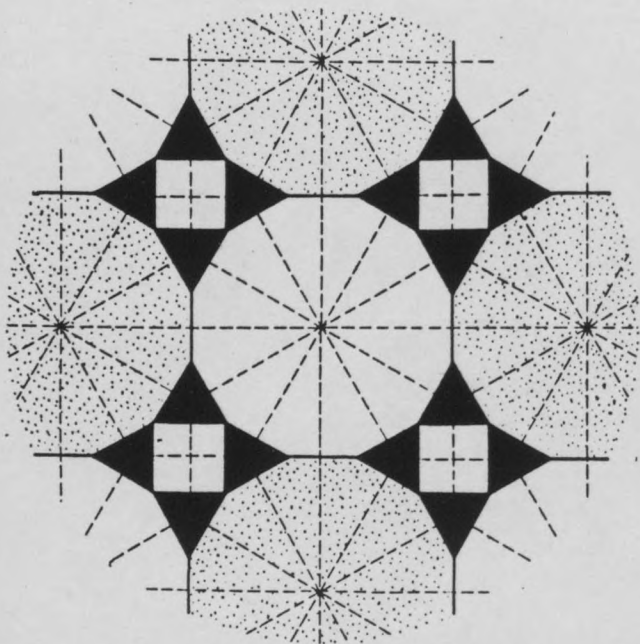
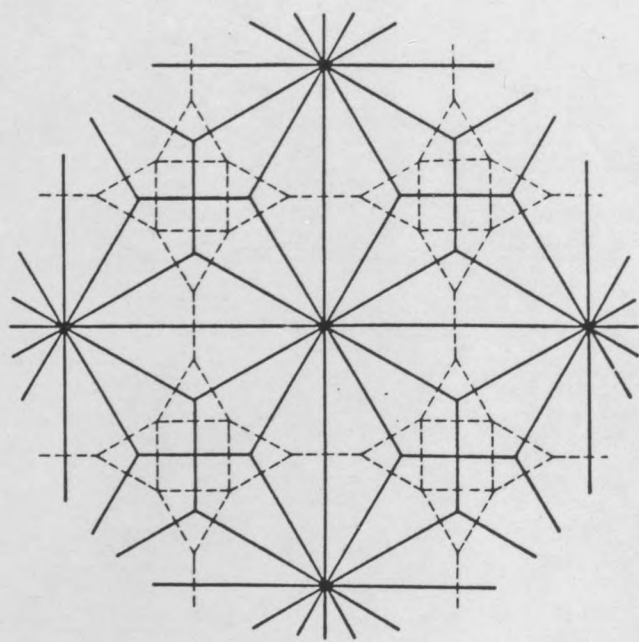
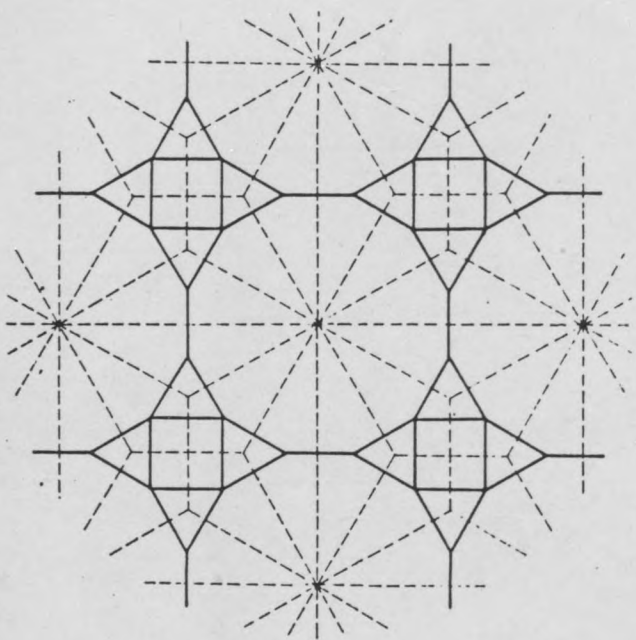
3 4 4 6°
3 6 3 6



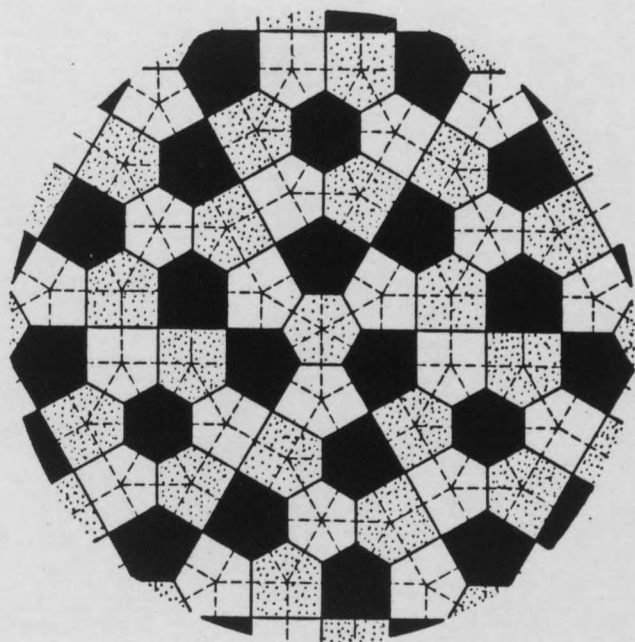
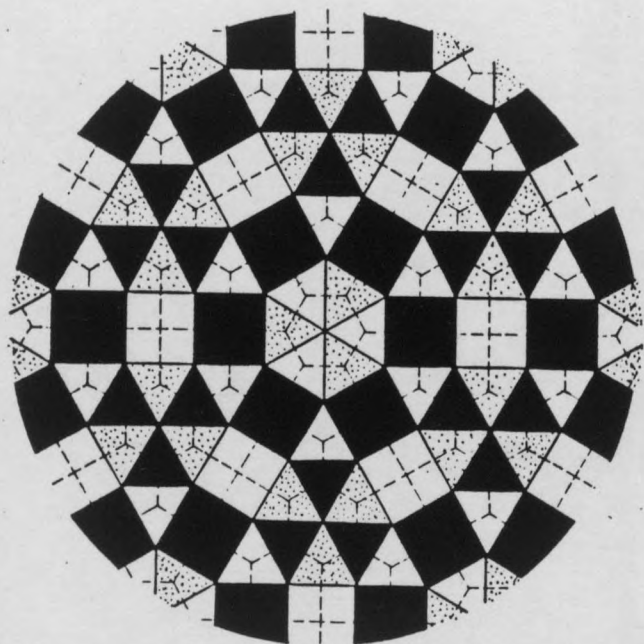
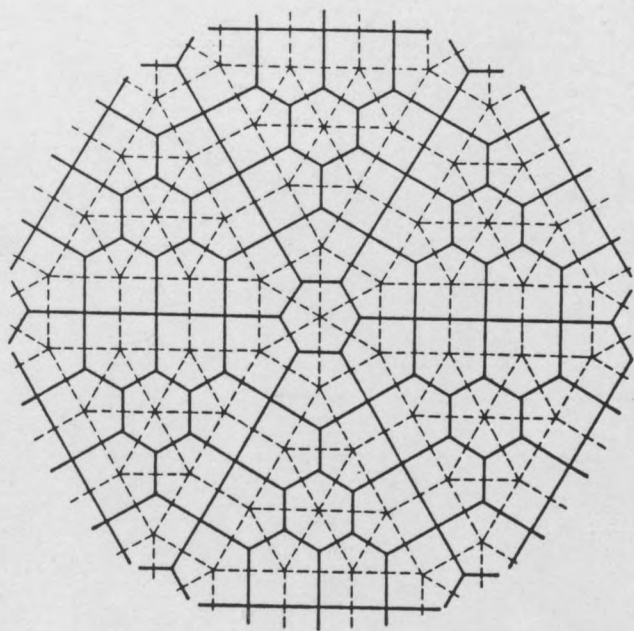
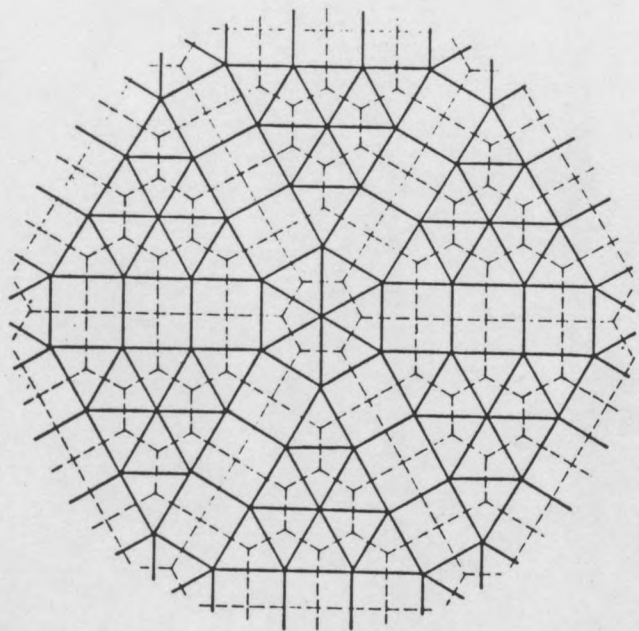
3464
4612°



3 4 6 4
4 6 12°



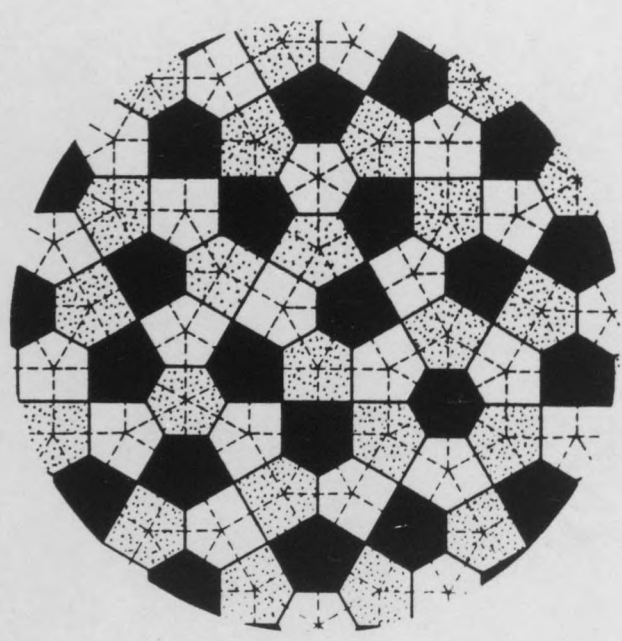
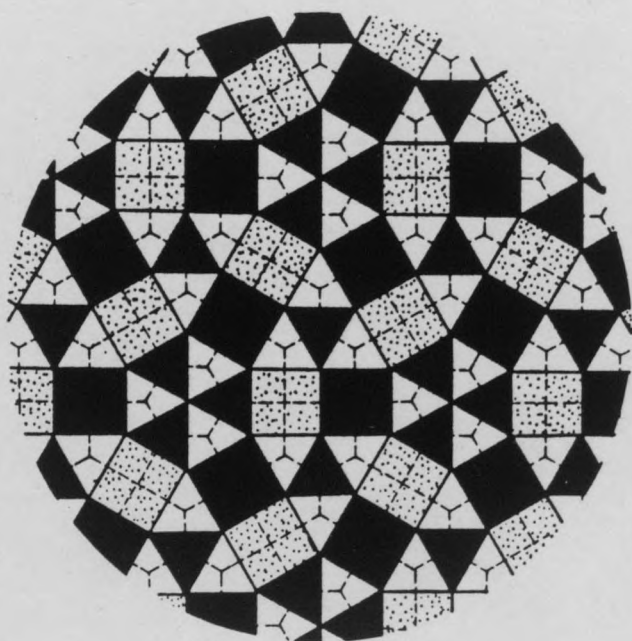
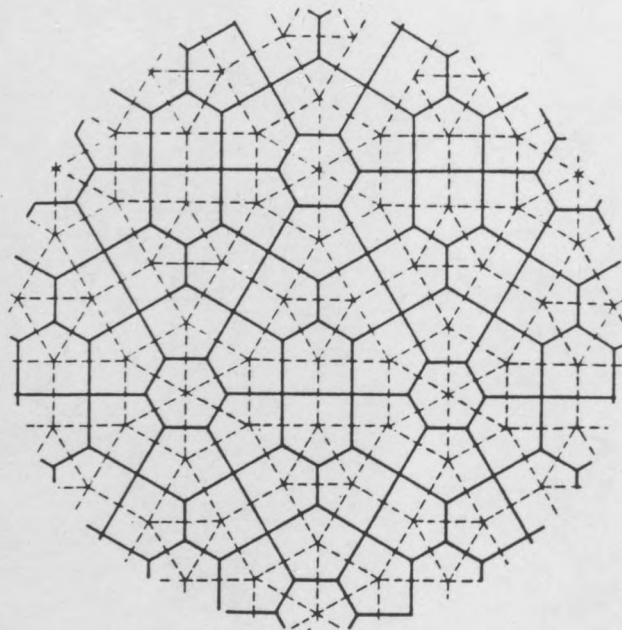
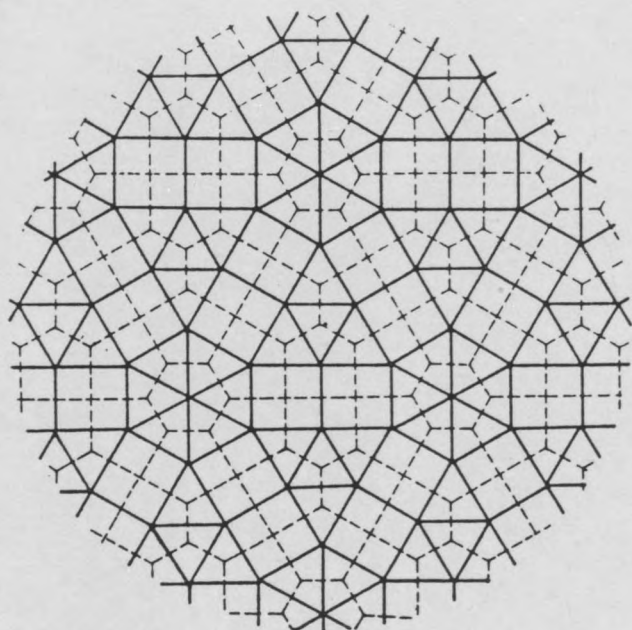
3 4 3 12
3 12 12



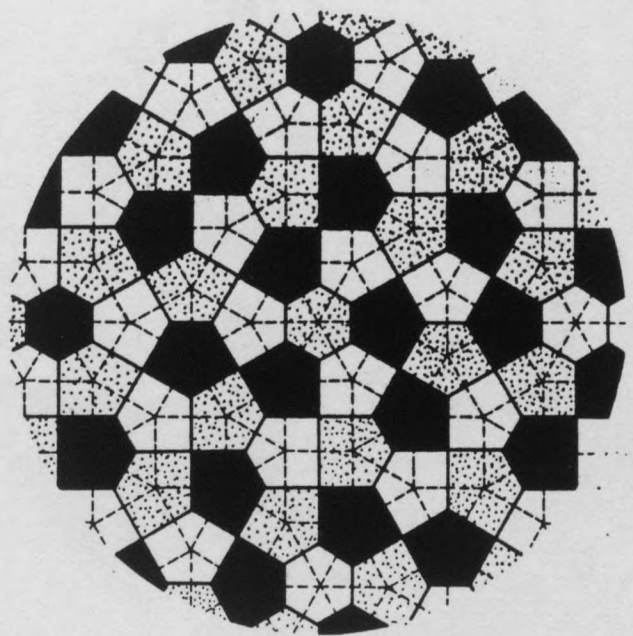
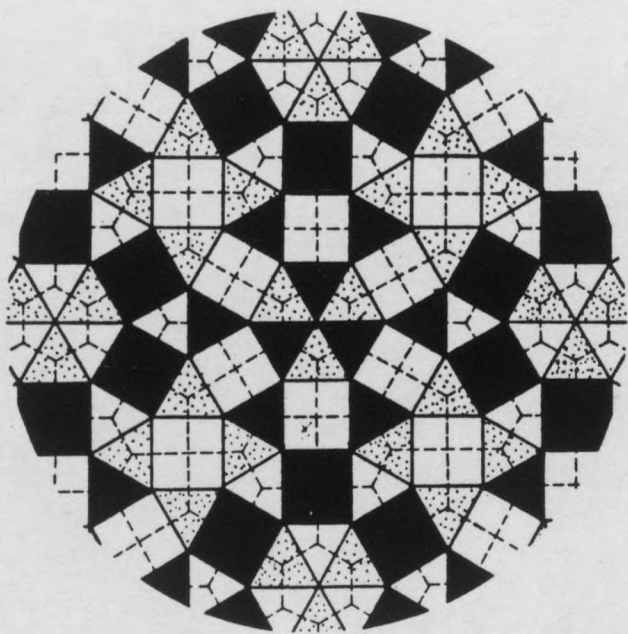
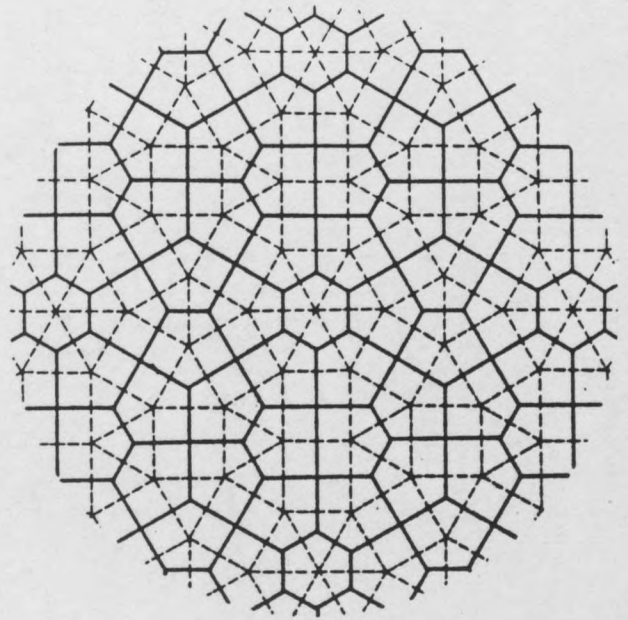
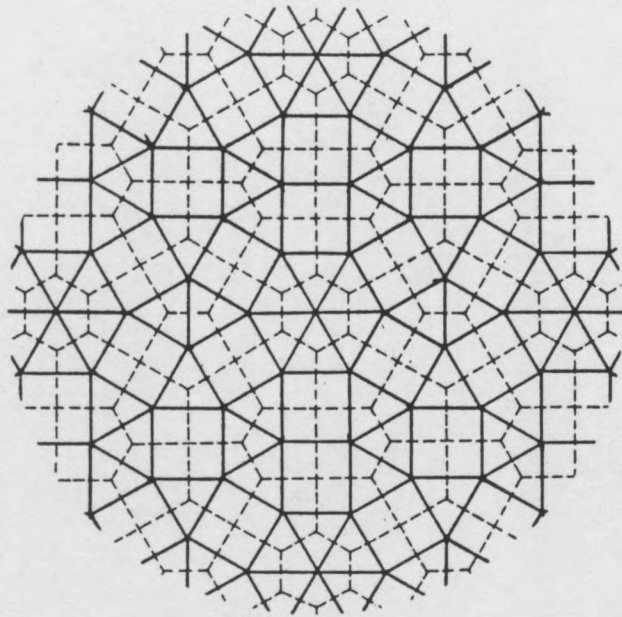
333333

33344

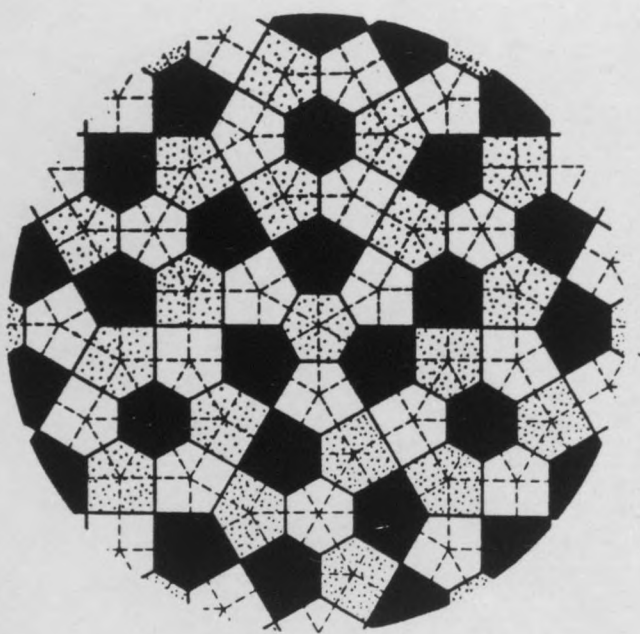
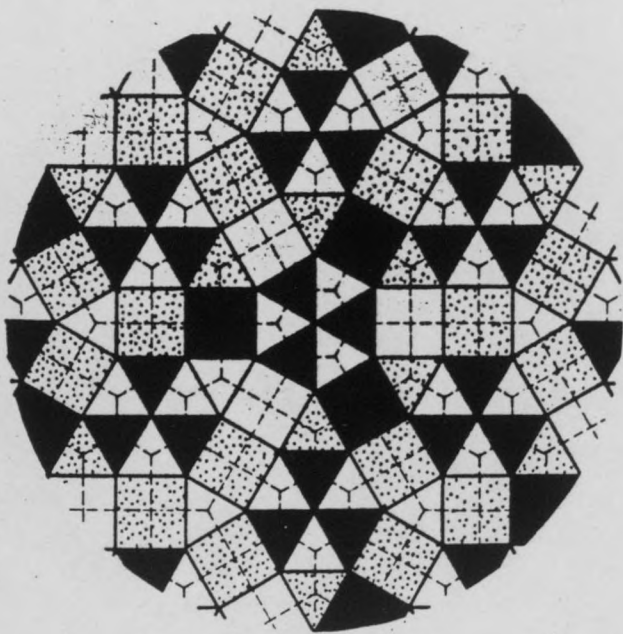
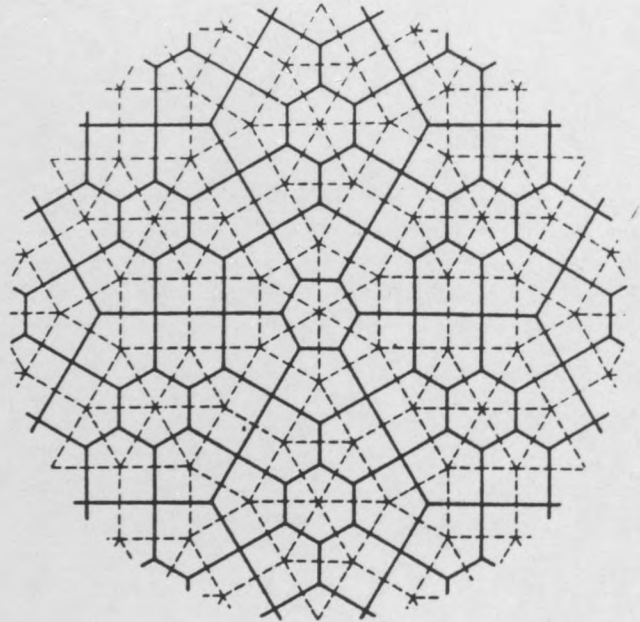
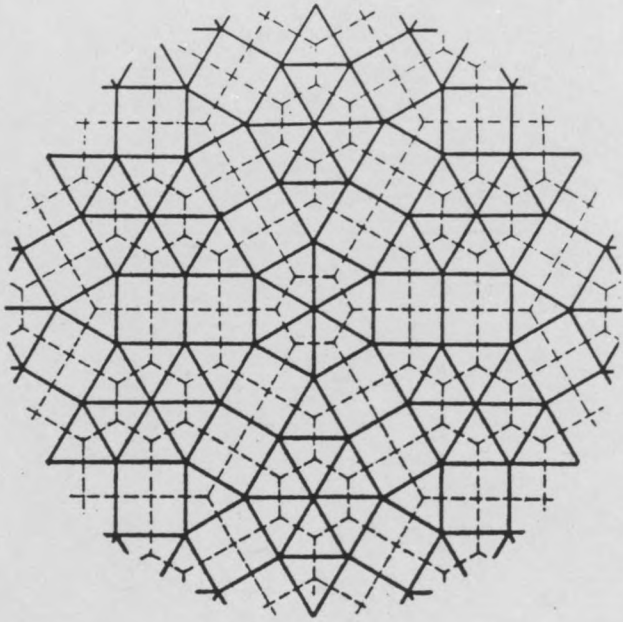
33434



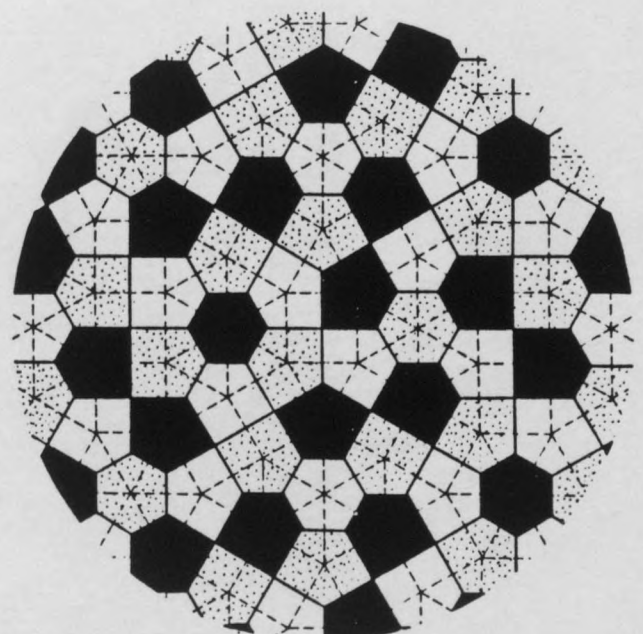
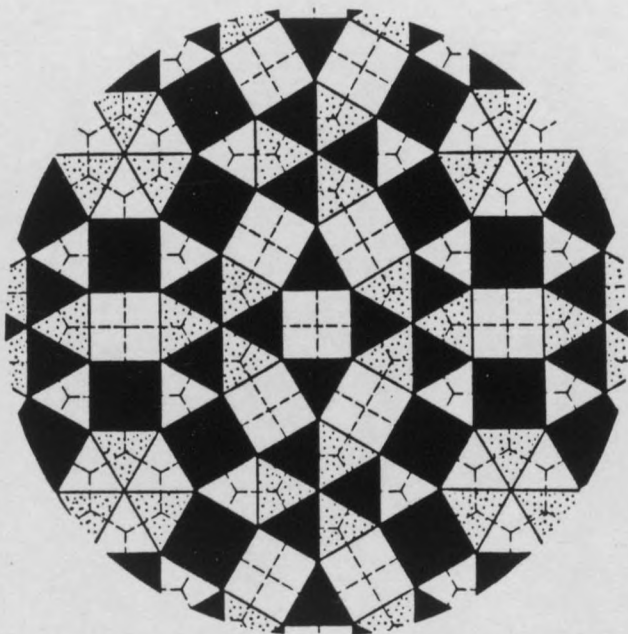
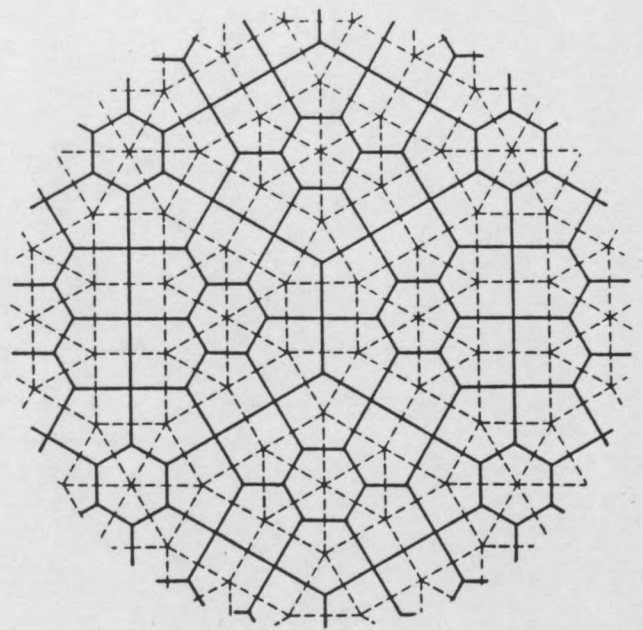
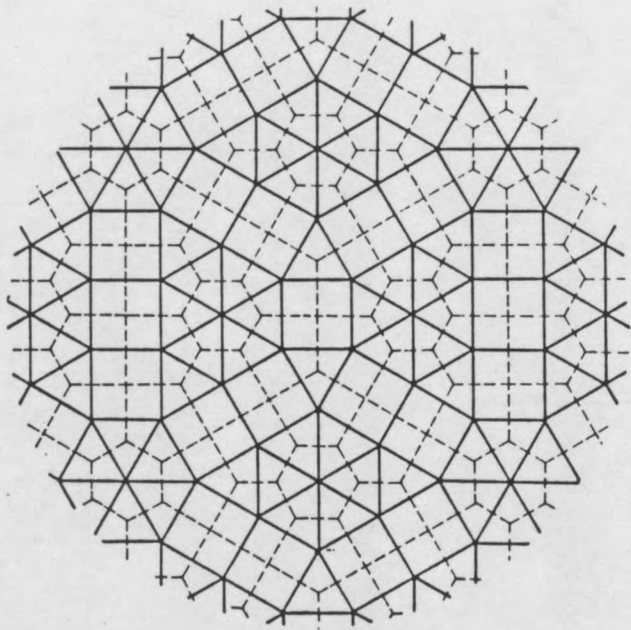
3 3 3 3 3 3
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4



333333
33344
33434



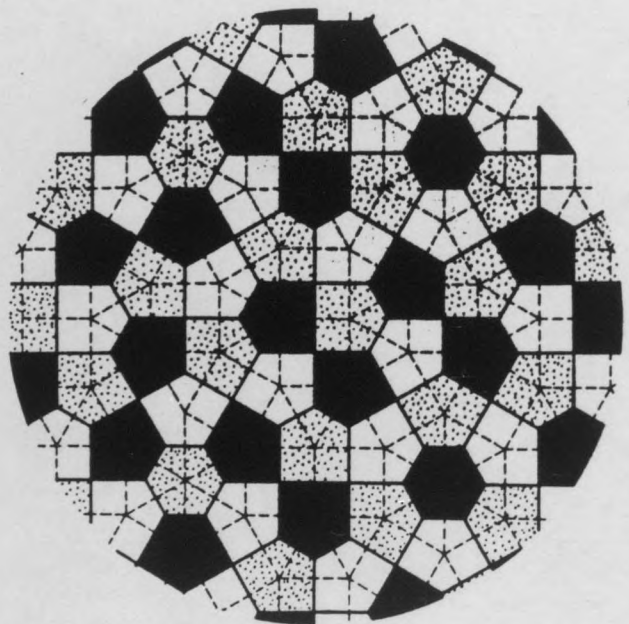
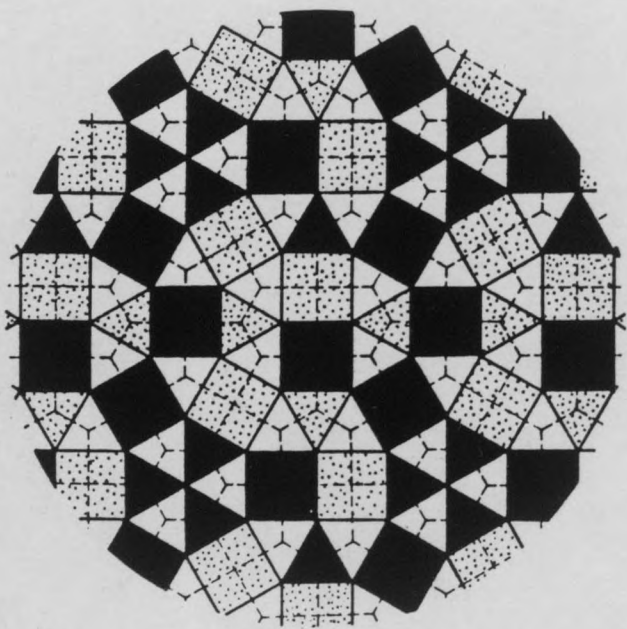
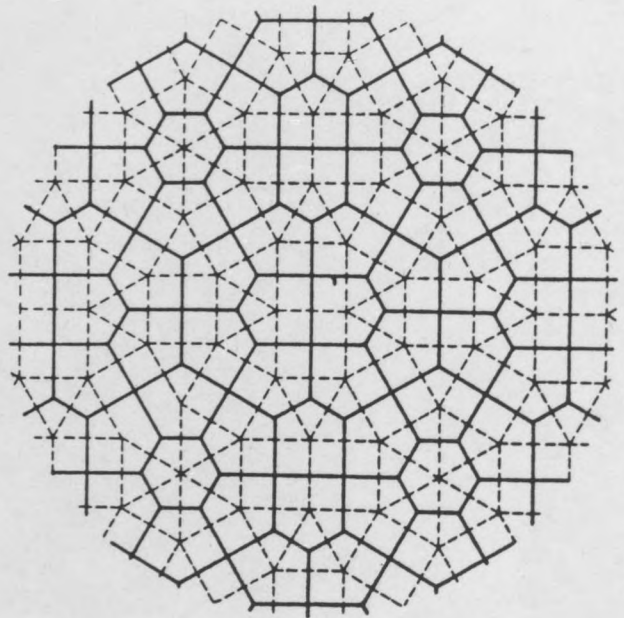
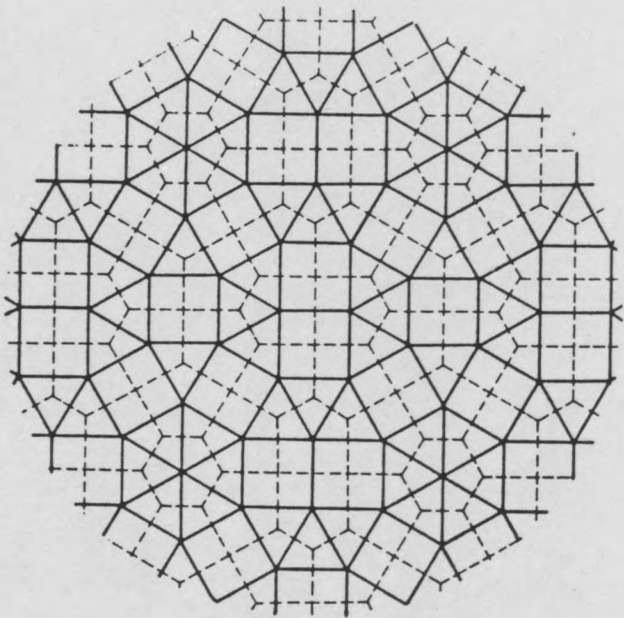
333333
33344
33434



3 3 3 3 3 3

3 3 3 4 4

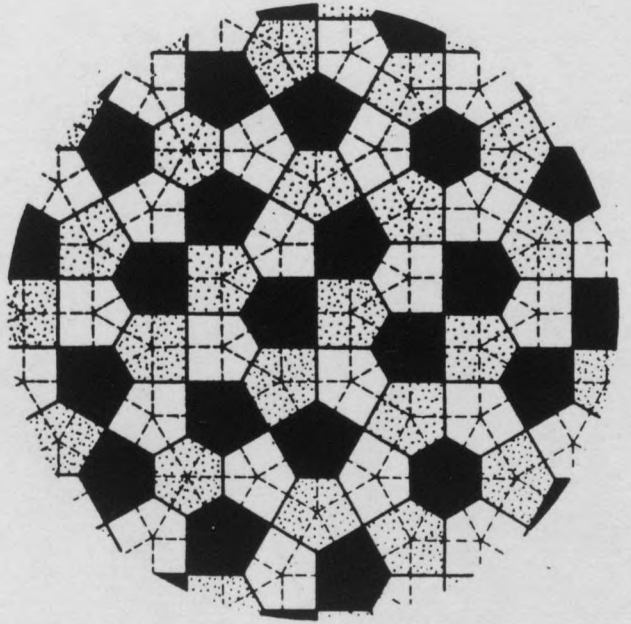
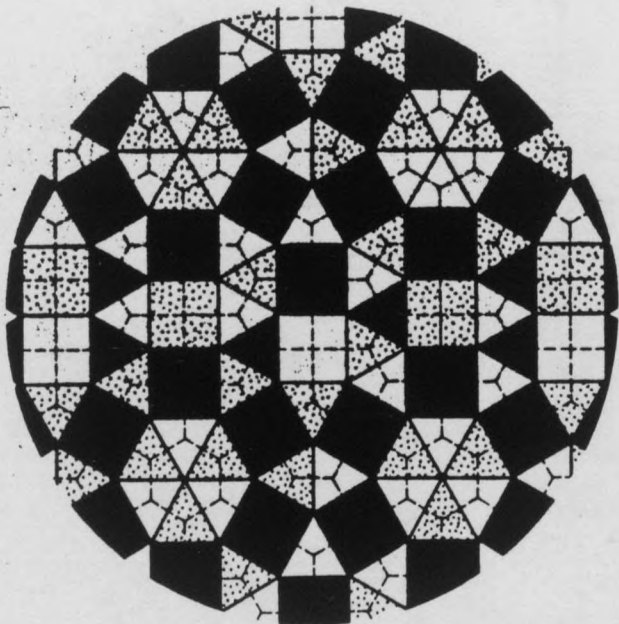
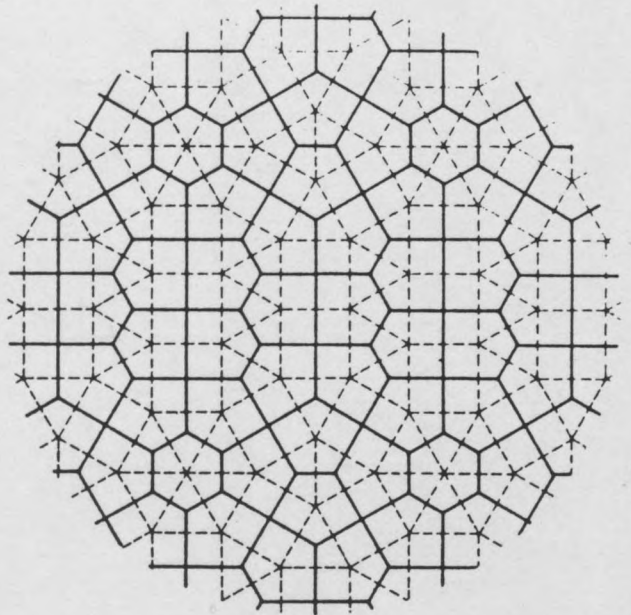
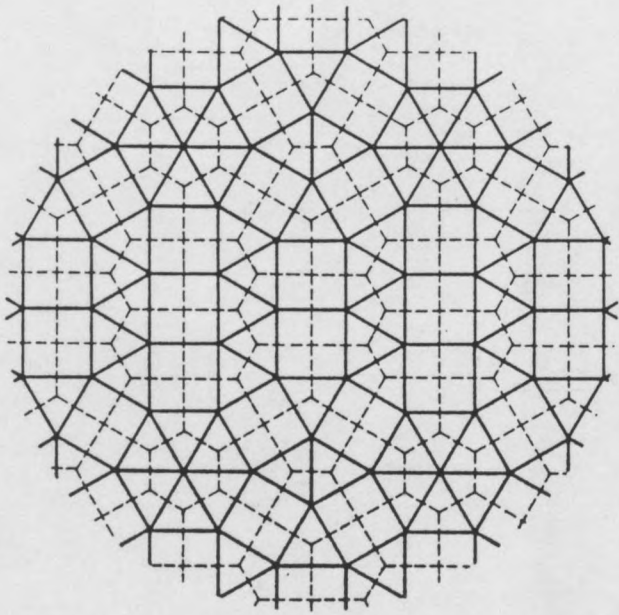
3 3 4 3 4



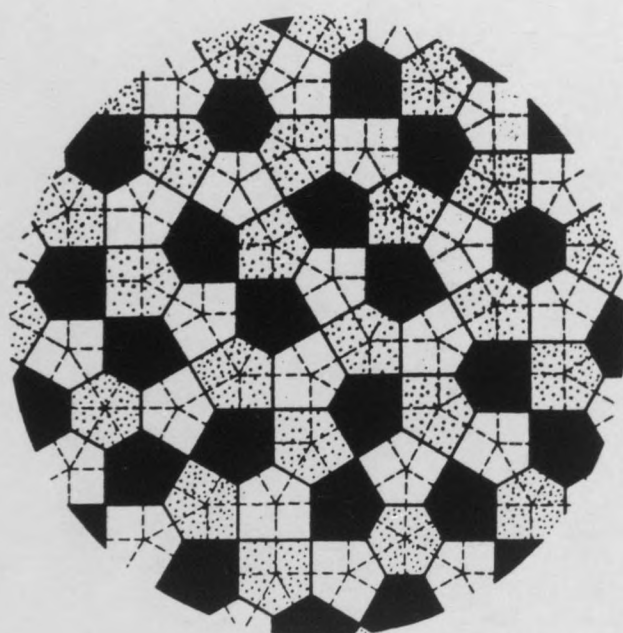
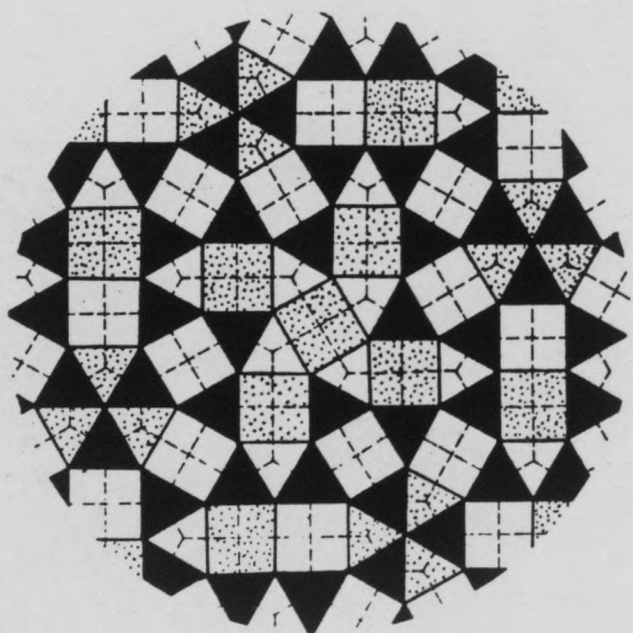
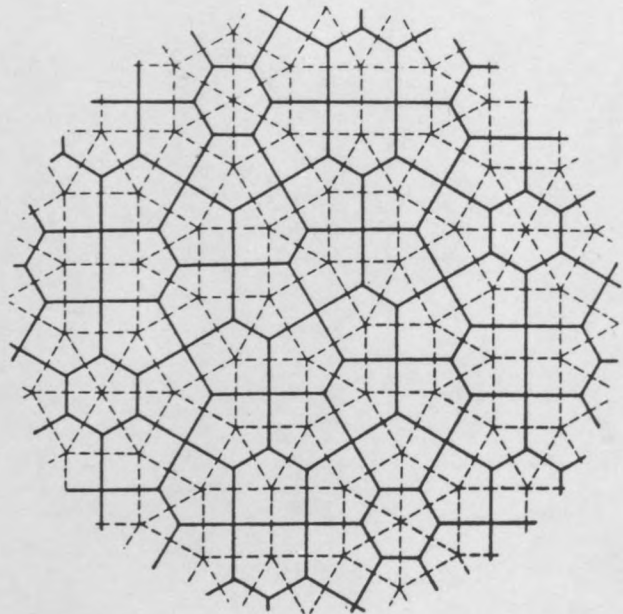
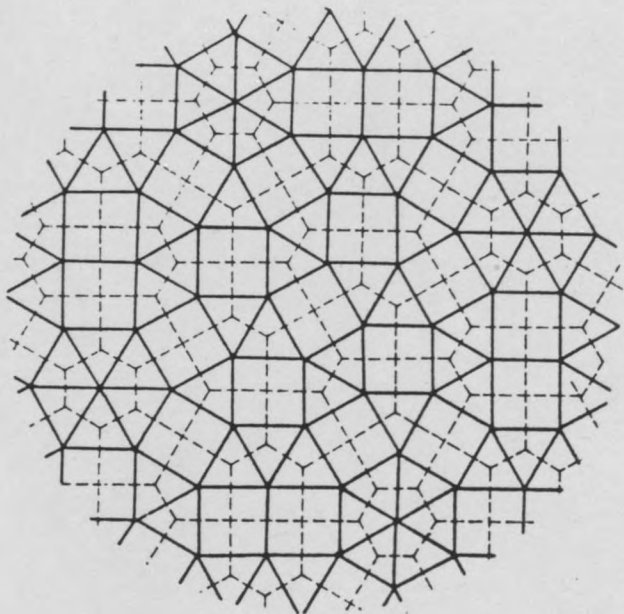
3 3 3 3 3 3

3 3 3 4 4

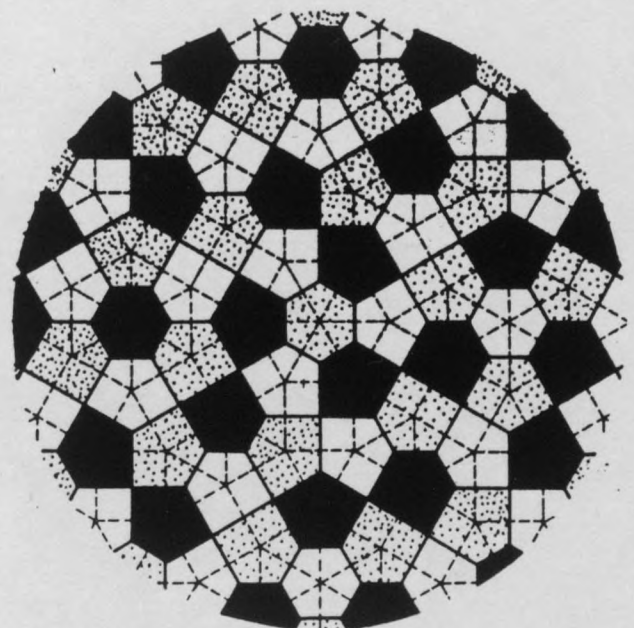
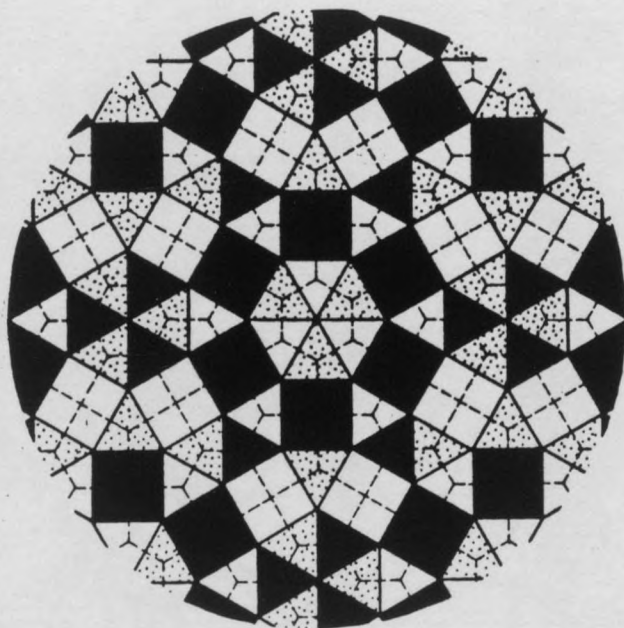
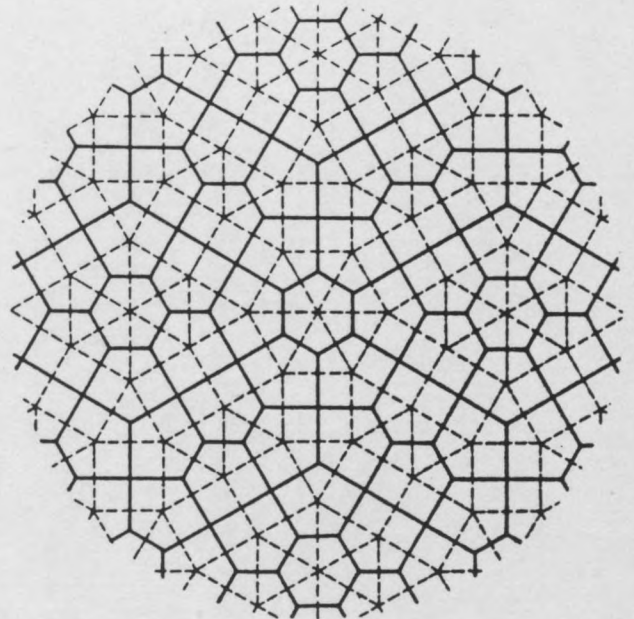
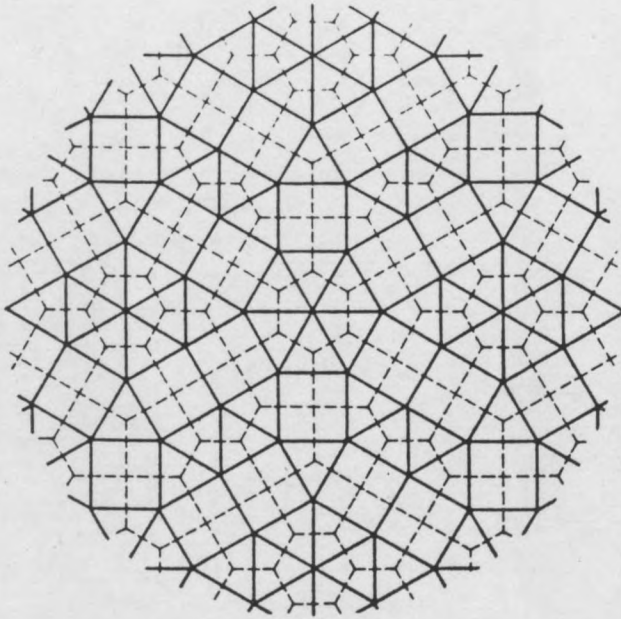
3 3 4 3 4



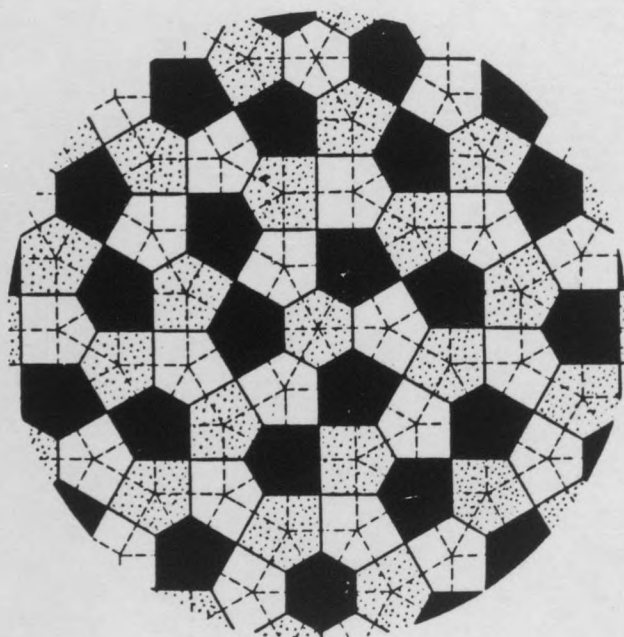
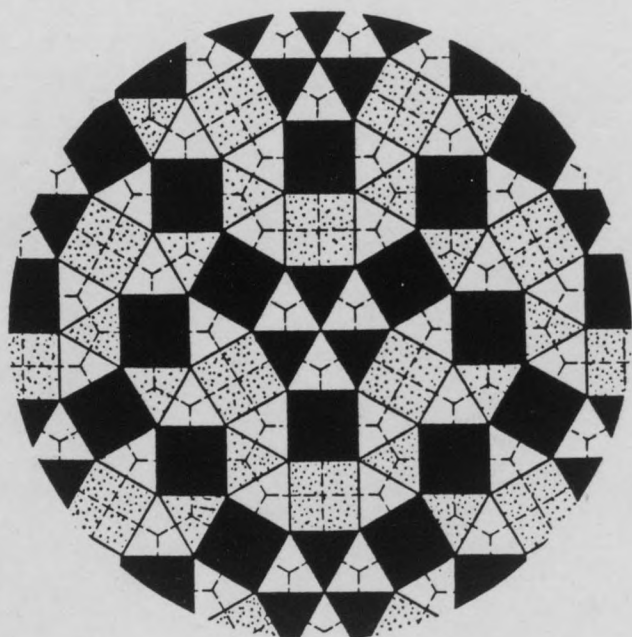
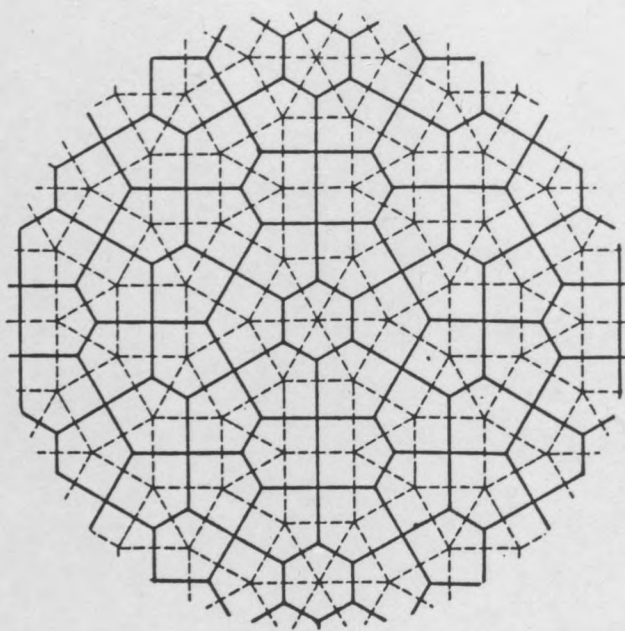
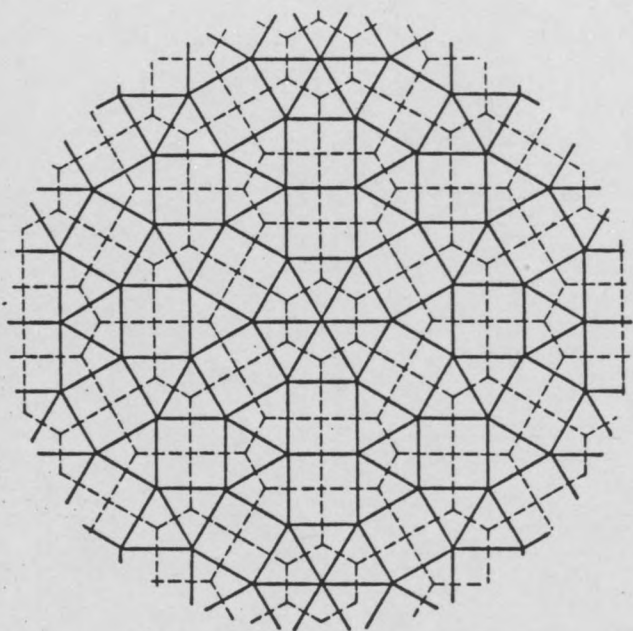
333333
33344
33434



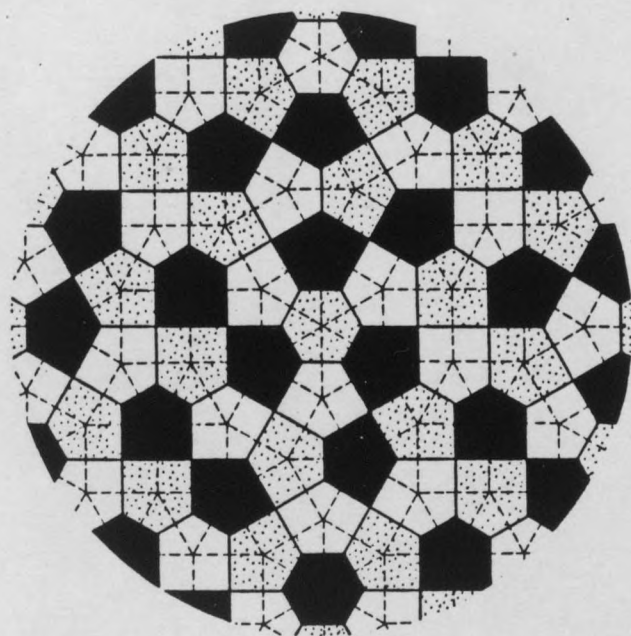
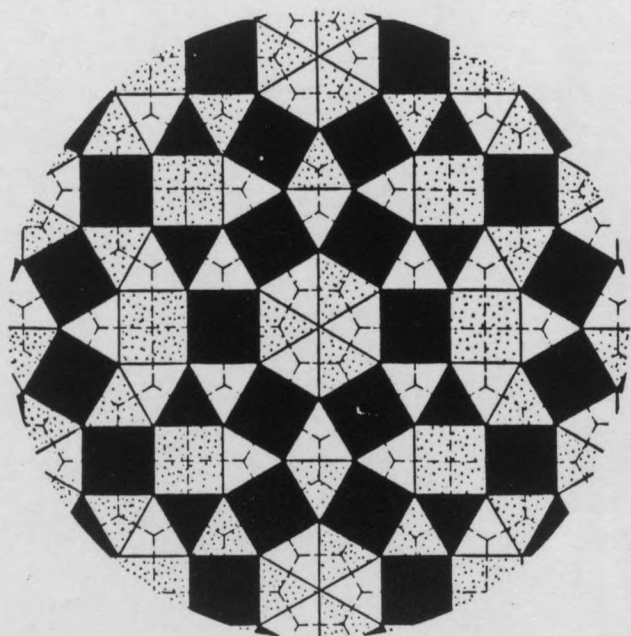
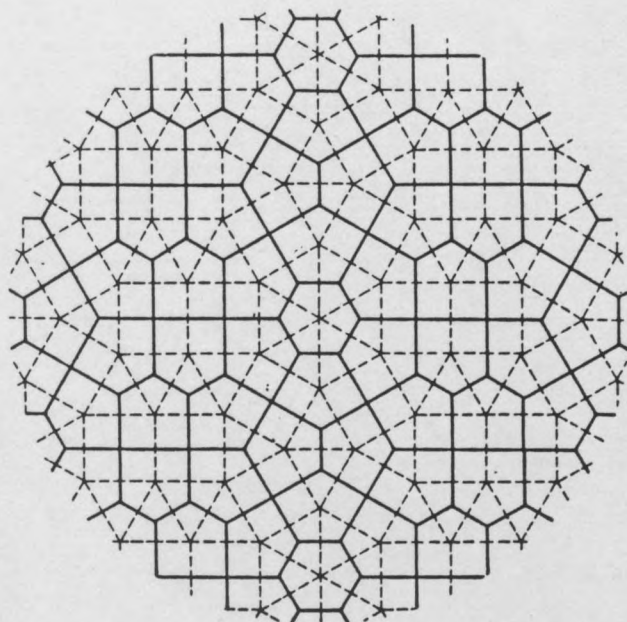
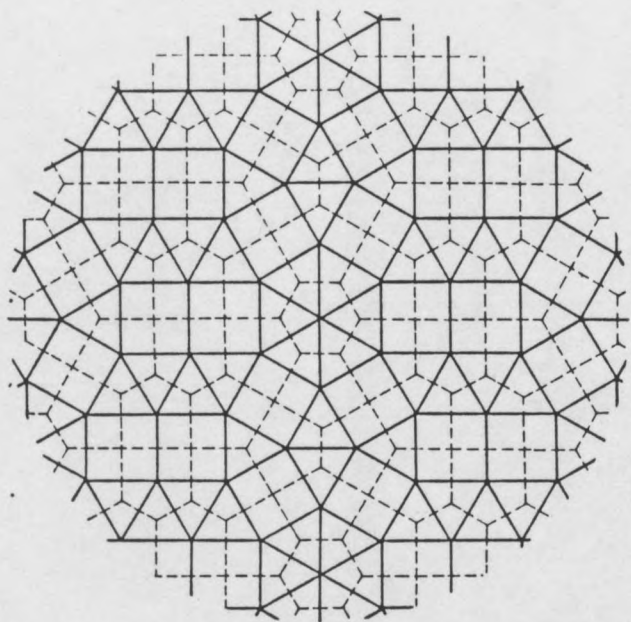
3 3 3 3 3 3
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4



333333
33344
33434



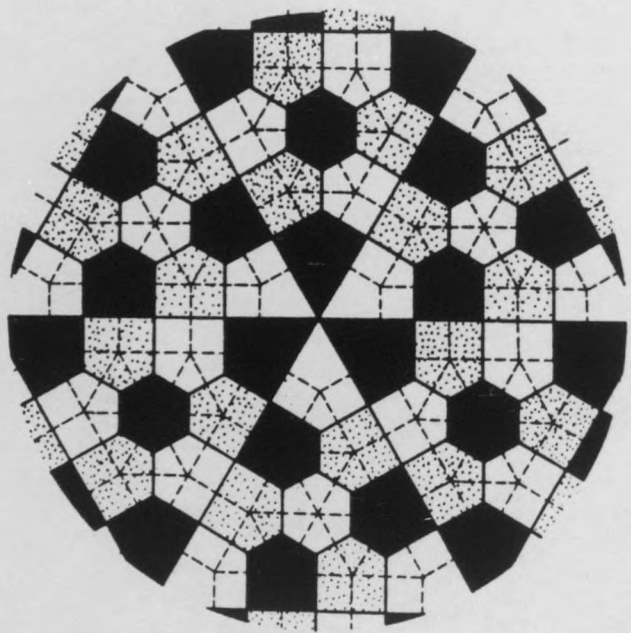
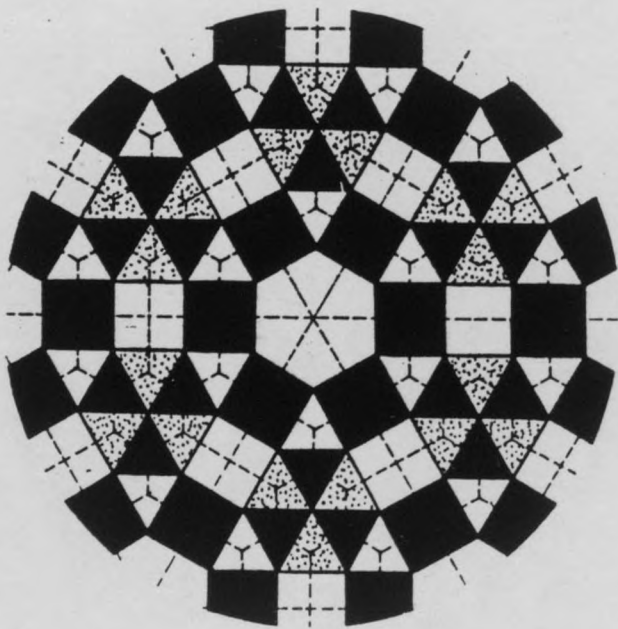
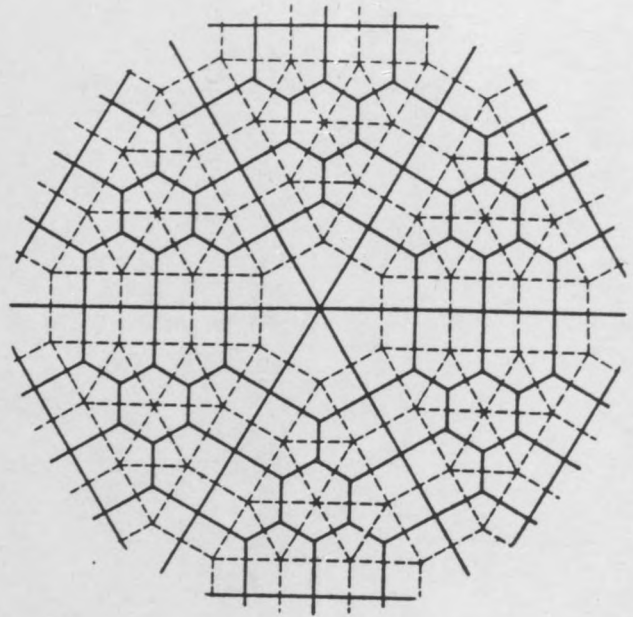
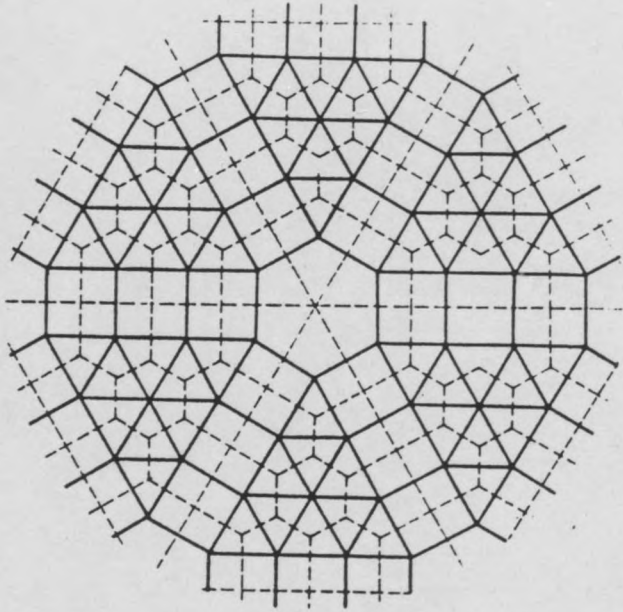
3 3 3 3 3 3
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4



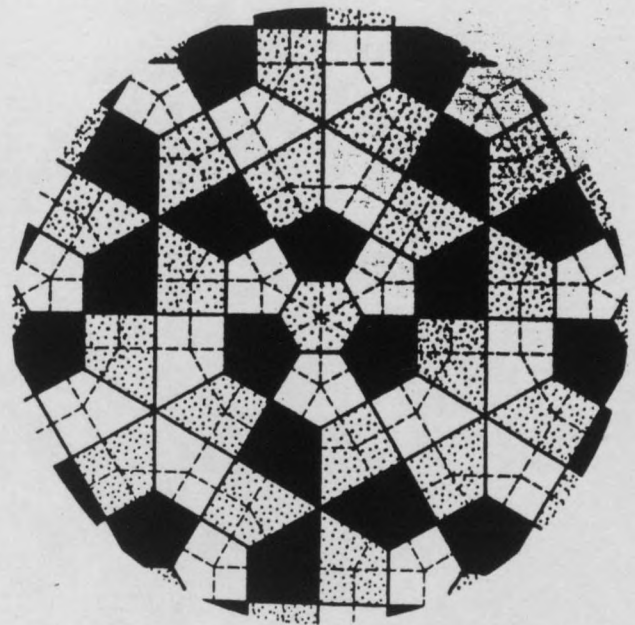
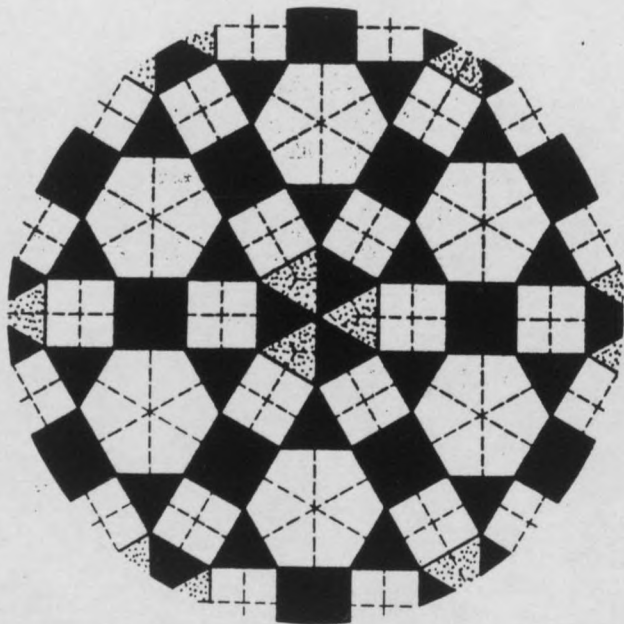
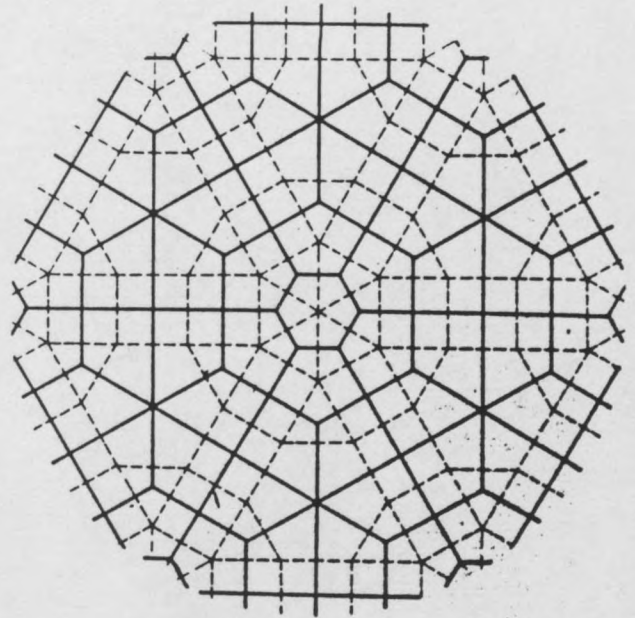
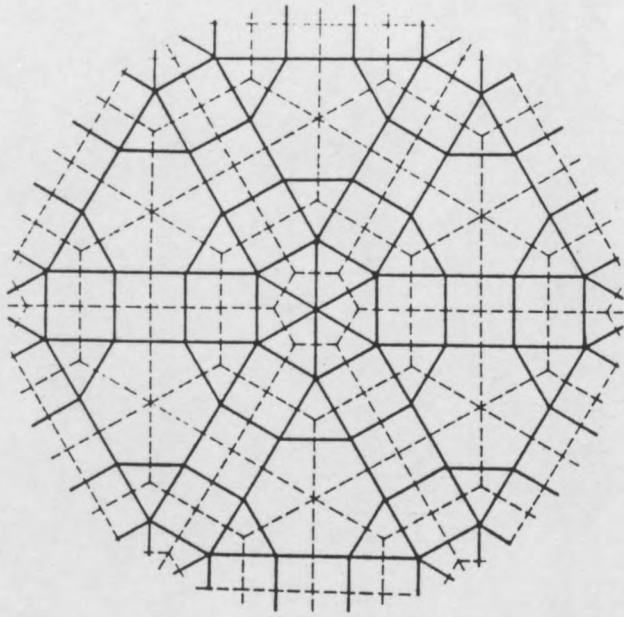
3 3 3 3 3 3

3 3 3 4 4

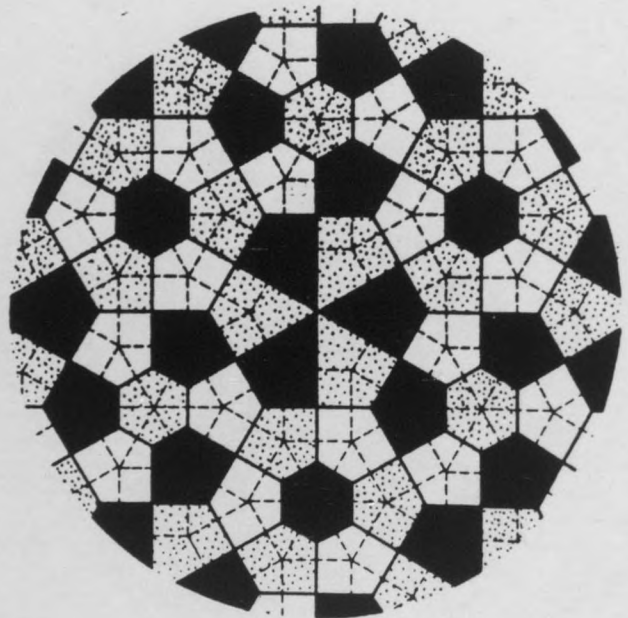
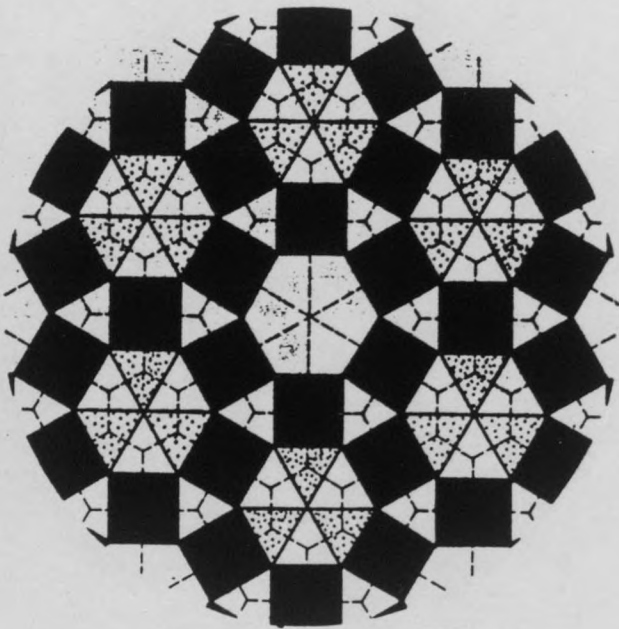
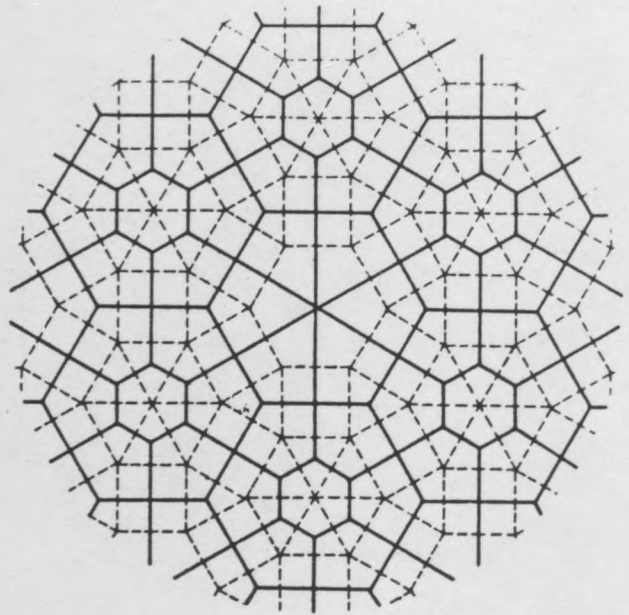
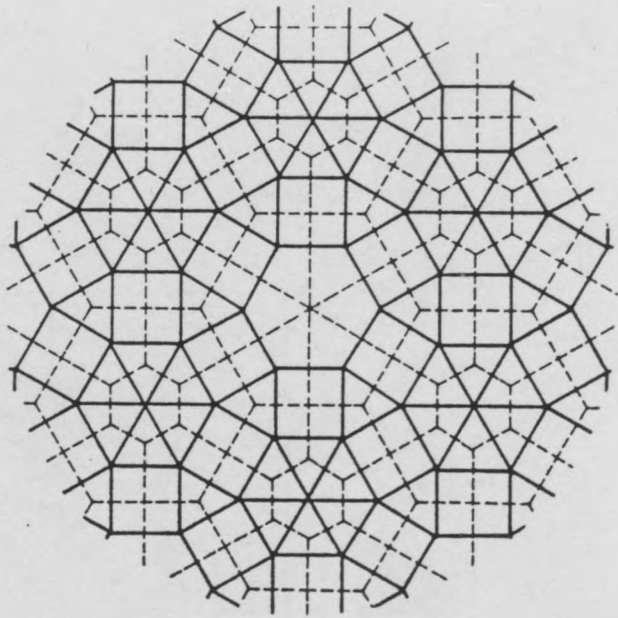
3 3 4 3 4



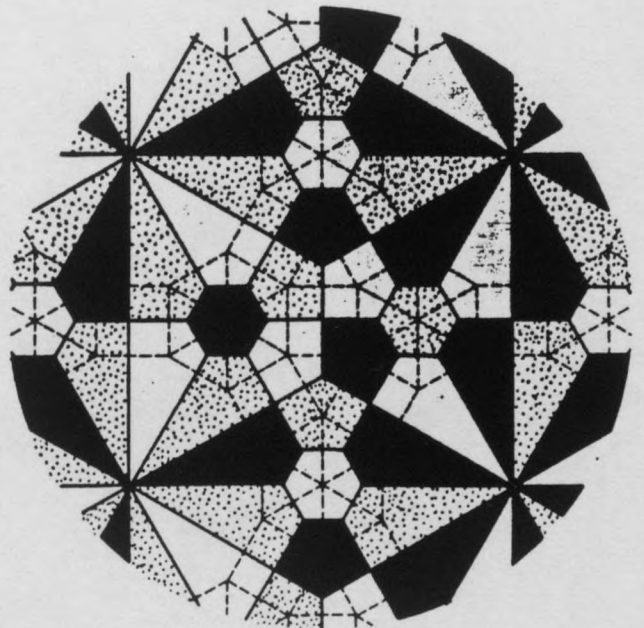
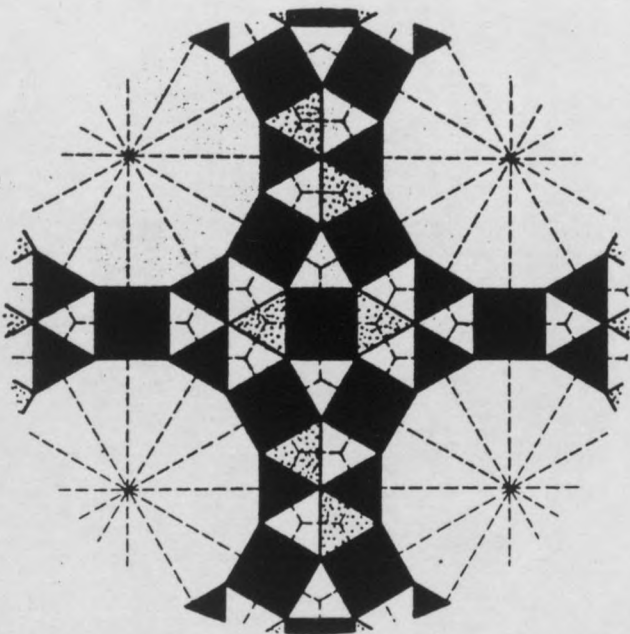
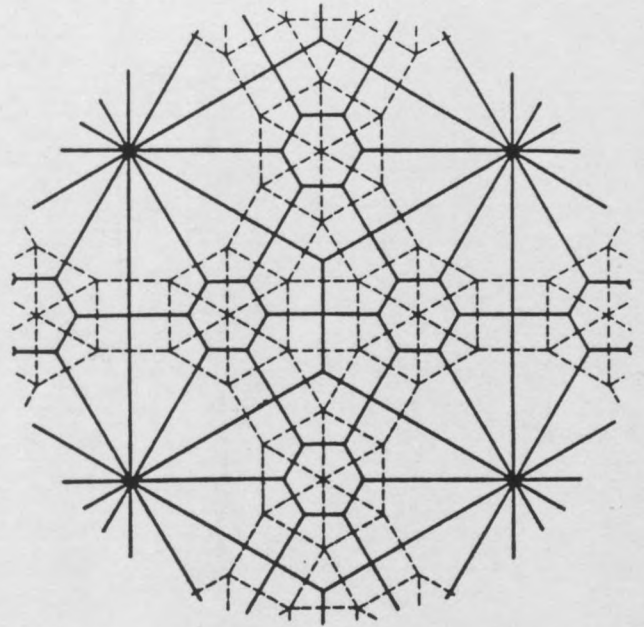
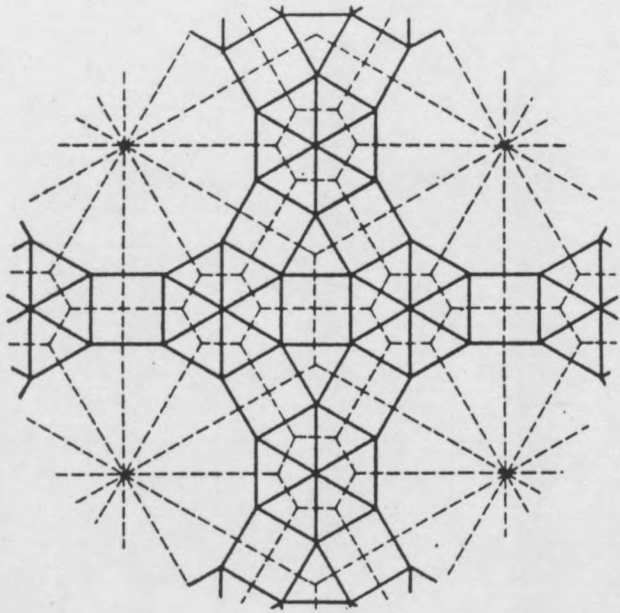
333333
33344
3464



3 3 3 3 3 3
3 3 4 3 4
3 4 4 6 °



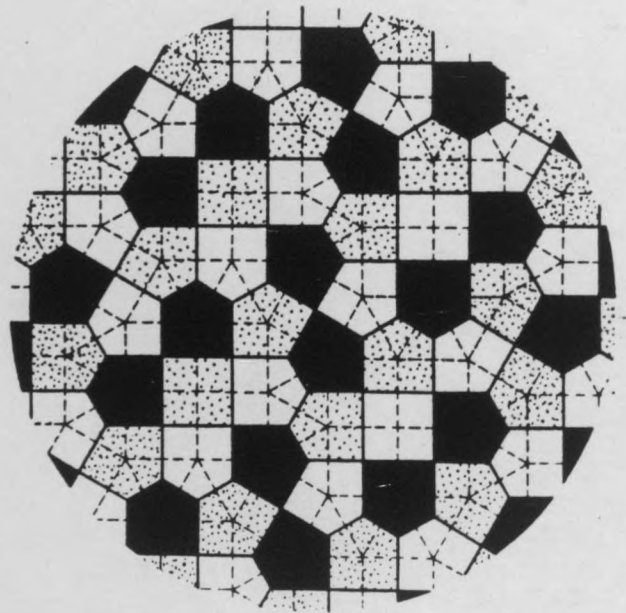
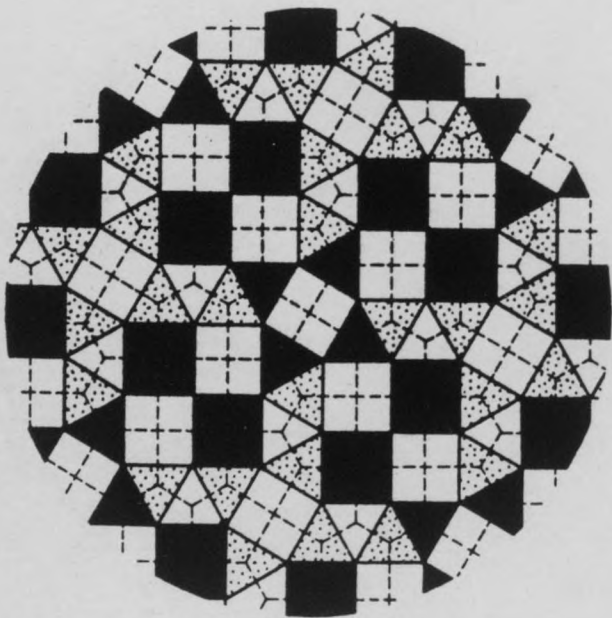
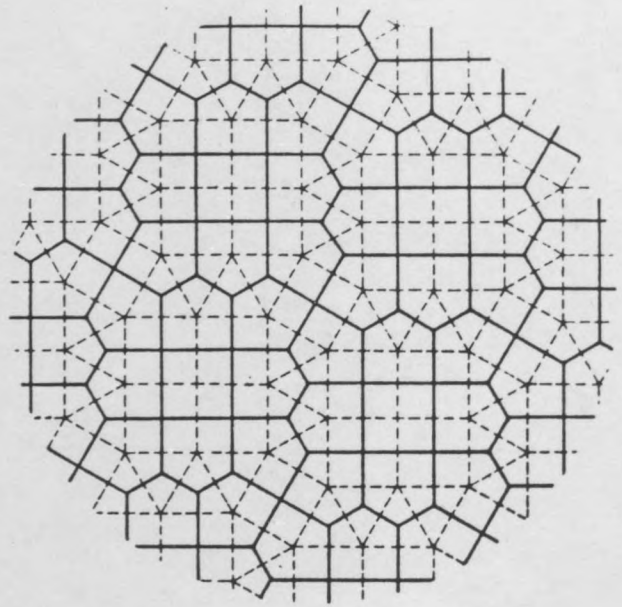
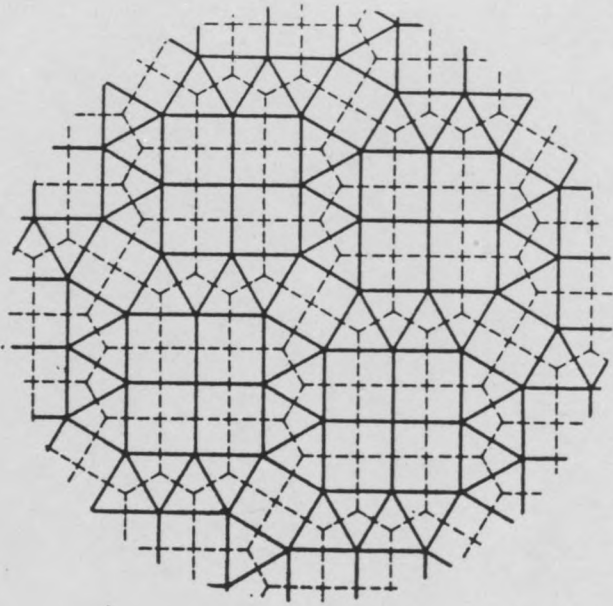
3 3 3 3 3 3
3 3 4 3 4
3 4 6 4



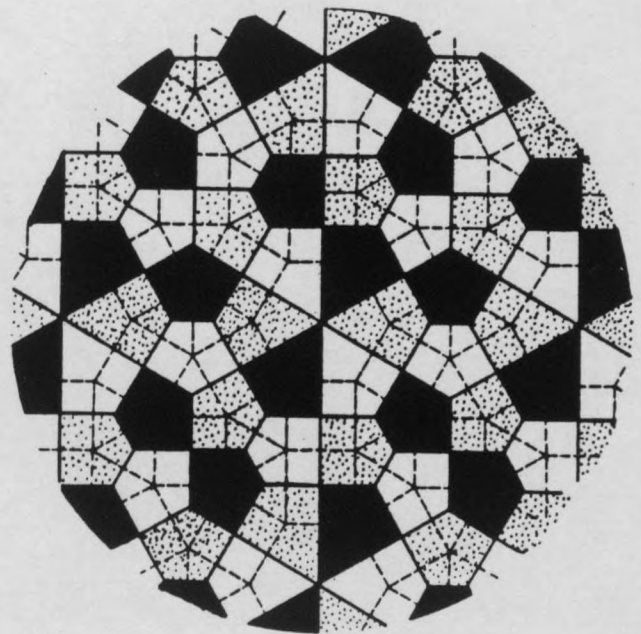
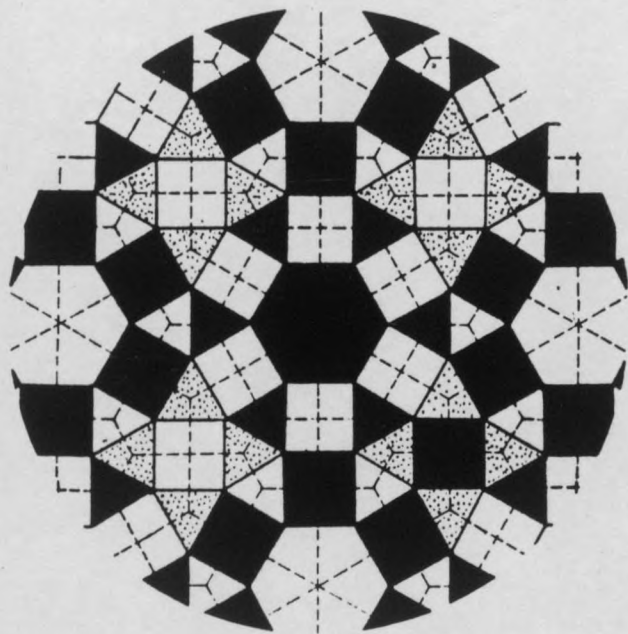
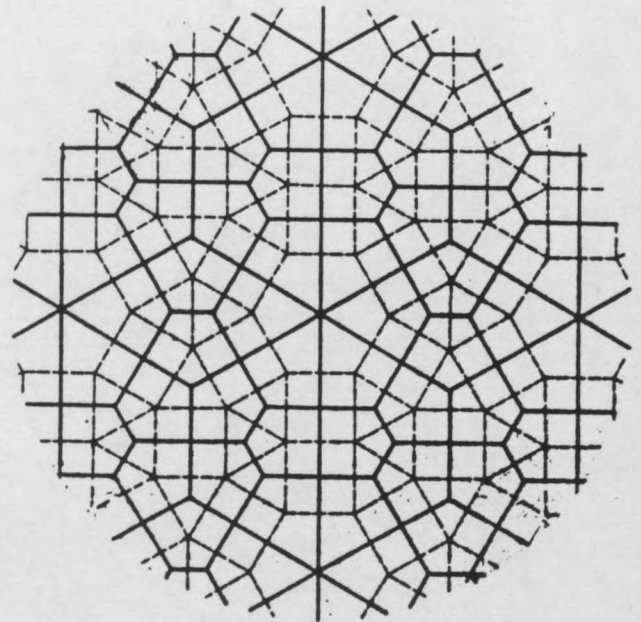
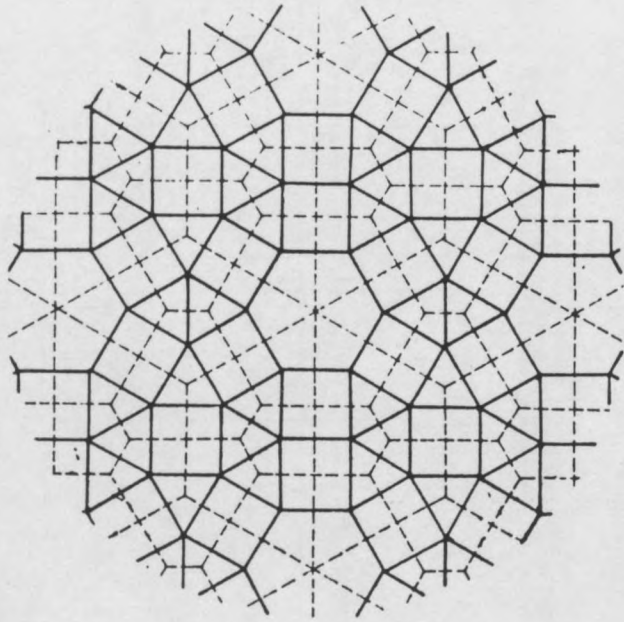
3 3 3 3 3 3

3 3 4 3 4

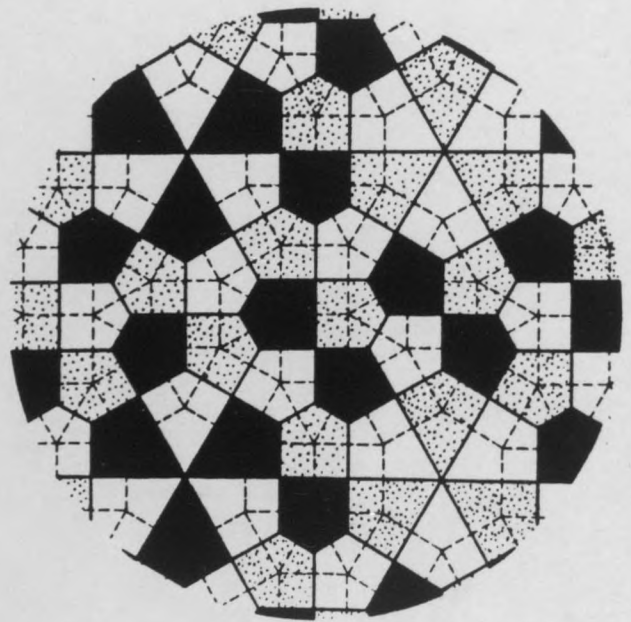
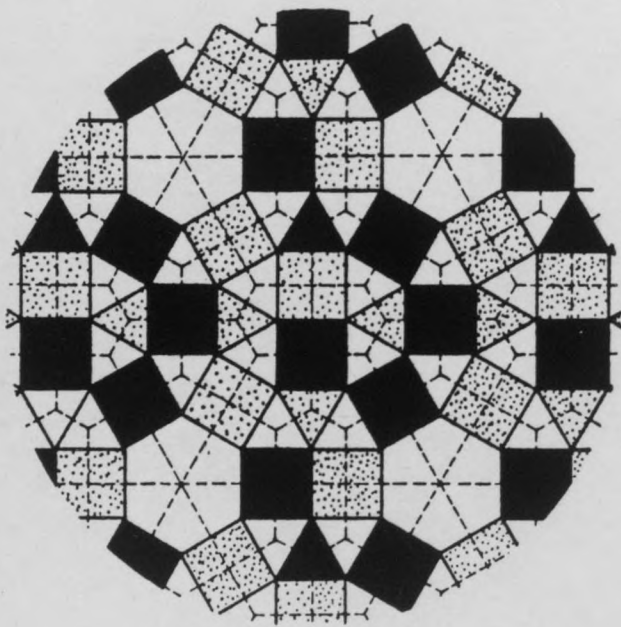
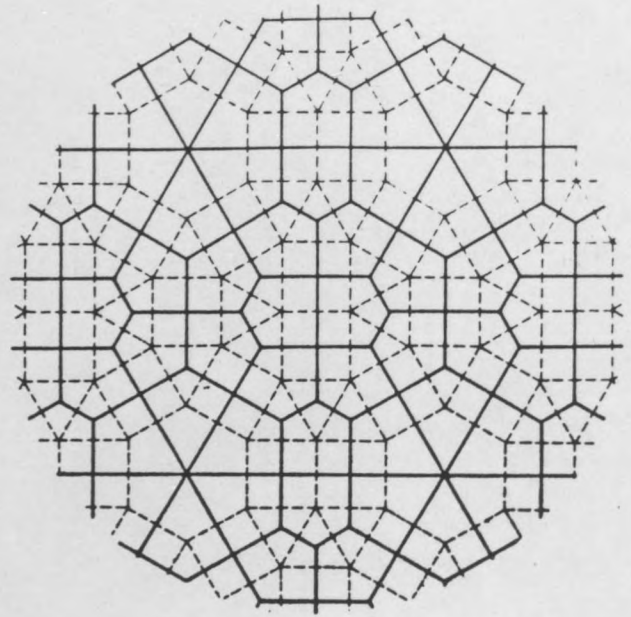
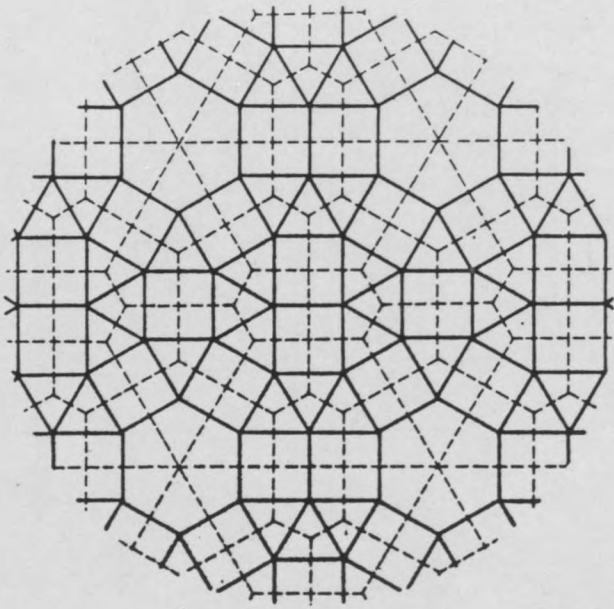
3 3 4 12^o



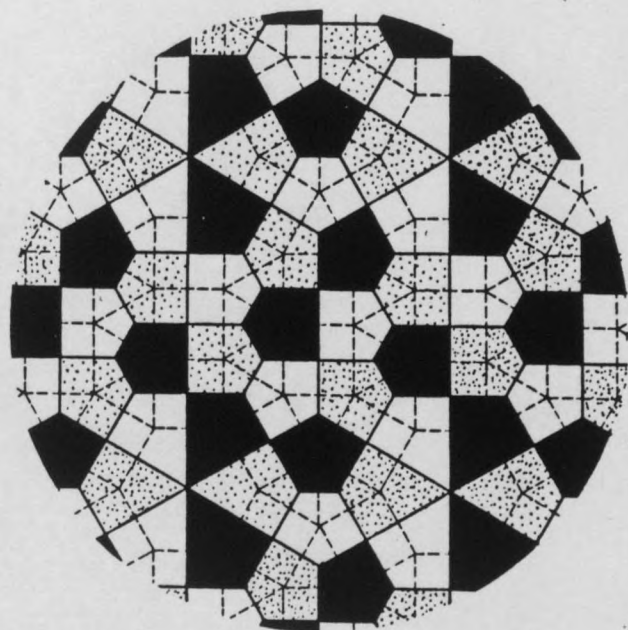
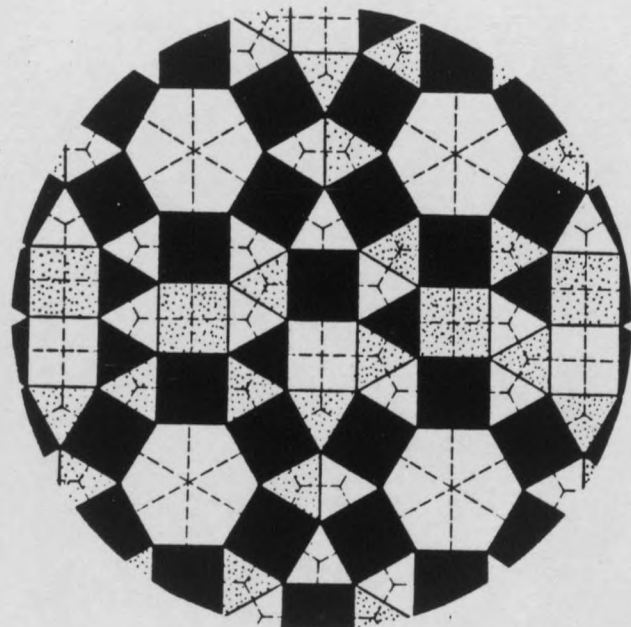
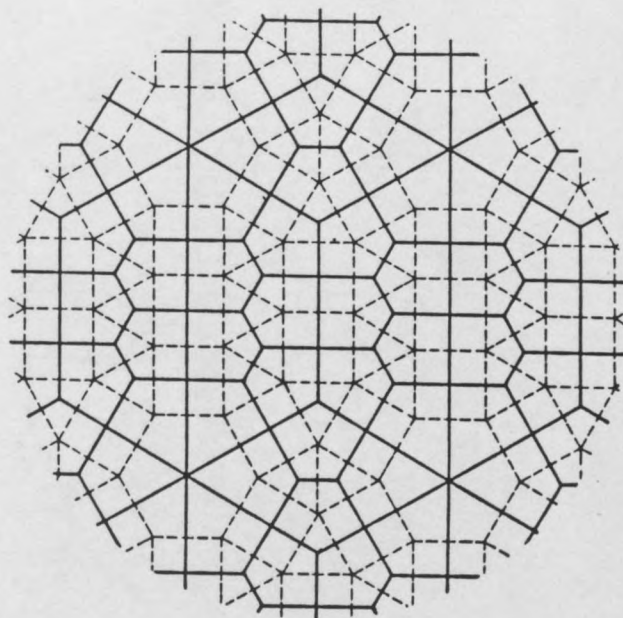
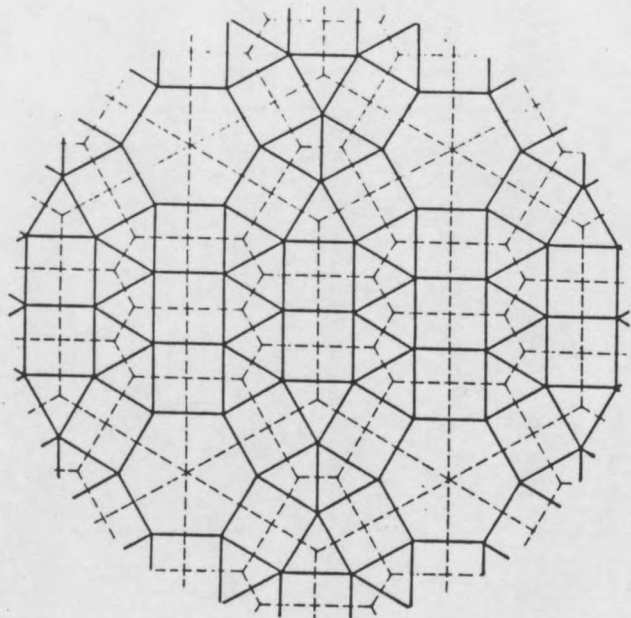
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
4 4 4 4



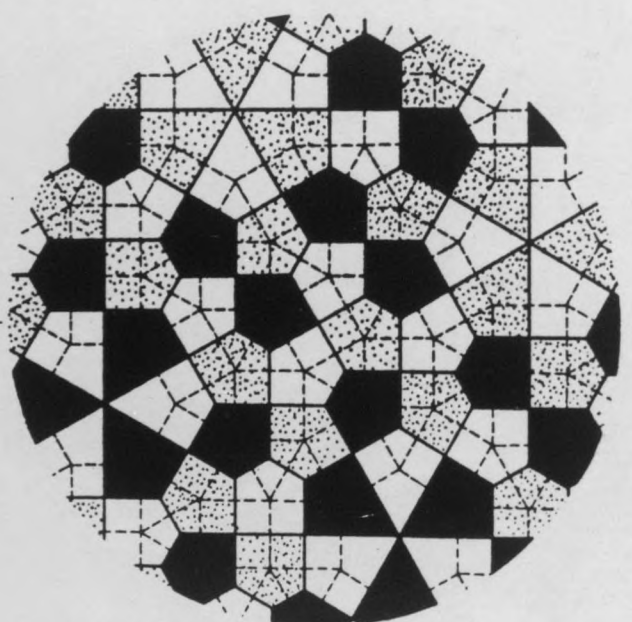
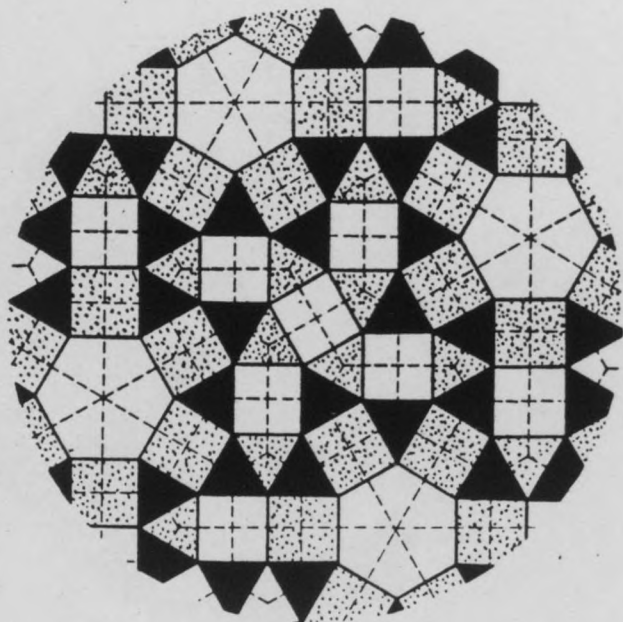
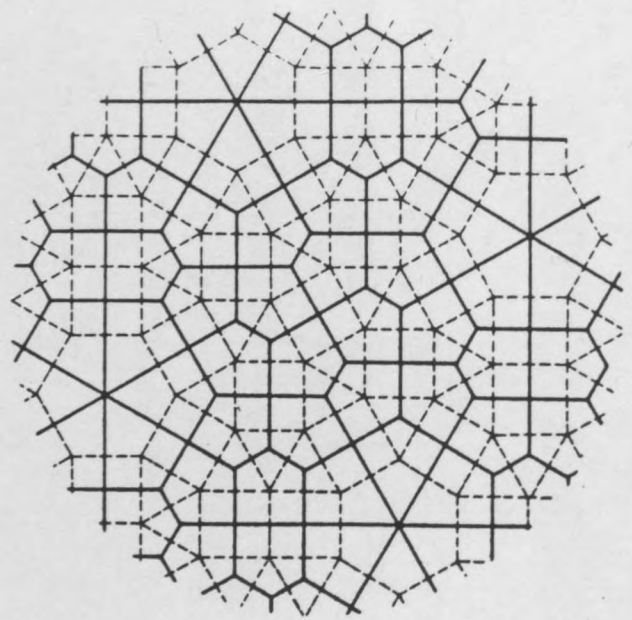
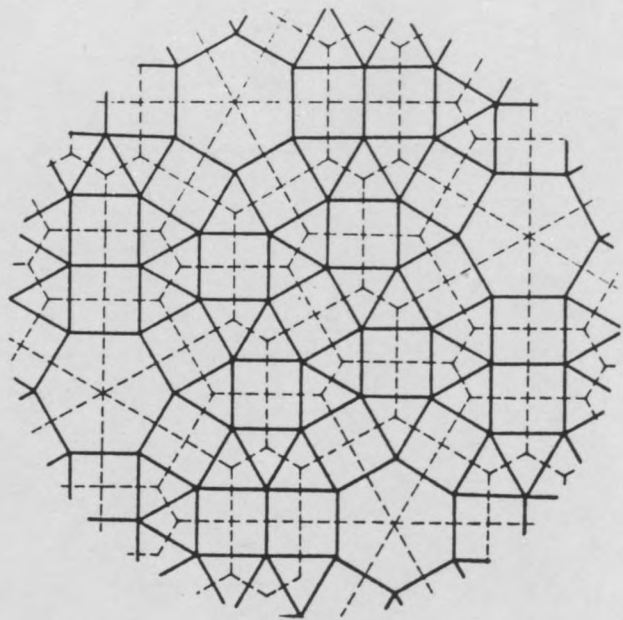
33344
33434
3464



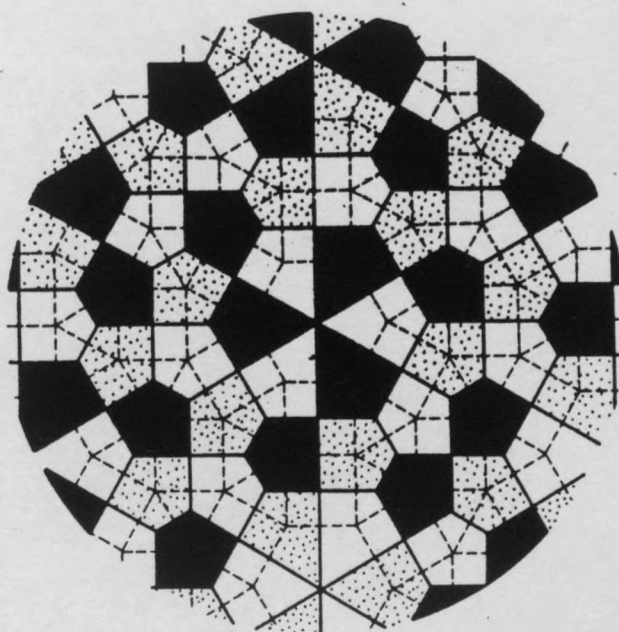
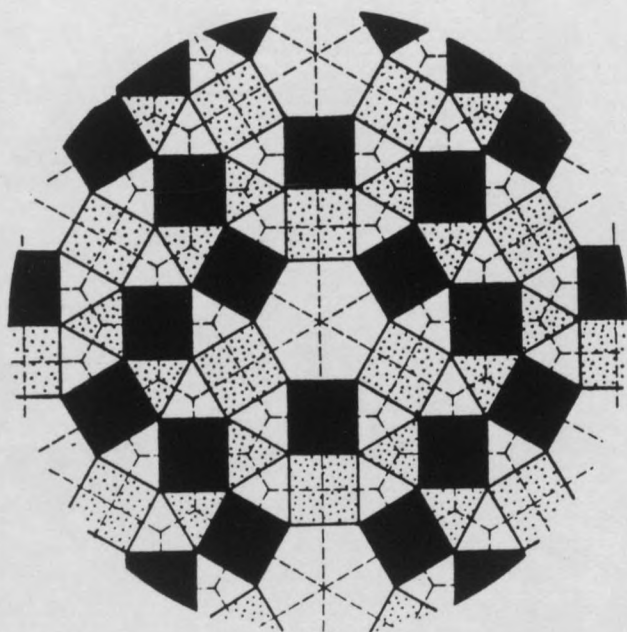
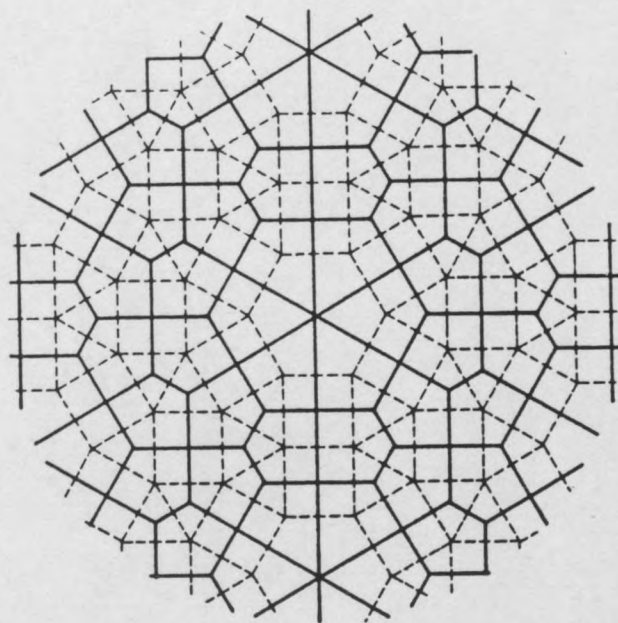
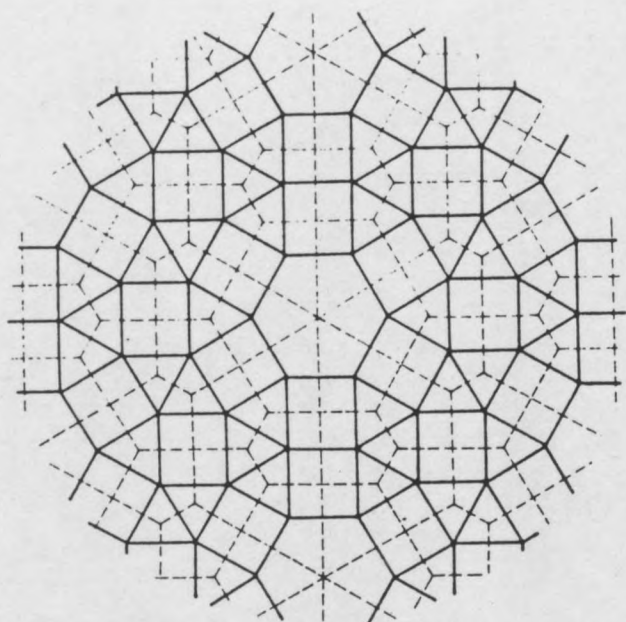
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
3 4 6 4



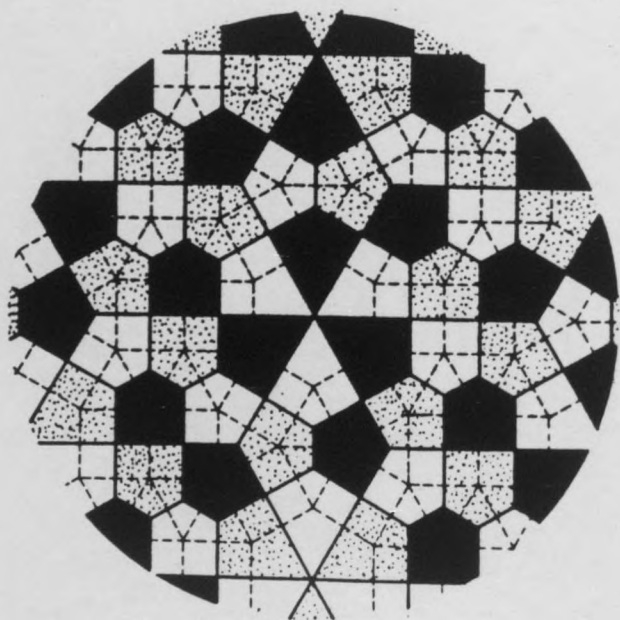
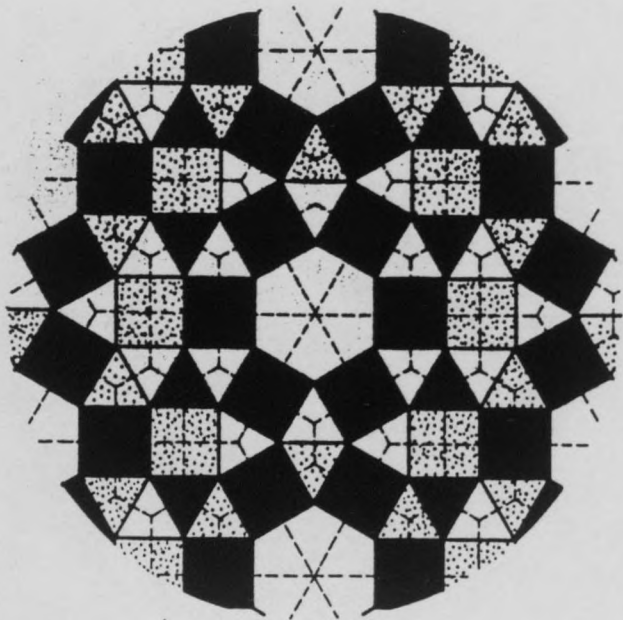
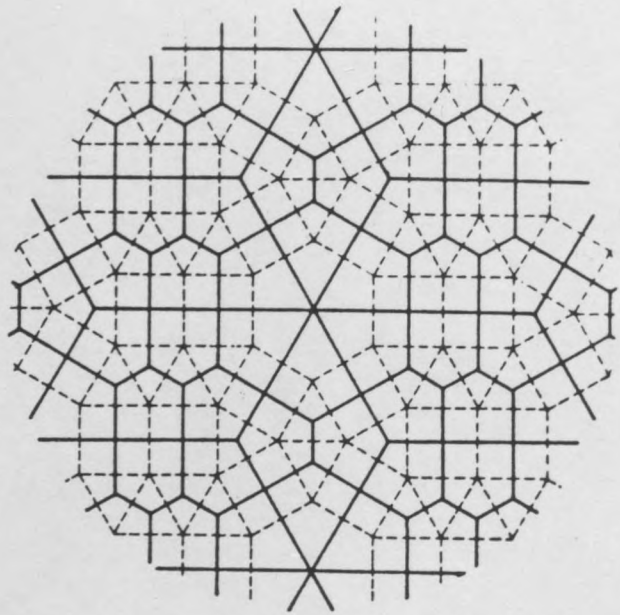
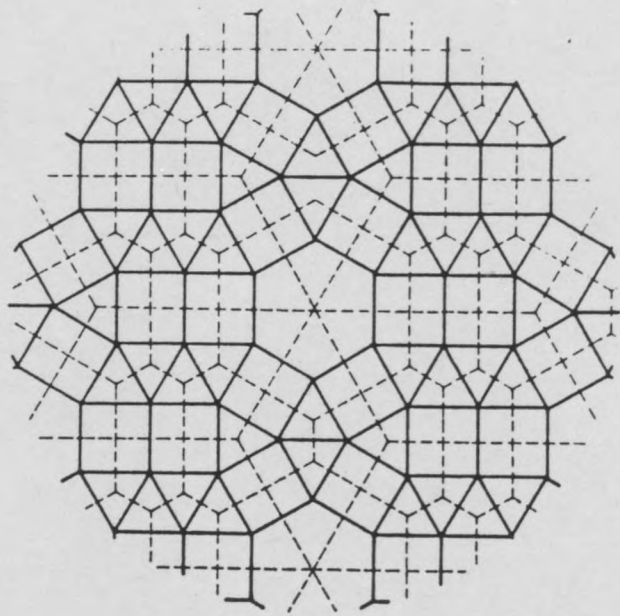
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
3 4 6 4



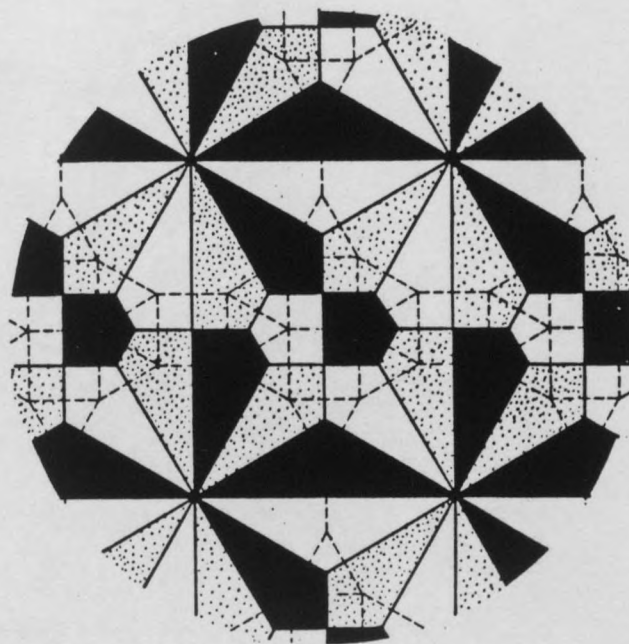
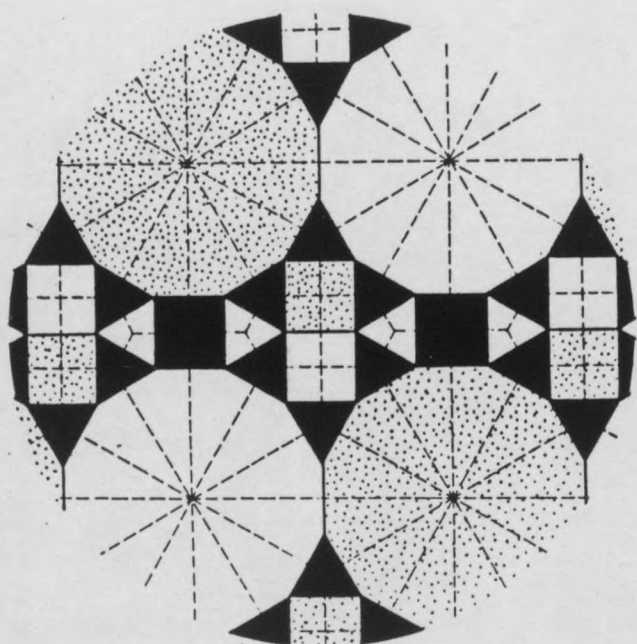
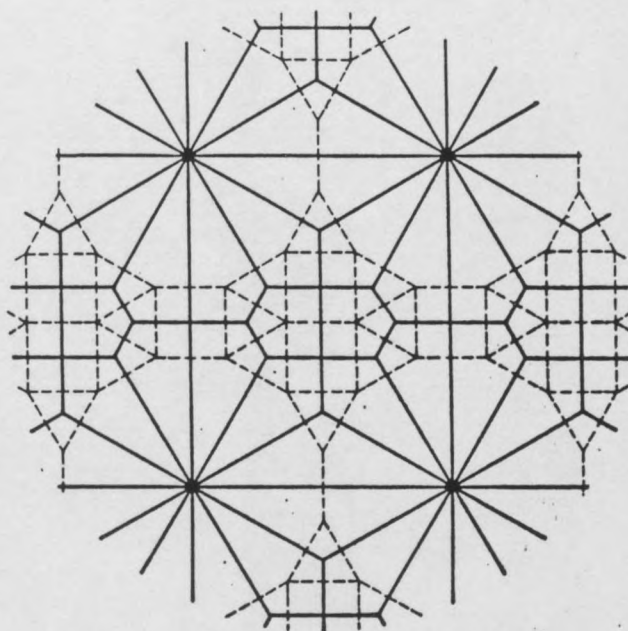
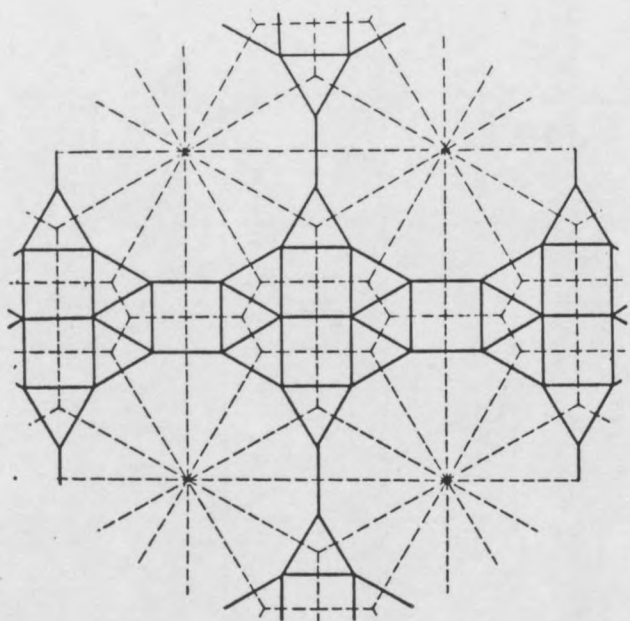
33344
33434
3464



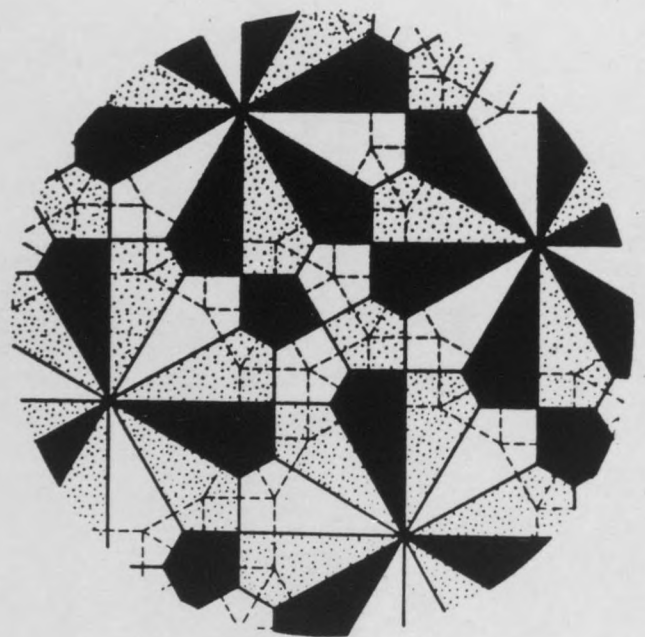
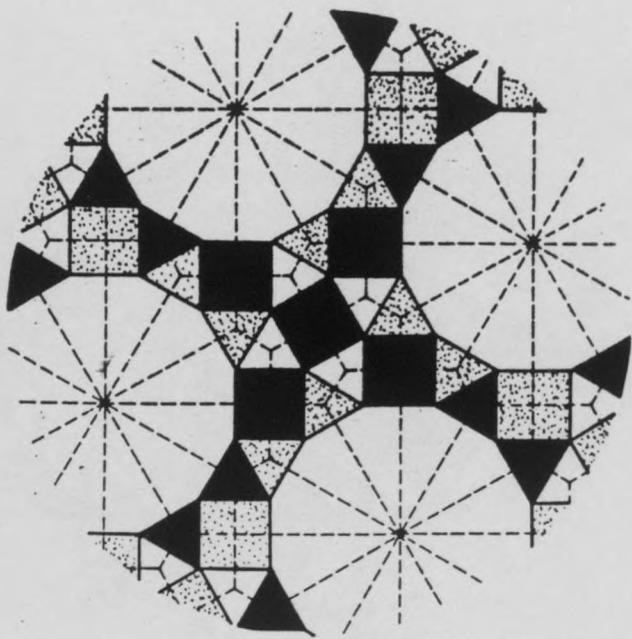
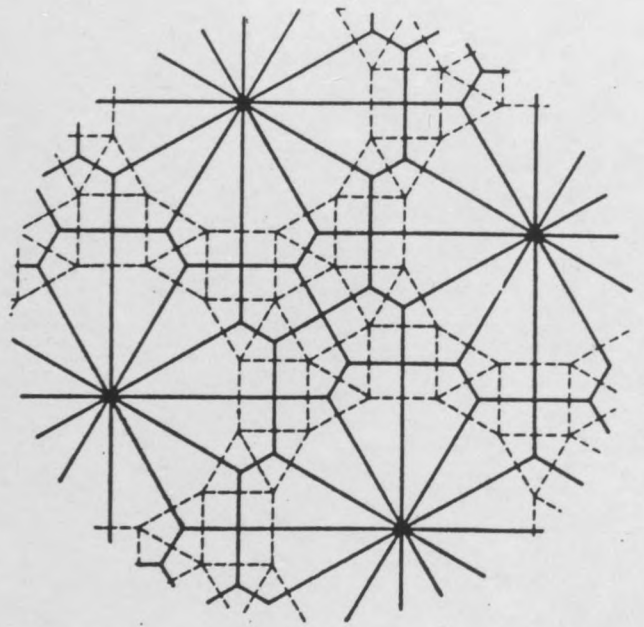
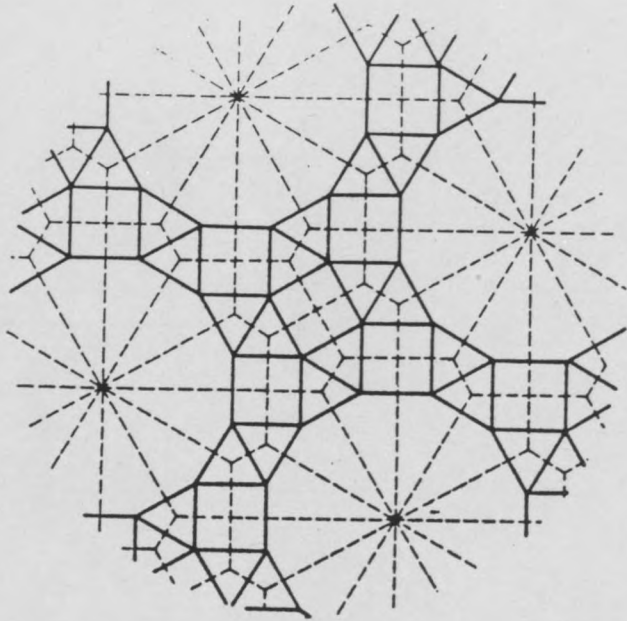
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
3 4 6 4



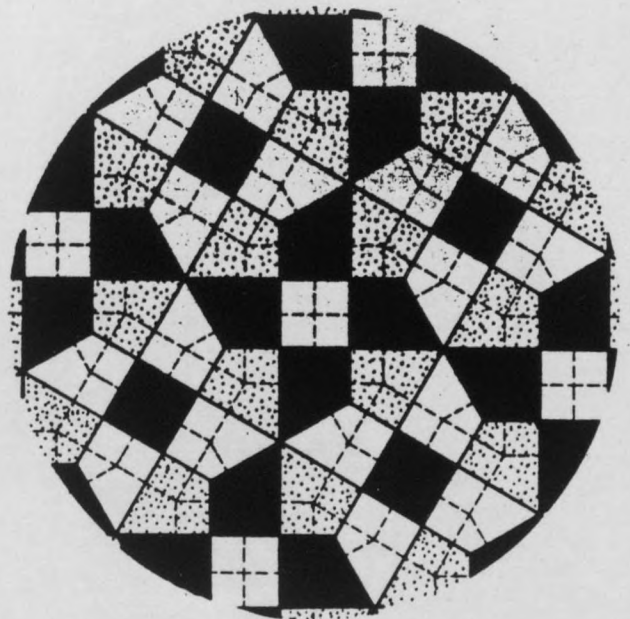
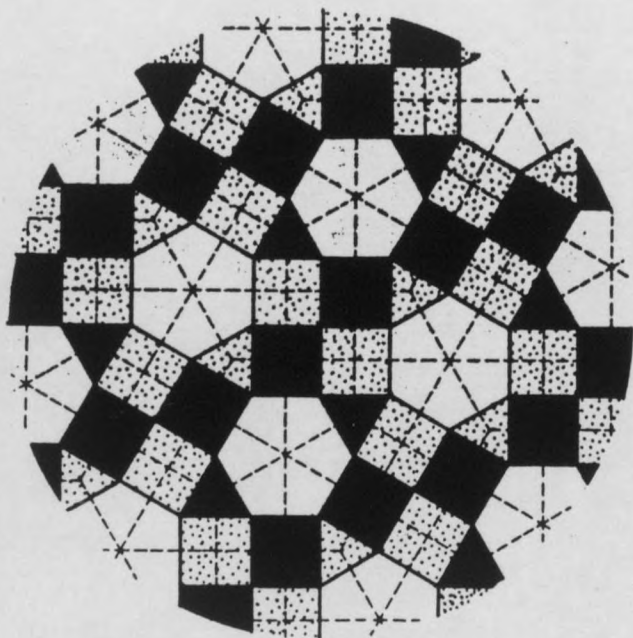
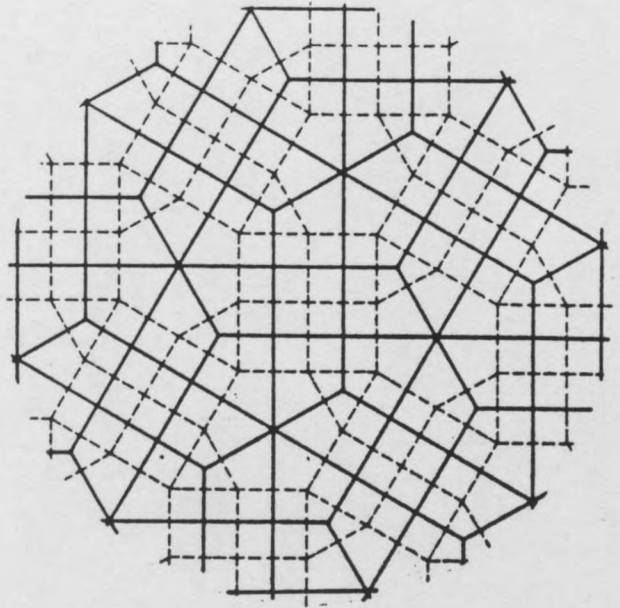
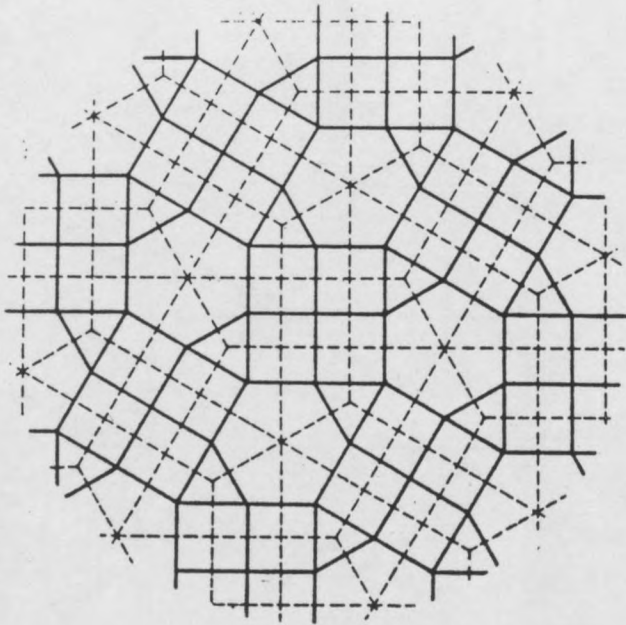
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
3 4 6 4



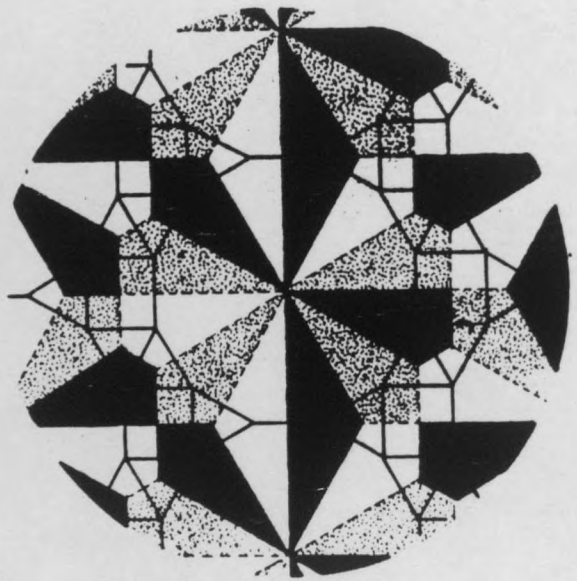
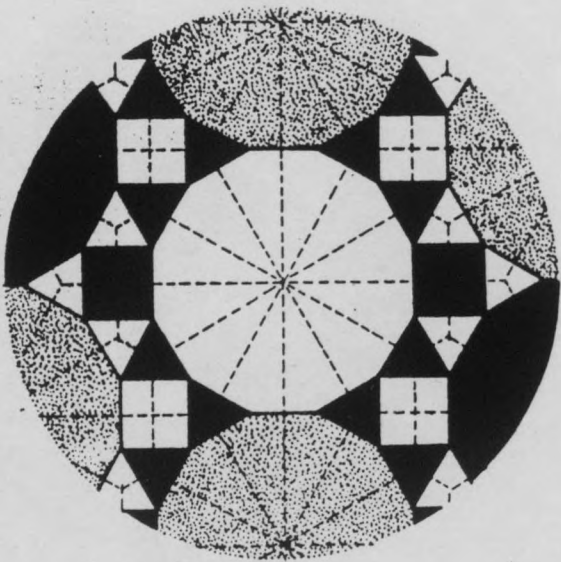
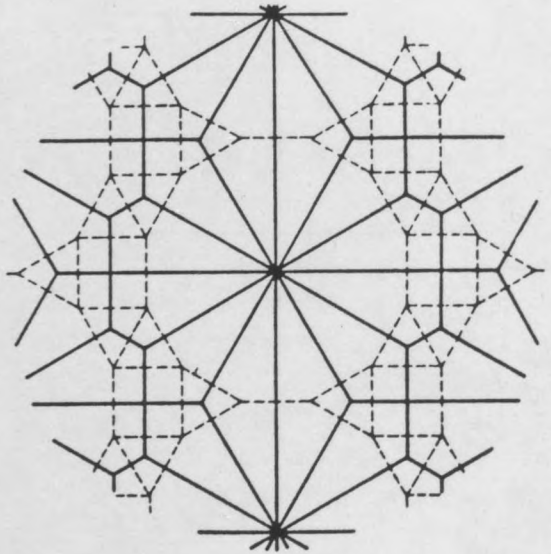
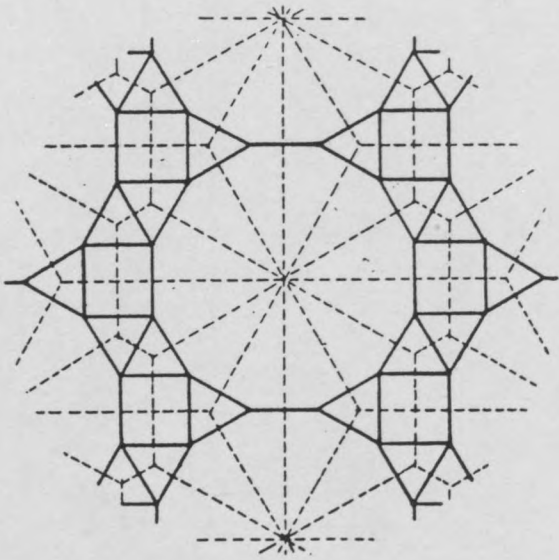
3 3 3 4 4
 3 3 4 12^o
 3 12 12



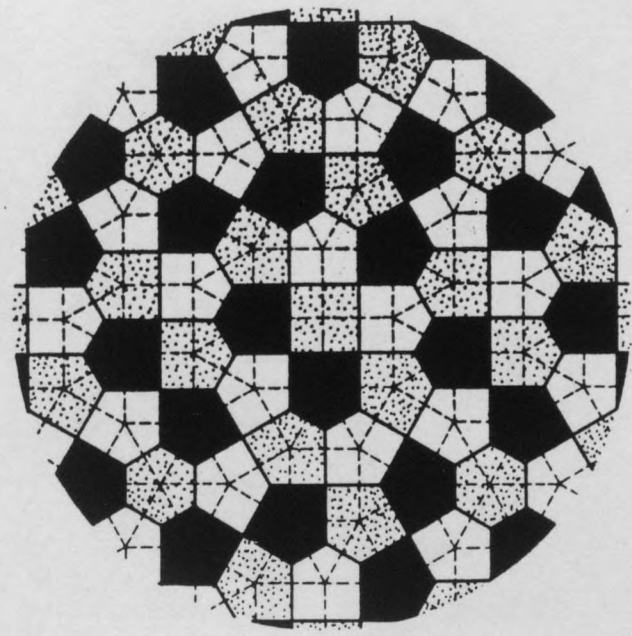
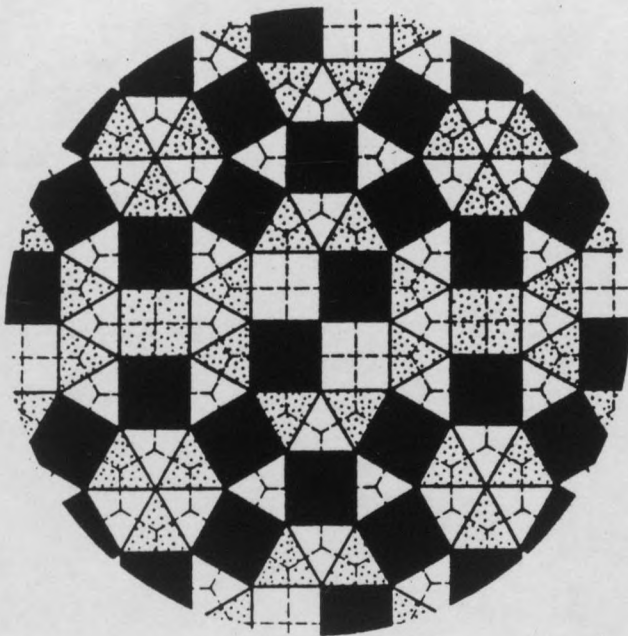
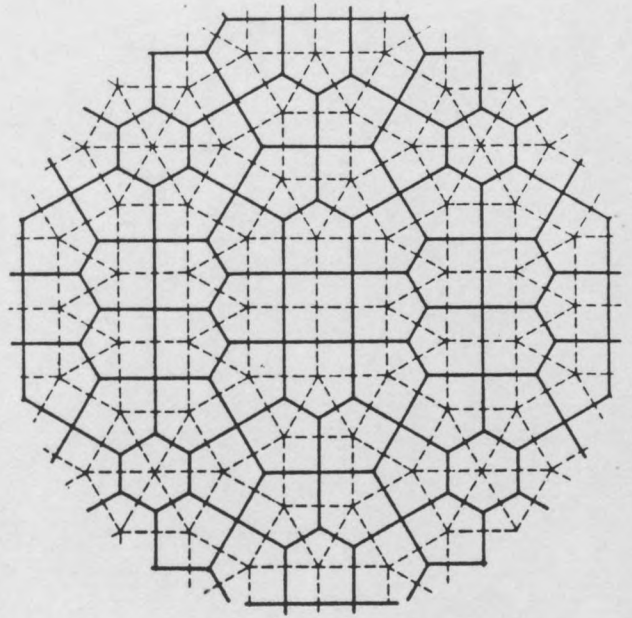
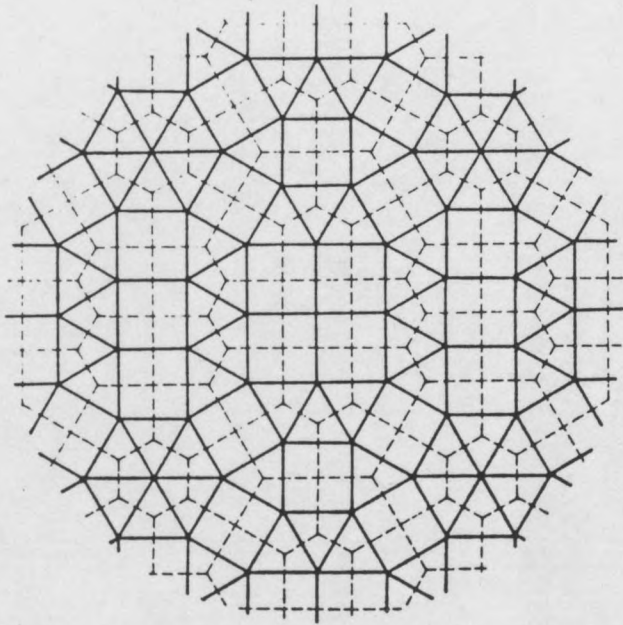
3 3 4 3 4
 3 3 4 12^o
 3 4 3 12



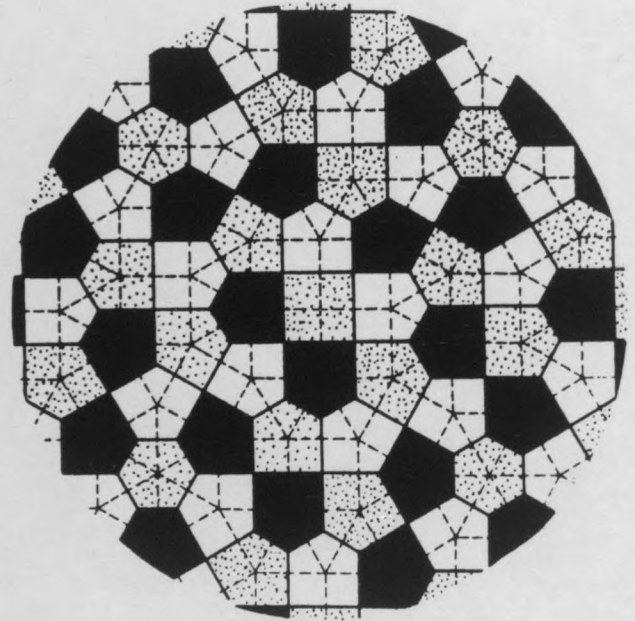
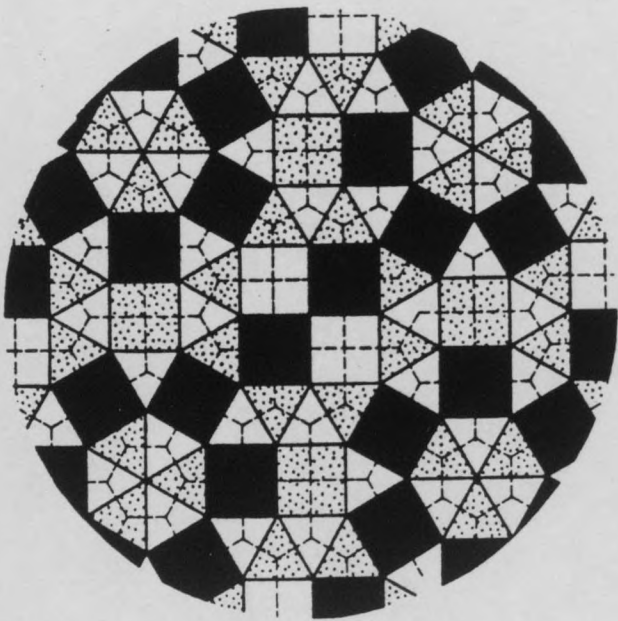
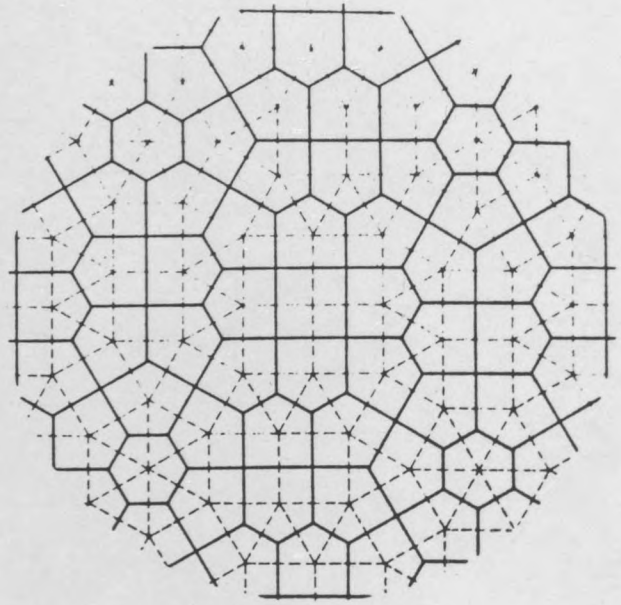
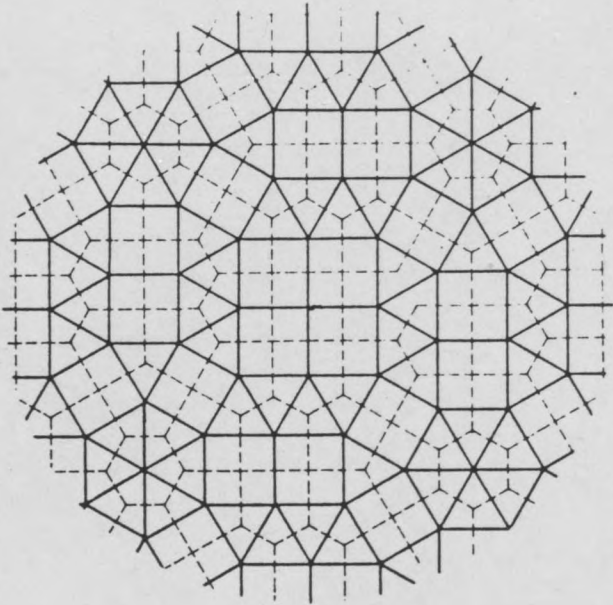
4444
3446^o
3464



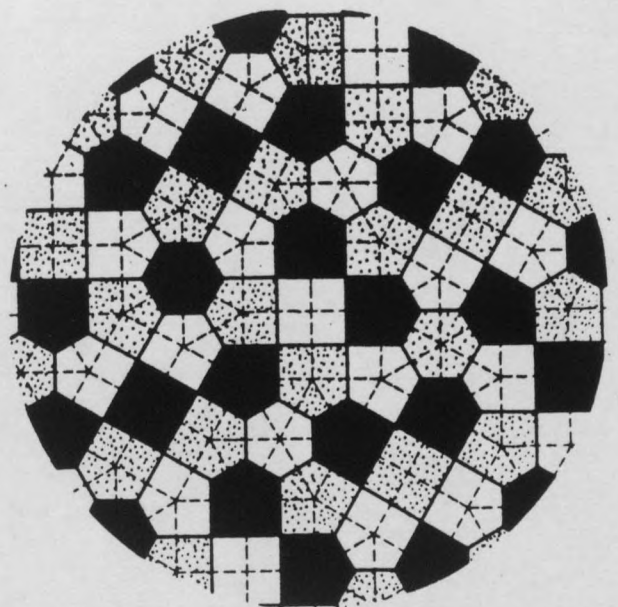
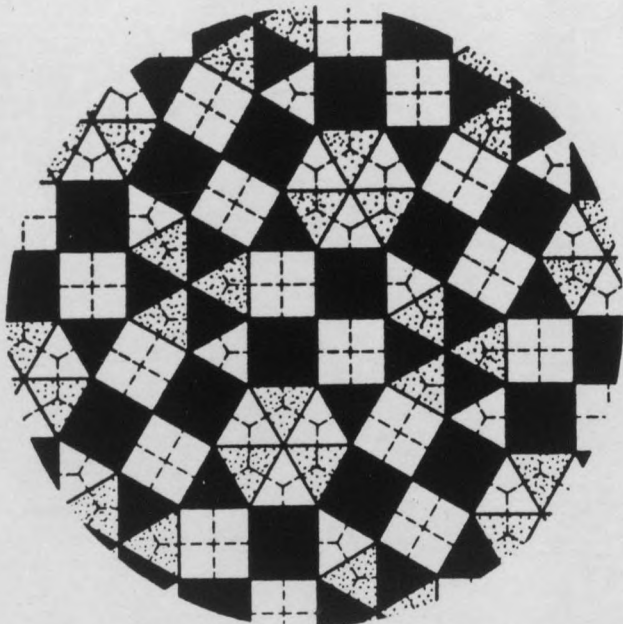
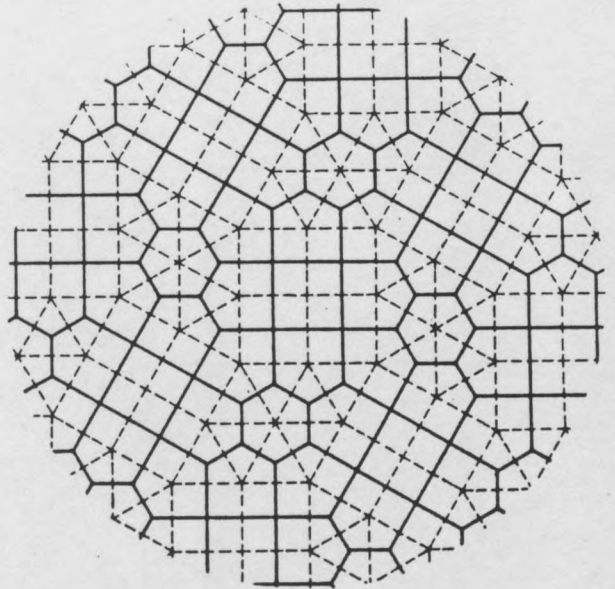
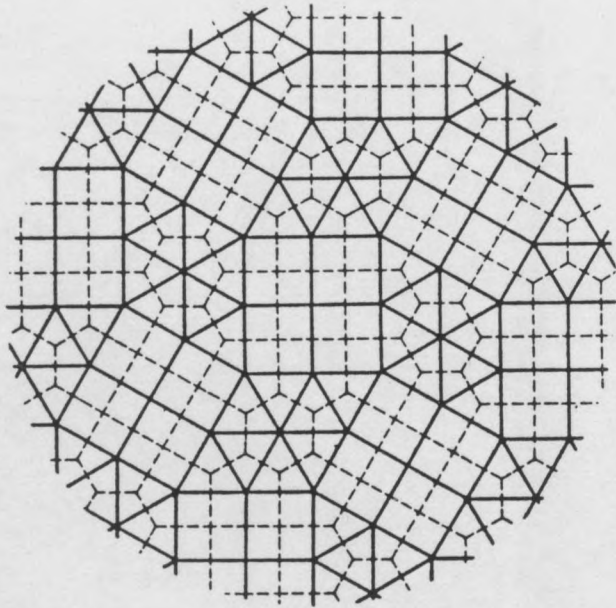
3 3 4 12^o
 3 4 3 12
 3 12 12



333333
33344
33434
4444

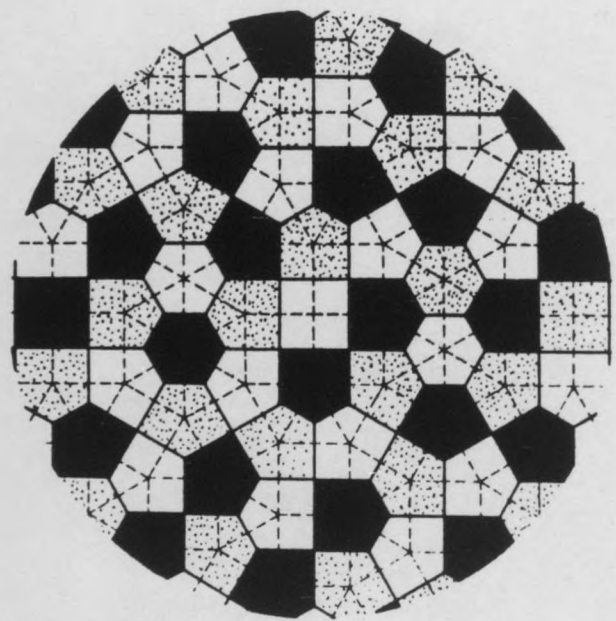
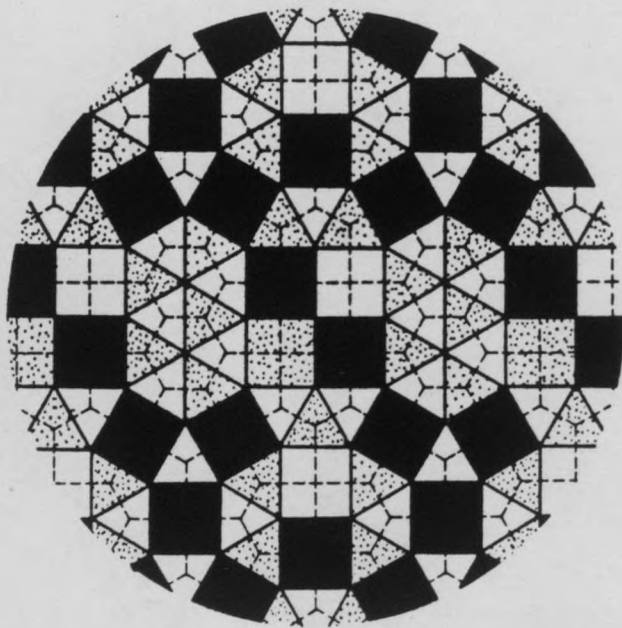
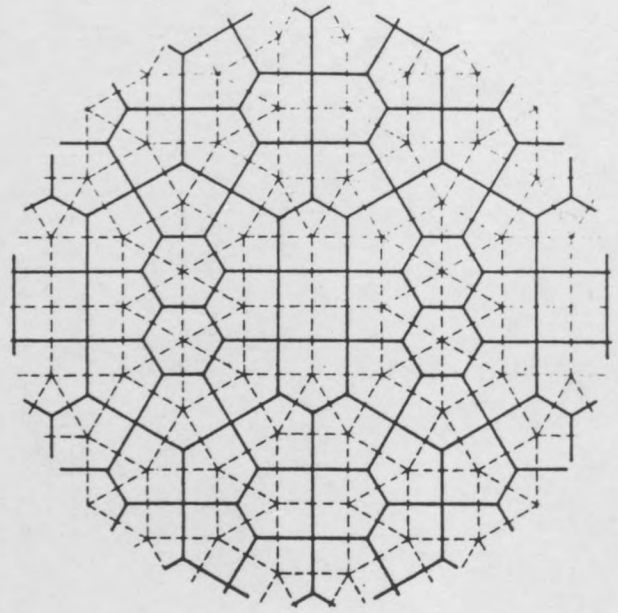
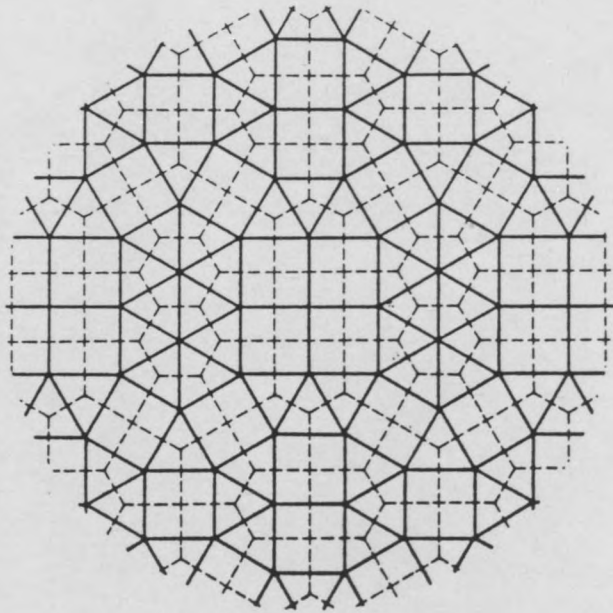


3 3 3 3 3 3
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
4 4 4 4

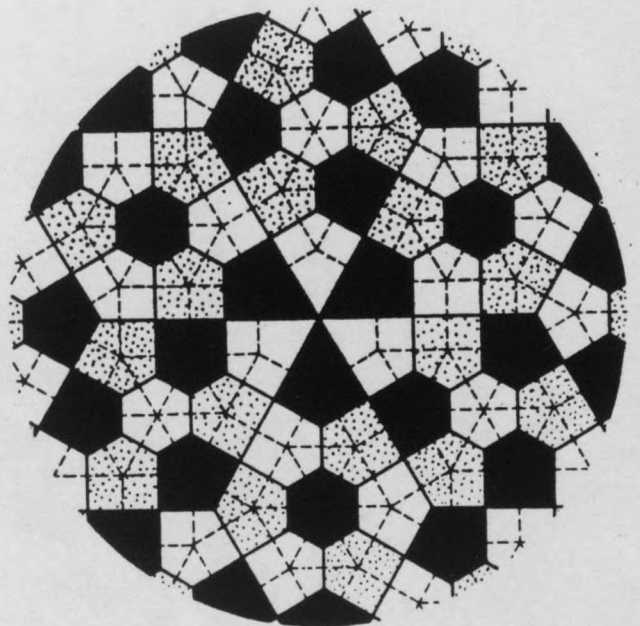
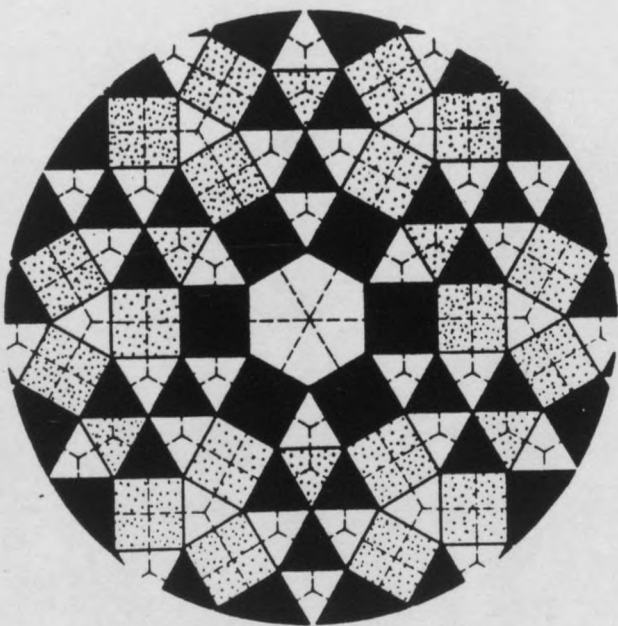
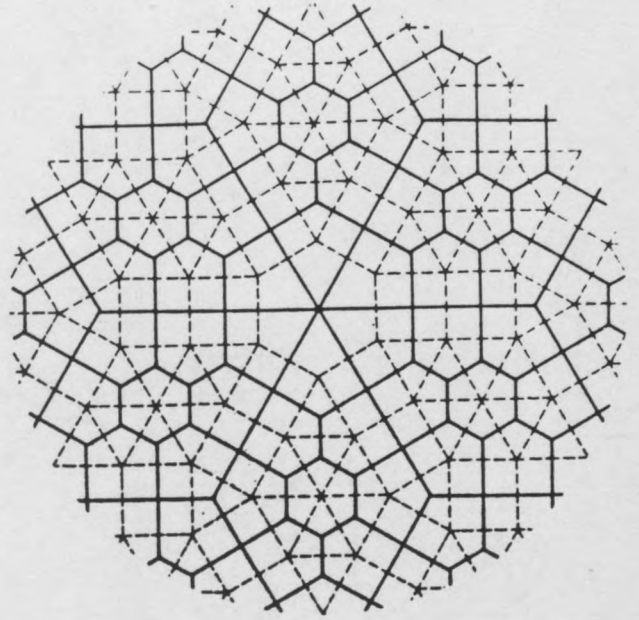
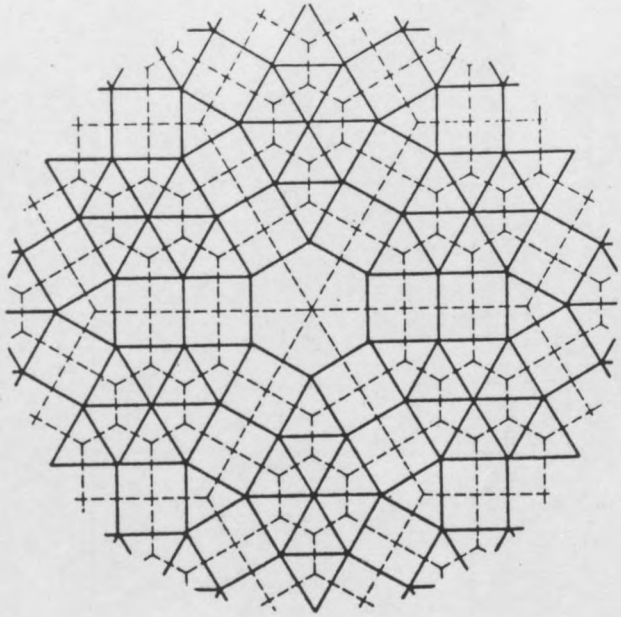


333333
33344
33434
4444

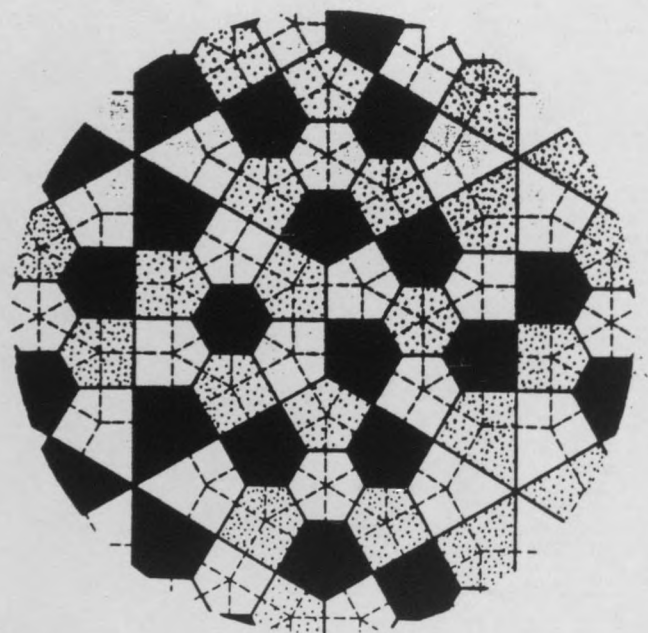
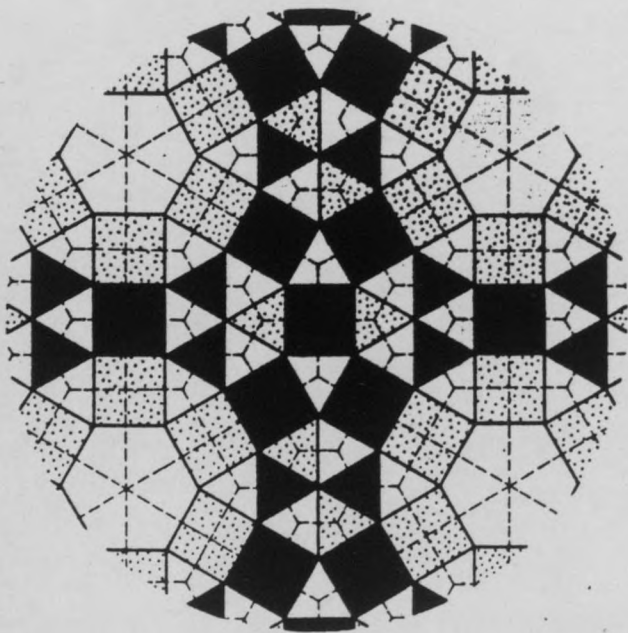
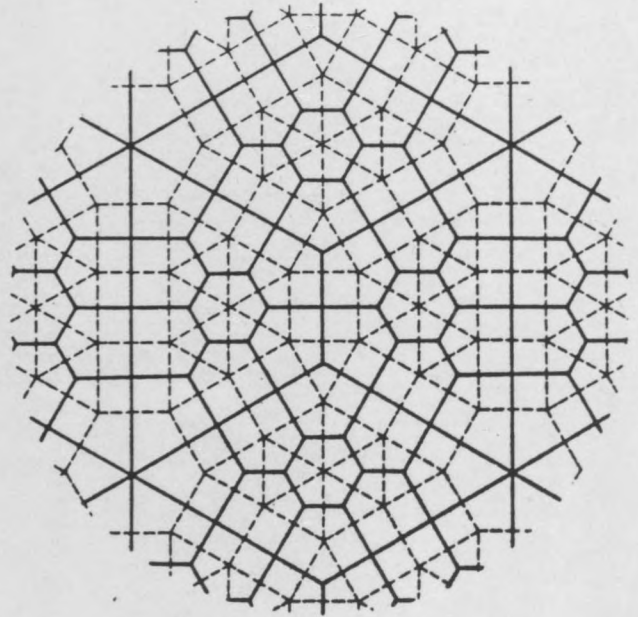
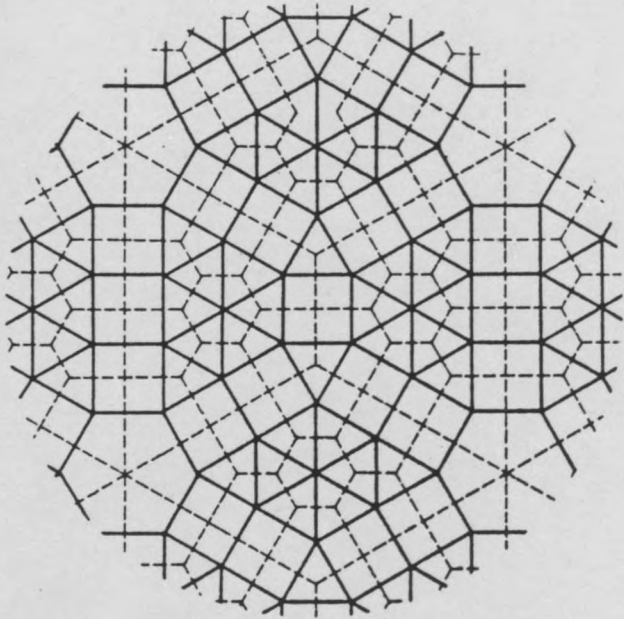
51



3 3 3 3 3 3
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
4 4 4 4

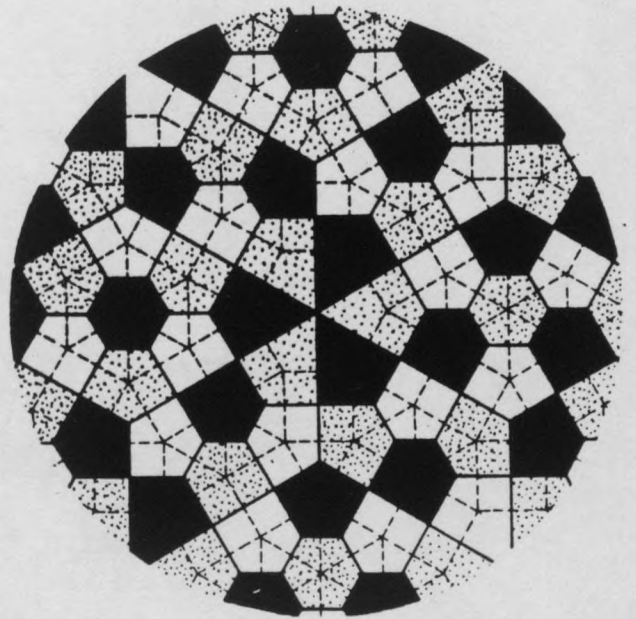
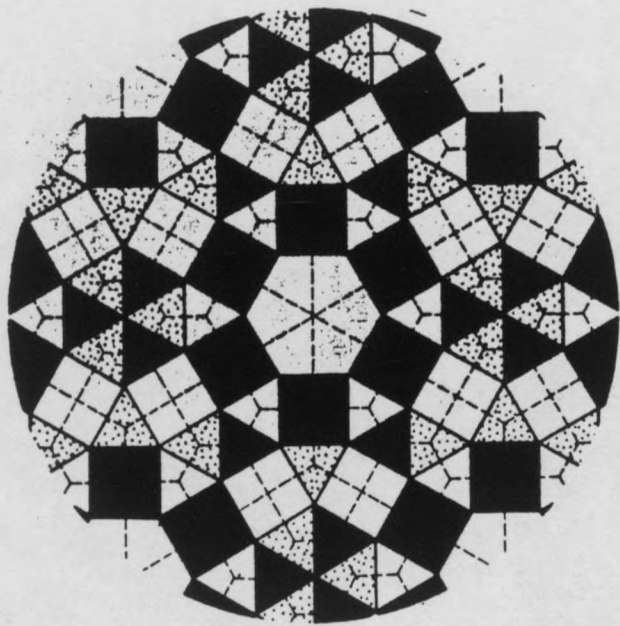
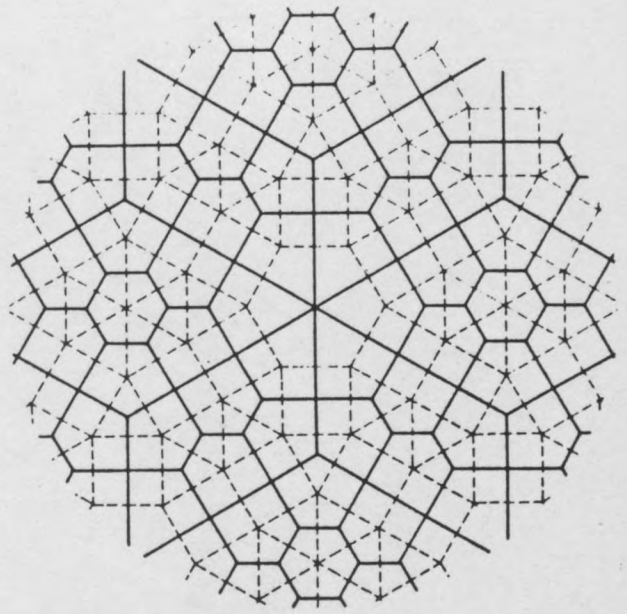
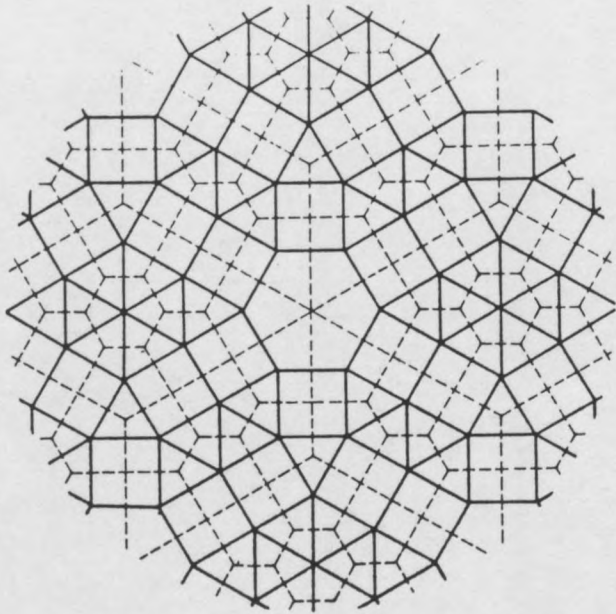


333333
33344
33434
3464



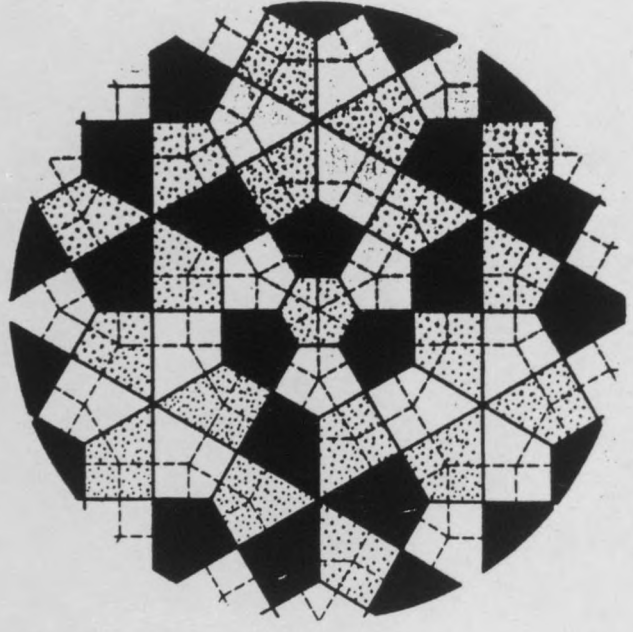
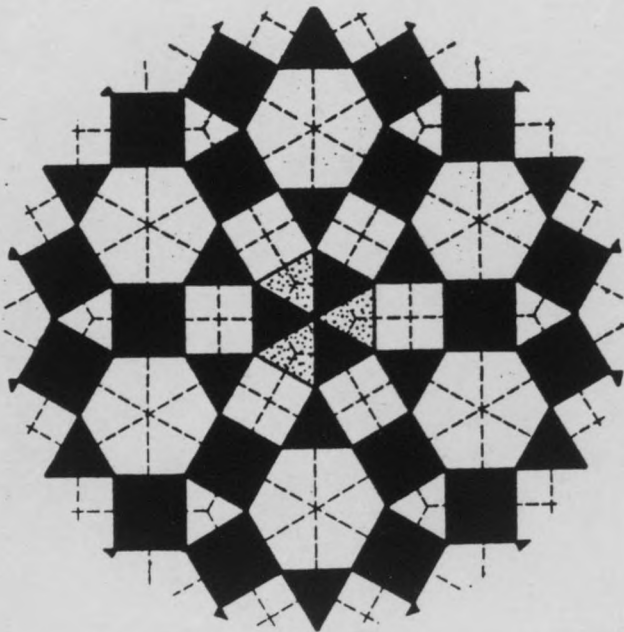
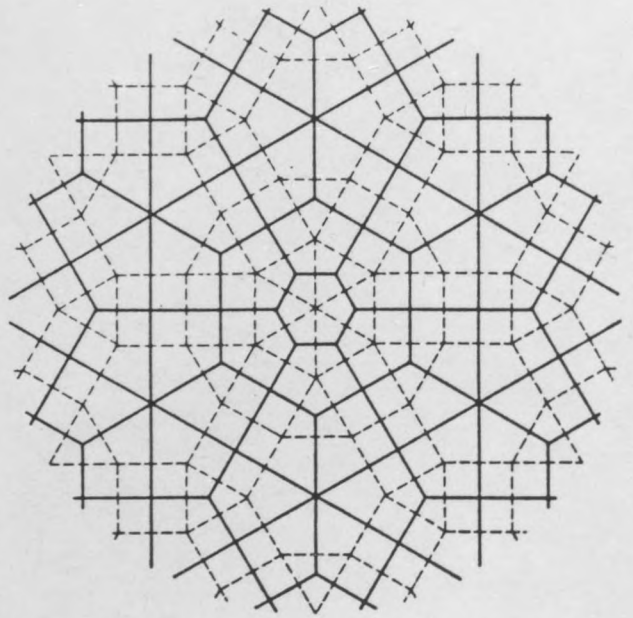
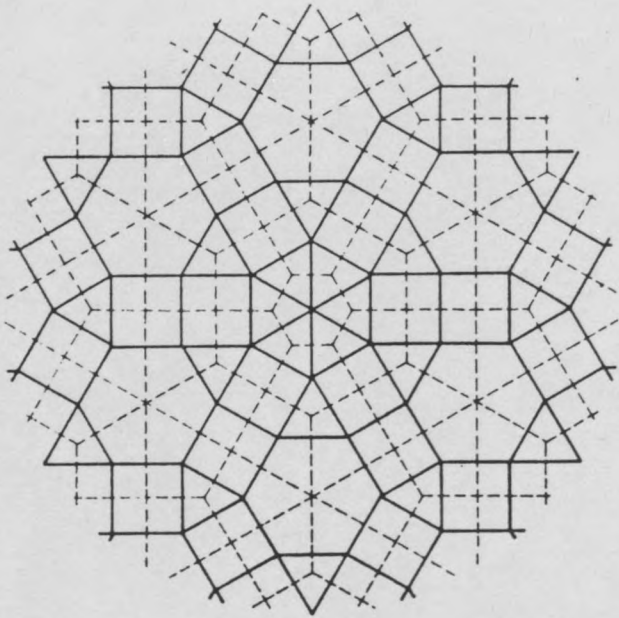
3 3 3 3 3 3
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
3 4 6 4

34

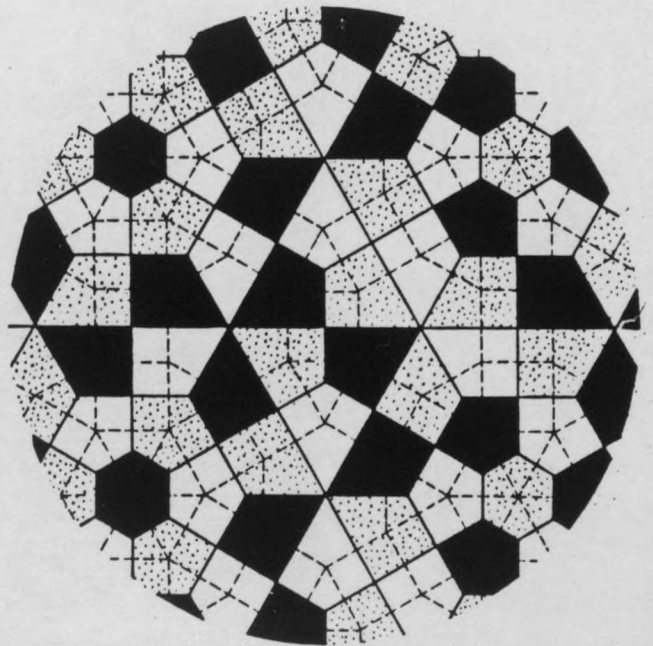
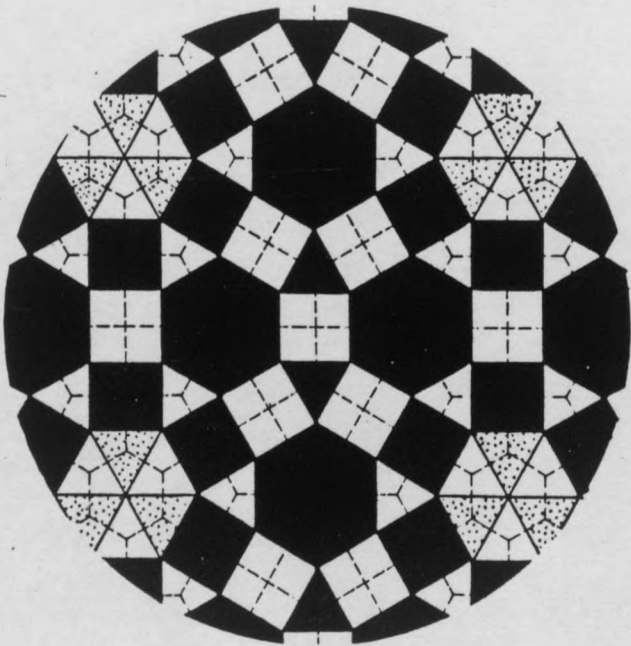
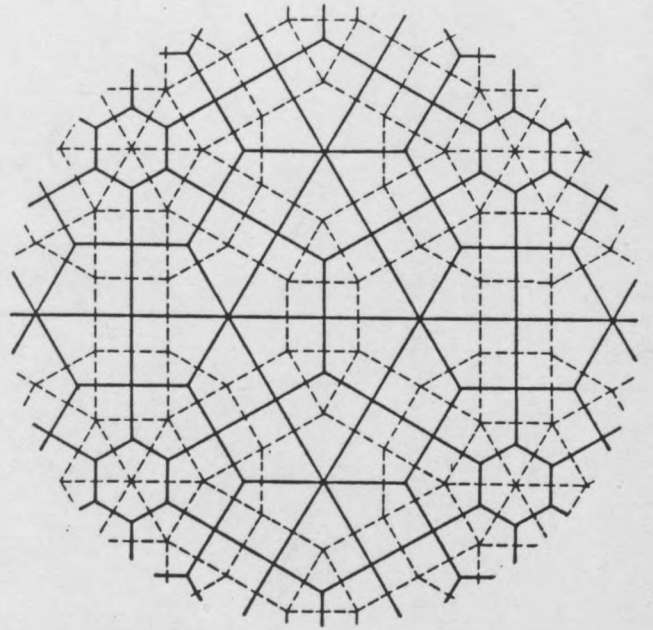
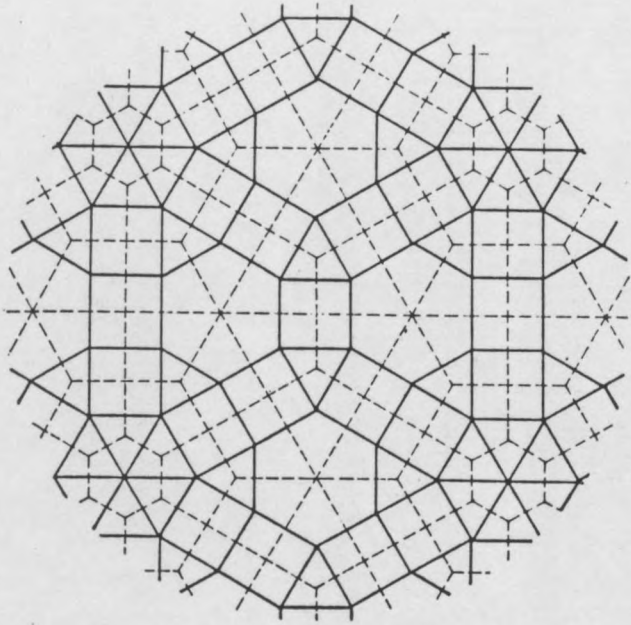


333333
33344
33434
3464

55

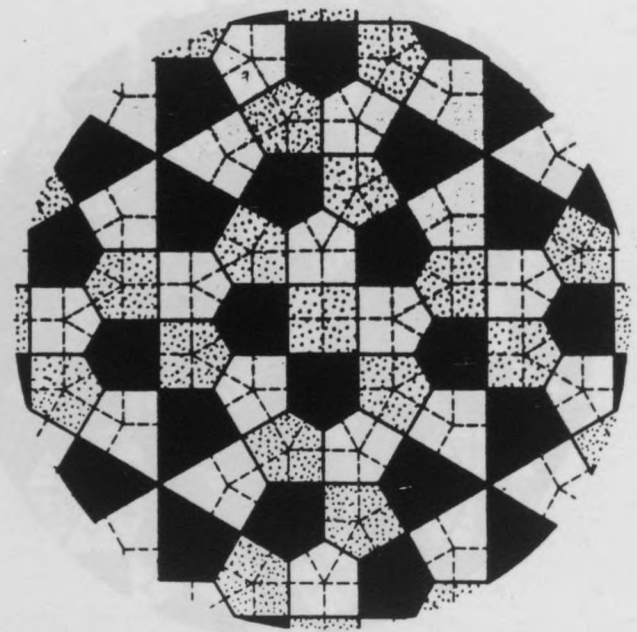
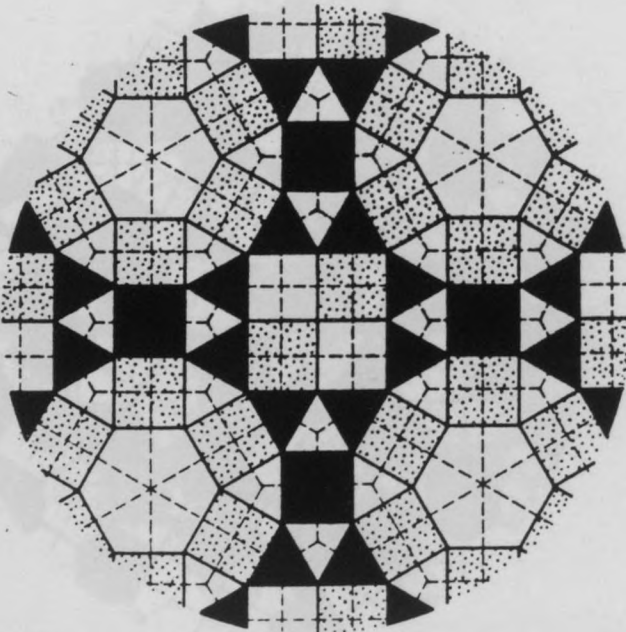
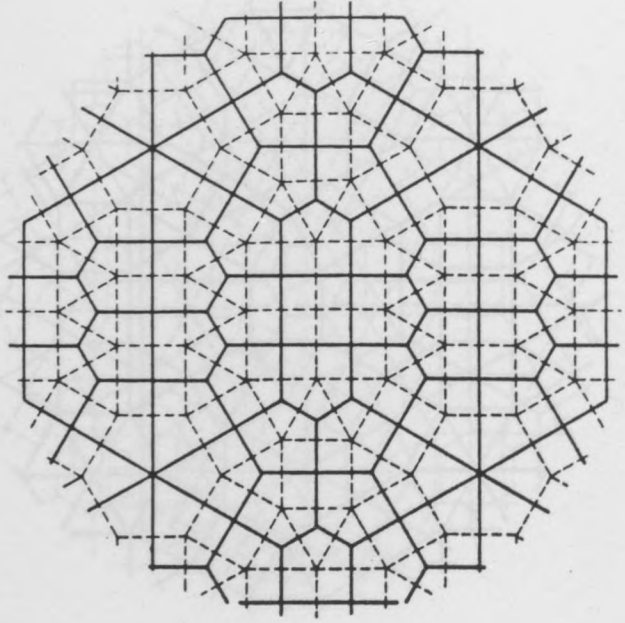
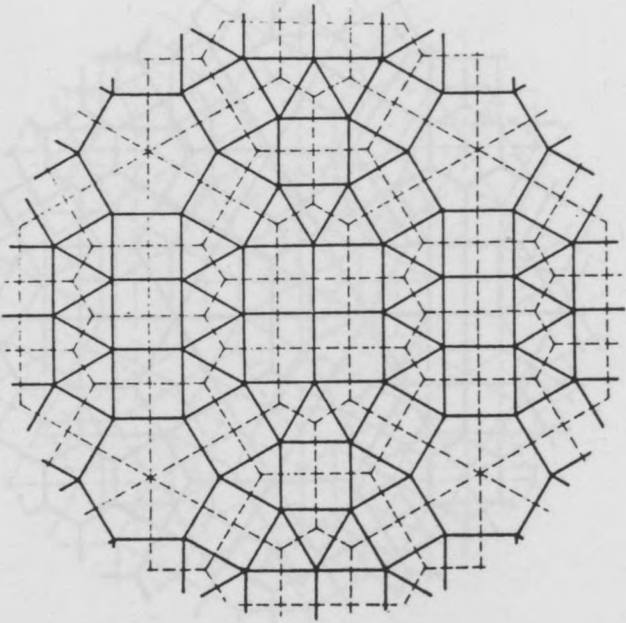


3 3 3 3 3 3
3 3 4 3 4
3 4 4 6^o
3 4 6 4

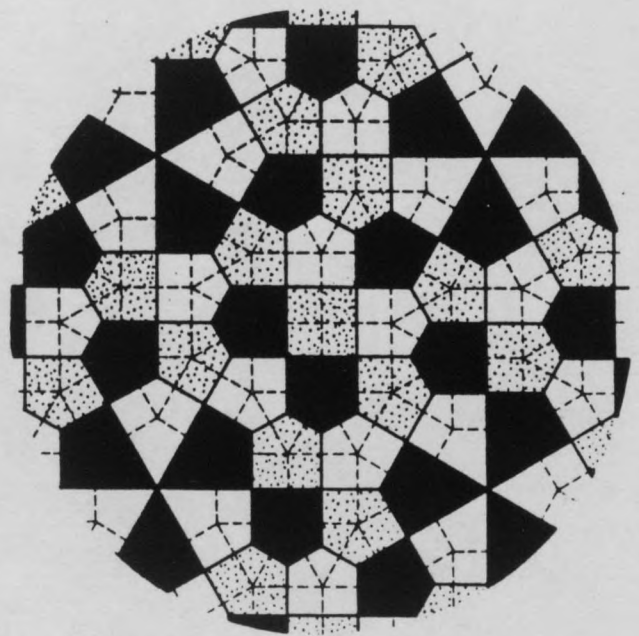
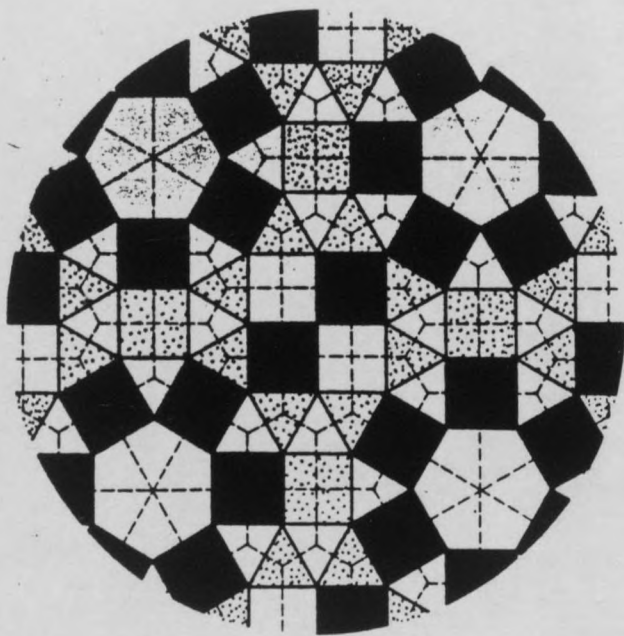
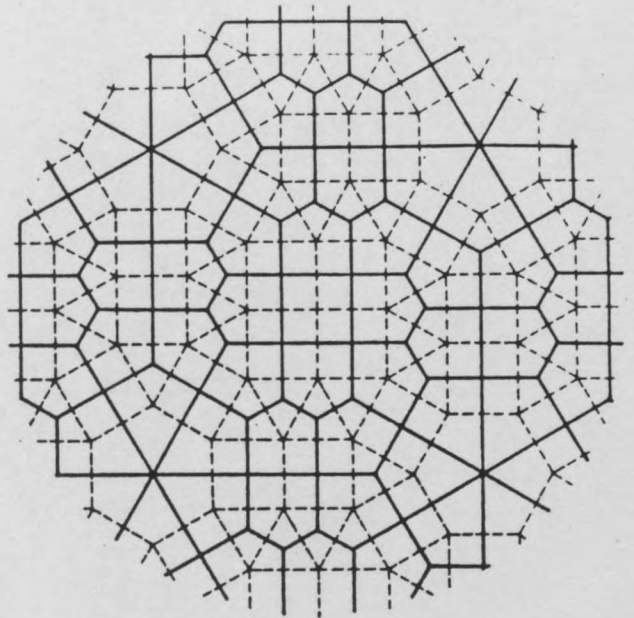
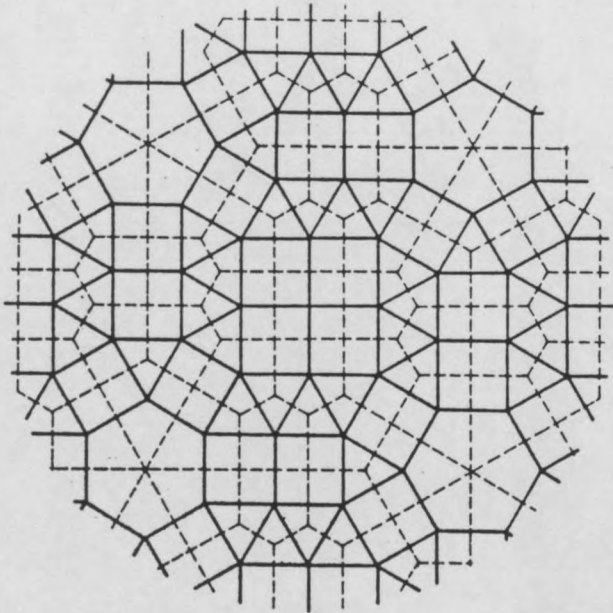


333333
 33434
 3446^o
 3464

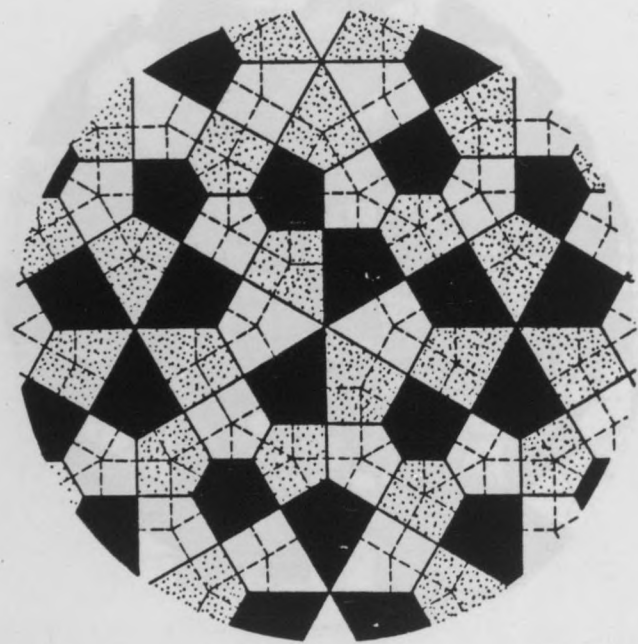
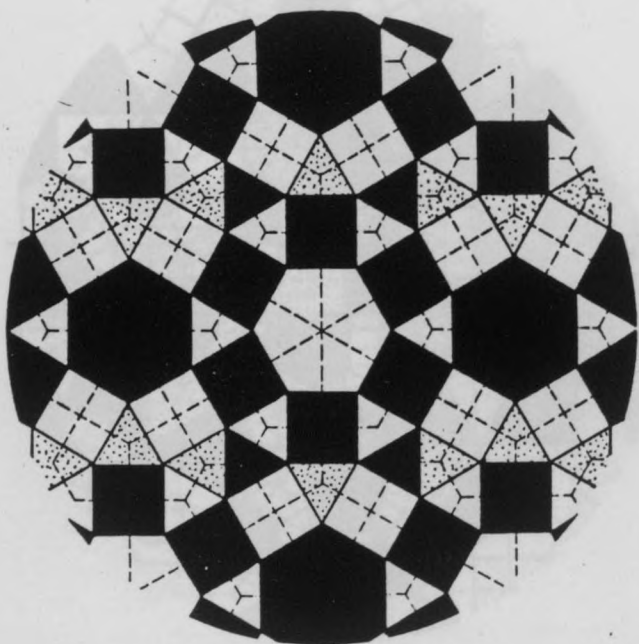
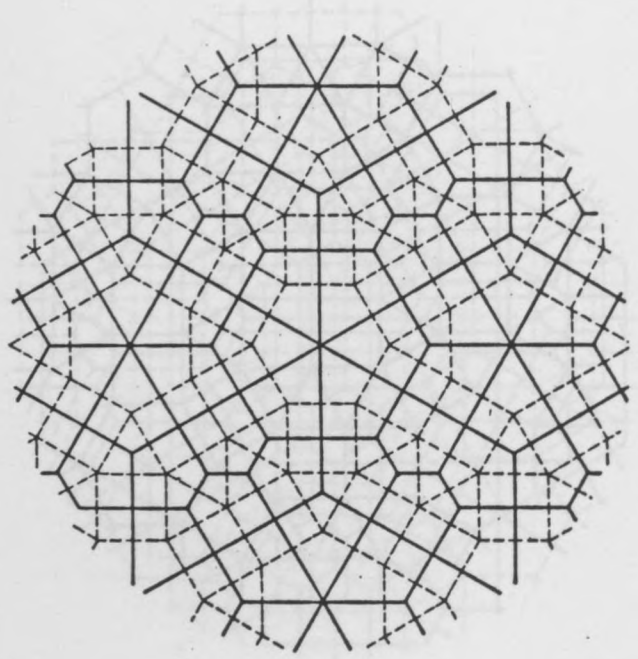
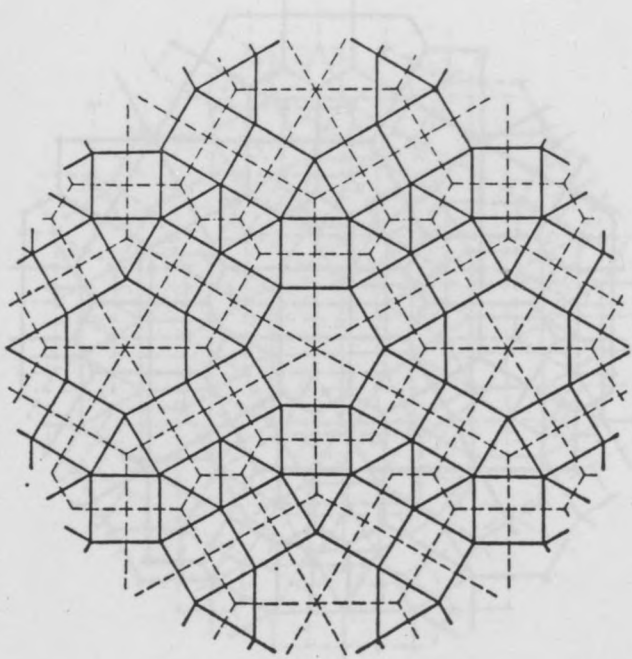
57



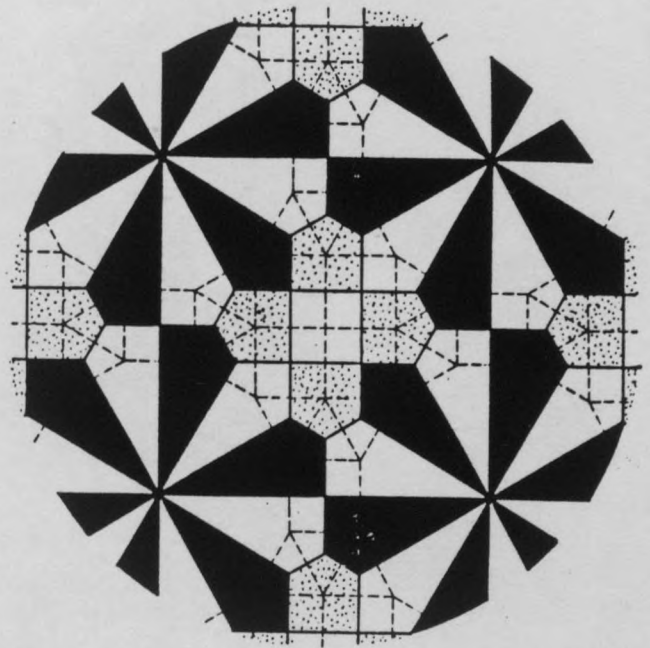
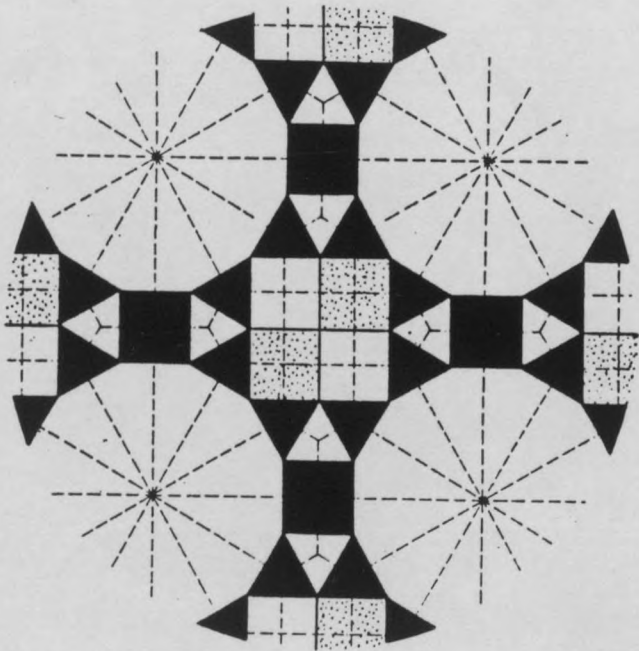
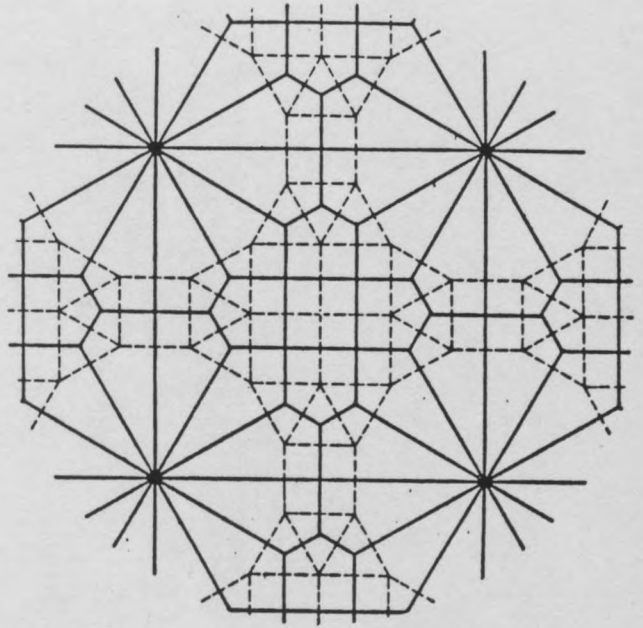
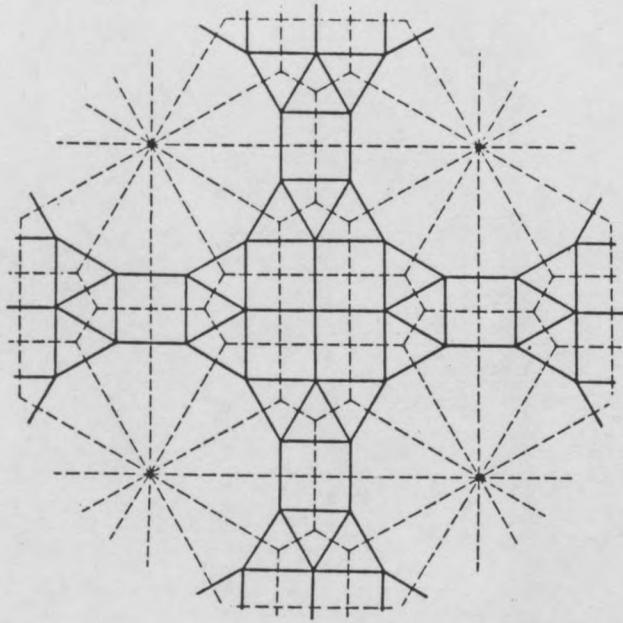
3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
4 4 4 4
3 4 6 4



3 3 3 4 4
3 3 4 3 4
4 4 4 4
3 4 6 4

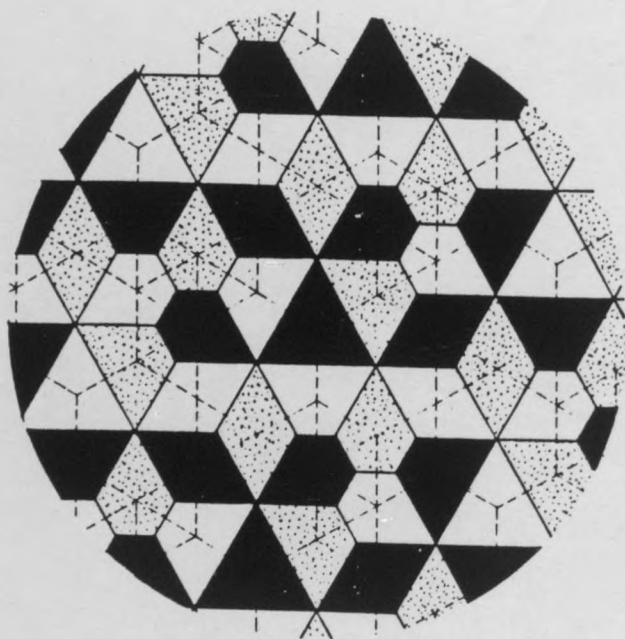
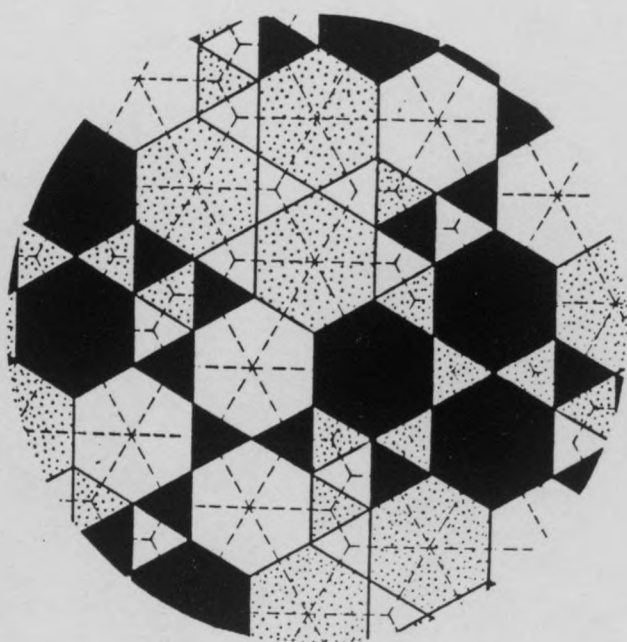
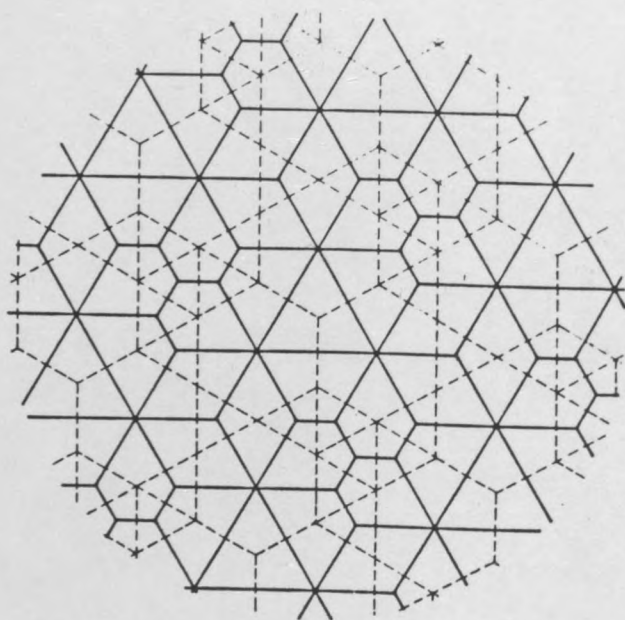
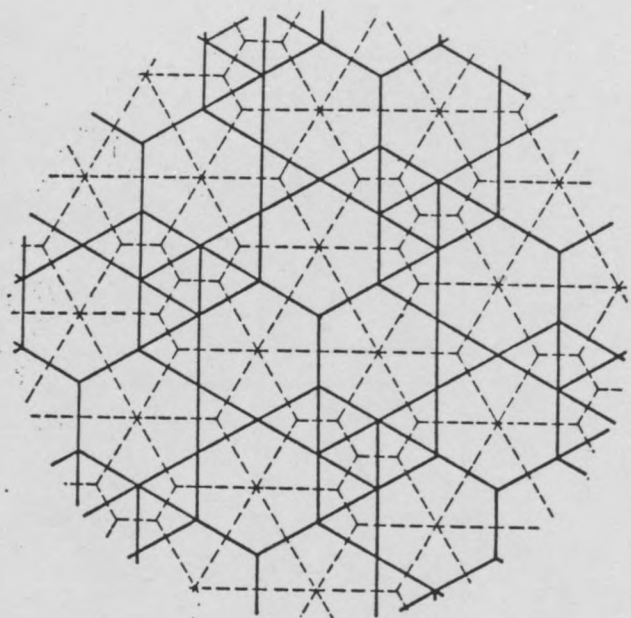


33344
 33434
 3446^o
 3464



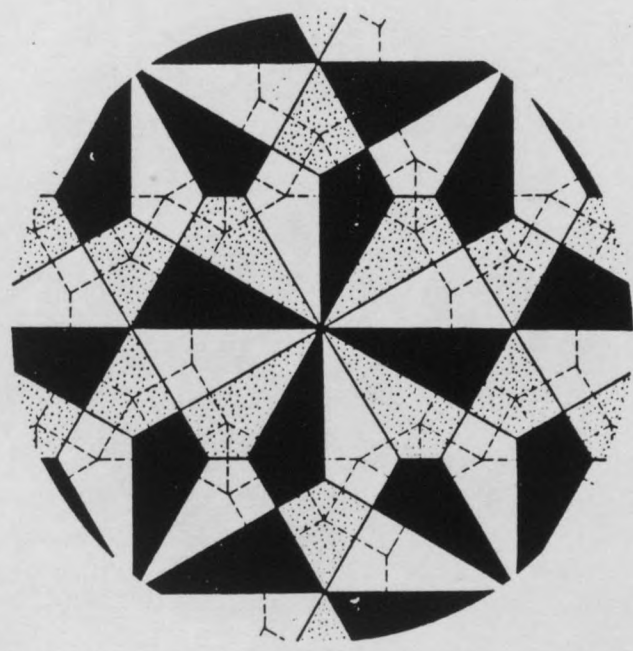
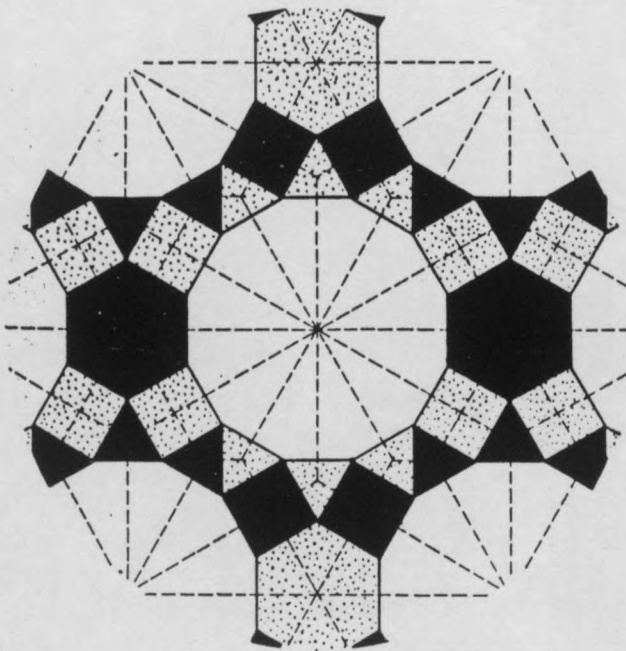
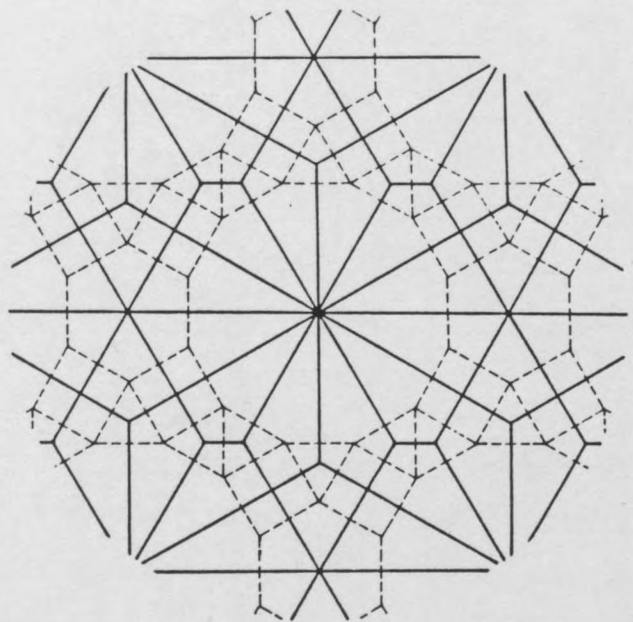
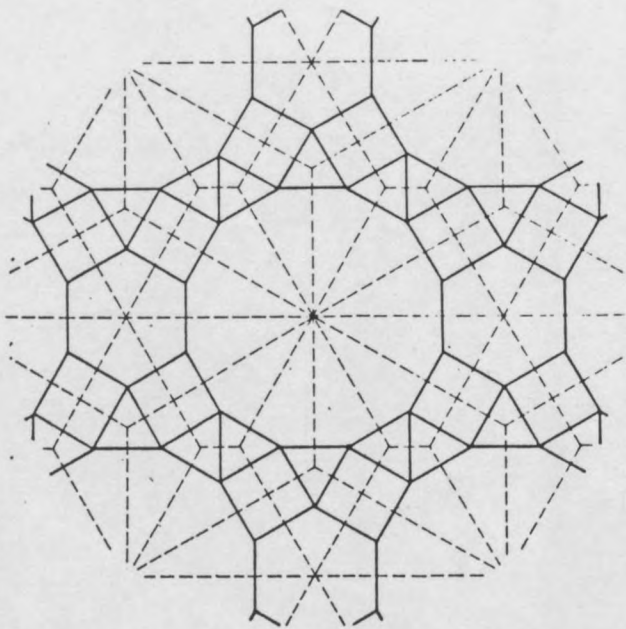
3 3 3 4 4
 4 4 4 4
 3 3 4 12^o
 3 4 3 12

61



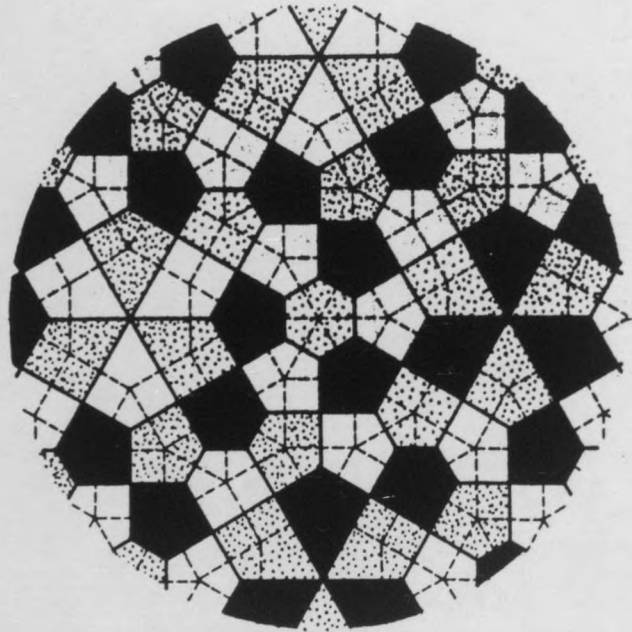
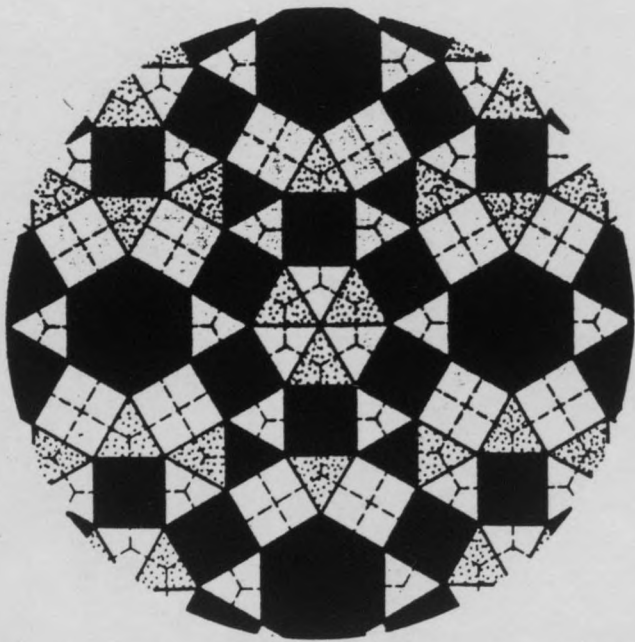
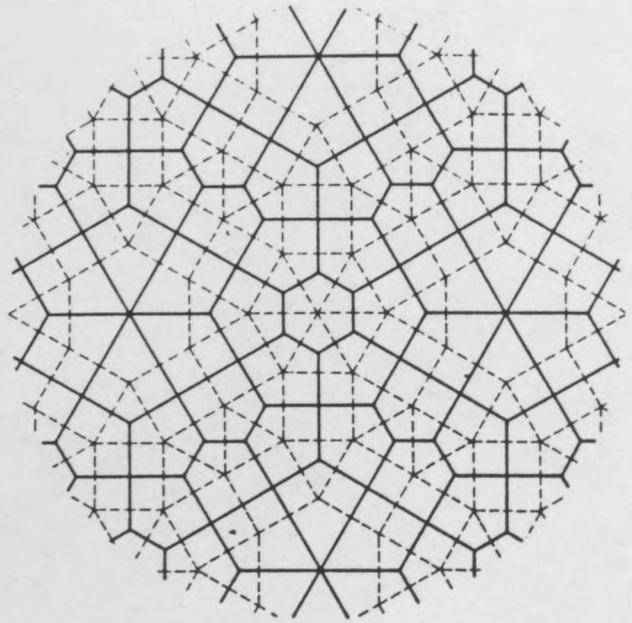
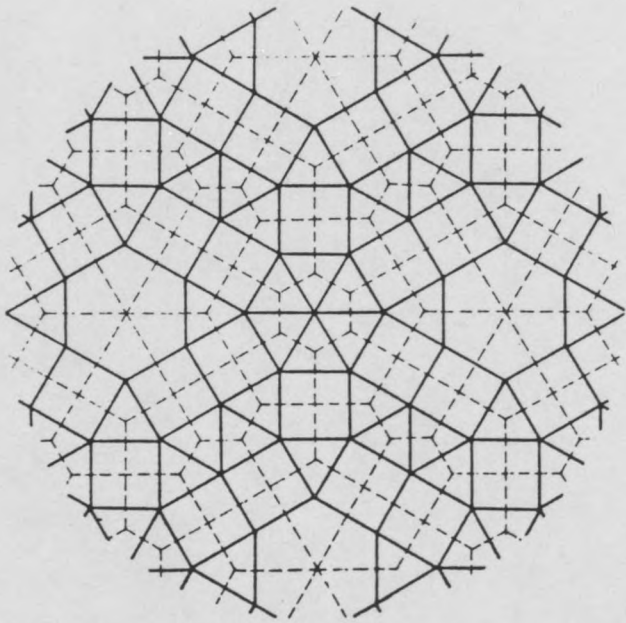
3 3 3 3 6
3 3 6 6
3 6 3 6
6 6 6

62



3 4 6 4
3 3 4 12^o
3 4 3 12
4 6 12^o

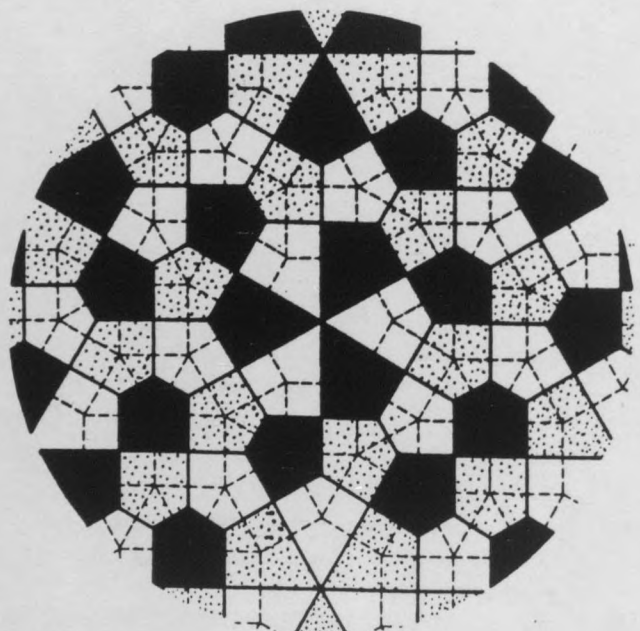
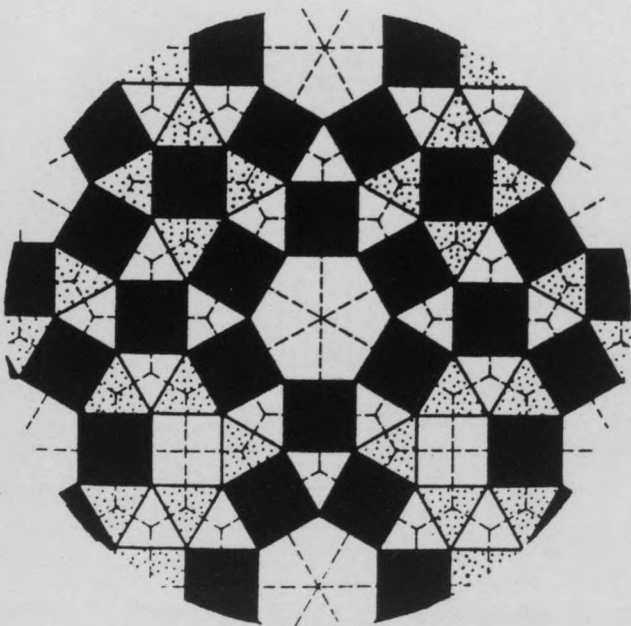
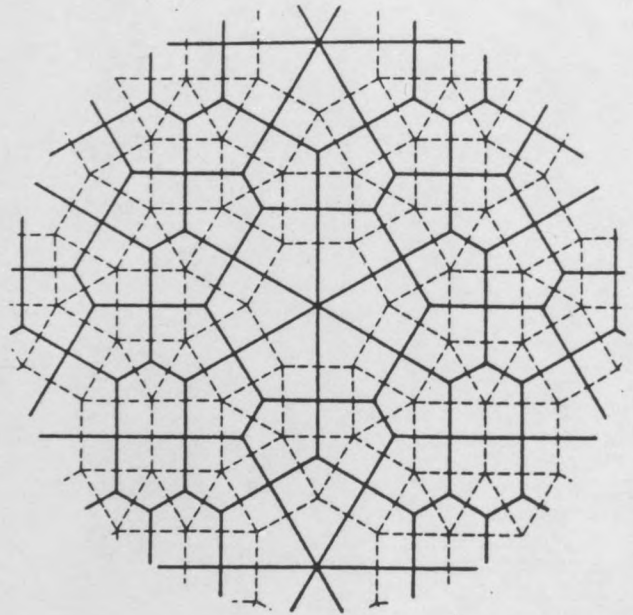
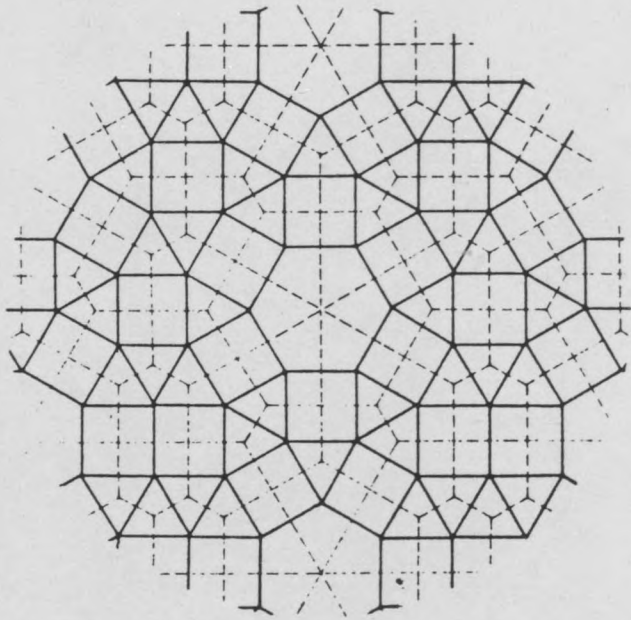
65



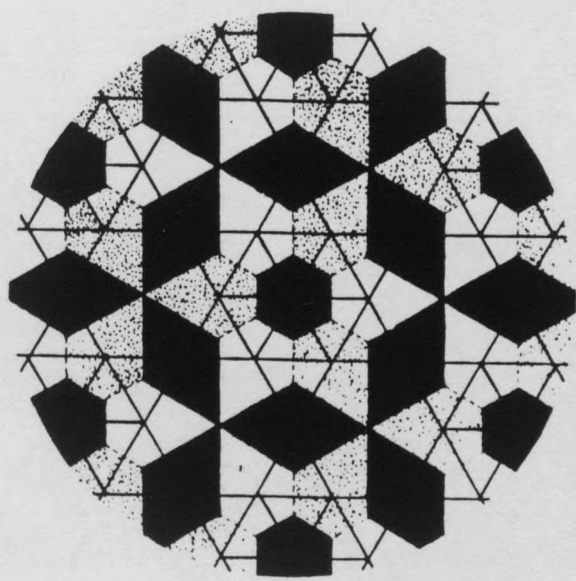
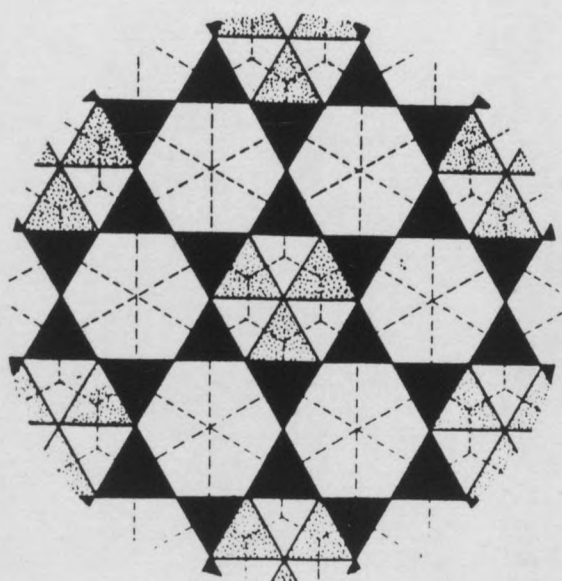
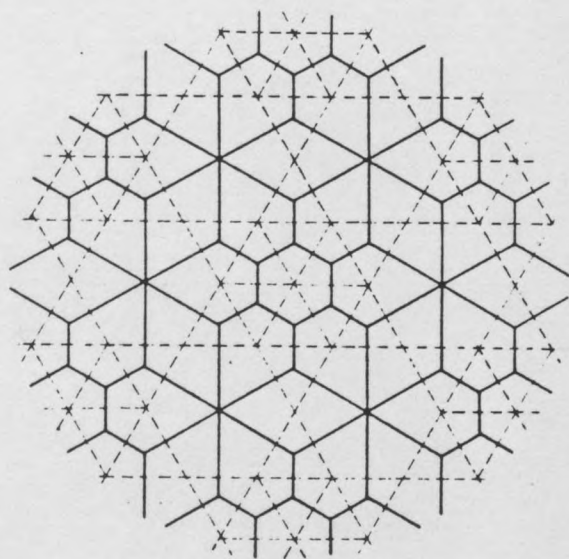
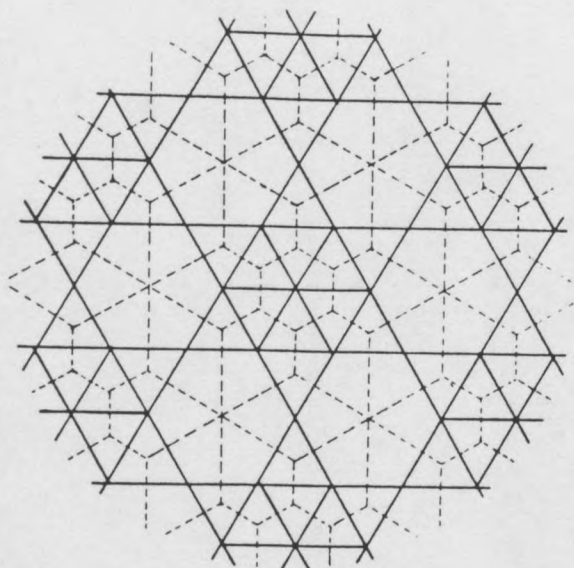
333333
33344
33434
3446^o
3464

TESSELLATIONS NON HOMOGENES

Une infinité de tessellations non isocèles, cependant composées de polygones réguliers, peuvent être construites en partant des homogènes par des opérations sélectives, partielles, donc non homogènes exécutées sur les éléments homothétiques. Des trames de complexité plus élevée peuvent être obtenues même en se restreignant à deux sortes de polygones. Par exemple, la tessellation (3.3.3.3.3.3, 3.3.3.3.6, 3.6.3.6) dérive par saturation partielle de la trame semi-régulière (3.3.3.6) en remplissant un hexagone sur trois par des triangles équilatéraux. Un autre exemple est la tessellation (3.3.3.4.4, 3.3.4.3.4, 3.4.6.4) dérivée de la (3.4.3.12, 3.12.12) où les groupes dodécagonaux complémentaires sont appliqués alternativement en deux positions différentes, augmentant considérablement l'étendue du motif de translation caractéristique.



33344
 33434
 3464



3 3 3 3 3 3
 3 3 3 3 6
 3 6 3 6

TESSELLATIONS AUTOMORPHES

TESSELLATIONS AUTOMORPHES

Les tessellations automorphes sont composées d'assemblages semi-polaires où les polygones, triangles, carrés et hexagones uniquement, sont juxtaposés à un autre polygone par un point intermédiaire de celui-ci. Dans chaque sommet de la trame, le nombre des polygones et leurs angles d'incidence sont toujours identiques même dans le cas d'une composition non isocèle. De cette autorépétitivité de la forme des assemblages vient l'appellation automorphe.

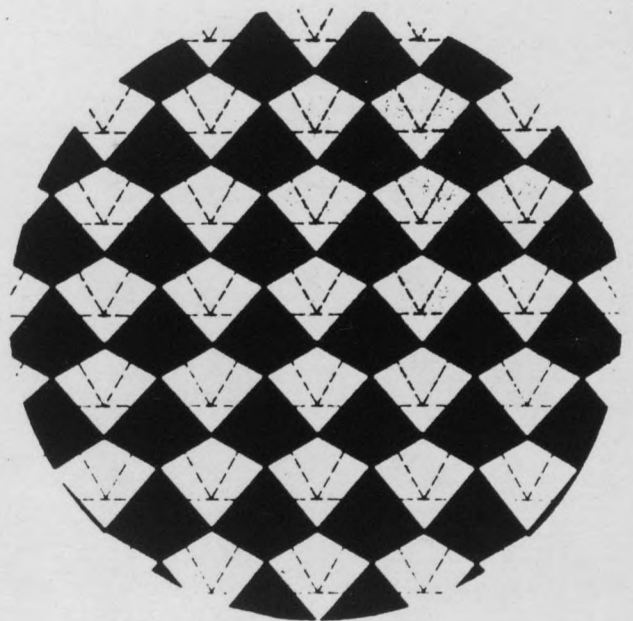
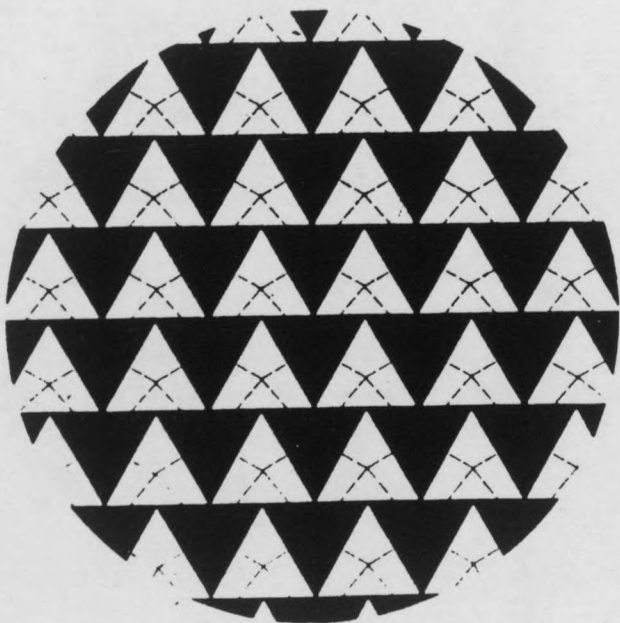
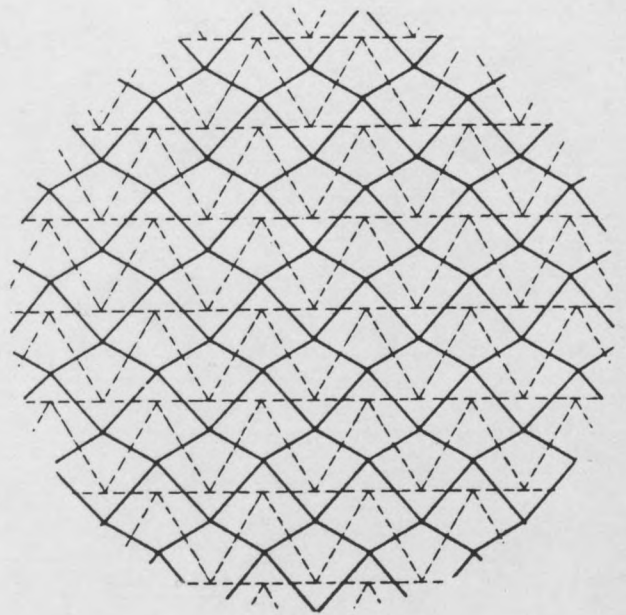
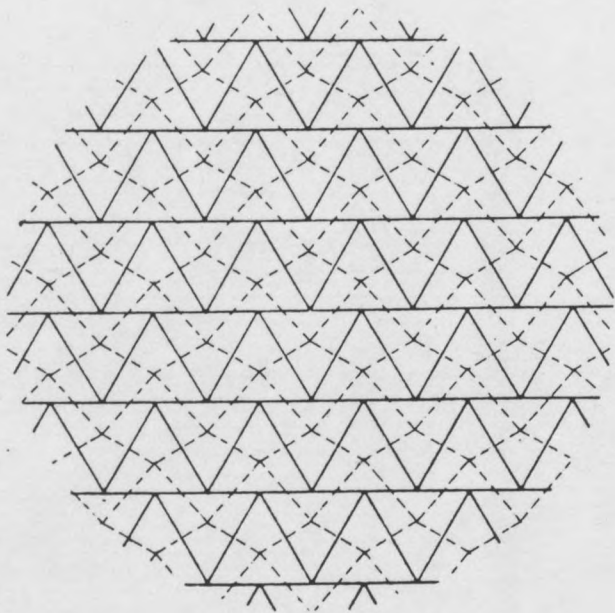
Les polygones peuvent être de type identique ou de deux sortes. Cependant, la même forme peut intervenir en deux ou trois tailles différentes : double ou triple, l'unité étant la longueur du côté du polygone le plus petit, et le code Schläfli des polygones de dimensions multiples portent un indice en conséquence, le polygone juxtaposé par son côté est signalé également par un trait horizontal.

Parmi les douze tessellations automorphes représentées sur les planches suivantes, certaines sont isocèles, d'autres bi ou tricèles. Leurs propriétés sont résumées dans le tableau n°7.

TABLEAU 7 TESSELLATIONS AUTOMORPHES

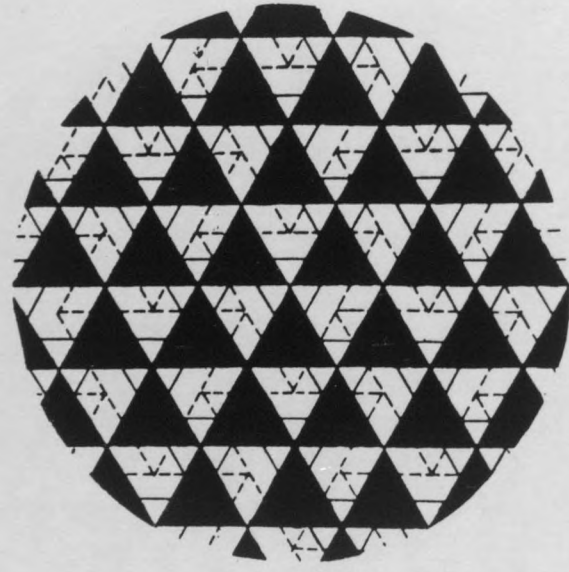
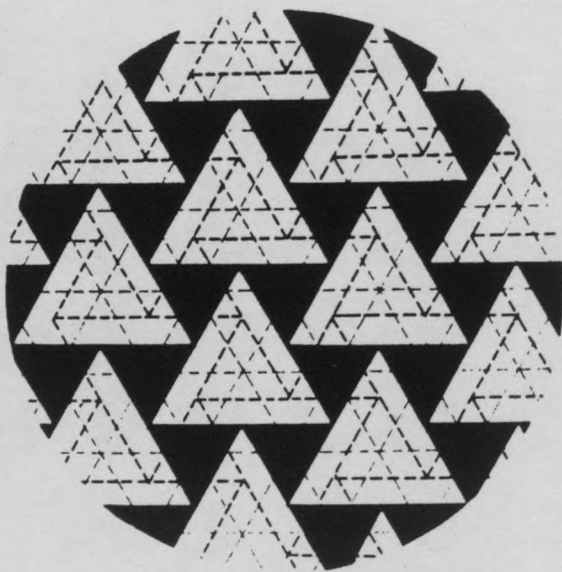
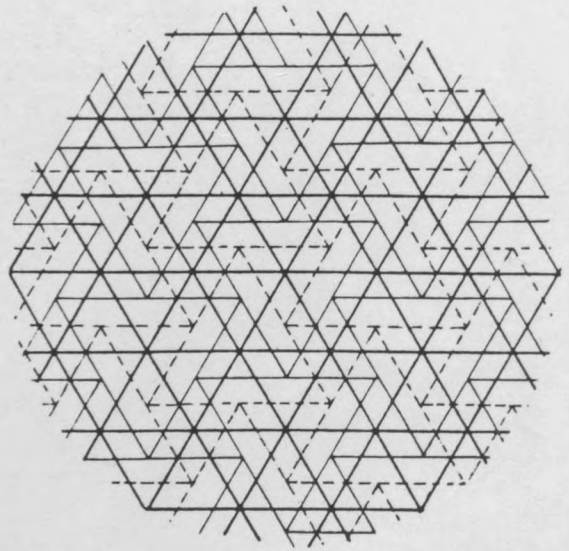
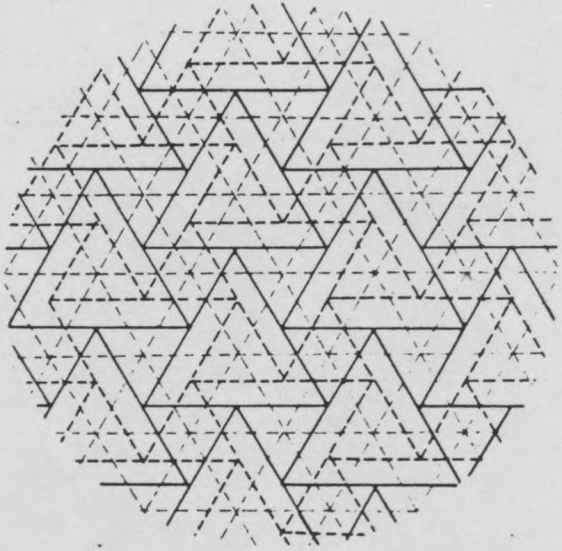
N°	code Schläfli des noeuds			nb. chromatique		iso trope	aniso trope	rota toire
	n1	n2	n3	prim.	duale			
1	3 3 3 3			2	2			
2	3 ₁ 3 ₂ 3 ₁ 3 ₂			2	2	°	°	
3	3 ₁ 3 ₃ 3 ₂ 3 ₃			2	2			°
4	4 4 4			3	2		°	
5	4 ₁ 4 ₂ 4 ₂			3	2			°
6	4 ₁ 4 ₃ 4 ₃			3	2			°
7	3 ₂ 3 ₂ 6 ₁			3	2			°
8	3 ₁ 6 ₂ 6 ₂			3	3			°
9	4 ₁ 4 ₂ 4 ₂	4 ₁ 4 ₂ 4 ₂	4 ₂ 4 ₂ 4 ₂	4	3			°
10	4 ₁ 4 ₁ 4 ₃	4 ₁ 4 ₂ 4 ₃	4 ₁ 4 ₃ 4 ₂	3	3			°
11	3 ₂ 3 ₂ 6 ₁	3 ₂ 3 ₂ 6 ₂	3 ₂ 6 ₂ 6 ₂	4	3			°

1



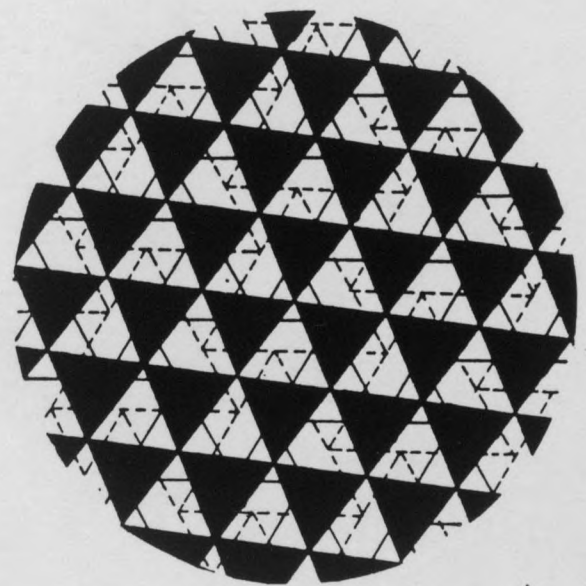
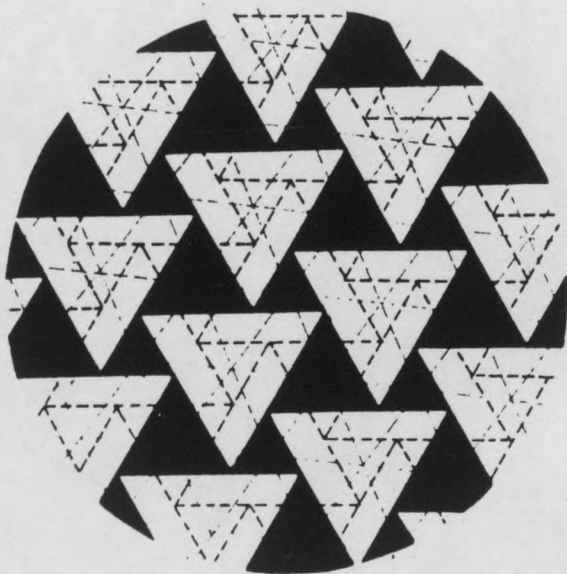
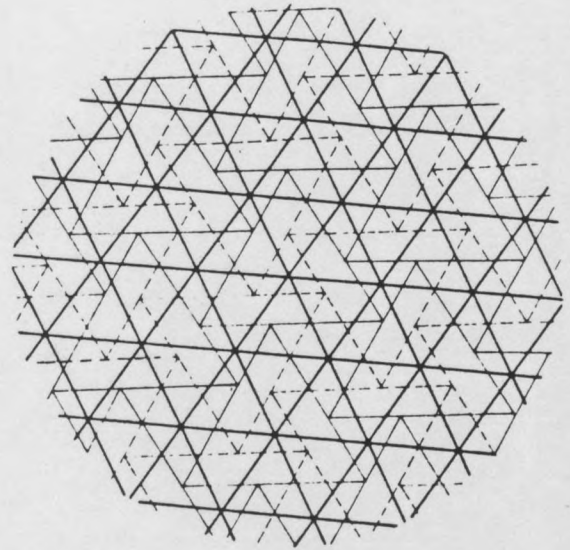
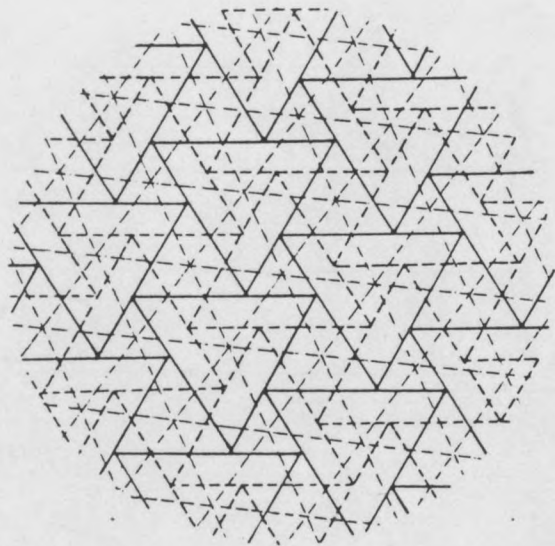
3333̄

19



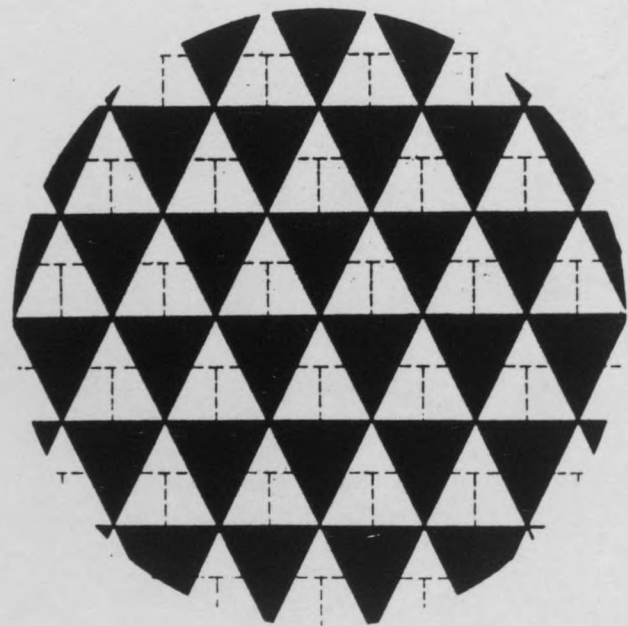
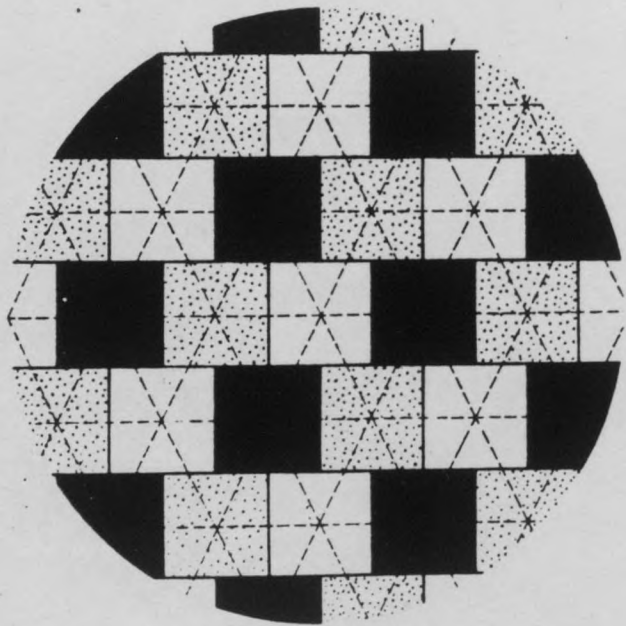
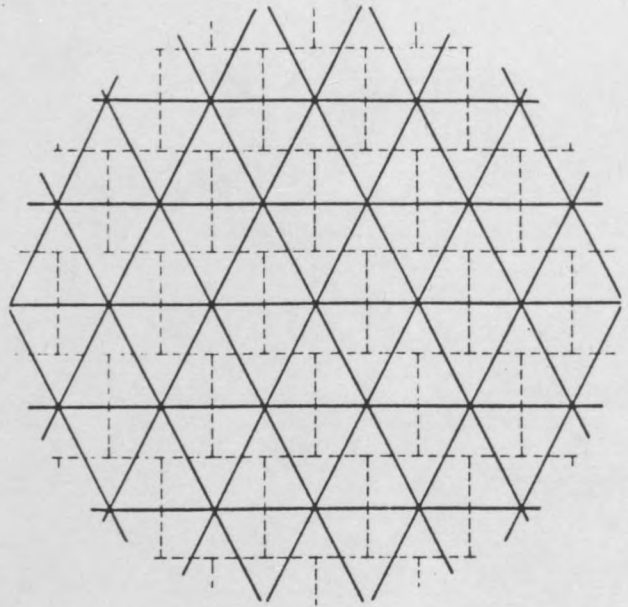
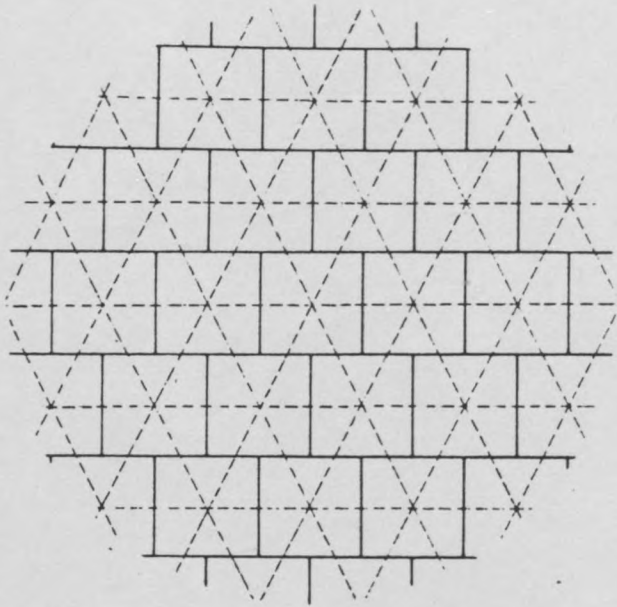
$3_1 3_2 3_1 3_2$

5



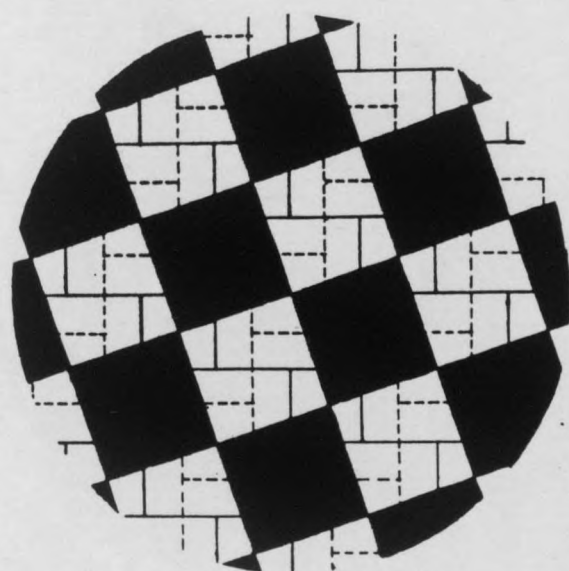
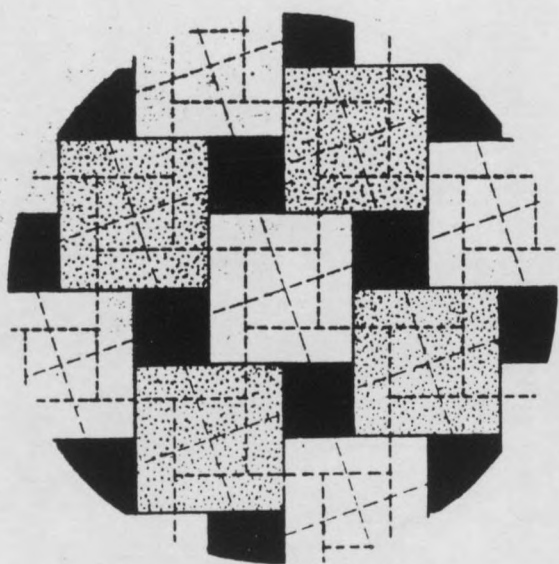
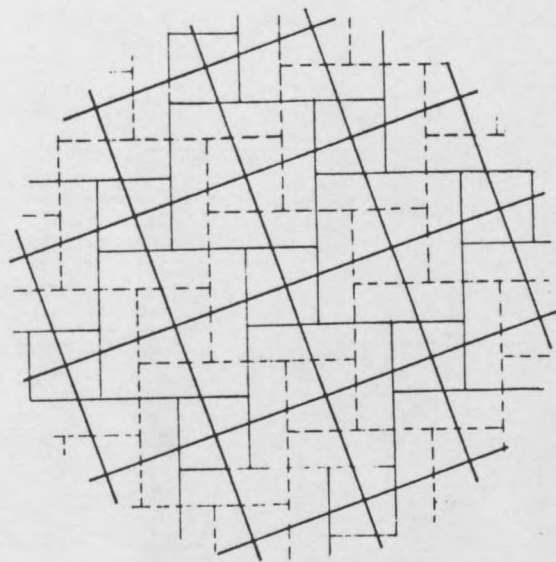
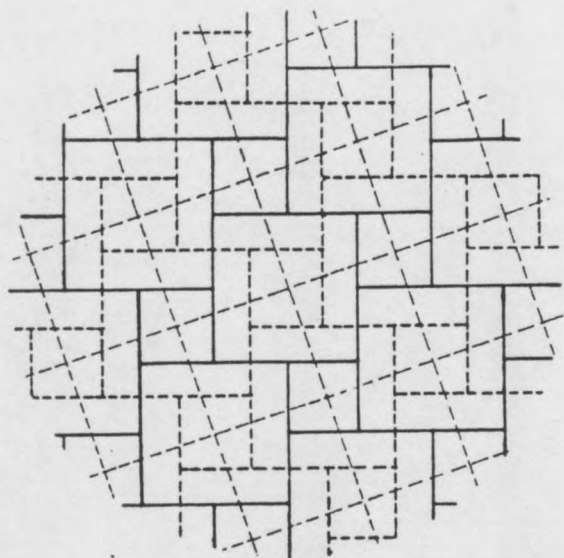
$3_1 3_3 3_2 3_3$

4



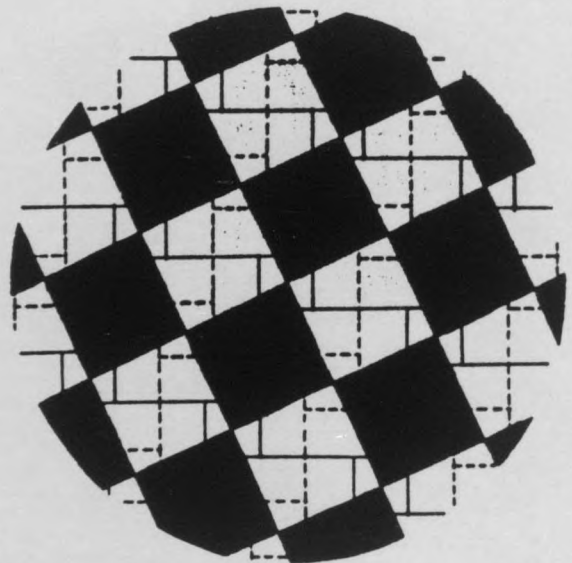
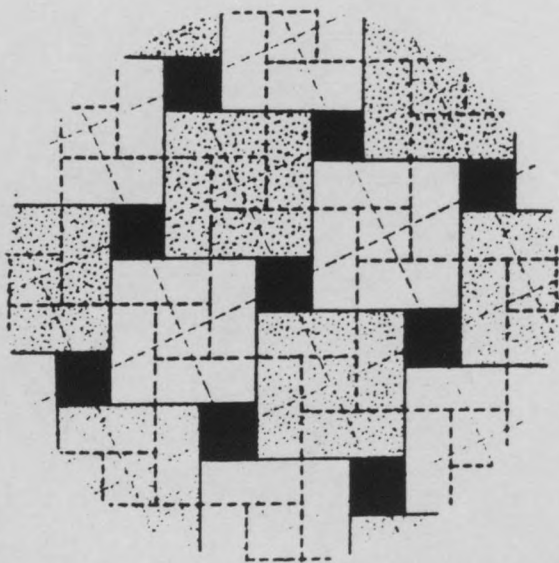
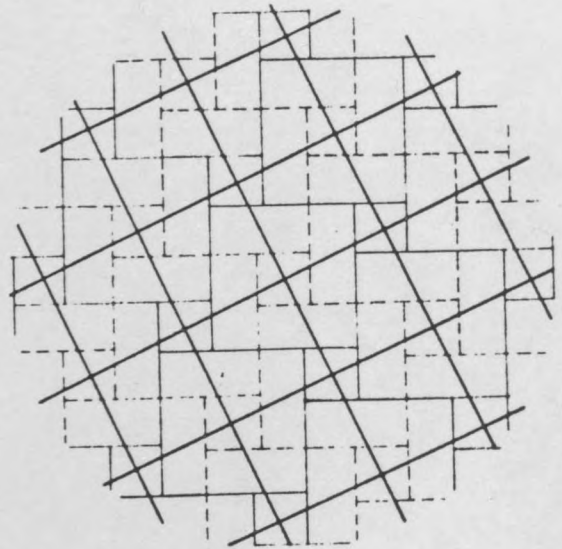
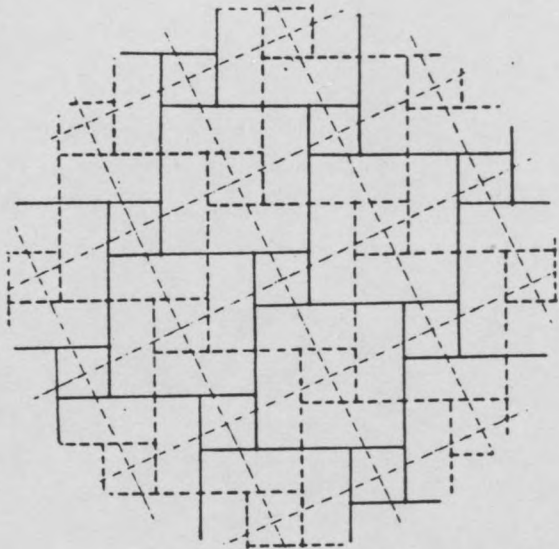
444

3



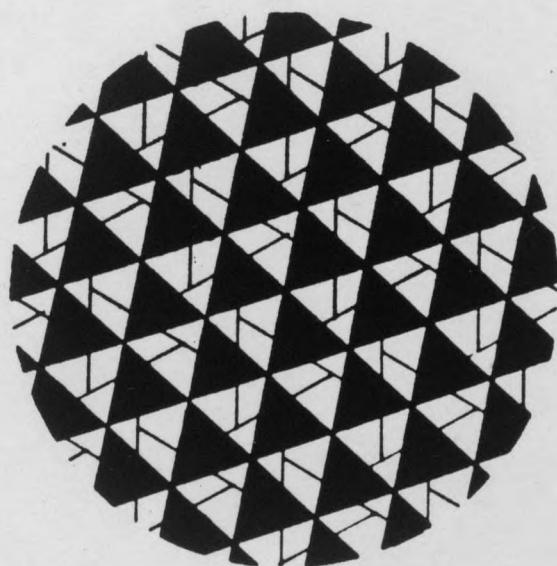
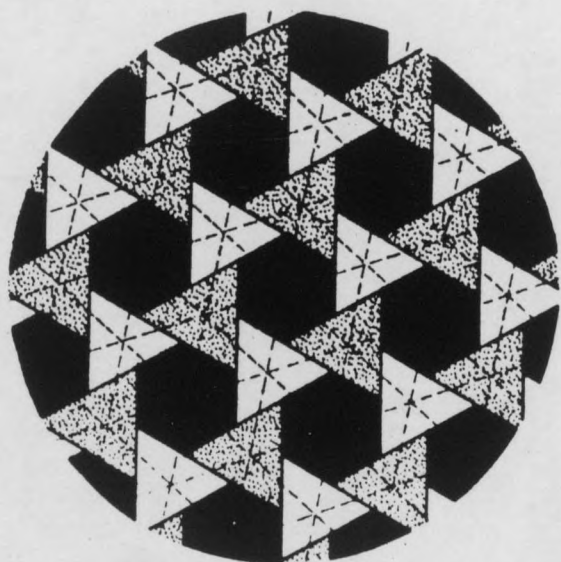
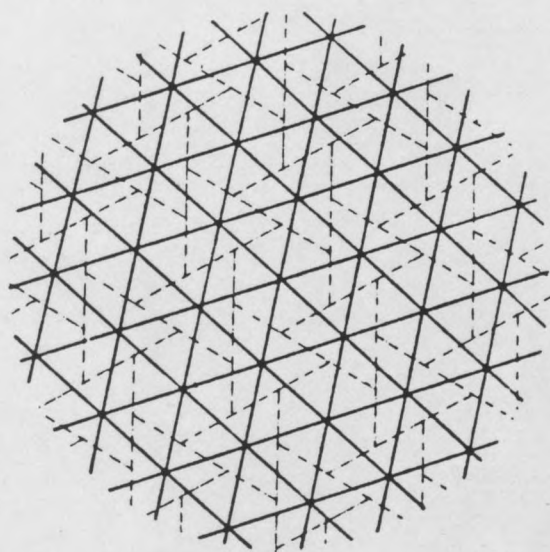
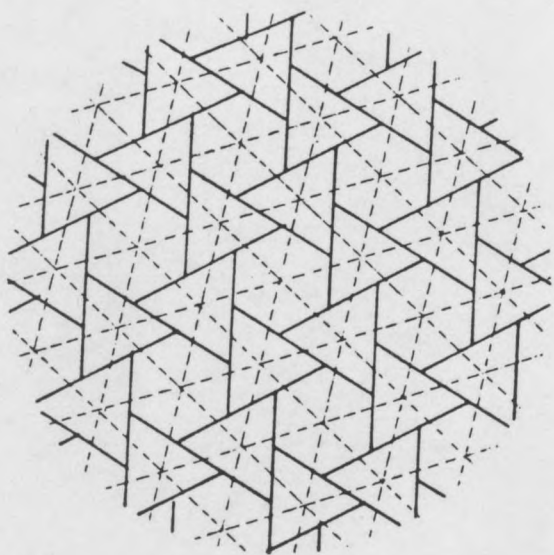
$4_1 4_2 4_2^-$

6



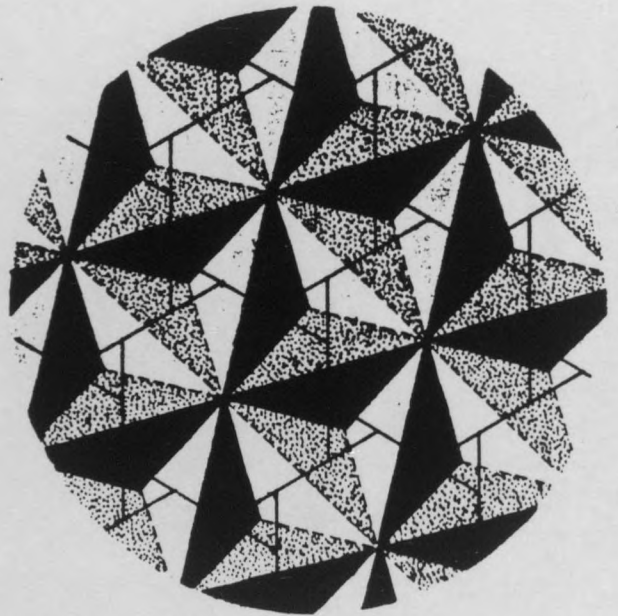
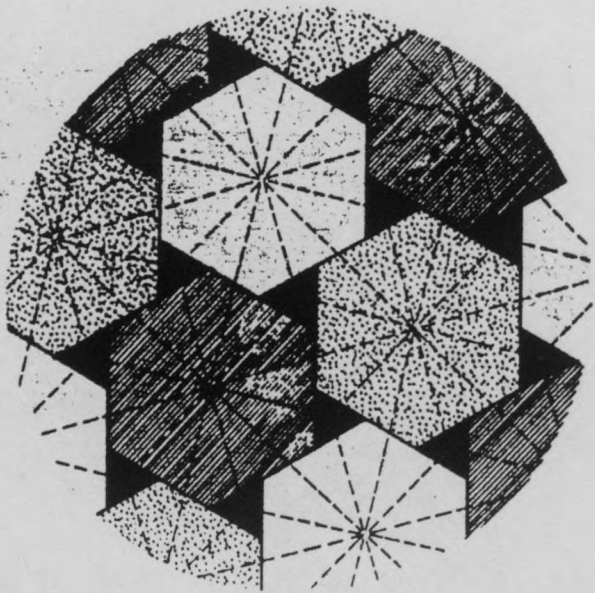
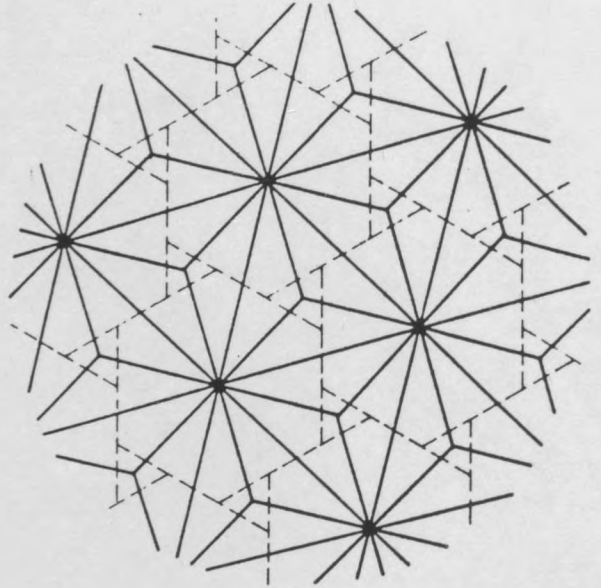
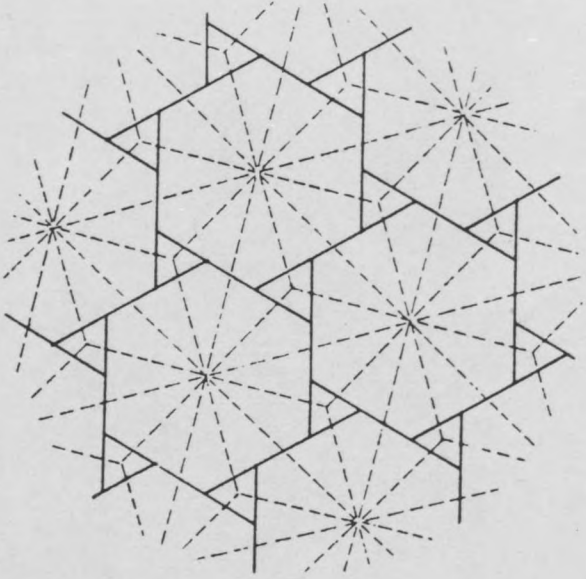
$4_1 4_3 4_3^-$

7



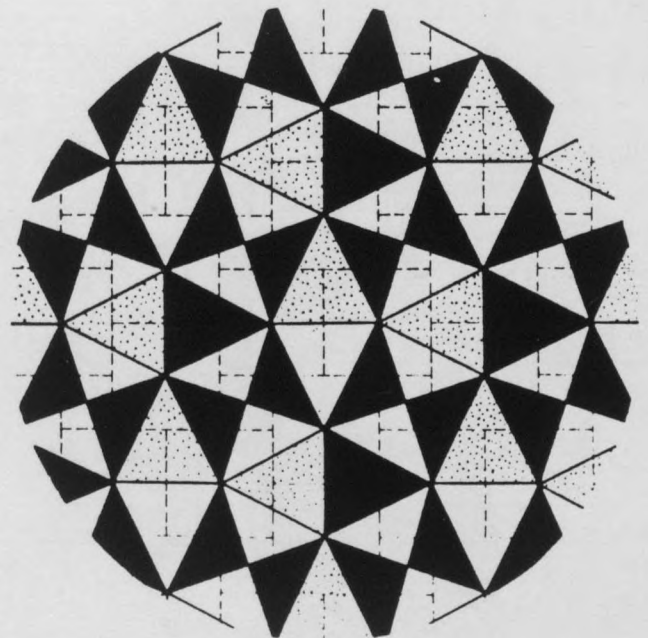
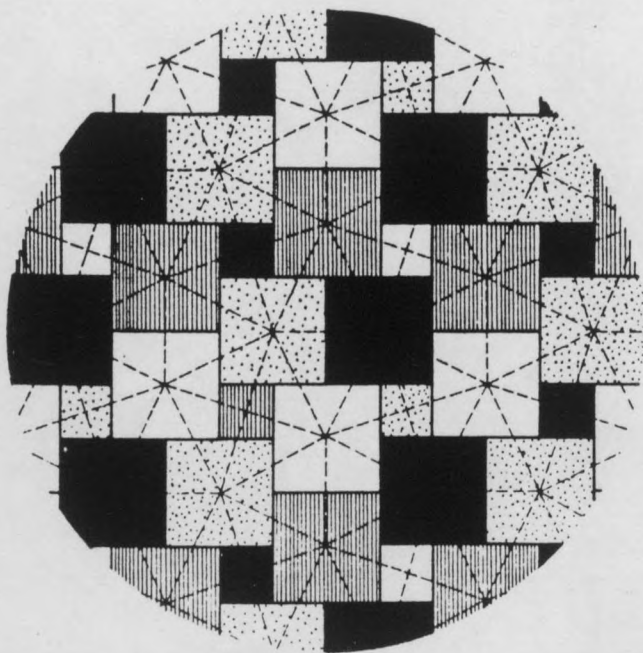
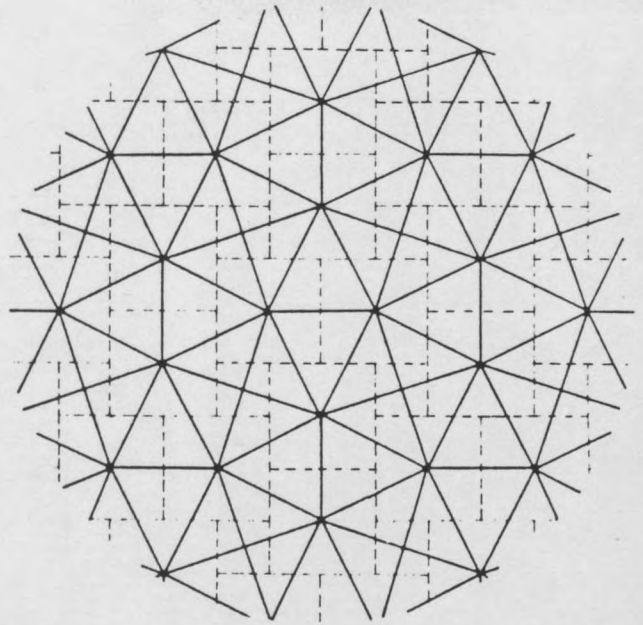
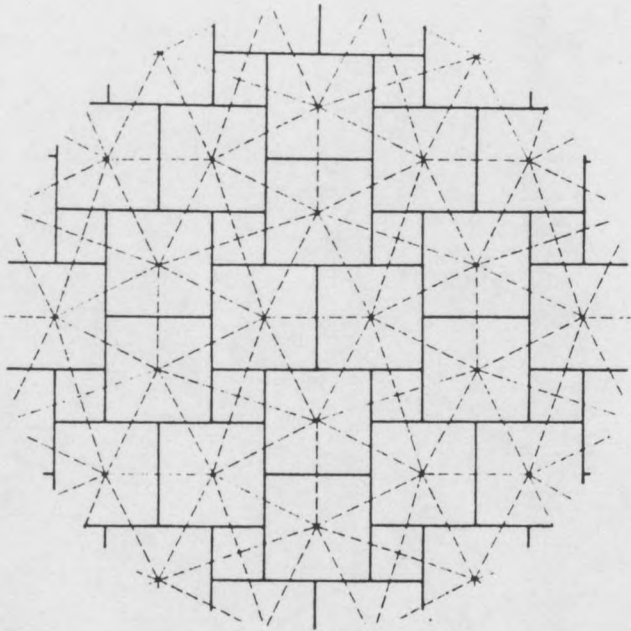
$3_2 3_2 6_1$

S



$3_16_26_2$

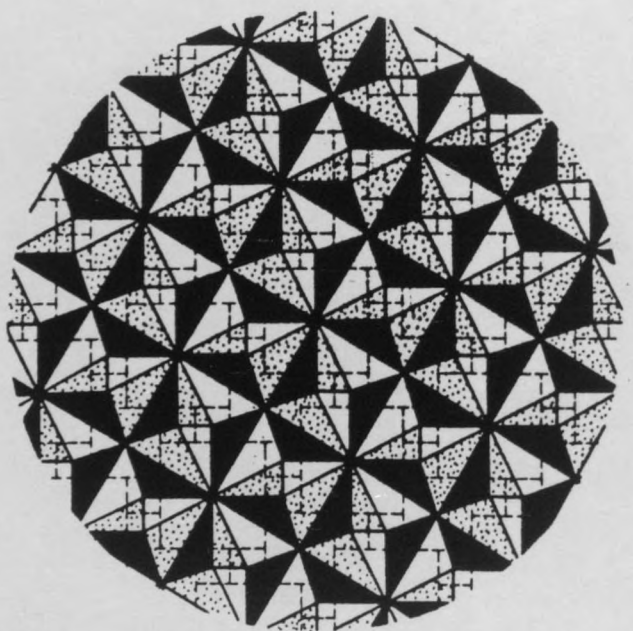
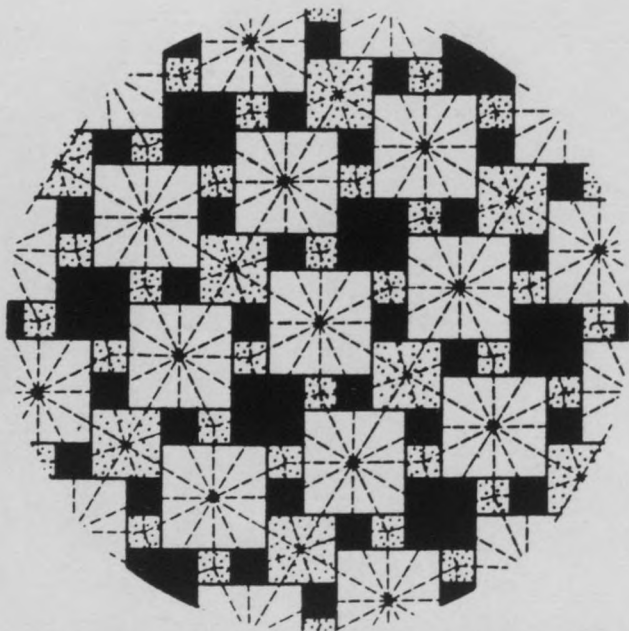
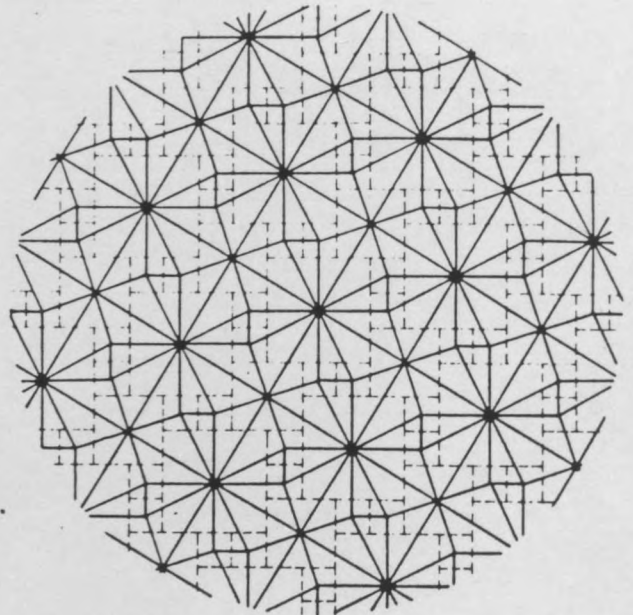
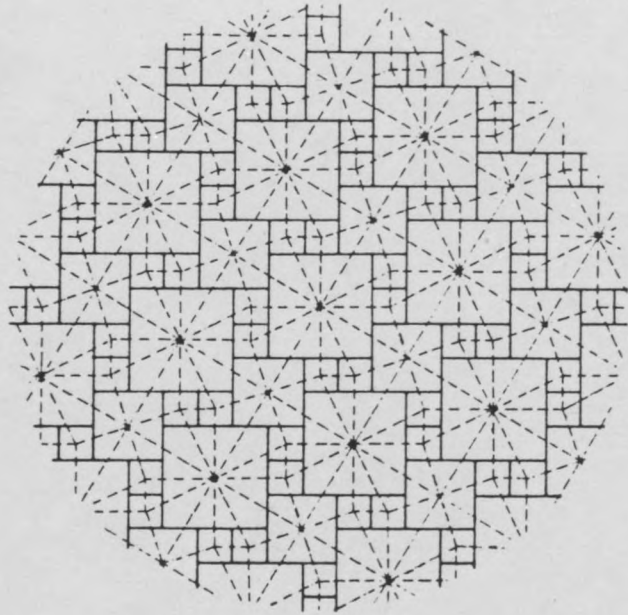
9



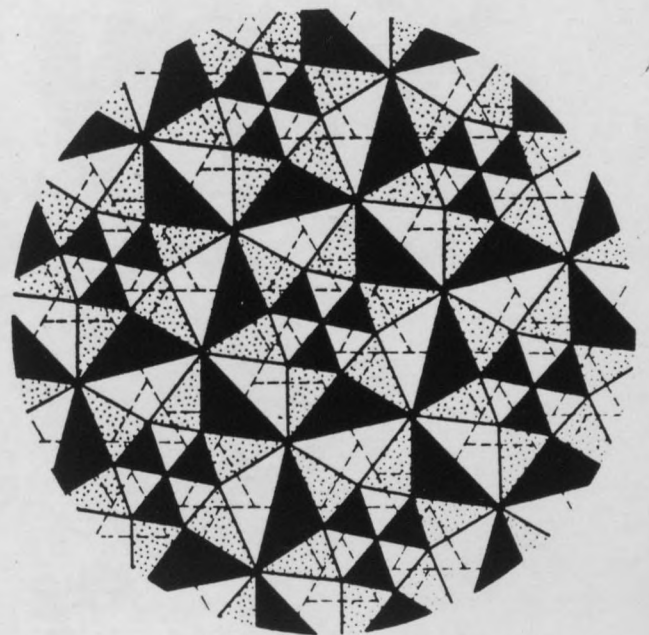
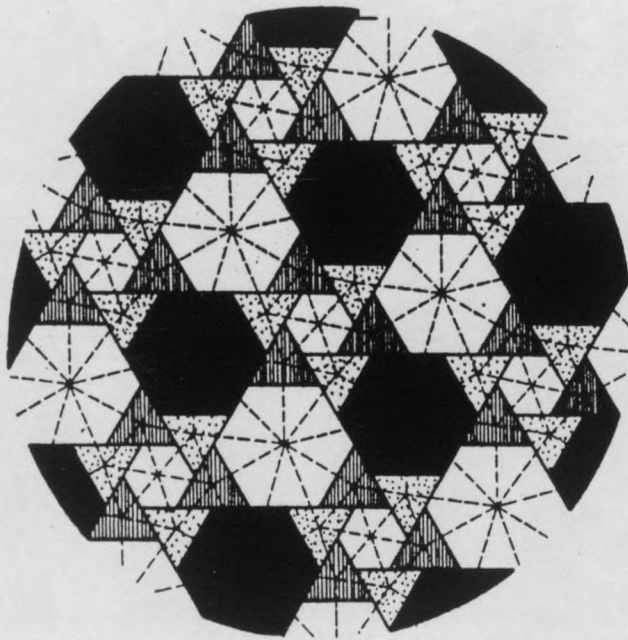
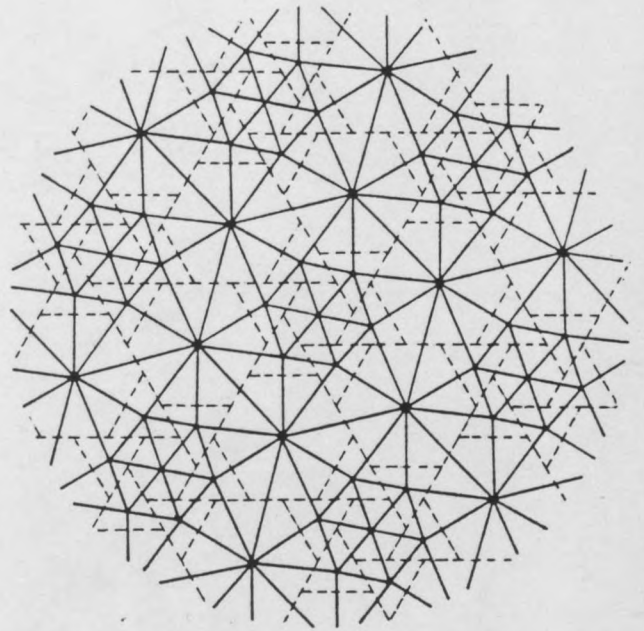
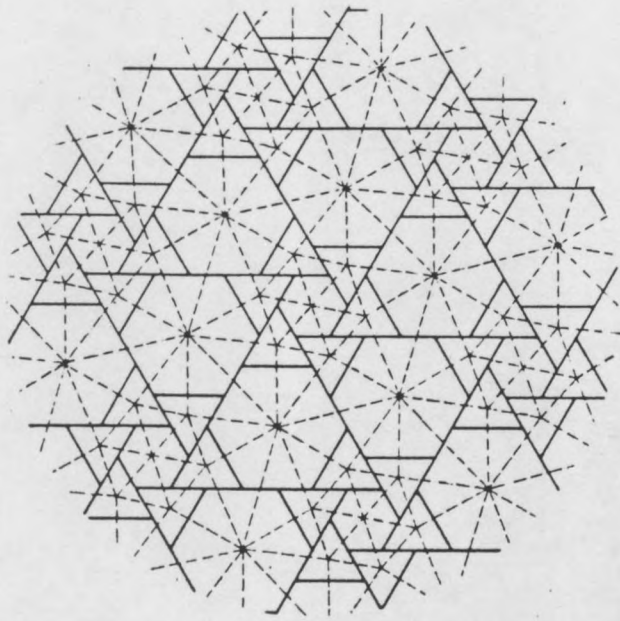
$4_1 4_2 4_2^-$

$4_1 4_2^- 4_2$

$4_2 4_2 4_2^-$



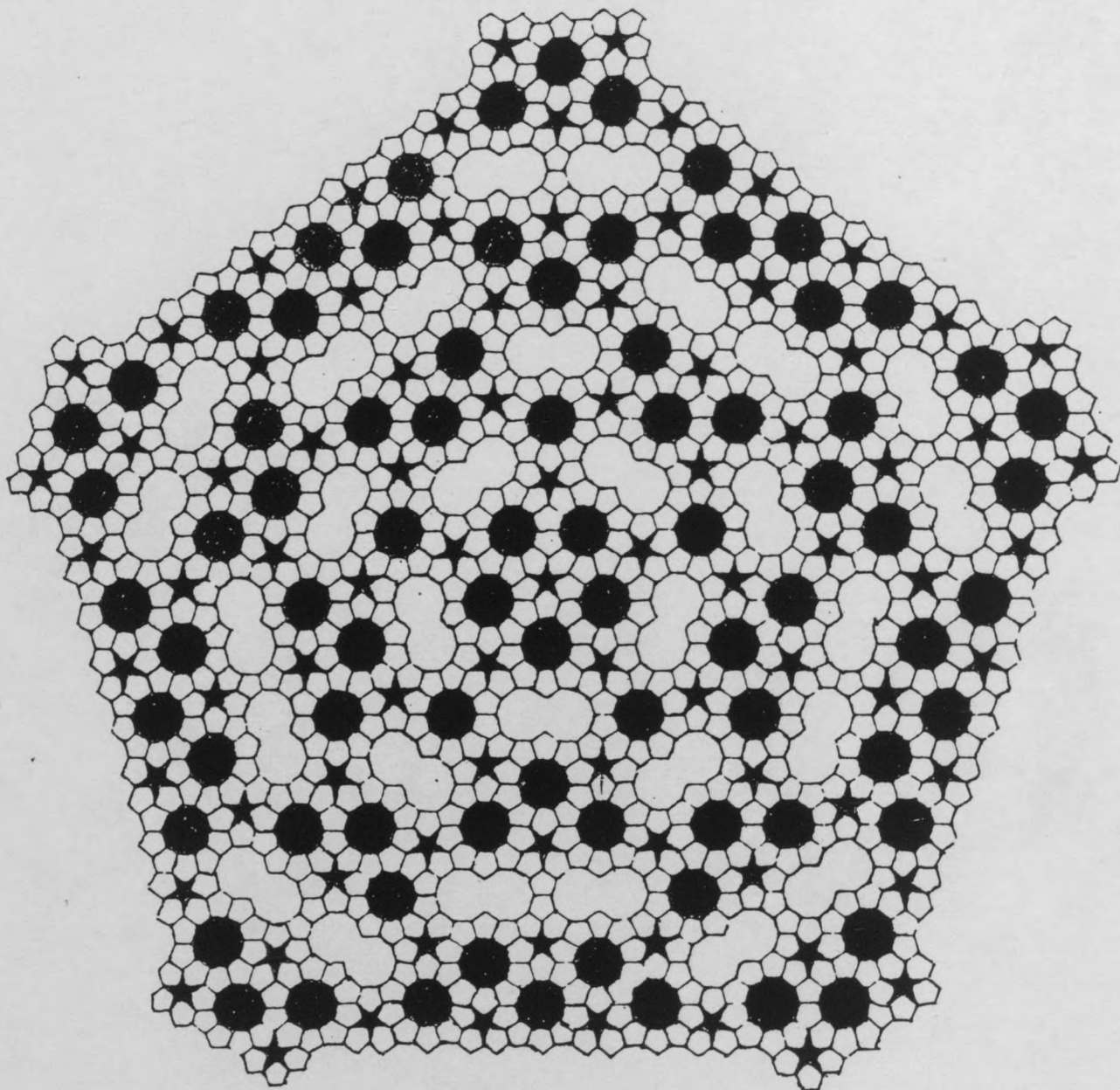
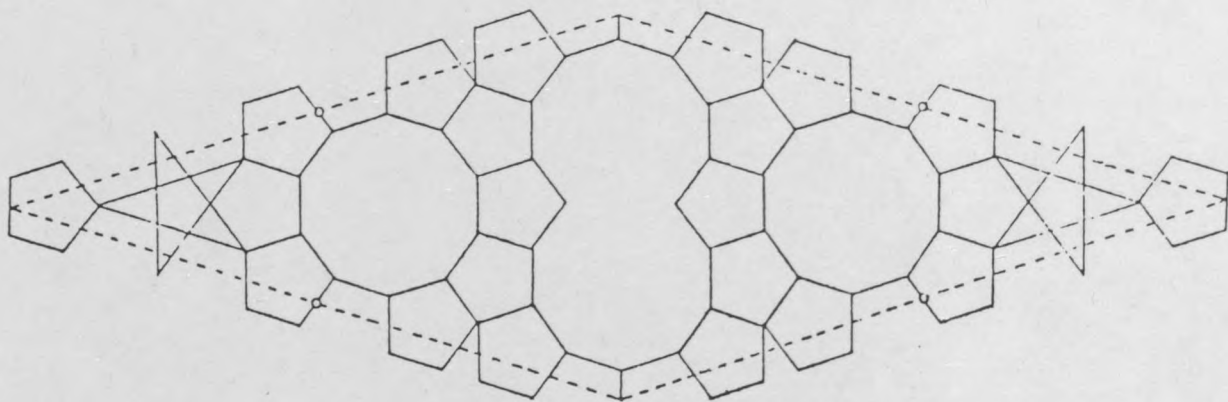
$4_1 4_1 4_3$
 $4_1 4_2 4_3$
 $4_1 4_3 4_2$



$3_2 3_2 6_1$

$3_2 3_2 6_2$

$3_2 6_2 6_2$



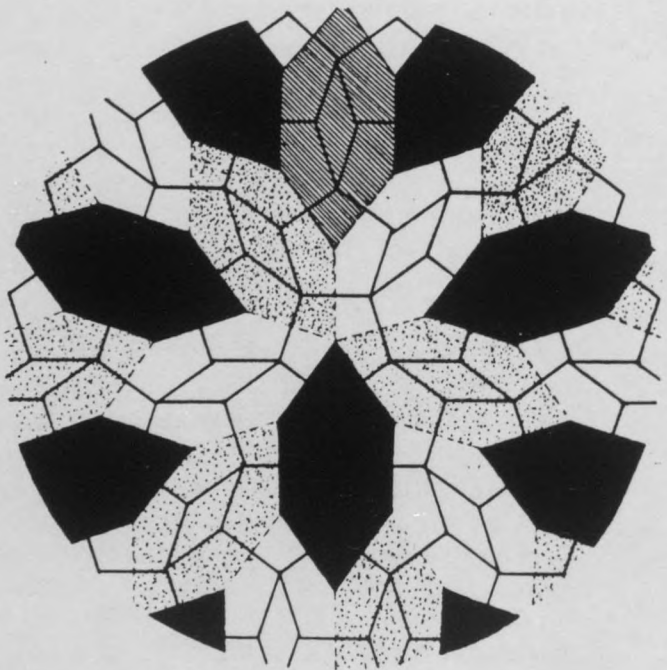
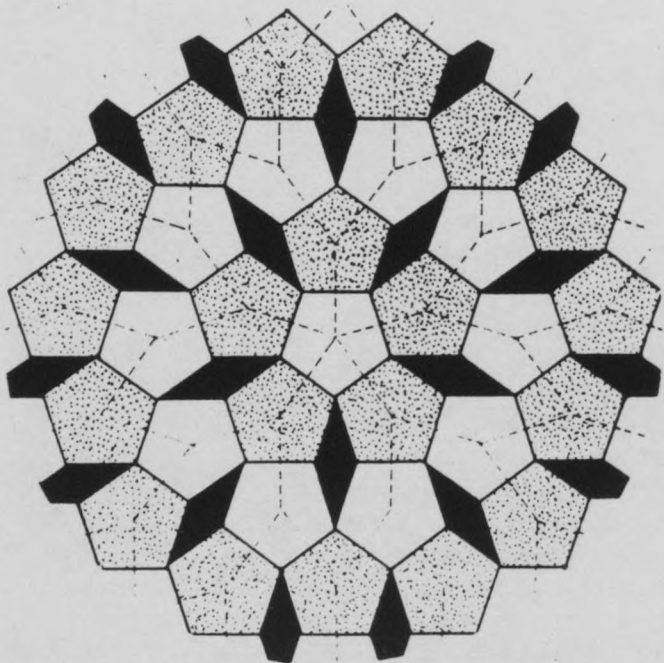
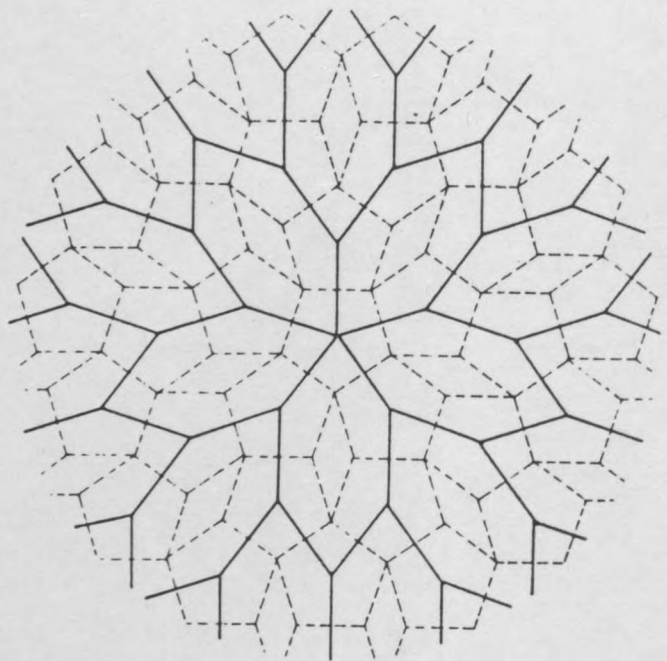
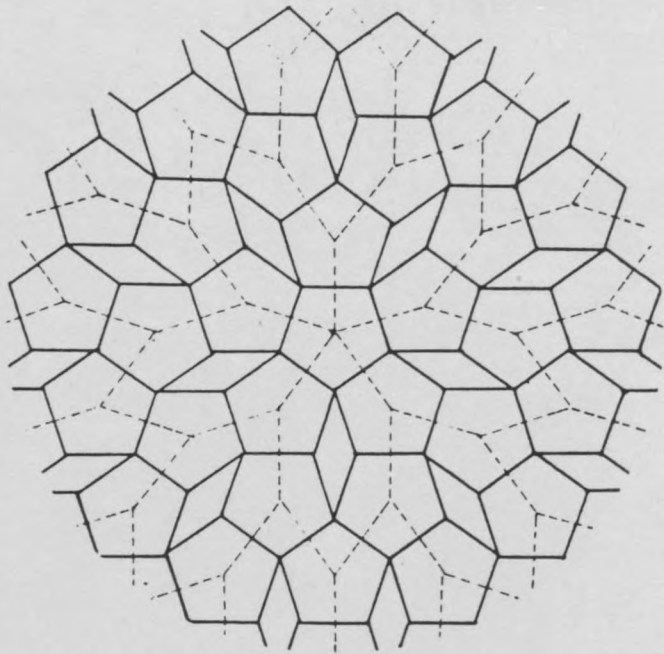
Partition concentrique par pentagones, pentagrammes,
décagones et décagones entrelacés par Kepler.

ARRANGEMENTS CONCENTRIQUES ET IRREGULIERS

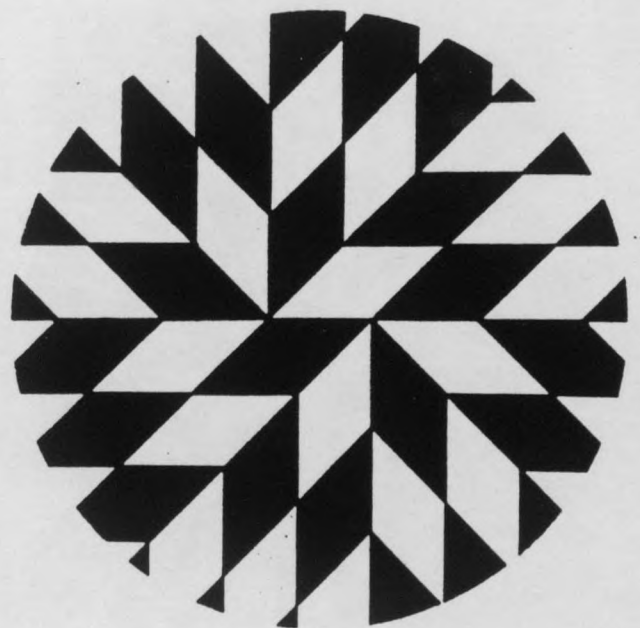
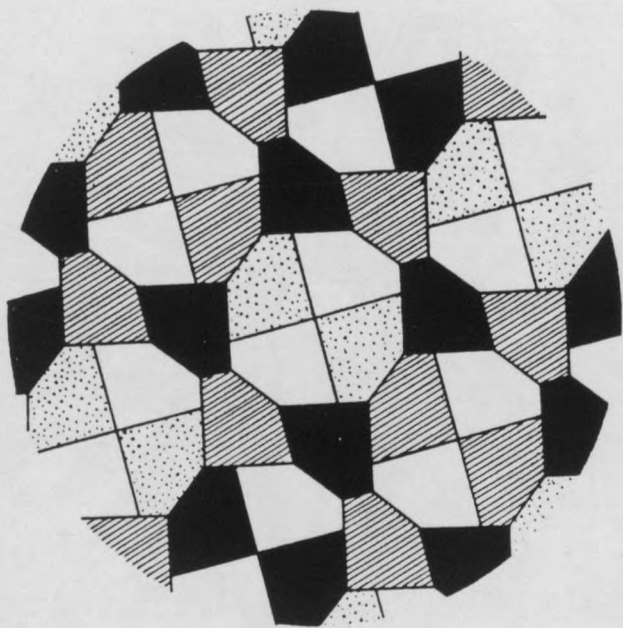
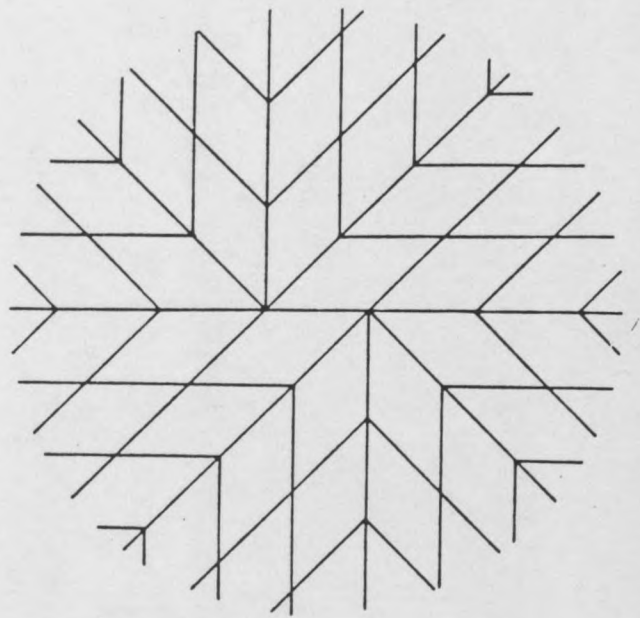
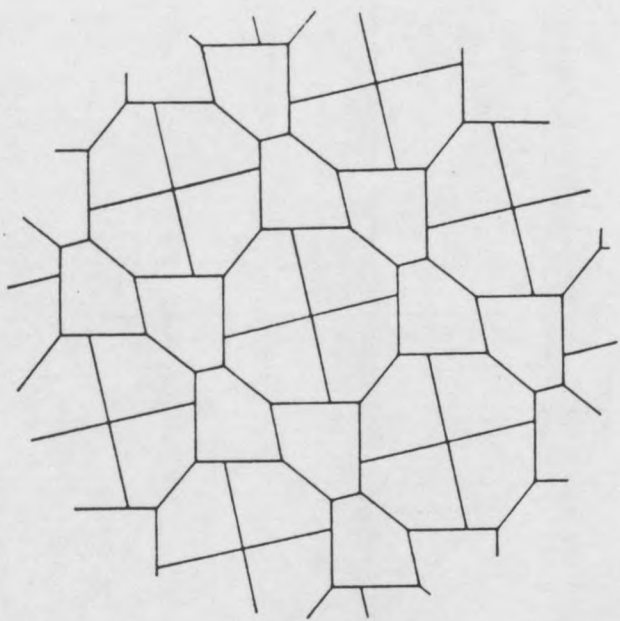
A part le triangle équilatéral, les autres polygones d'un nombre impair de côtés ne peuvent pas former des assemblages polaires planaires composés uniquement de polygones convexes réguliers. Ainsi, les combinaisons utilisant les pentagones, heptagones ou nonagones réguliers sont des arrangements en général non isotropiques et d'une organisation radio-concentrique. Pour obtenir des tessellations isotropiques et non concentriques à cellules impaires, il est nécessaire de déformer les polygones qui seront alors non équilatéraux ou non inscrits dans un cercle.

Les arrangements concentriques à polygones réguliers impairs présentent donc soit des hiatus, soit des recouvrements, qui sont généralement de formes losangées ou étoilées. Certaines configurations peuvent entrer dans une expansion concentrique à l'infini; d'autres doivent subir une déformation ou procéder par une hiérarchisation des groupes d'assemblage. Ces configurations complexes étaient utilisées particulièrement dans les coupoles stalactites islamiques; c'est à ce titre seulement qu'on présente ici quelques schémas, ces compositions utilisant des compartiments irréguliers et non convexes étant en dehors du sujet.

A remarquer, toutefois, qu'à l'aide de losanges équilatéraux ou de triangles isocèles identiques, il est facile d'obtenir un pavage concentrique, bicentrique et même spiraloïde.

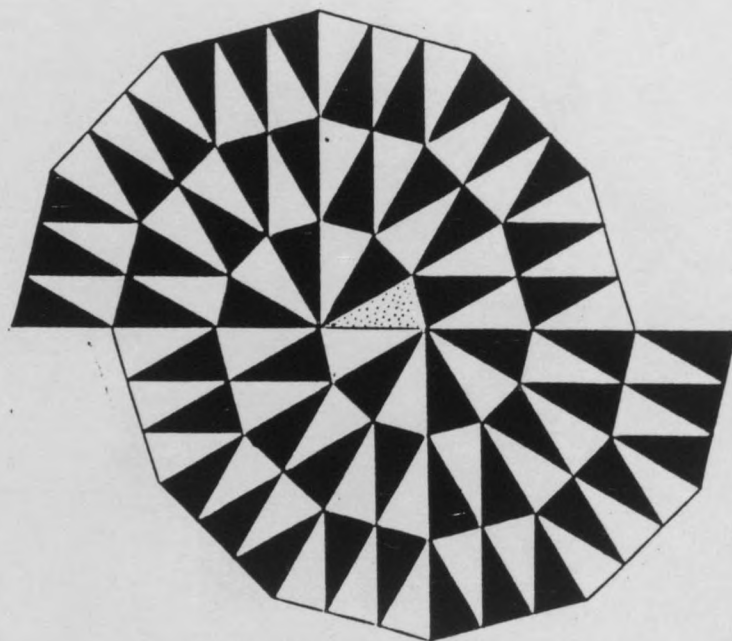
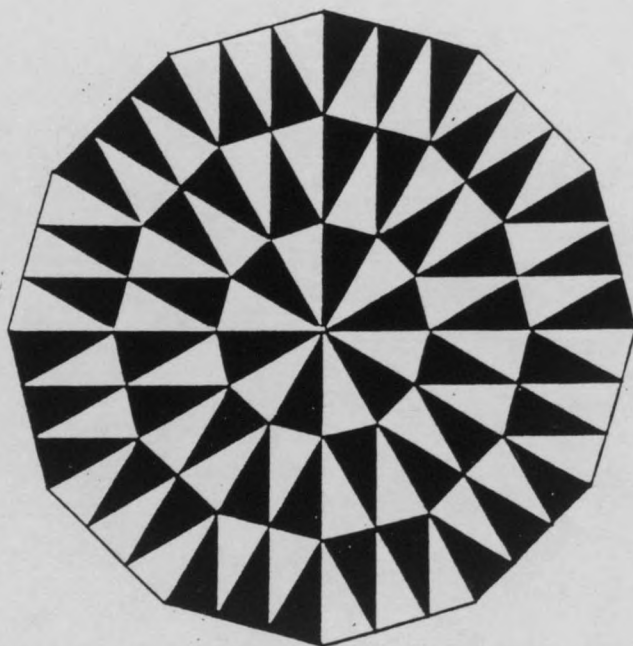
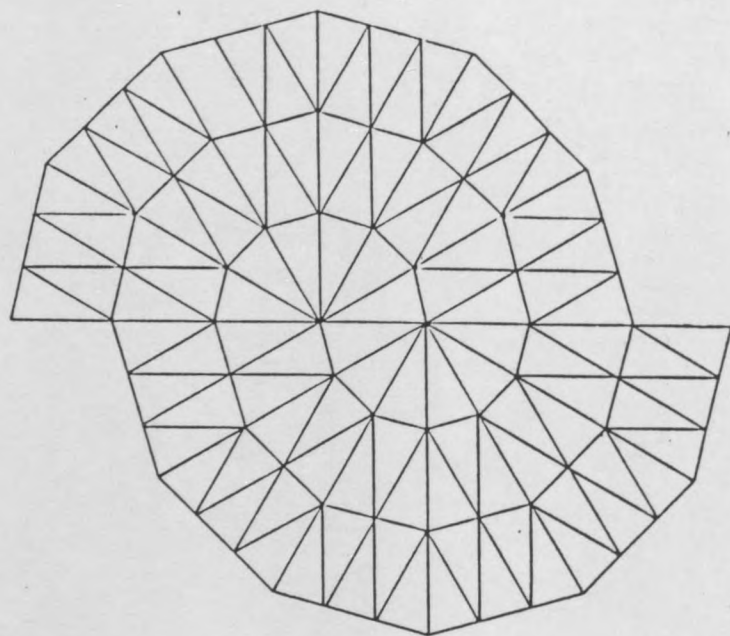
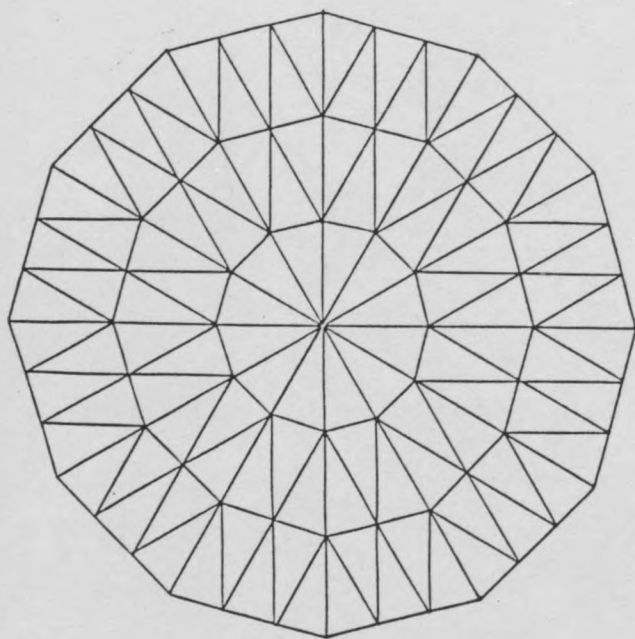


Trame radioconcentrique à base
de pentagones et losanges



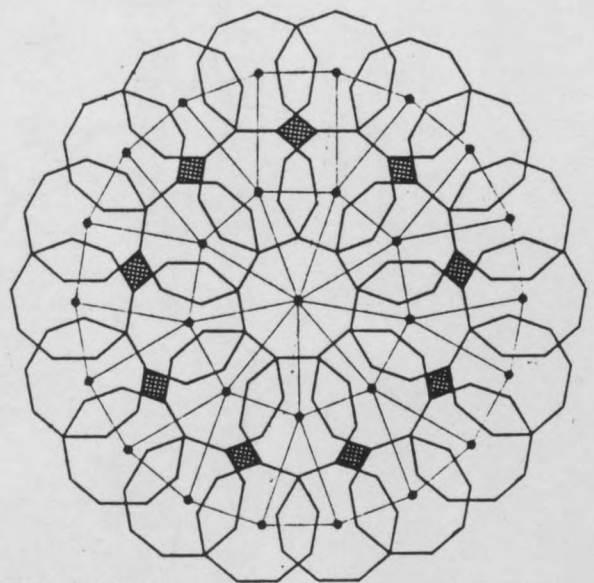
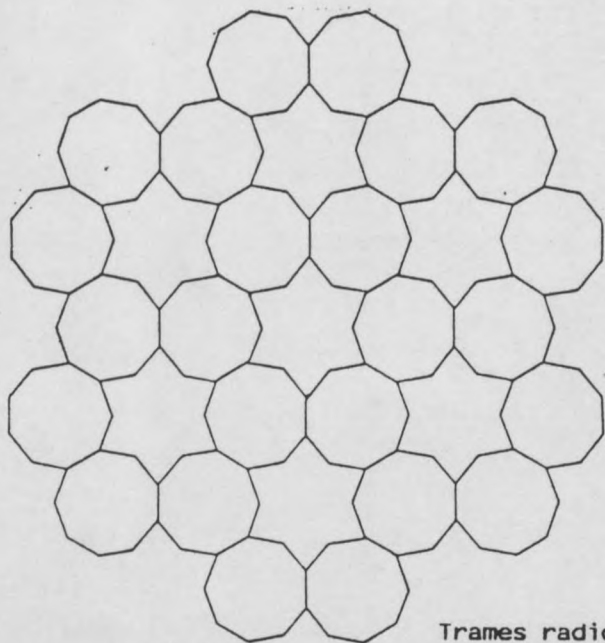
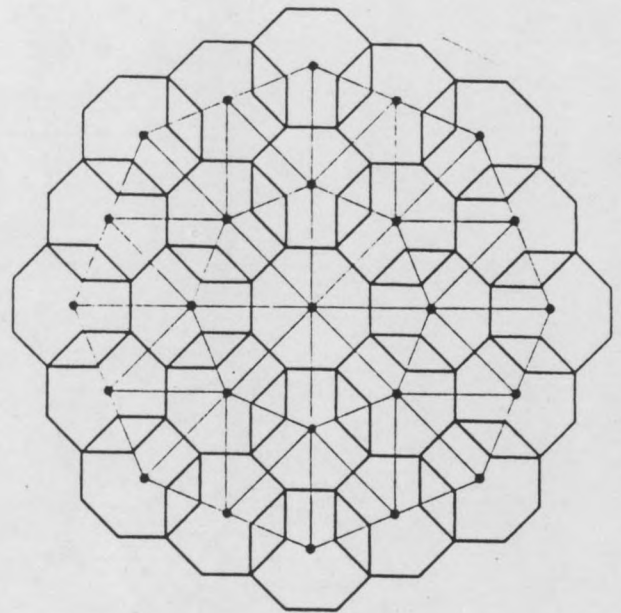
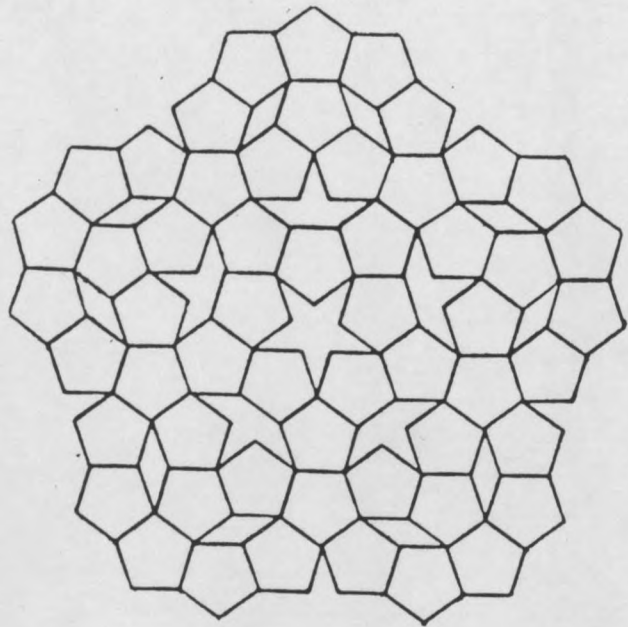
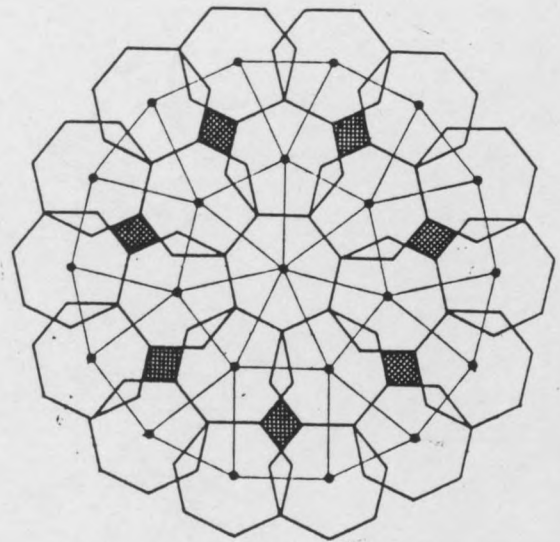
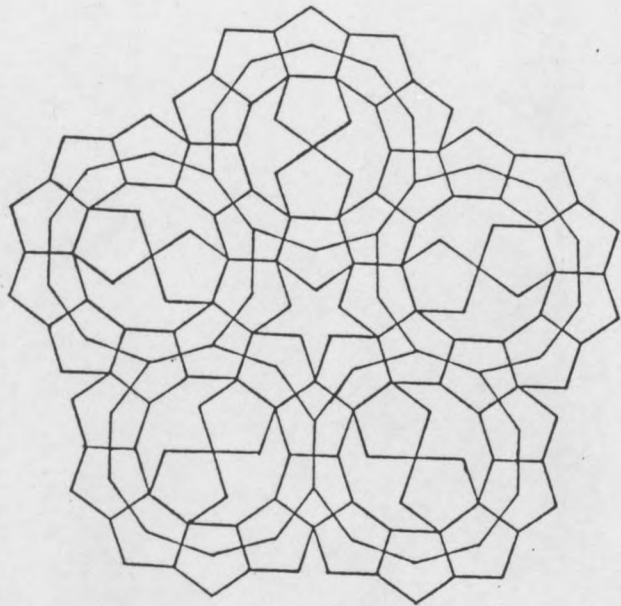
Partition à base de pentagones
irréguliers (Richard James)

Trame bicentrique à losanges

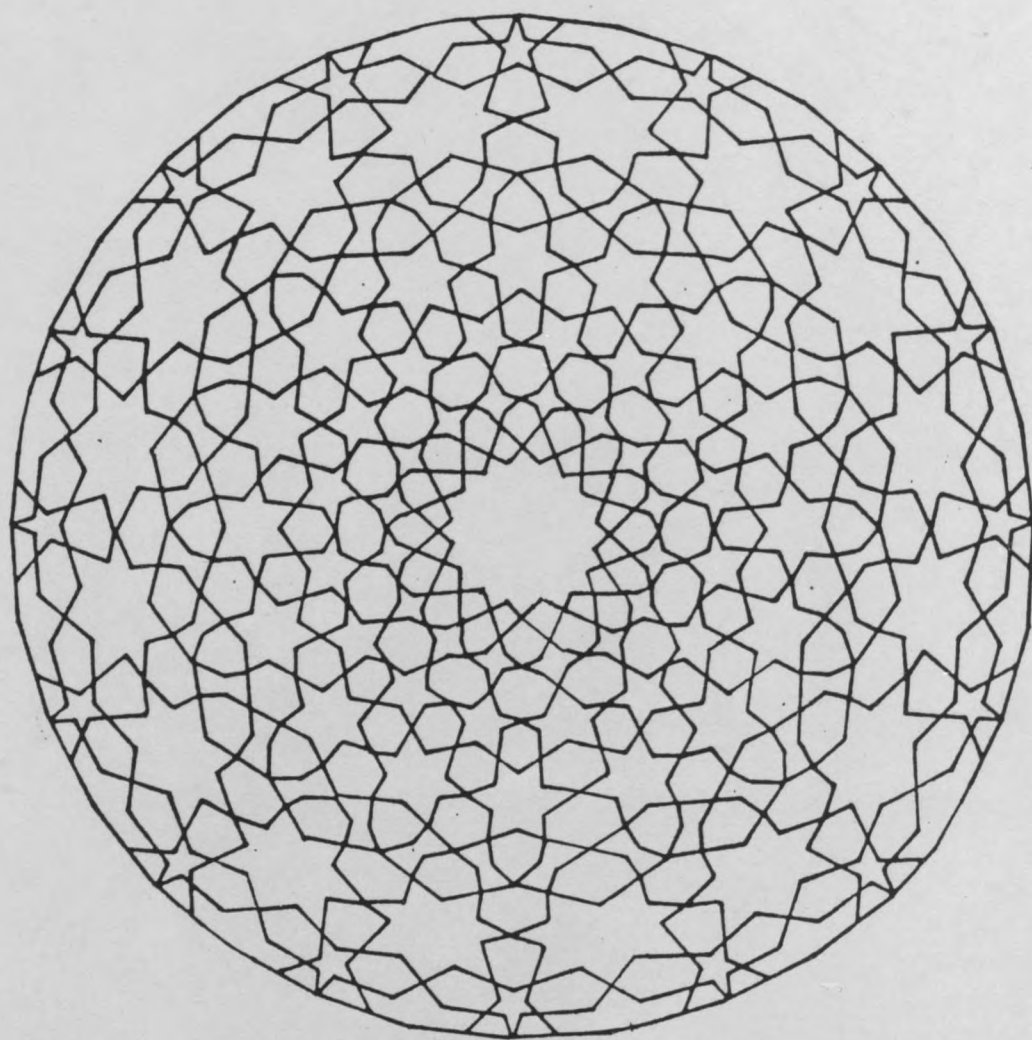
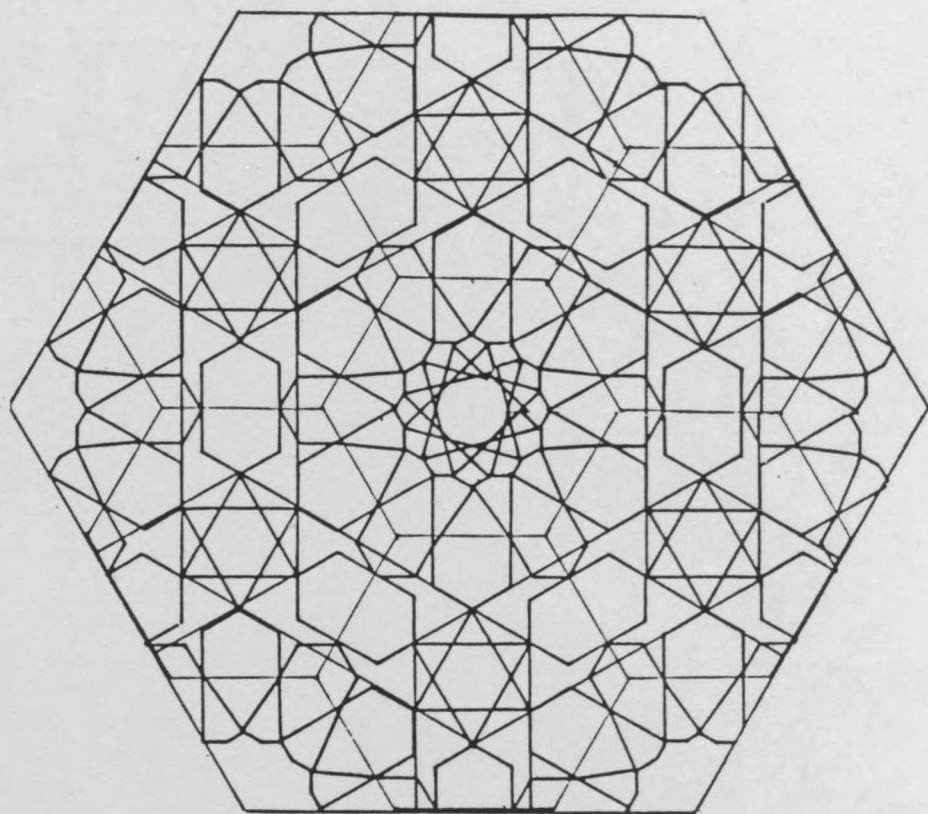


Trame radioconcentrique
à triangles isocèles

Trame bicentrique
à triangles isocèles



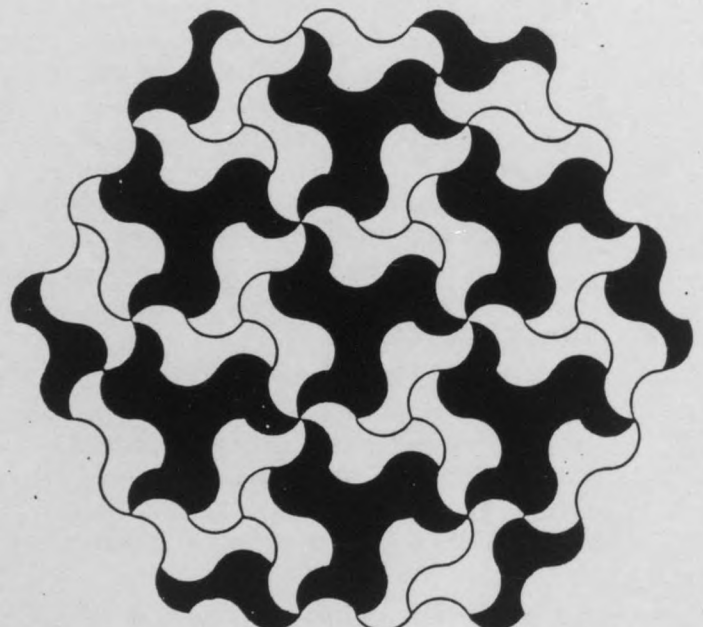
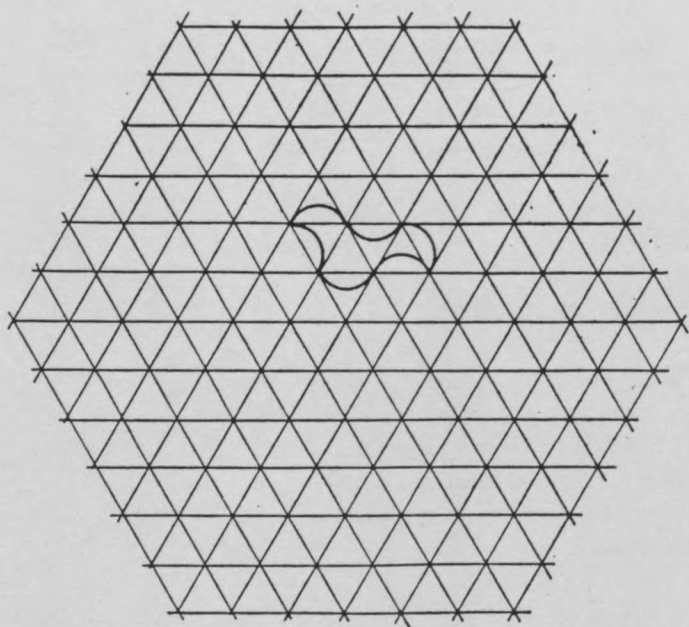
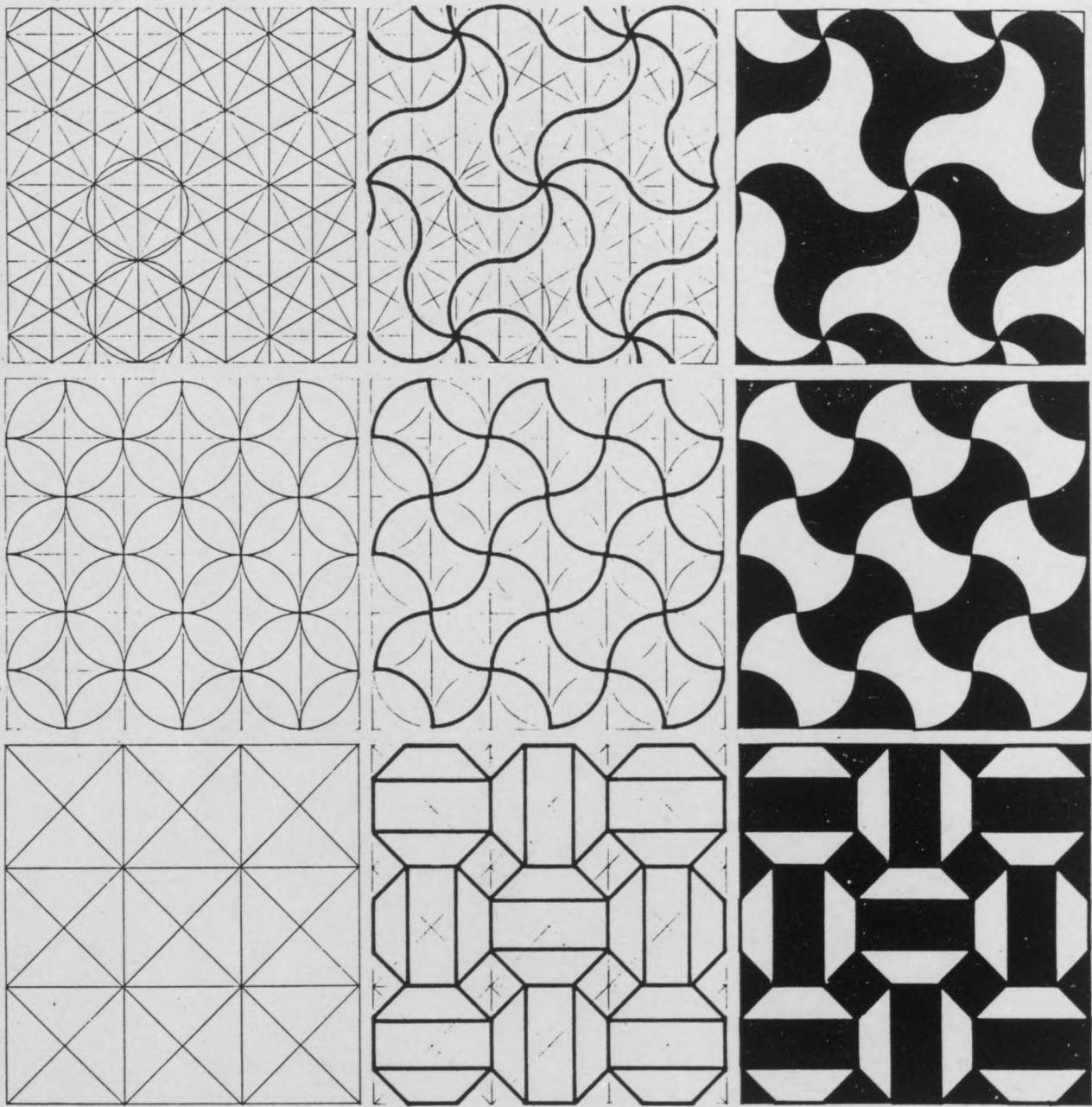
Trames radioconcentriques à base
de polygones de 5,7,8 et 9 côtés

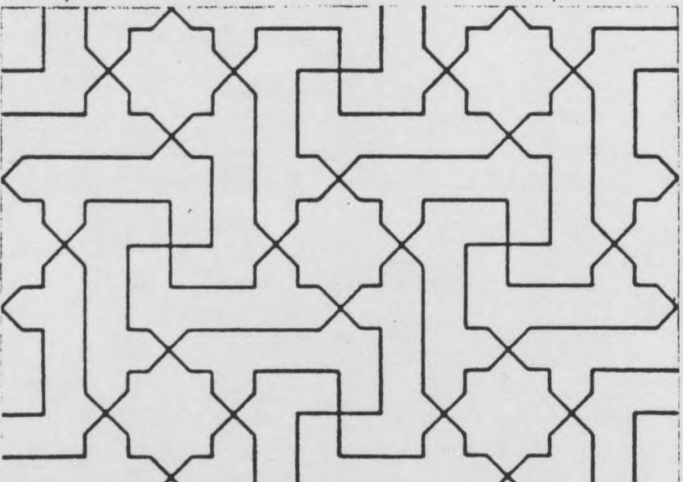
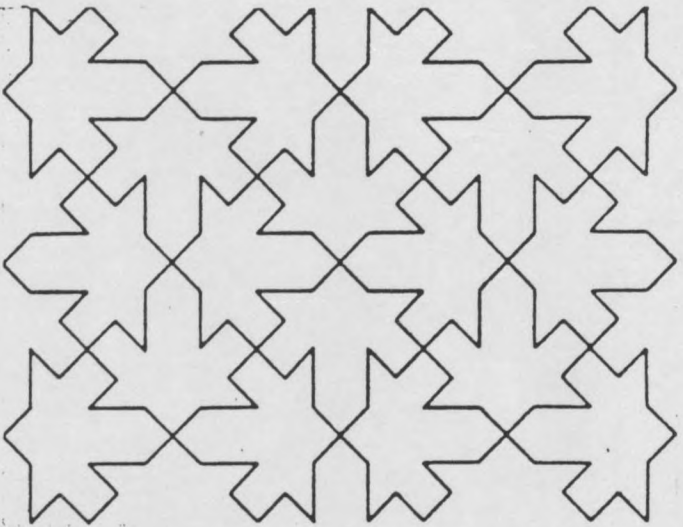
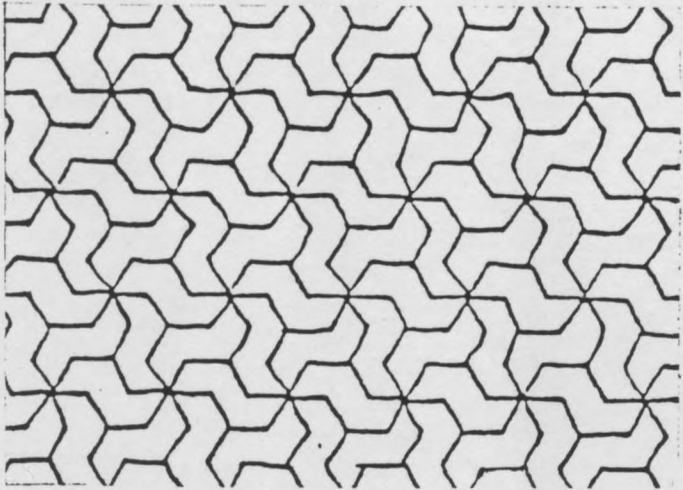
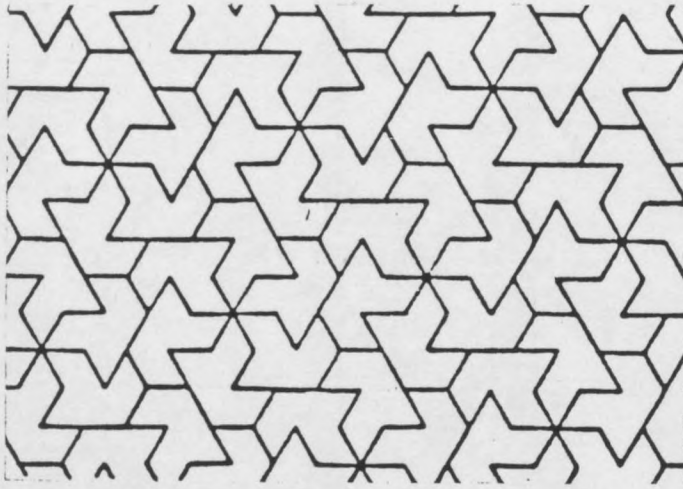


OPERATIONS SUR LES TESSELLATIONS

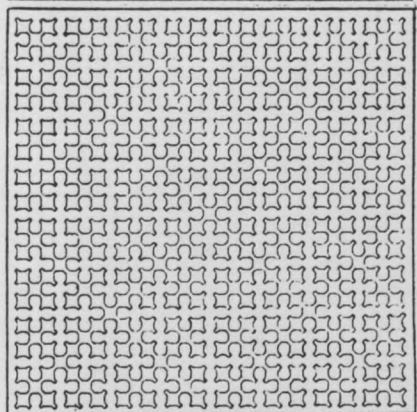
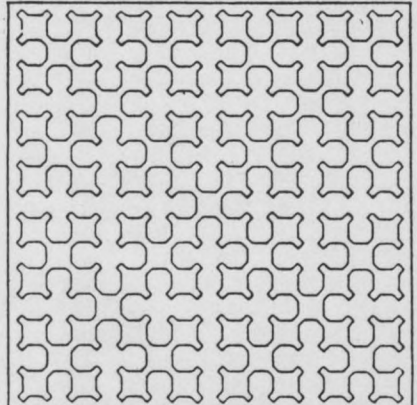
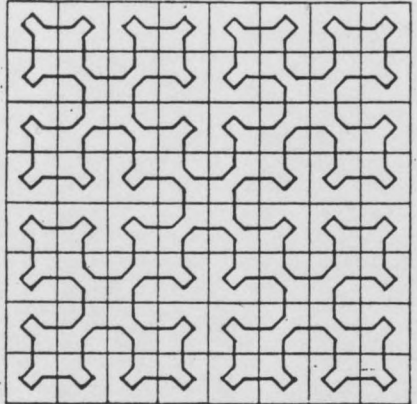
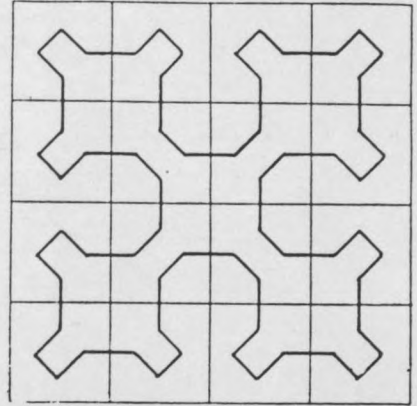
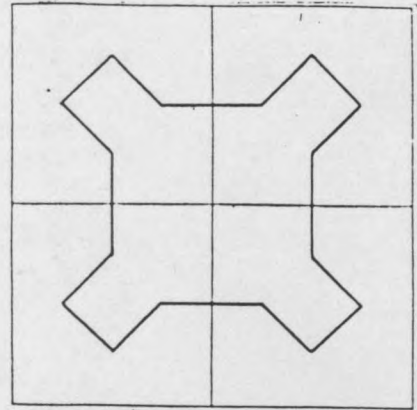
Les trames régulières, semi-régulières ou composites peuvent être considérées comme des schémas de base sur lesquels on peut exécuter toutes sortes de transformations. Ces opérations peuvent être sélectives, conservatrices ou enrichissantes, selon qu'on procède par l'élimination, la déformation ou l'addition d'éléments constituant le schéma original. A titre d'exemple : la frontière entre deux compartiments adjacents peut s'incurver uniformément ou selon une certaine alternance; des polygones peuvent être groupés pour former des puzzles de parcelles non-convexes; des subdivisions secondaires des régions ou la modification des lignes séparatives peuvent apporter une complexification. Toutes ces opérations ne changent pas la nature de l'arrangement fondamental, son ordonnancement, son degré de symétrie ou de répétitivité.

A remarquer que le processus de complexification par arrangement hiérarchisé et automorphe peut produire des configurations qu'on peut appeler des polygones périodiques infinis. Tel est la courbe de Peano, sorte de labyrinthe régulier, obtenue à base d'un schéma orthogonal.





Transformations



Polygone périodique infini

SURFACES GAUFREES

N	S	P					E	V
		1	2	3	4	5		
1	3	4	2	4		4	3-3 30°32'	
2	4	3	2	4	1	5	3-4 34°44'	
3	5	2	2	5	1	6	2-5 37°23'	
4	6	4	2	3	1	7	2-6 40°30'	
5	8	5	2	4	1	10	4-6 54°46'	
6	10	6	2	5	1	13	3-8 54°44'	
7	15	7	2	6	1	18	4-10 45°	

Les pyramides ou les cônes de révolution ont des surfaces gaufrees qui sont des surfaces développables. On peut les décrire par des équations paramétriques. Les surfaces gaufrees sont des surfaces qui peuvent être développées sur un plan sans déformation. Elles sont caractérisées par le fait que leur courbure est nulle. Les surfaces gaufrees sont des surfaces qui peuvent être développées sur un plan sans déformation. Elles sont caractérisées par le fait que leur courbure est nulle. Les surfaces gaufrees sont des surfaces qui peuvent être développées sur un plan sans déformation. Elles sont caractérisées par le fait que leur courbure est nulle.



SURFACES GAUFREES

Les surfaces gaufrees constituent une classe intermediaire entre les tessellations et les reseaux double nappe. Elles sont obtenues par une operation qui consiste a appliquer sur les maillons polygonaux d'une tessellation des volumes polyedriques simples dont les sommets se situent sur deux niveaux, notamment des pyramides et certaines calottes polyedriques. Pratiquement, les polygones de 3, 4 et 5 cotés sont enrichis par des pyramides du meme nombre de cotés, et les hexagones et octogones par des calottes provenant respectivement du cuboctaédre et du petit rhombicuboctaédre; quant au dodécagone, il est recomposé par six pyramides triangulaires, et autant de pyramides carrées entourant une calotte hexagonale.

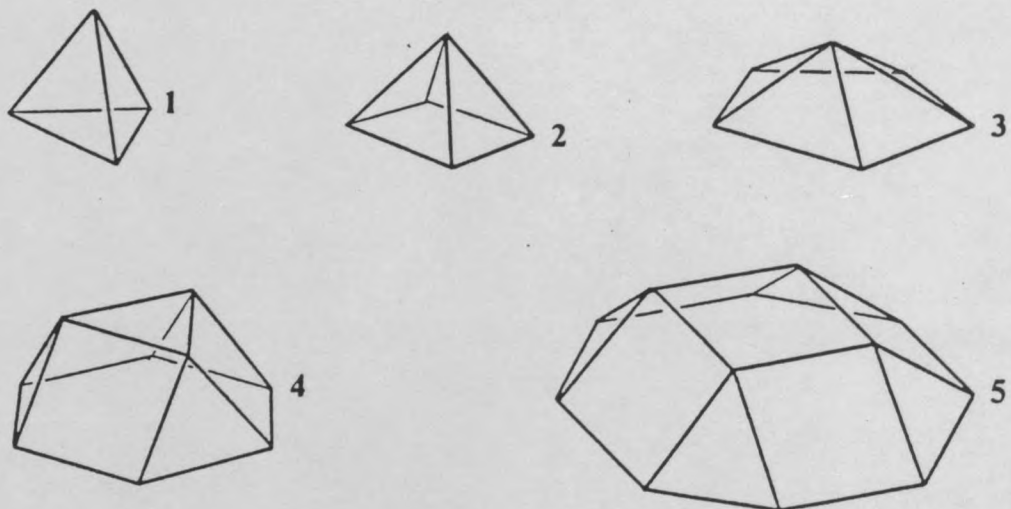


TABLEAU 8 SOLIDES COMPLEMENTAIRES

	nom	polygone de base	S A		F					ΣF	a
					3	4	5	6	8		
1	pyramide triangulaire (tétraèdre)	3	4	6	4					4	3-3 70°32'
2	pyramide carré (demi octaèdre)	4	5	8	4	1				5	3-4 54°44'
3	pyramide pentagonale (calotte icosaèdre)	5	6	10	5		1			6	3-5 37°23'
4	demi cuboctaèdre	6	9	15	3	3		1		7	3-6 70°32' 4-6 54°44'
5	calotte petit rhombicuboctaèdre	8	12	20	4	5			1	10	3-8 54°44' 4-8 45°

Des pyramides ou des calottes ou les deux à la fois, sont donc appliquées par leur base sur les mailles polygonales correspondantes de la tessellation. La somme des angles polygonaux des assemblages varie entre 180° et 720° dans la configuration obtenue qui se présente comme une surface plissée avec des creux et des saillies. Bien que les sommets ne soient pas situés sur le même niveau, les surfaces gaufrées restent cependant topologiquement planaires, elles divisent l'espace en deux parties et peuvent être considérées comme des polyèdres convexes infinis.

Les surfaces gaufrées régulières, semi-régulières ou composites, suivant la classe de la tessellation de base, qui sont cependant toutes constituées d'arêtes identiques et de faces polygonales régulières, pourraient être cataloguées d'une manière plus nuancée, en tant que tessellations composites : pyramidées, gaufrées, et pyramidées et gaufrées à la fois. Toutefois, vu leur très grand nombre, seules trente sont représentées ici, réunies sous la dénomination globale de "surfaces gaufrées". Elles dérivent, exceptées les deux dernières, des onze tessellations isocèles. Les cinq solides complémentaires entrant dans la composition des surfaces gaufrées sont représentés sur les figures et leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau n°8.

SURFACES GAUFREES

TABLEAU 8 - SURFACES GAUFREES

N°	Type	T				S	R	Code	Description
		0	1	2	3				
1	3-3					3	3	3 ³	pyramide (carrée)
2	3-4					3	4	3 ³ 4	pyramide carrée (sans calotte)
3	3-3					3	3	3 ³	pyramide pentagonale (calotte losangée)
4	3-3					3	3	3 ³	calotte carrée
5	3-3					3	3	3 ³	calotte pentagonale

Des pyramides et des calottes de base carrée et losangée sont obtenues par une seule et même dérivée.

TABLEAU 9 SURFACES GAUFREES

tessellation de base	pyramide				calotte	partiel	saturé	code de la surface gaufree dérivée							
	3	4	6	8				1	2	3	4	5	6		
1	333333	.					.	3 ³	3 ¹²						
2		.					.	3 ³	3 ³						
3	4444		.				.	3 ⁴	3 ³						
4			.				.	3 ⁴	3 ² 43 ² 4						
5	666			.			.	3434	343434						
6				.			.	3434	3 ² 464						
7				.			.	3434	34 ² 36						
8	33344	.	.				.	3 ³	3 ⁴	3 ¹⁰					
9	33434	.	.				.	3 ³	3 ⁴	3 ¹⁰					
10	33336	.		.			.	3 ³	3 ³ 4	3434					
11		.		.			.	3 ³	3 ⁶ 6						
12	3464	3 ³	3 ⁴	3 ⁷	3434				
13		3 ⁴	3 ⁶ 6						
14		3 ³	3 ² 4 ² 34	3434					
15	3636	3 ³	3 ⁴ 43 ² 4	3434					
16		3 ³ 434	3434						
17		3 ³	3 ² 63 ² 6						
18	488	3 ⁴	3 ⁴ 4 ²	34 ³					
19		3 ⁴	3 ² 43 ² 4	34 ³					
20		3 ² 4 ³	34 ³						
21		3434 ²	34 ³						
22		3434 ²	34 ³						
23	4612	3 ³	3 ⁴	3 ⁷ 4	3434				
24		3 ³	3 ⁴	3 ⁷ 4	3434				
25		3 ³	3 ⁴	3 ⁷ 4	3434				
26		3 ³	3 ⁴	3 ⁷ 4	3434				
27	31212	3 ³	3 ⁴	3 ¹⁰	3 ⁷ 4	3434			
28		3 ³	3 ⁴	3 ¹⁰	3 ⁷ 4	3434			
29	33336 3636	3 ³	3 ³ 4	3 ⁴ 43 ² 4	3434				
30	33336 3366 3636 666	3 ³	3 ³ 4	3 ³ 434	3 ⁴ 43 ² 4	343434	3434		

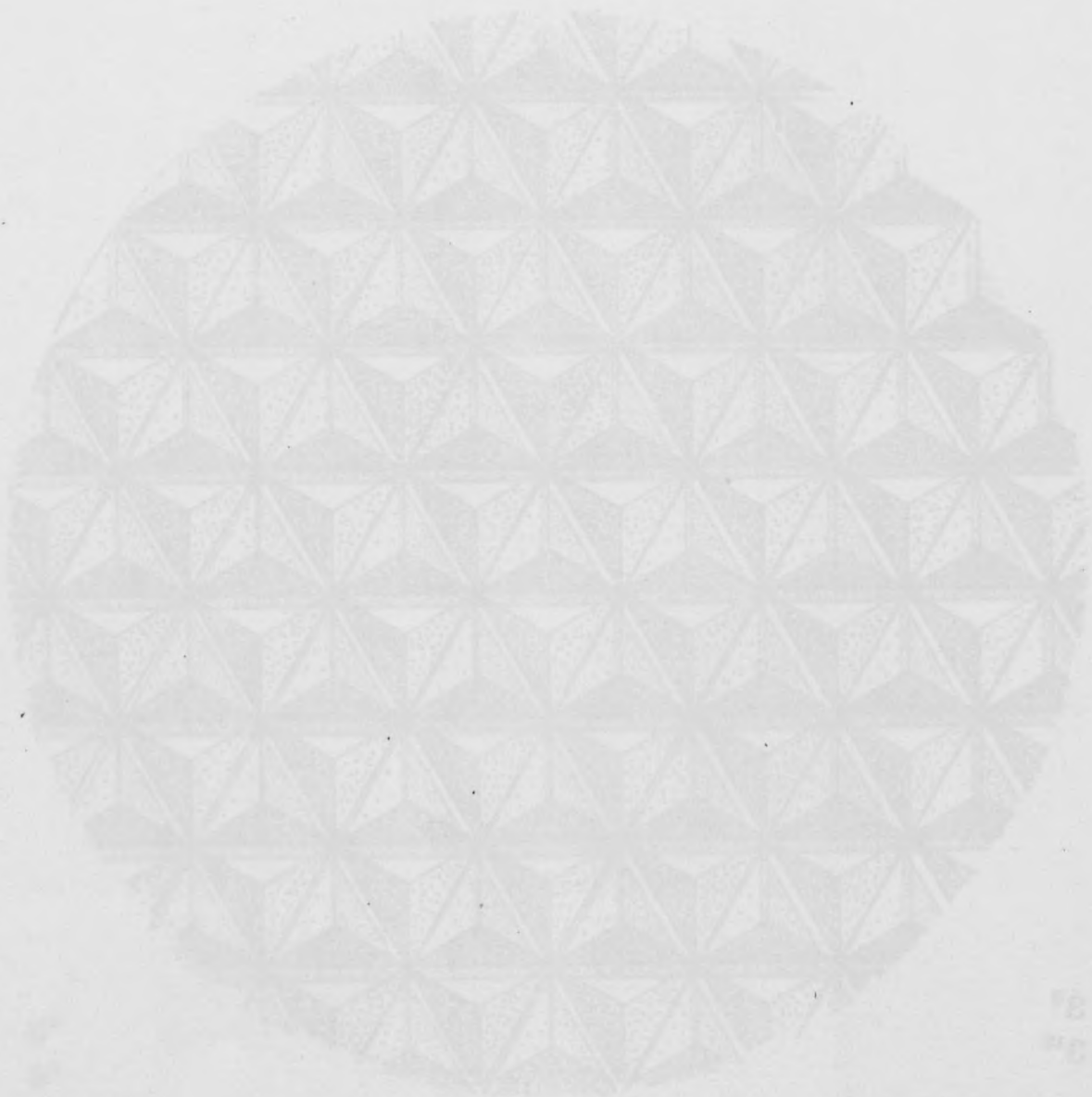
SURFACES GAUFREES REGULIERES



553388

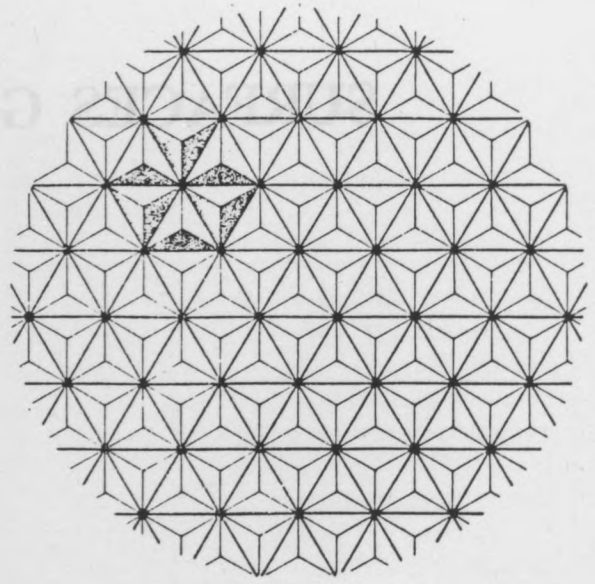
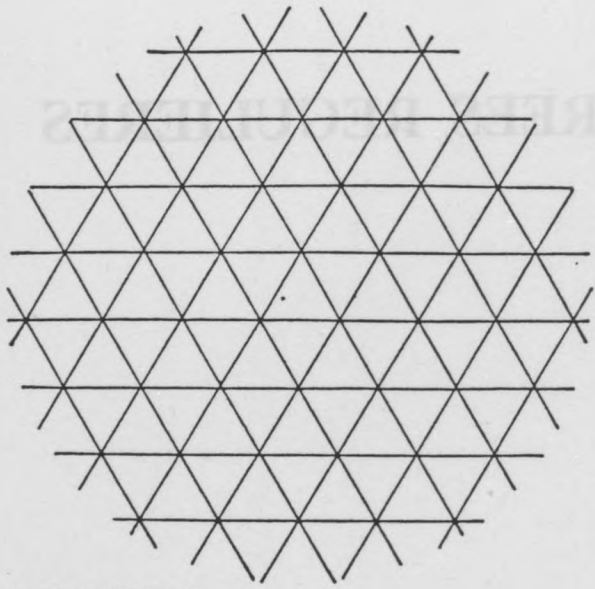


553388

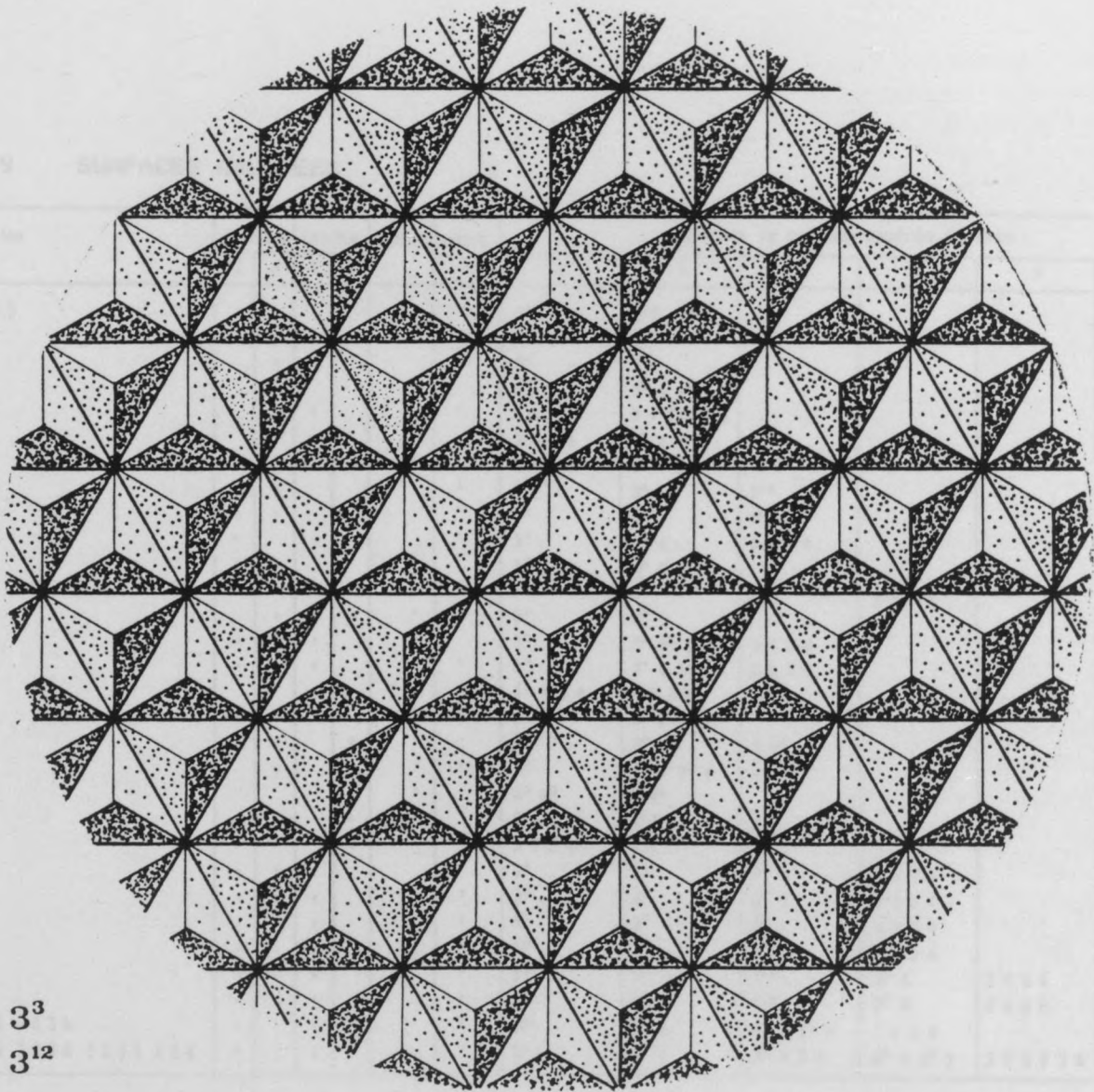


553388

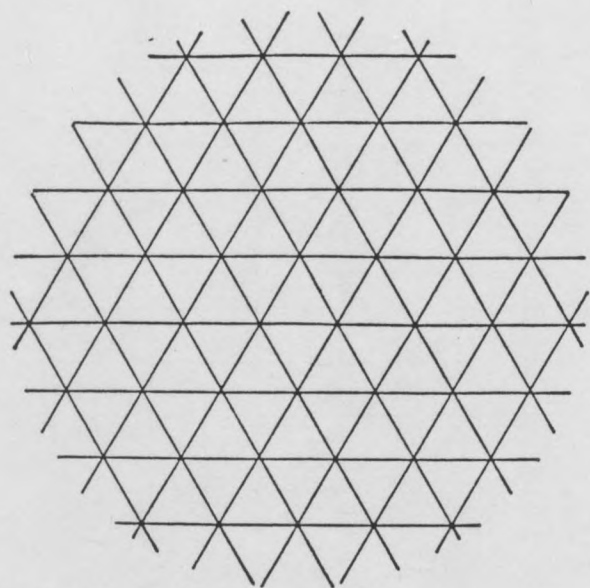
1



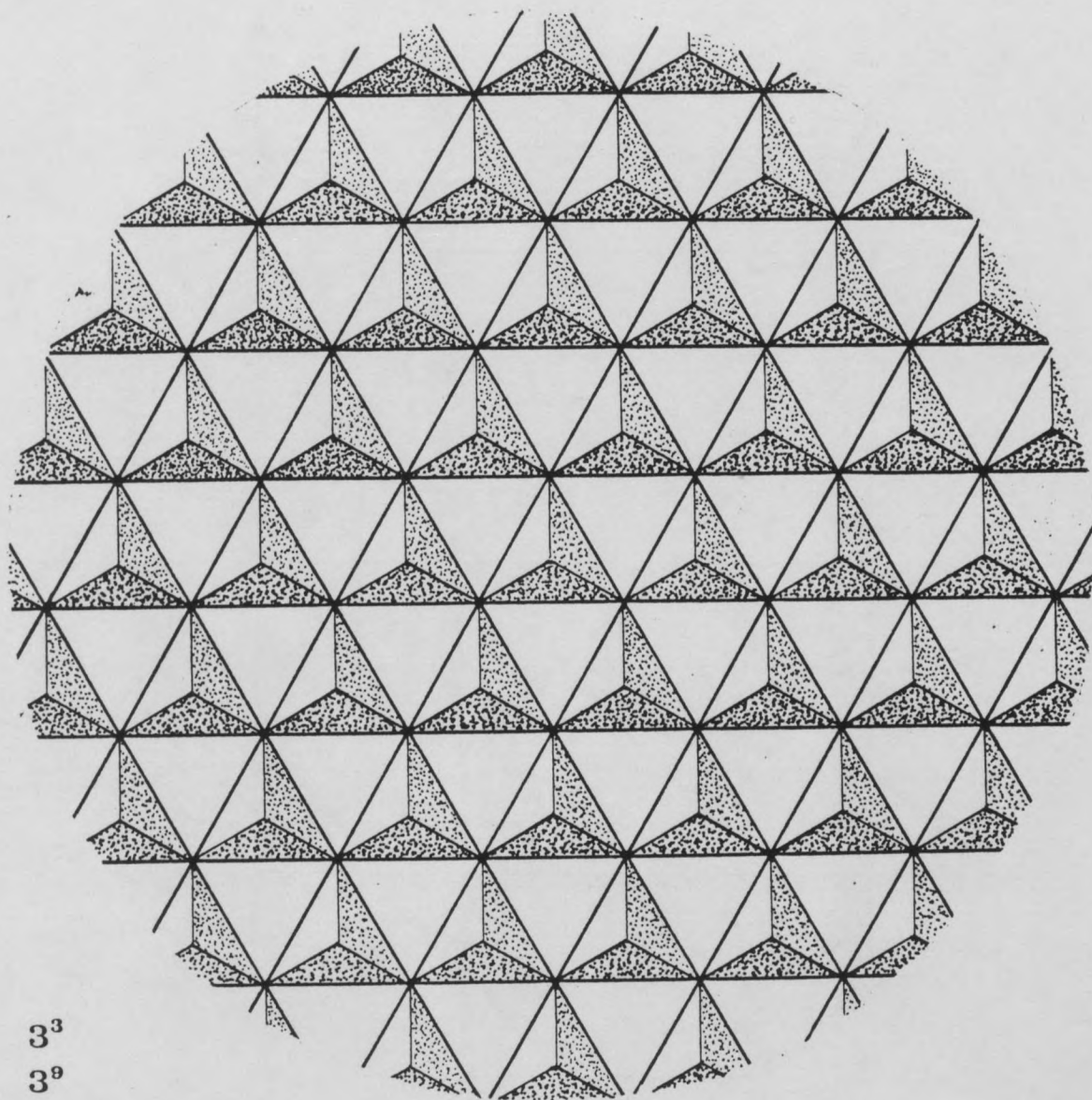
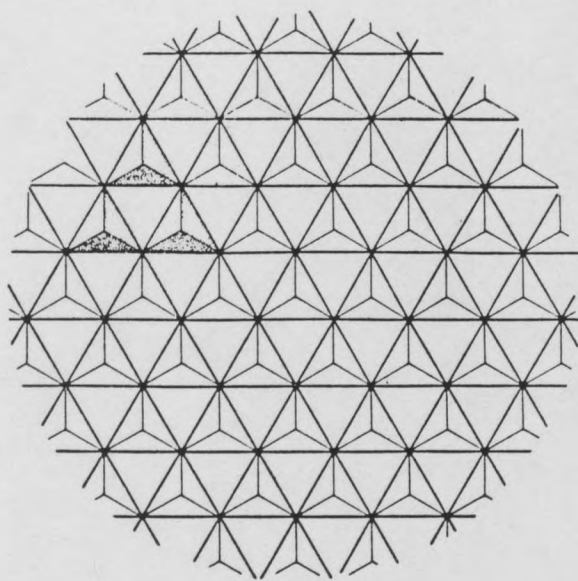
333333



3^3
 3^{12}

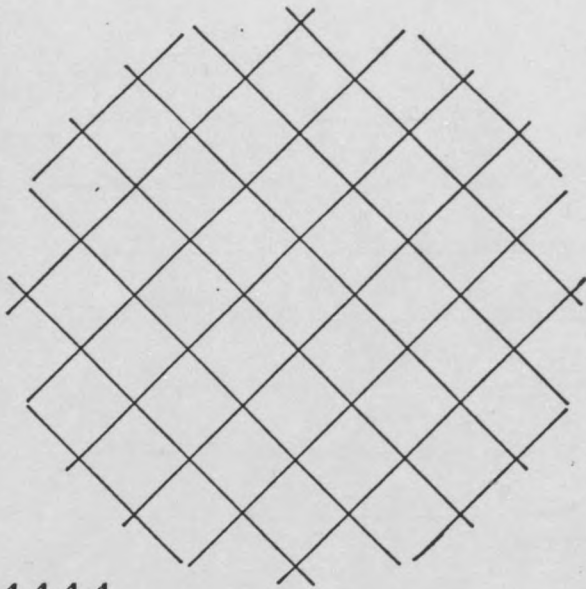


333333

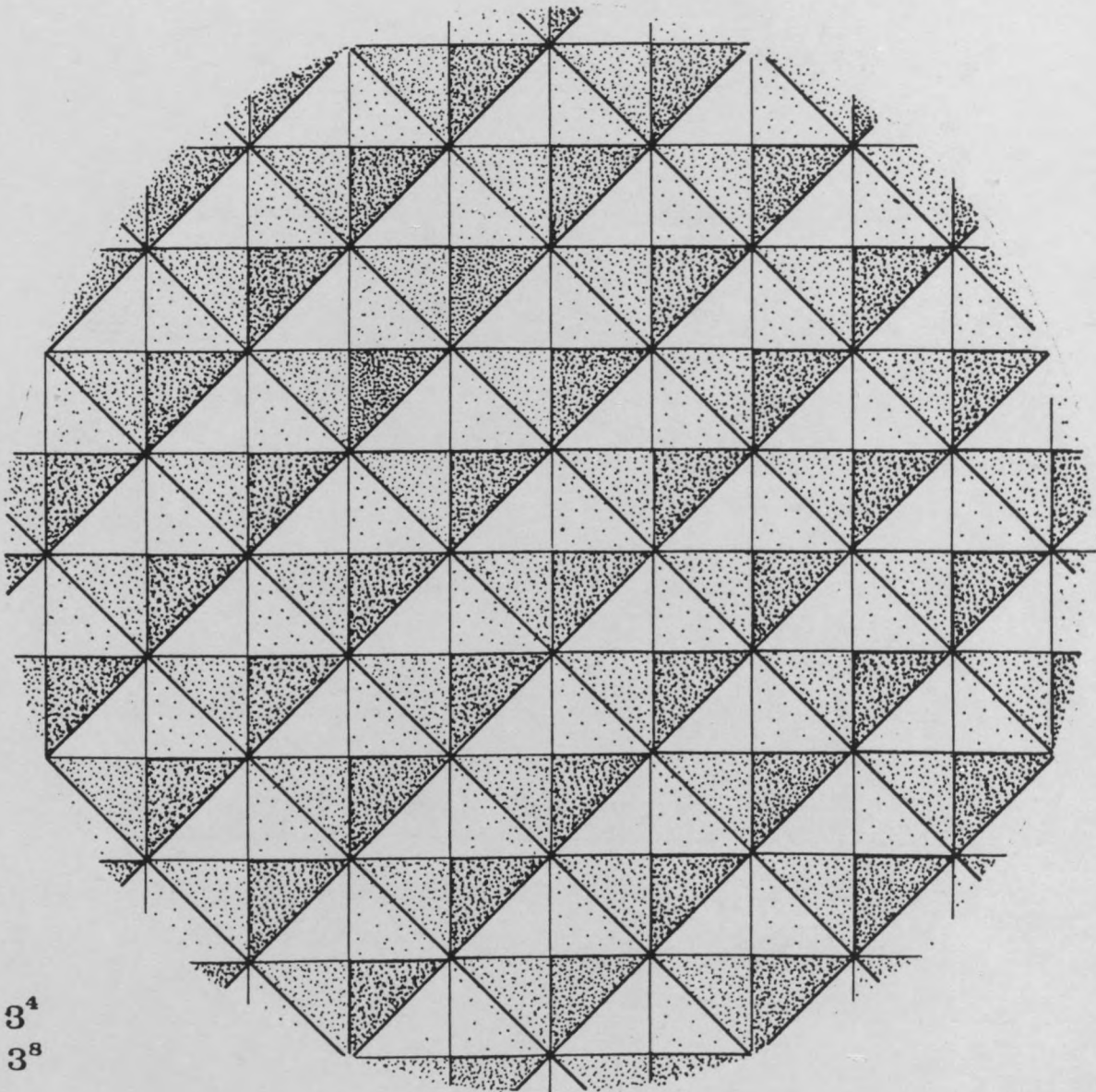
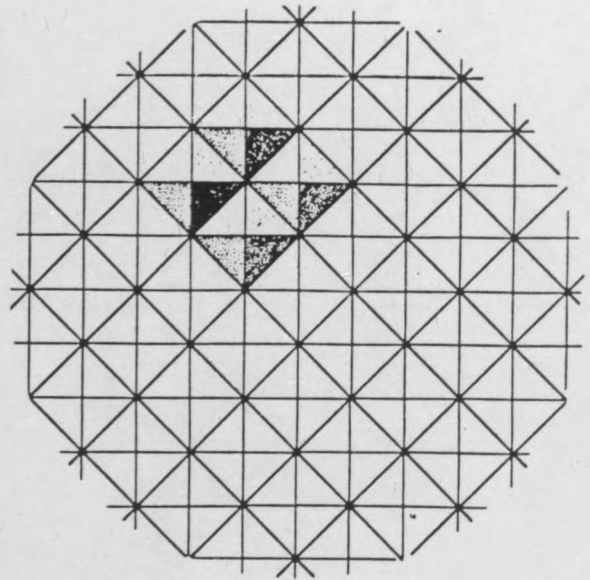


3³
3⁹

5

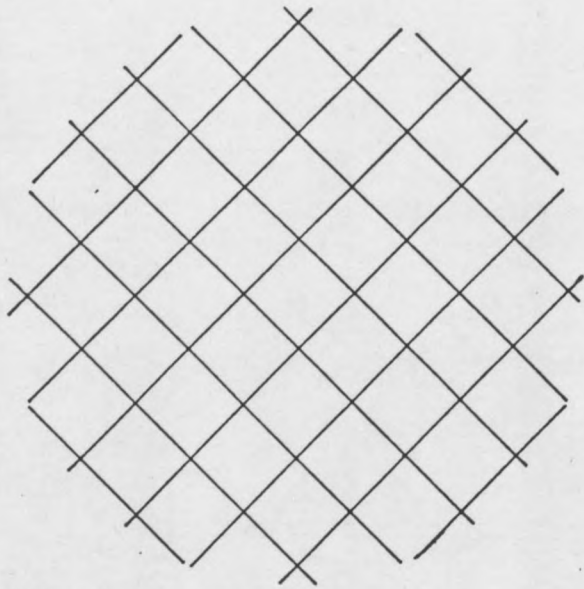


4444

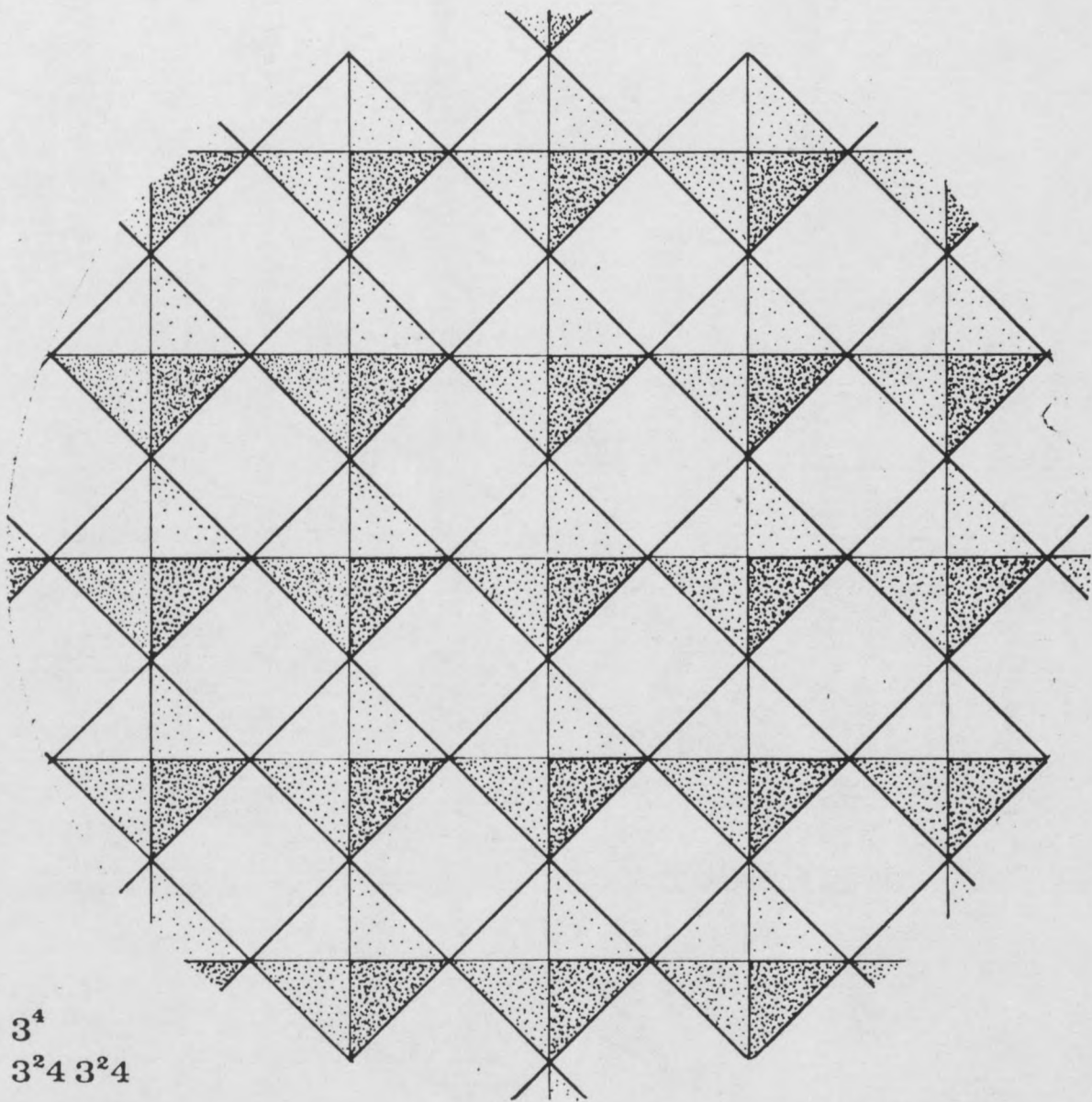
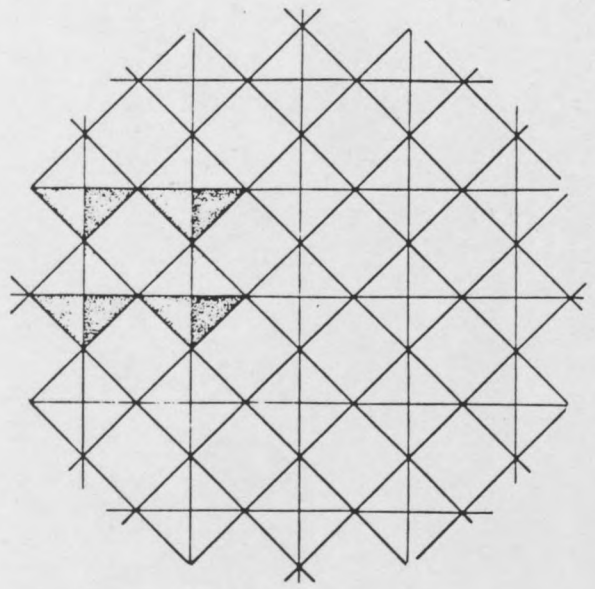


3^4
 3^8

4



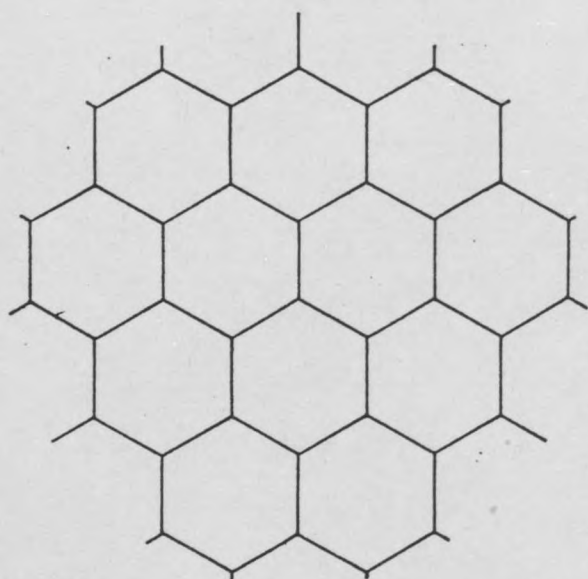
4444



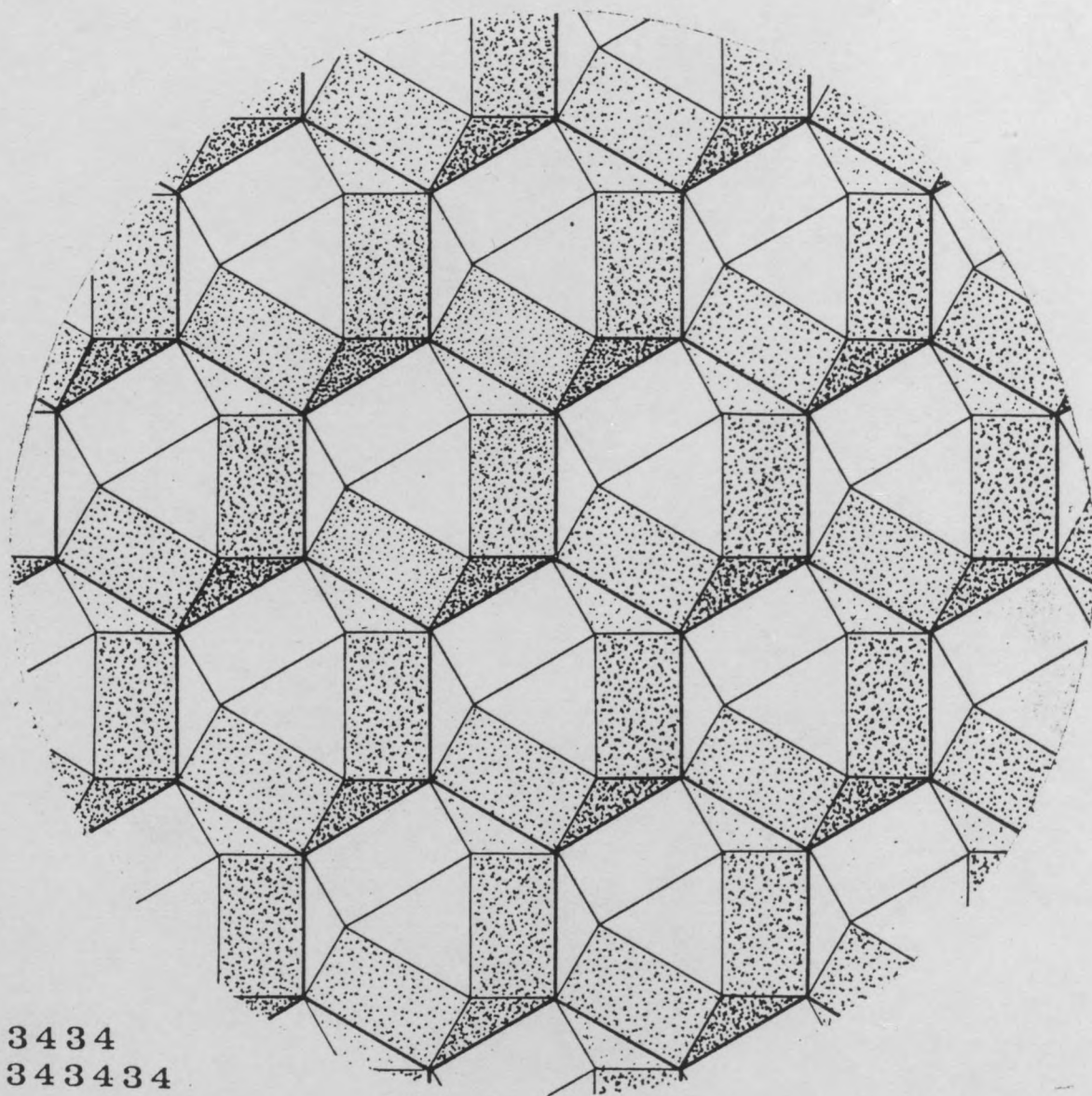
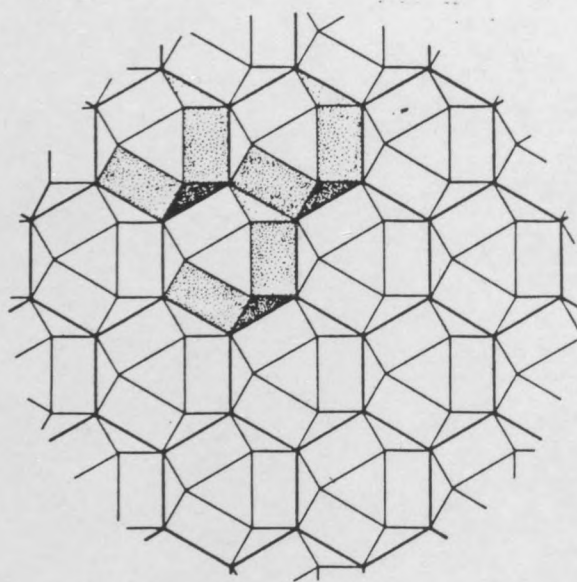
3⁴

3²4 3²4

5

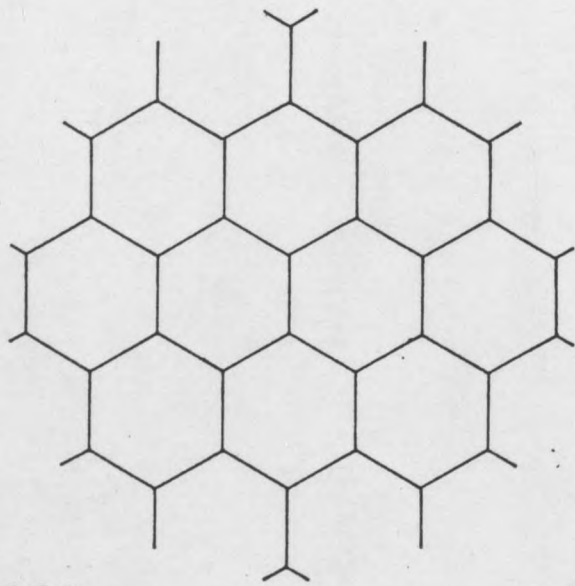


666

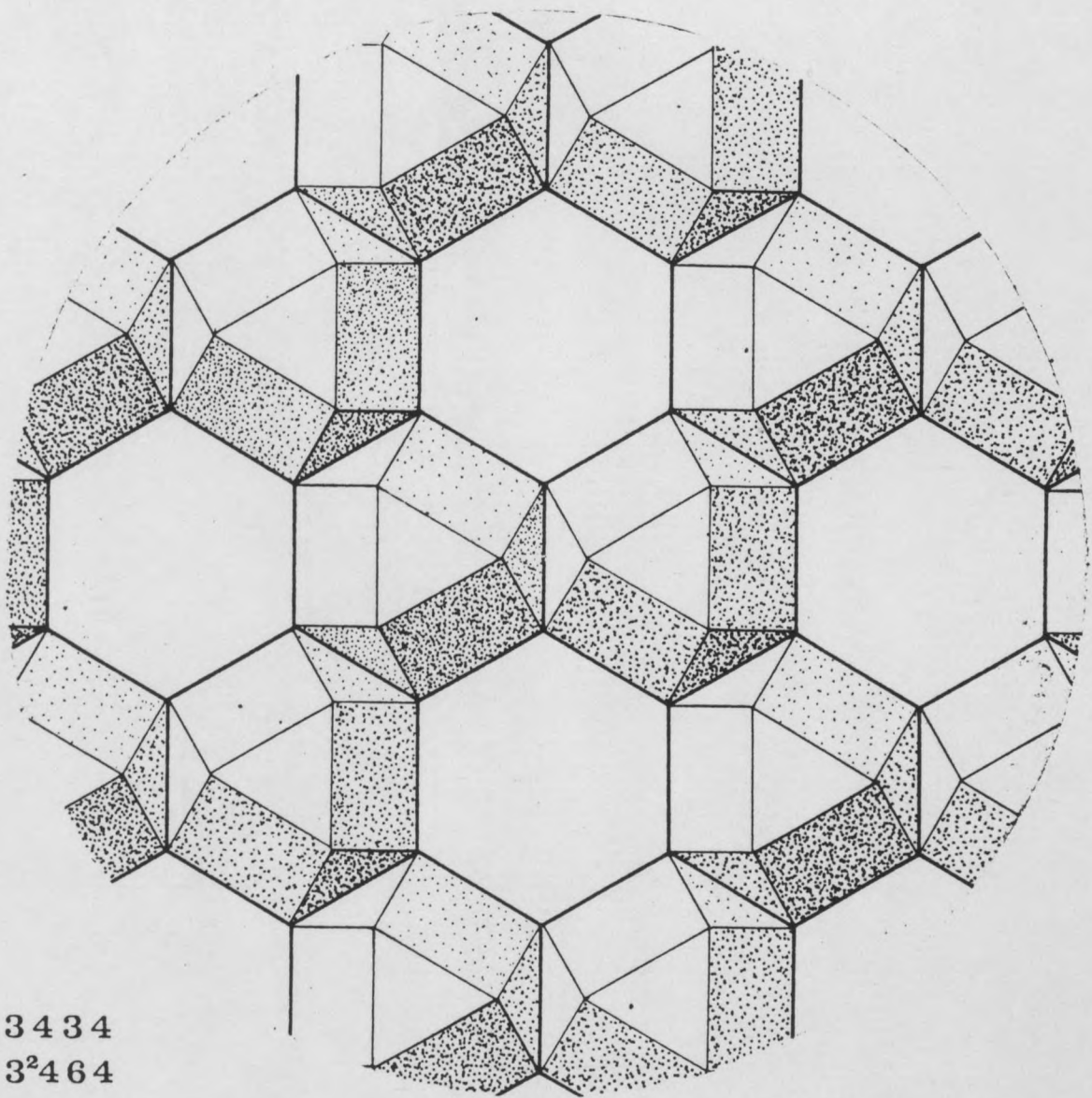
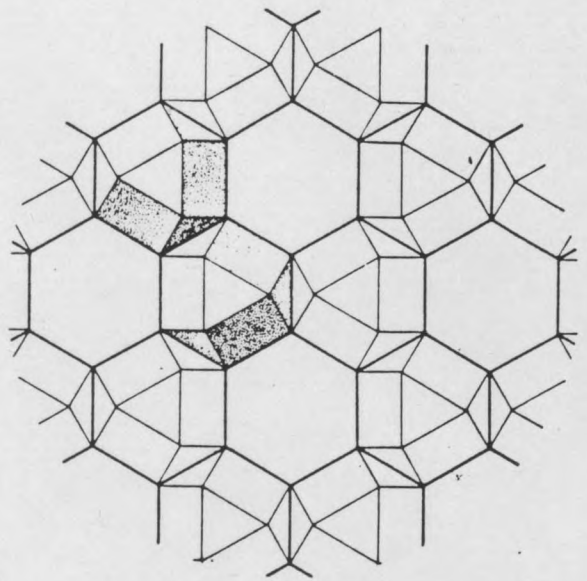


3434
343434

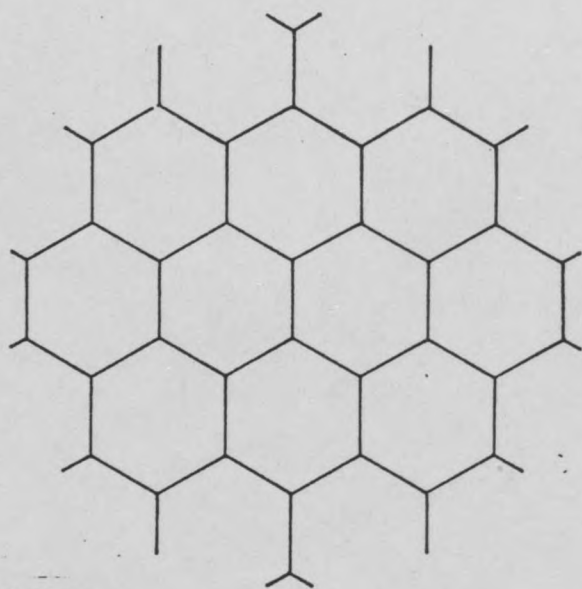
6



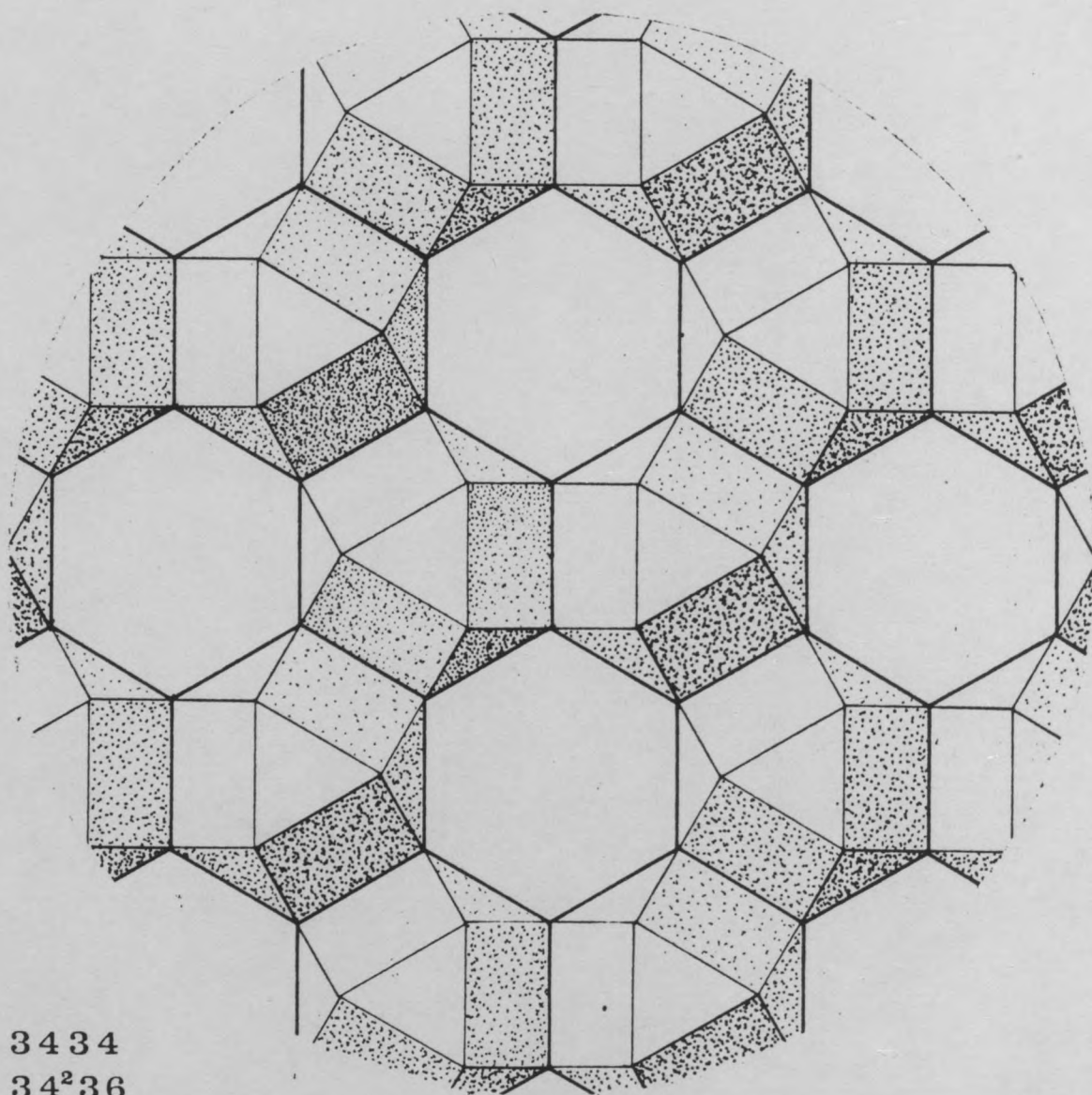
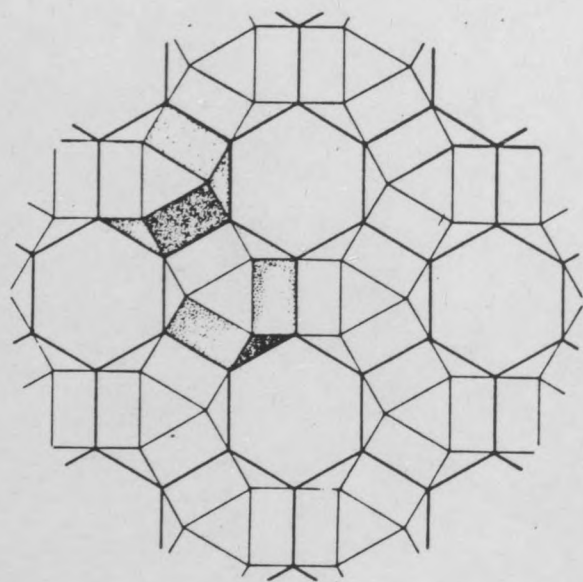
666



3434
3²464



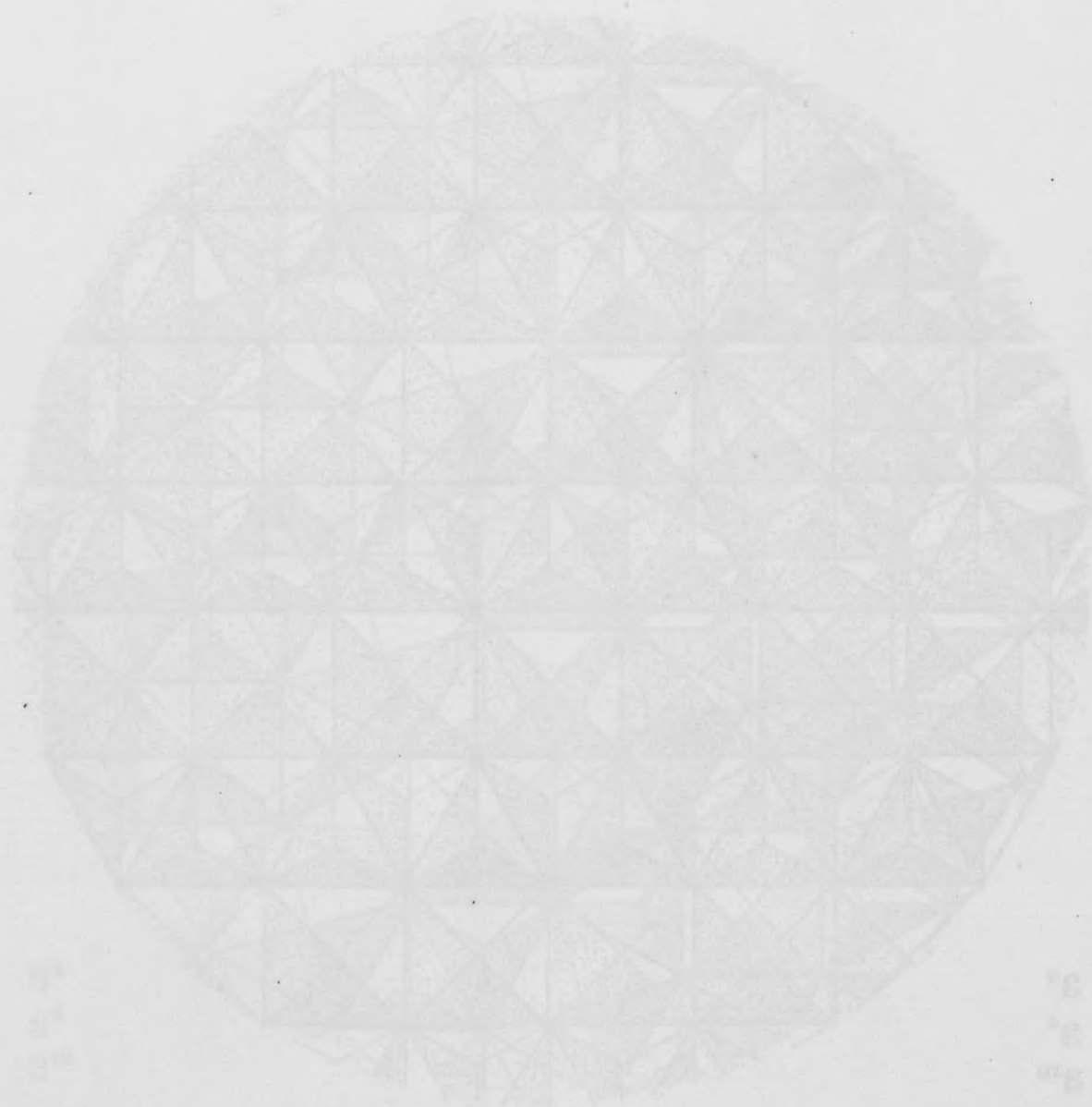
666



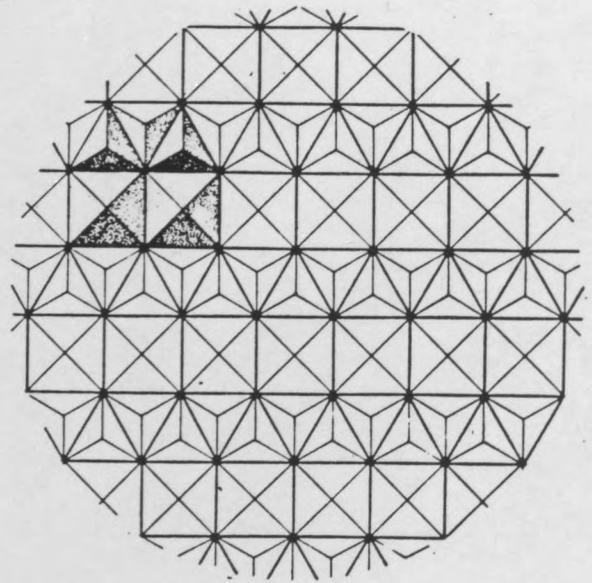
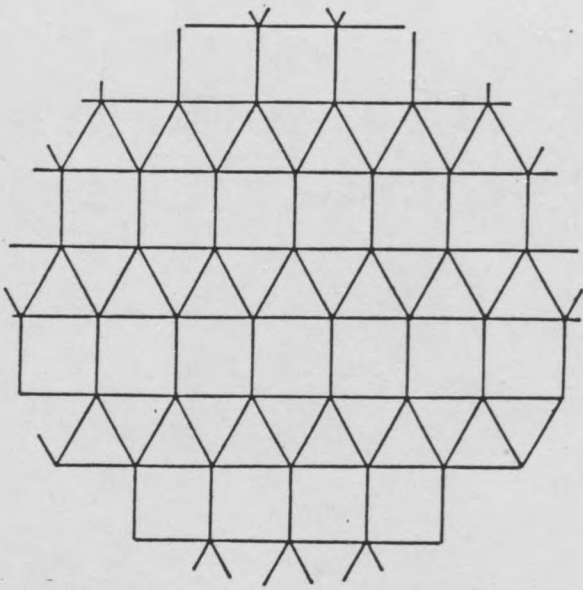
3434
34²36

39

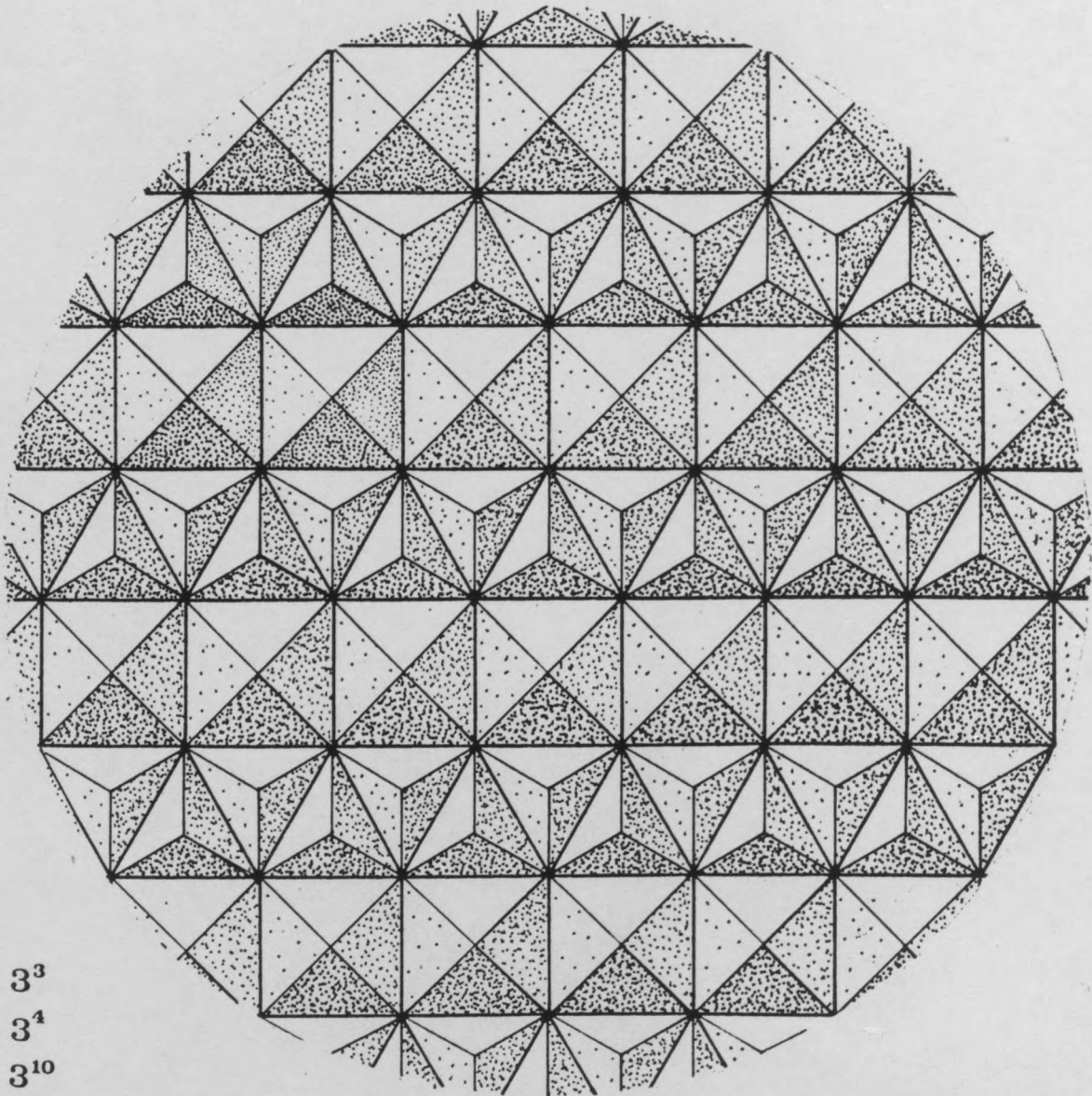
**SURFACES GAUFREES
SEMI-REGULIERES**



S



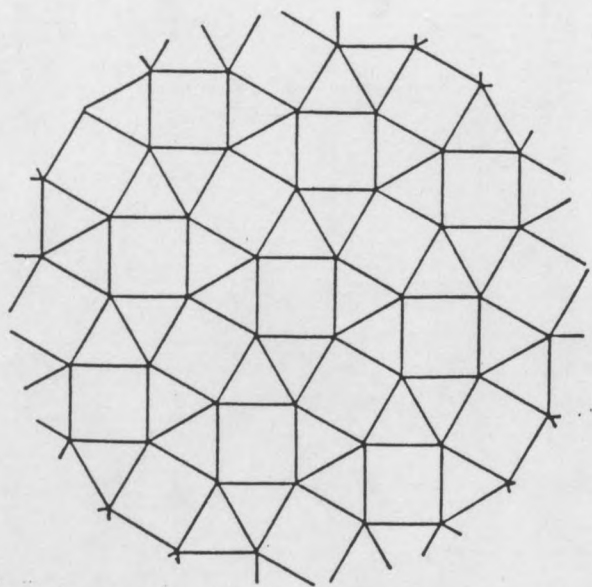
33344



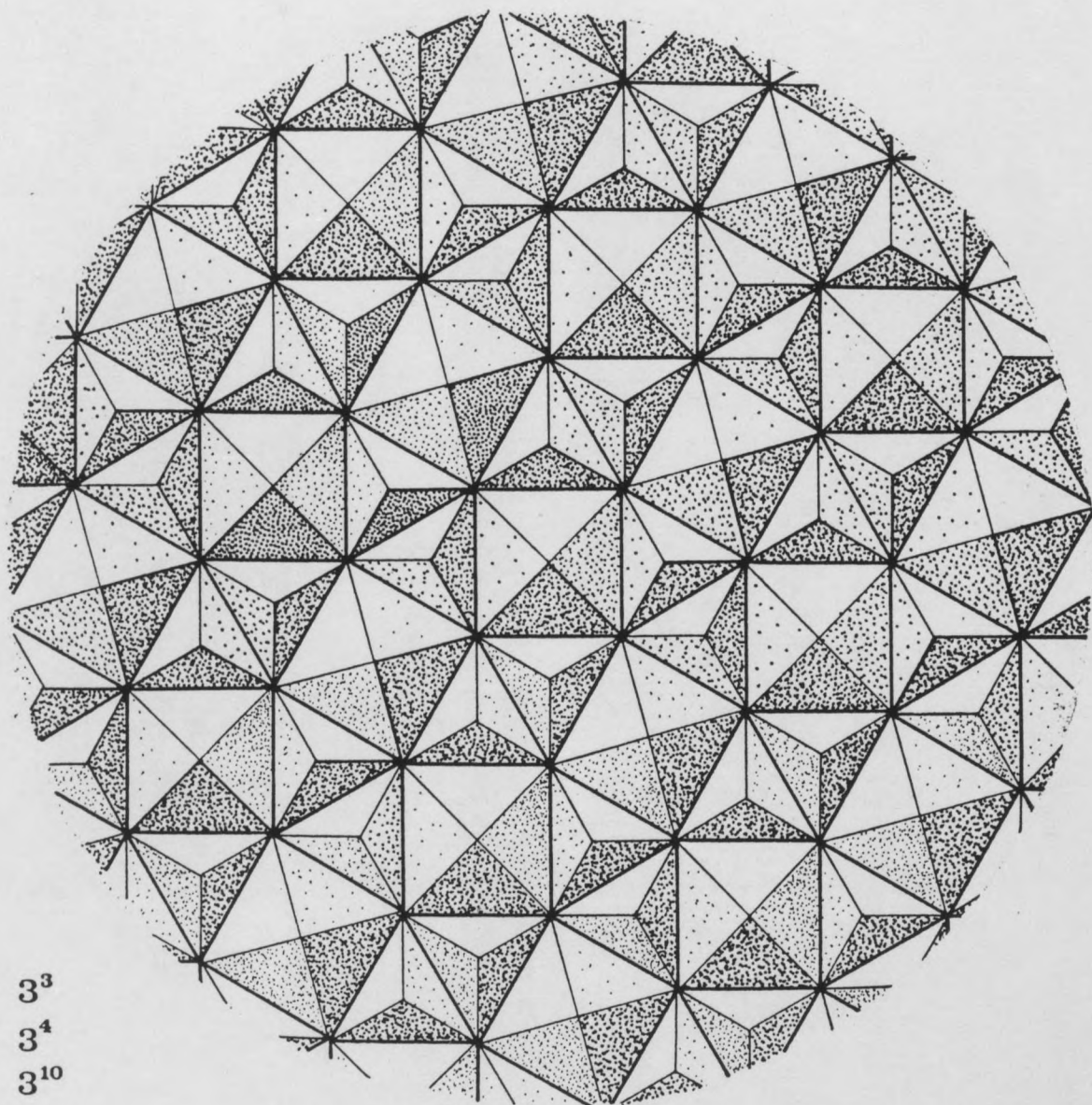
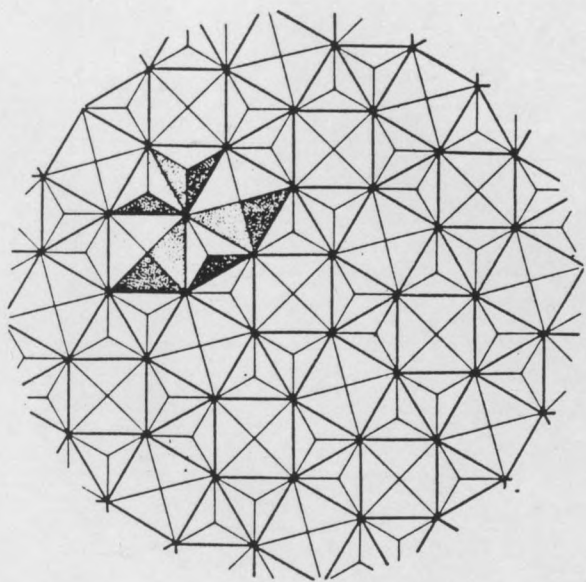
3^3

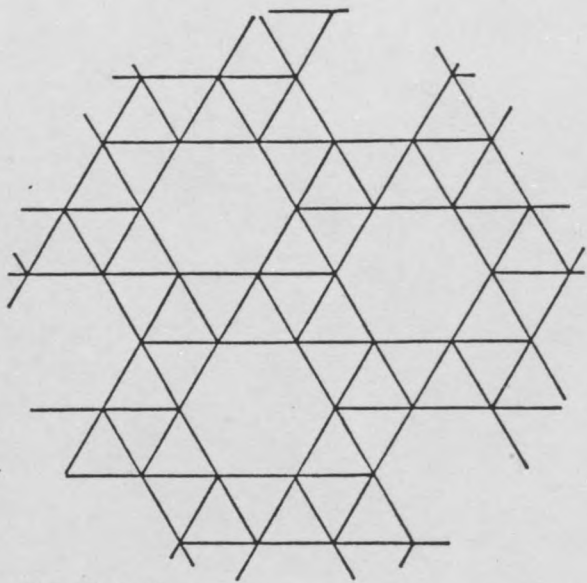
3^4

3^{10}

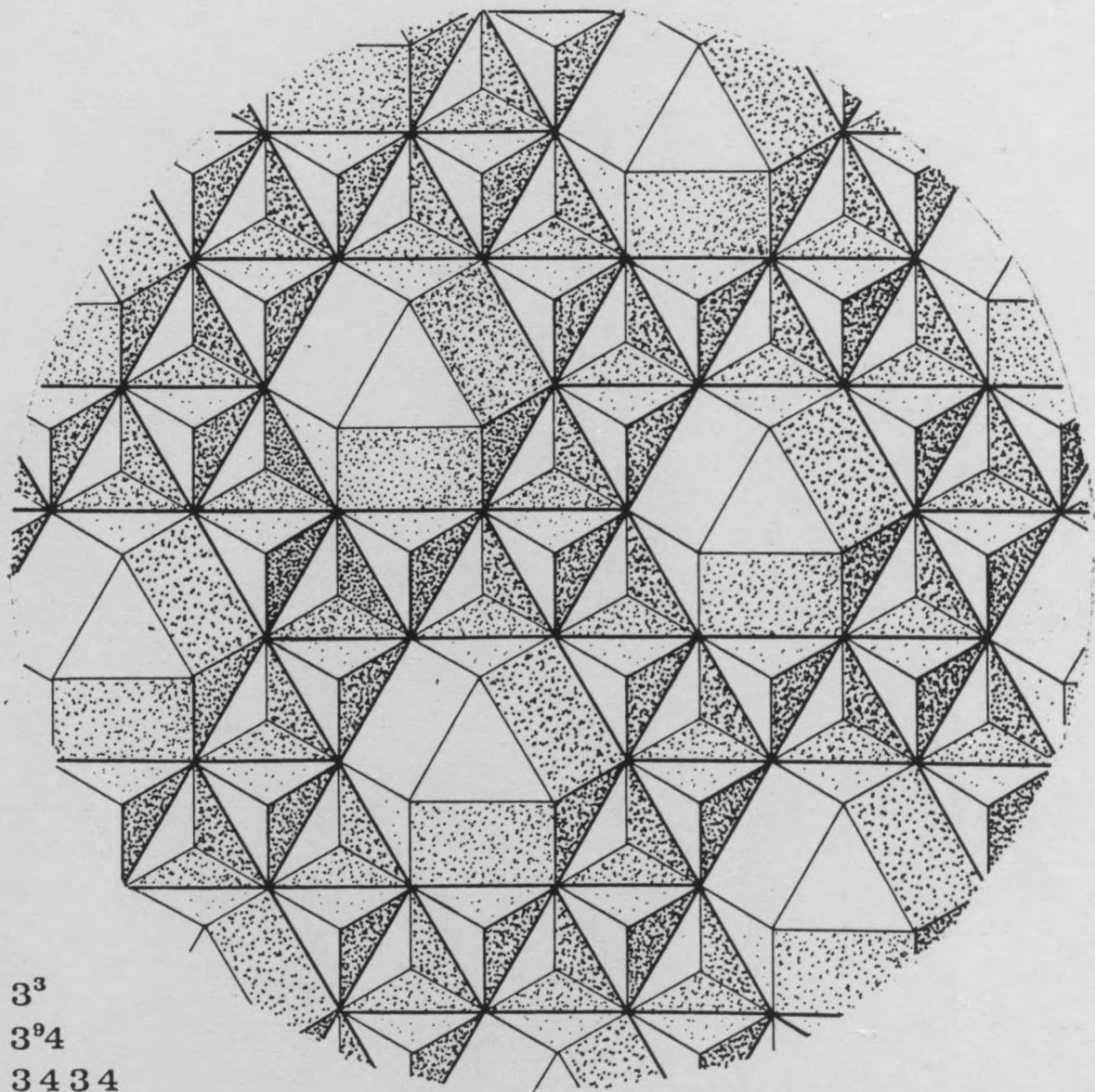
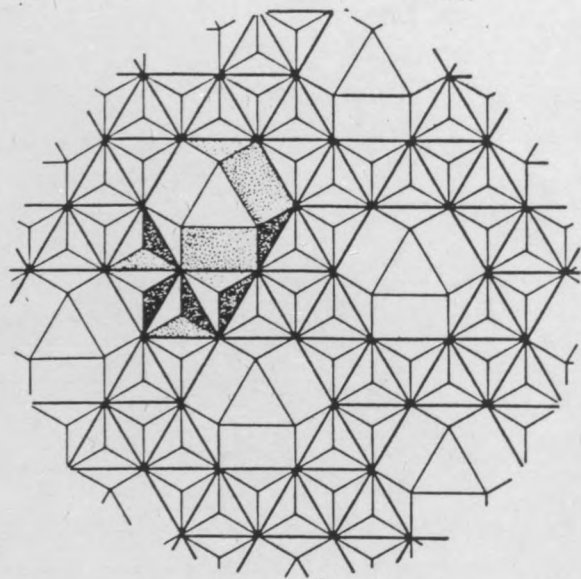


33434


 3^3
 3^4
 3^{10}

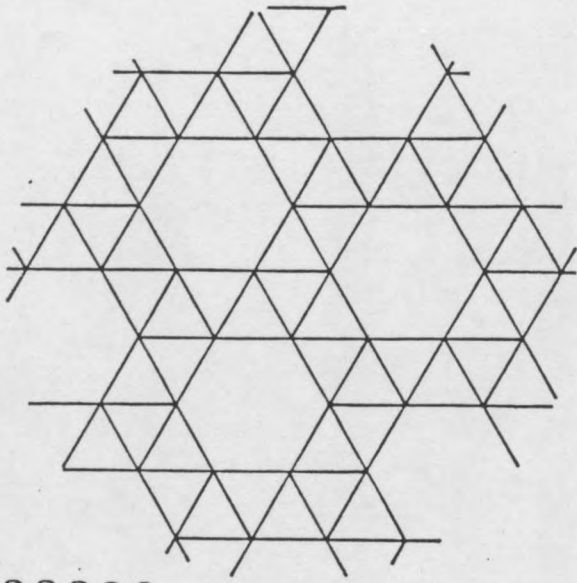


33336

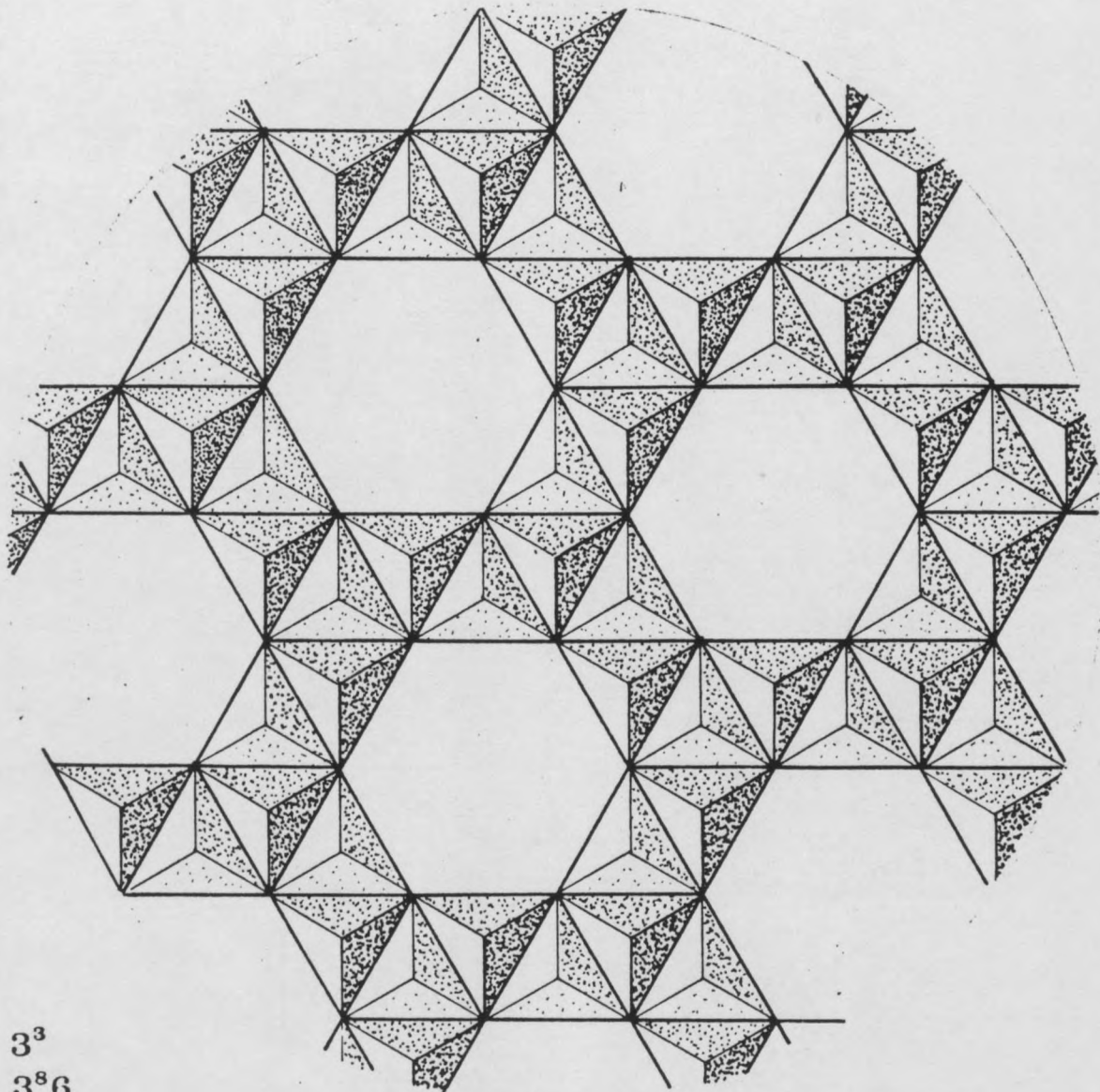
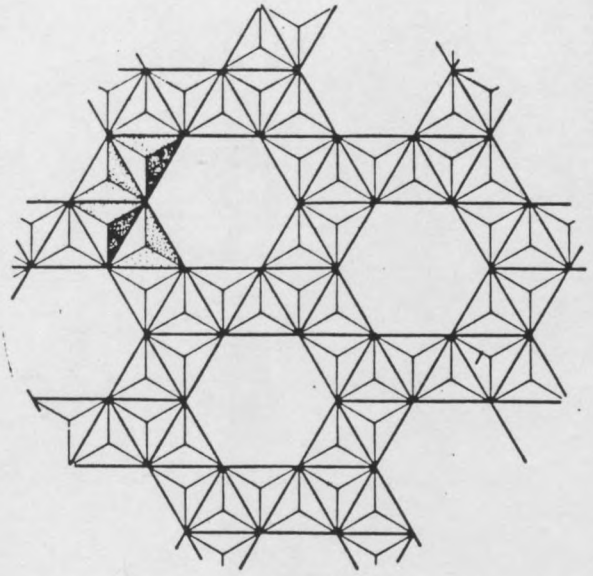
 3^3 $3^9 4$

3434

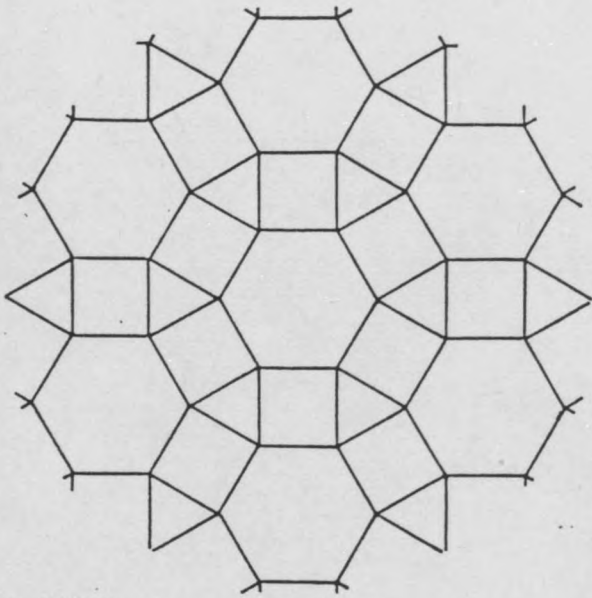
11



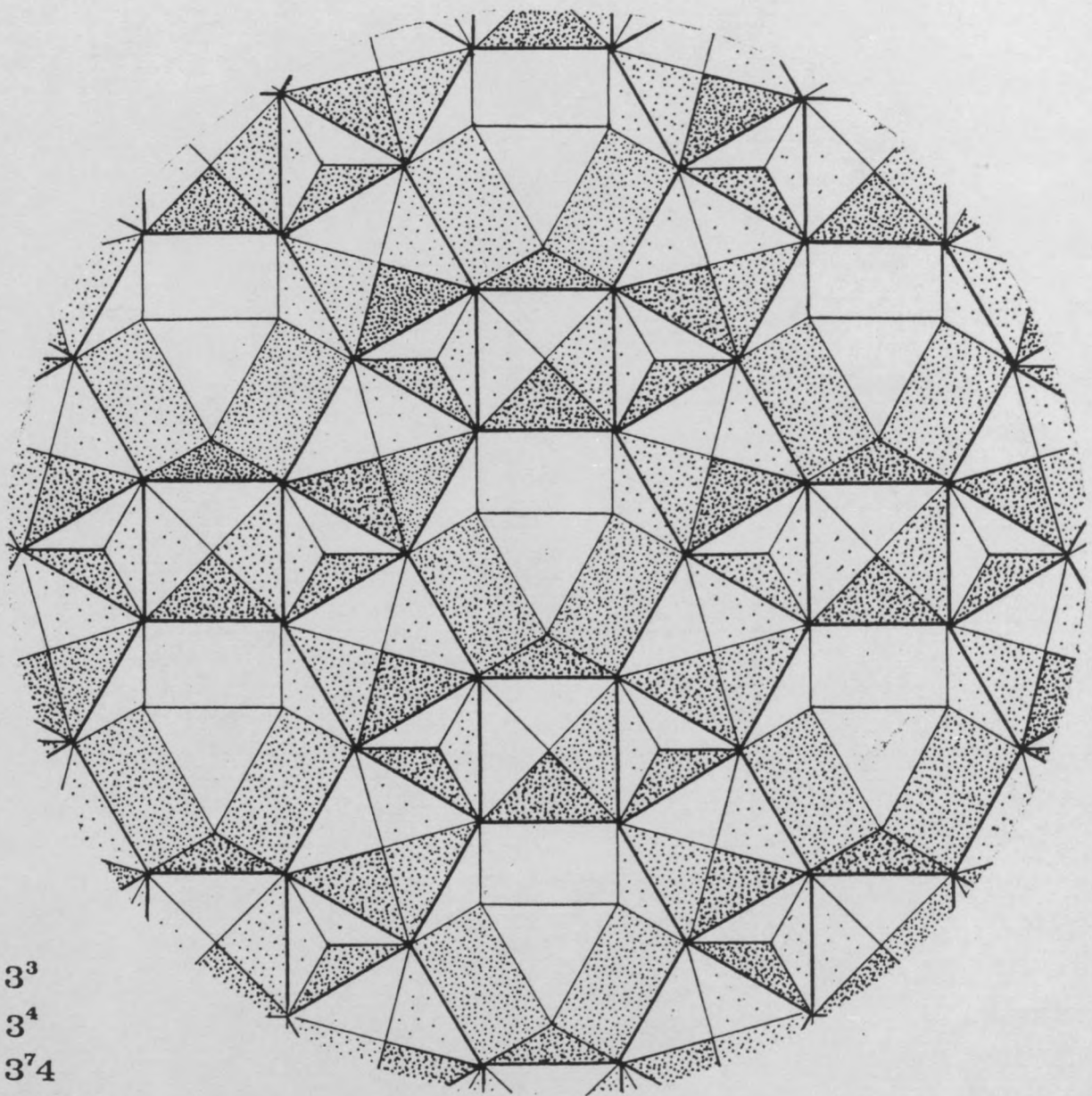
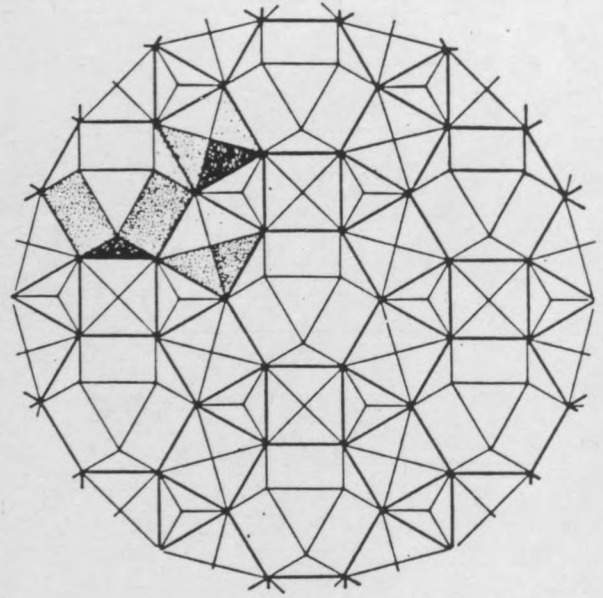
33336



3^3
 3^6



3464



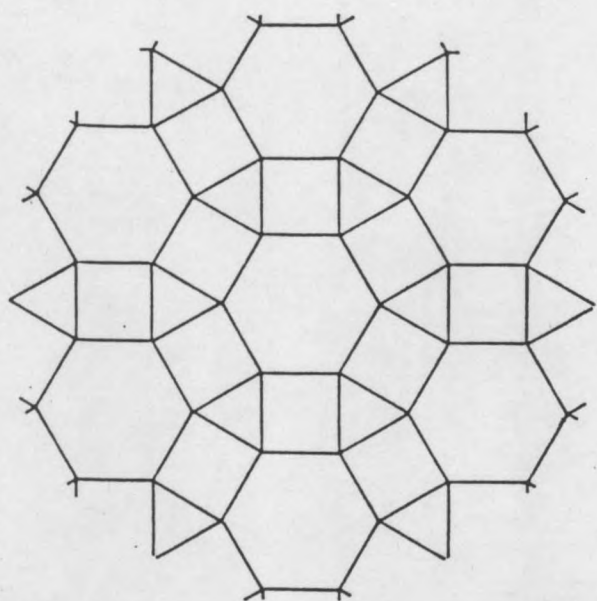
3^3

3^4

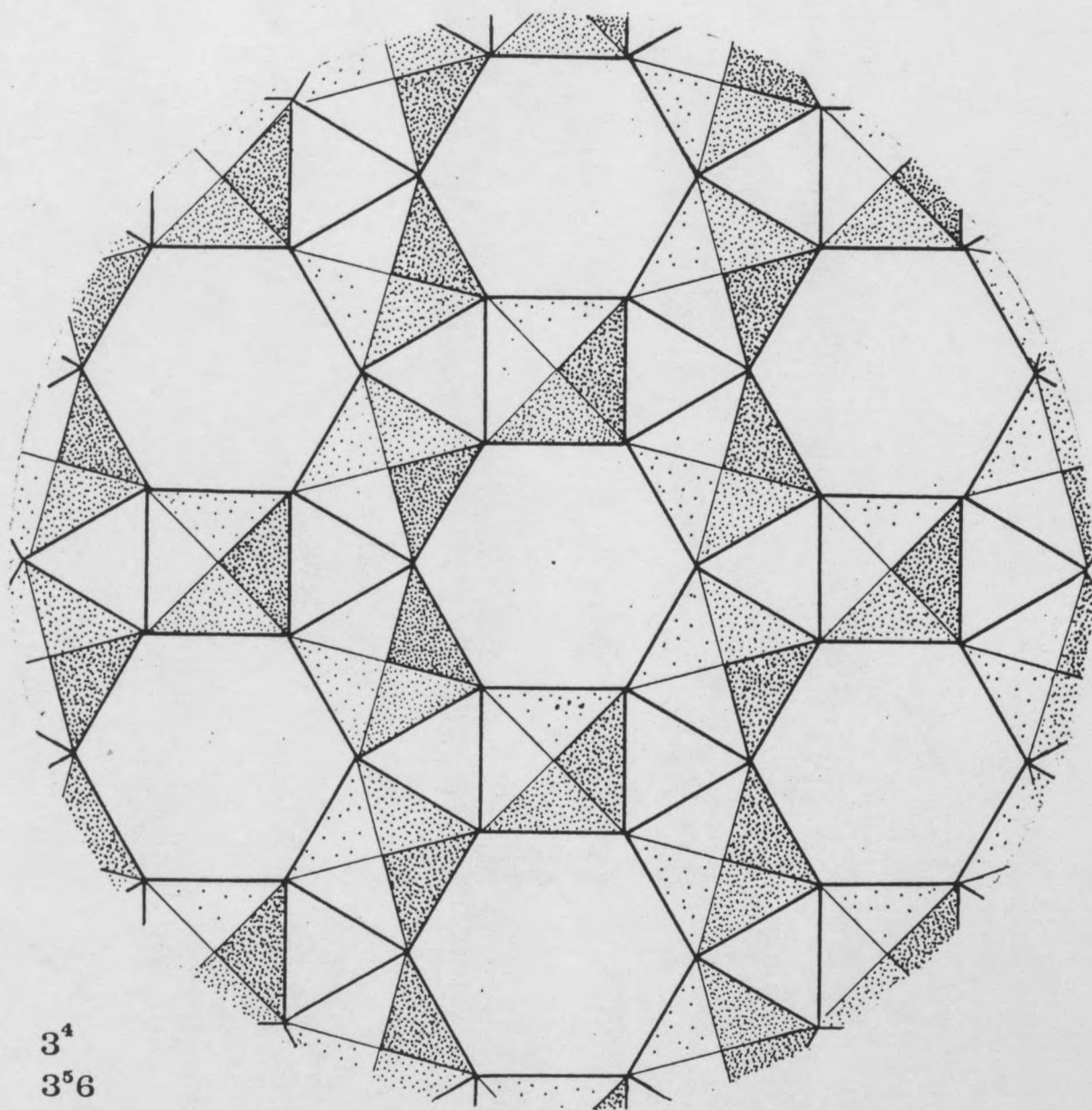
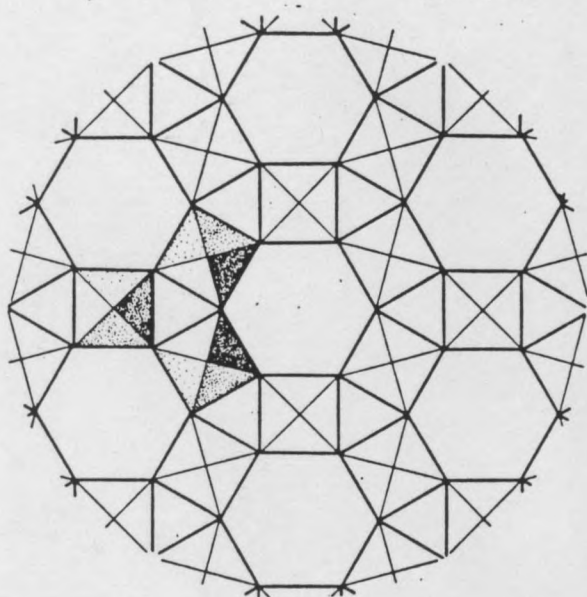
$3^7 4$

3434

15

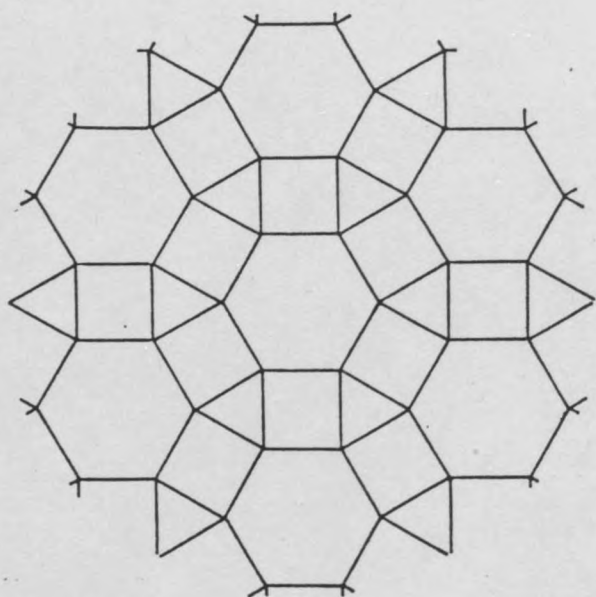


3464

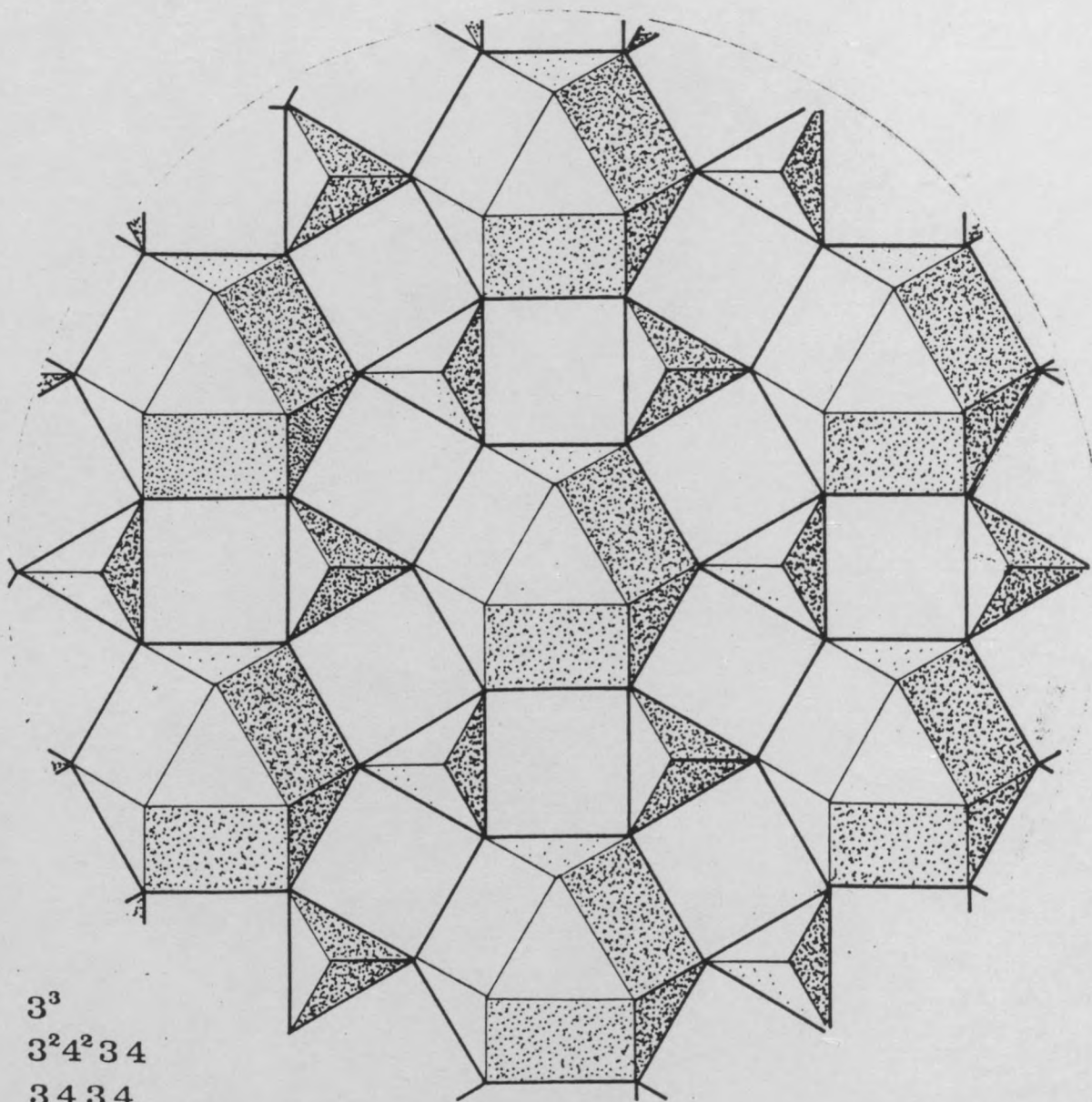
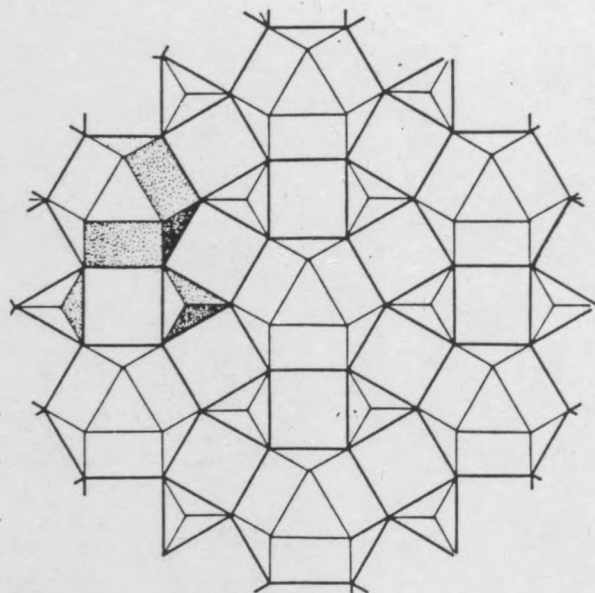


3^4
 $3^5 6$

14

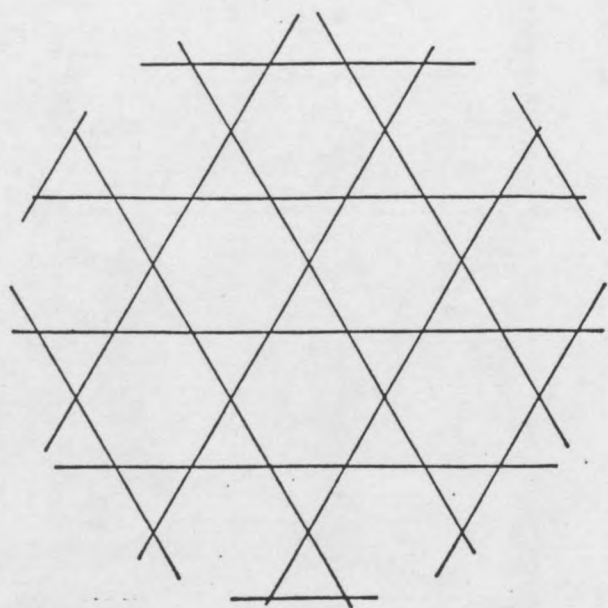


3464

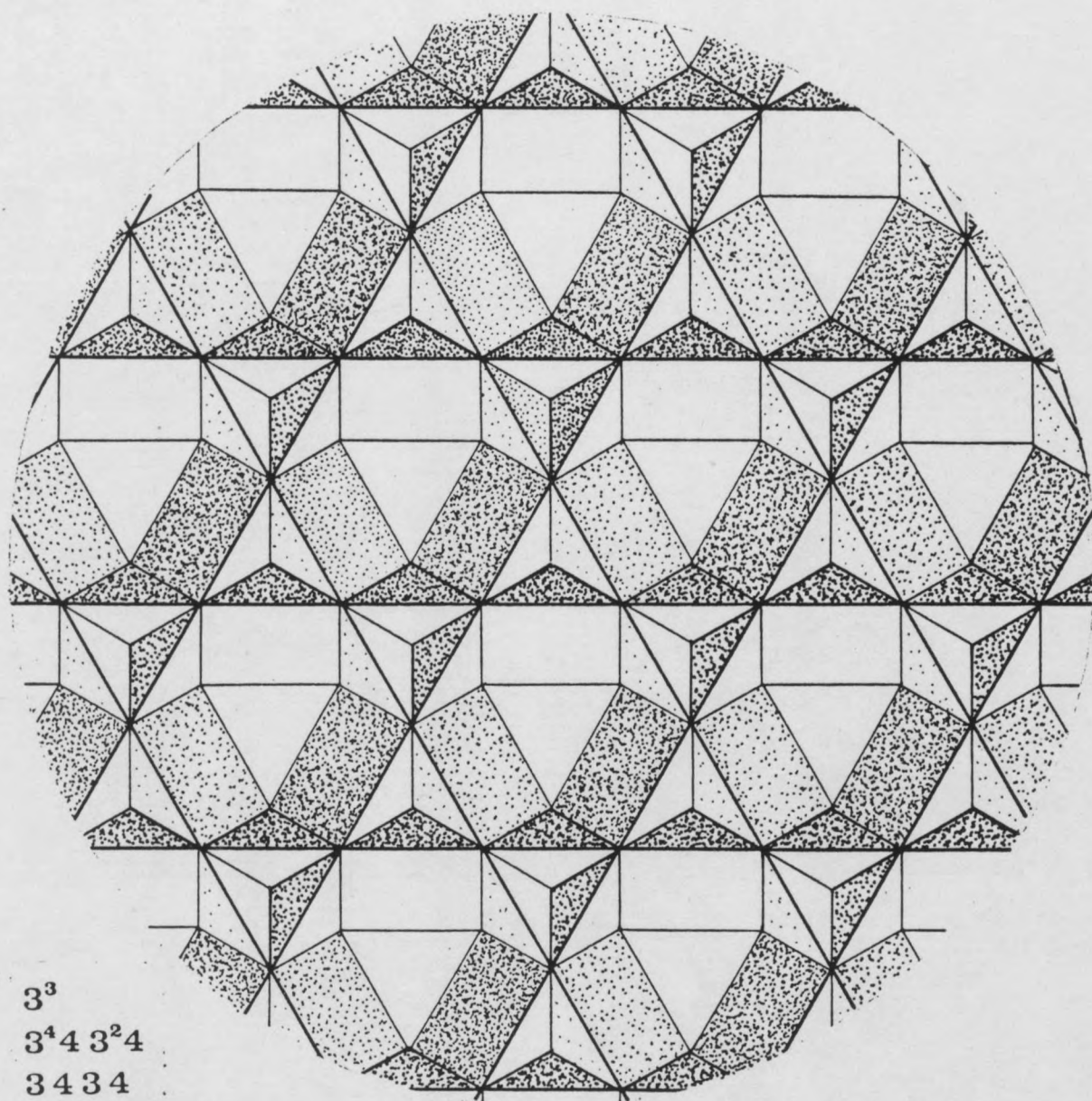
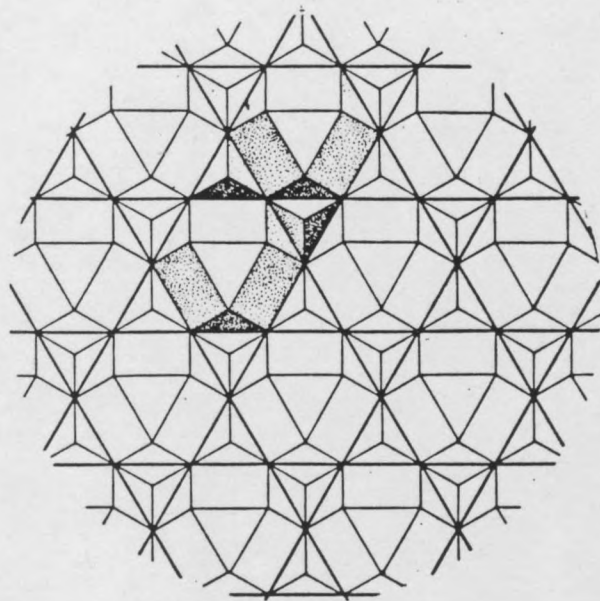


3^3
 $3^2 4^2 3 4$
3434

15

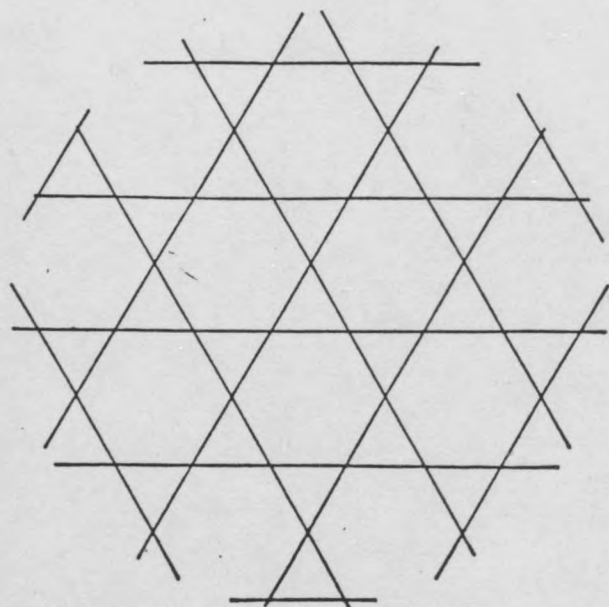


3636

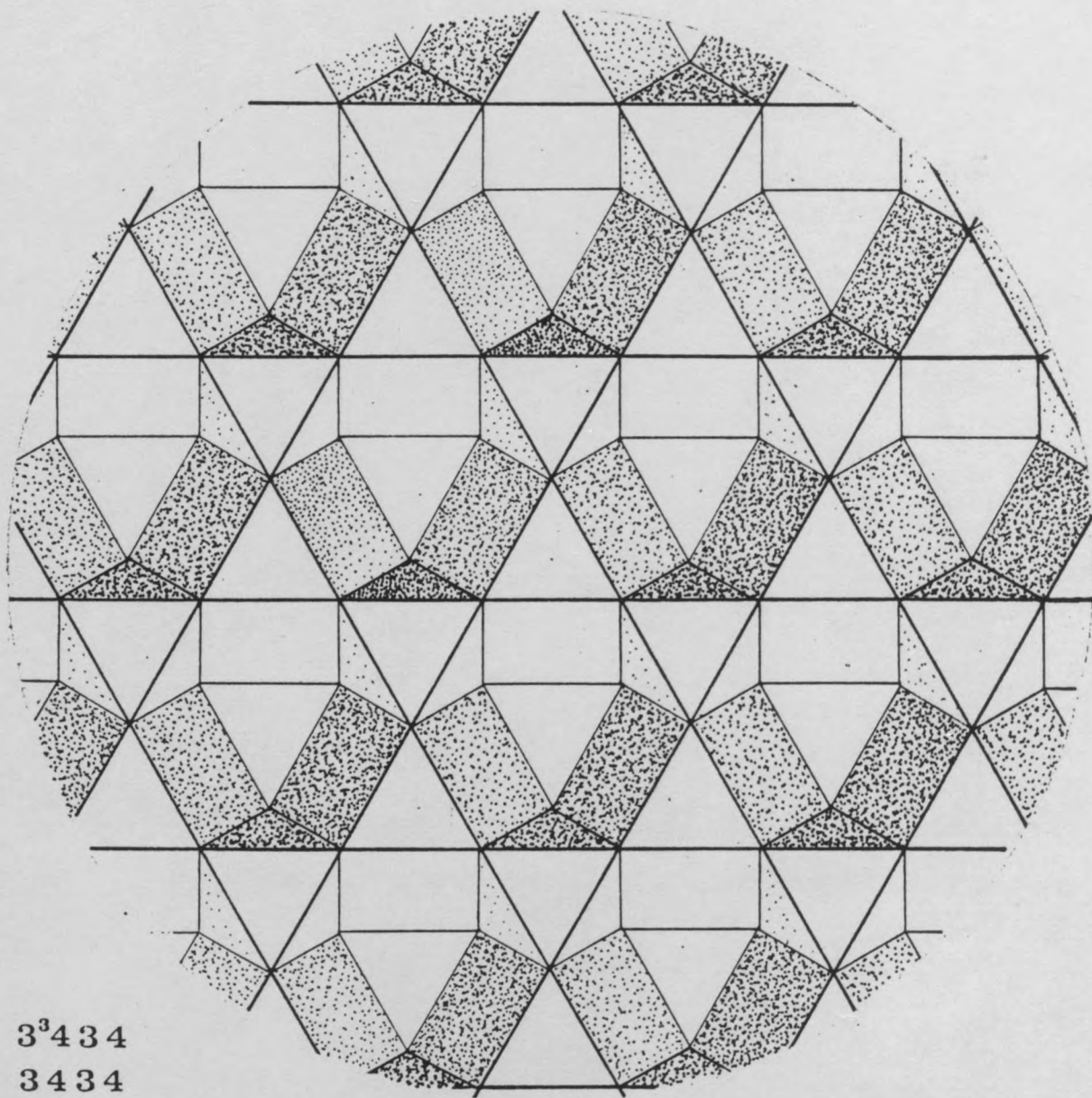
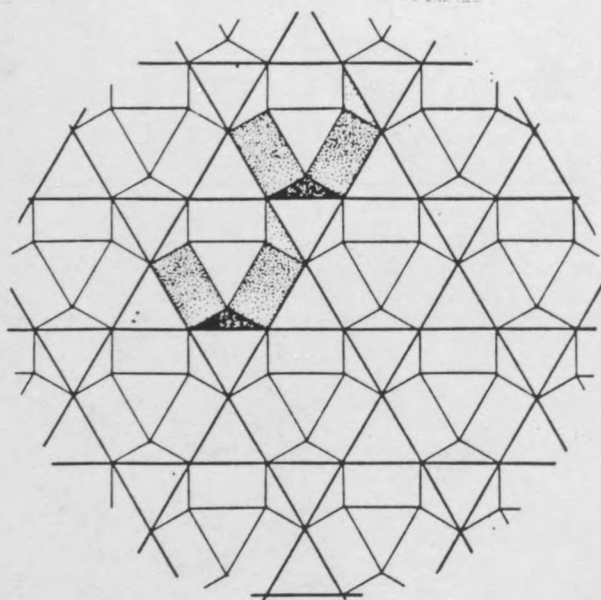


3^3
 $3^4 4 3^2 4$
3434

16



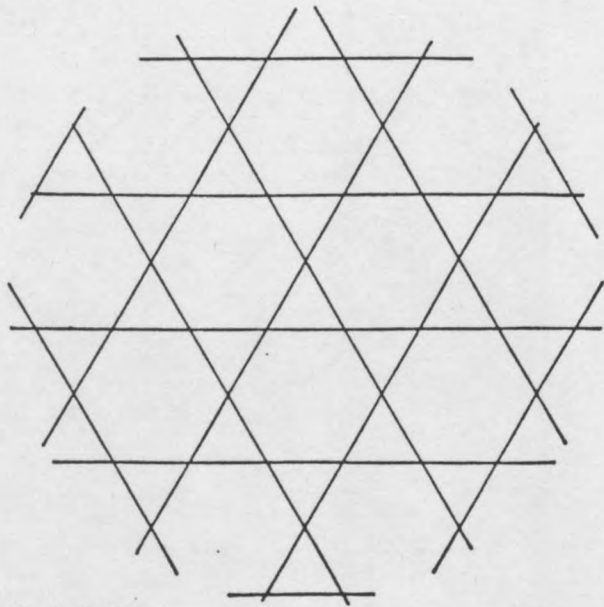
3636



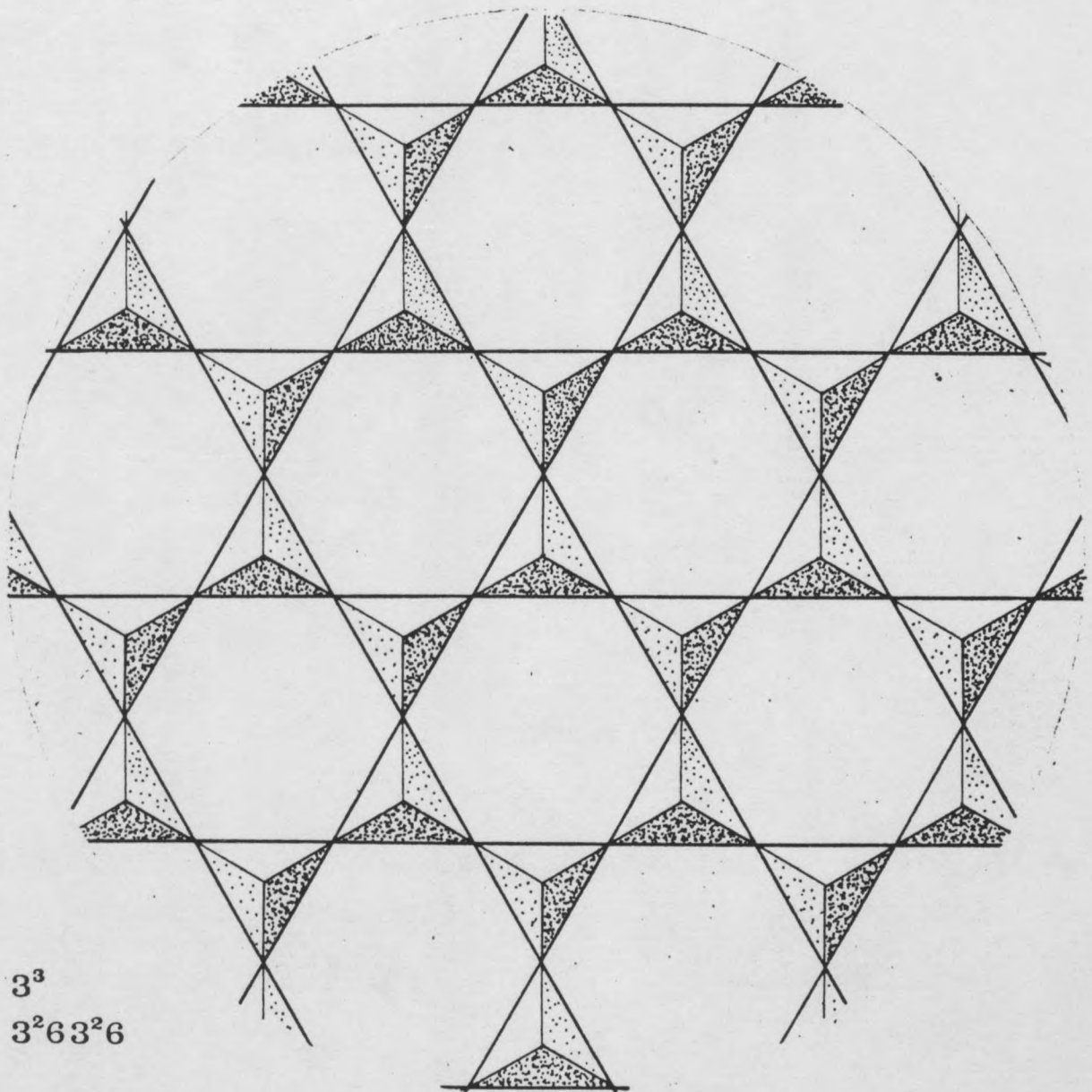
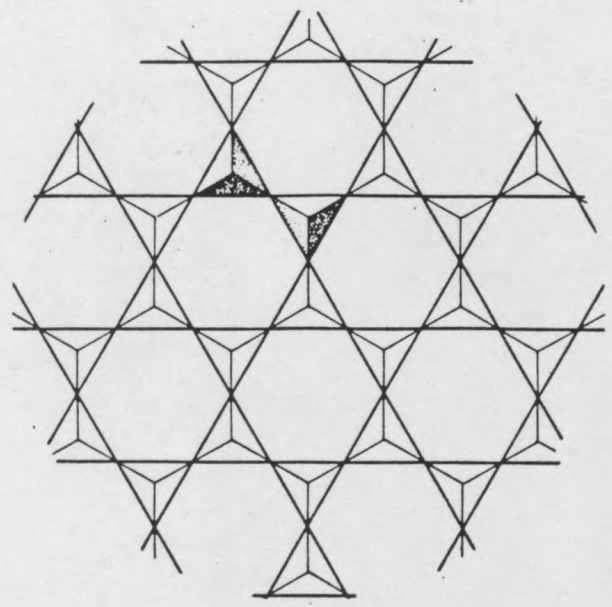
3³434

3434

17

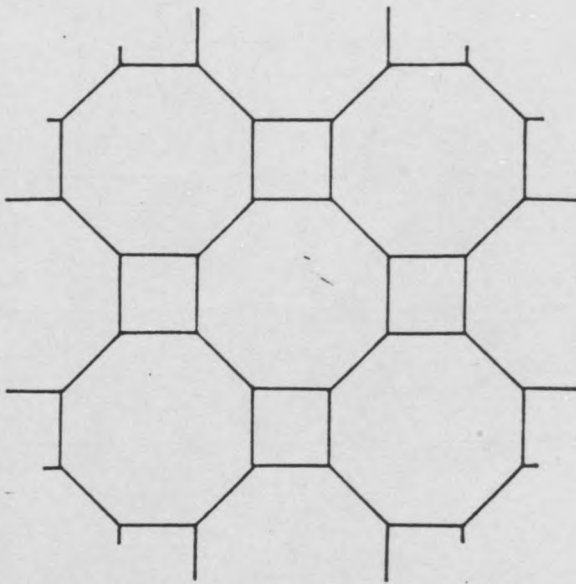


3636

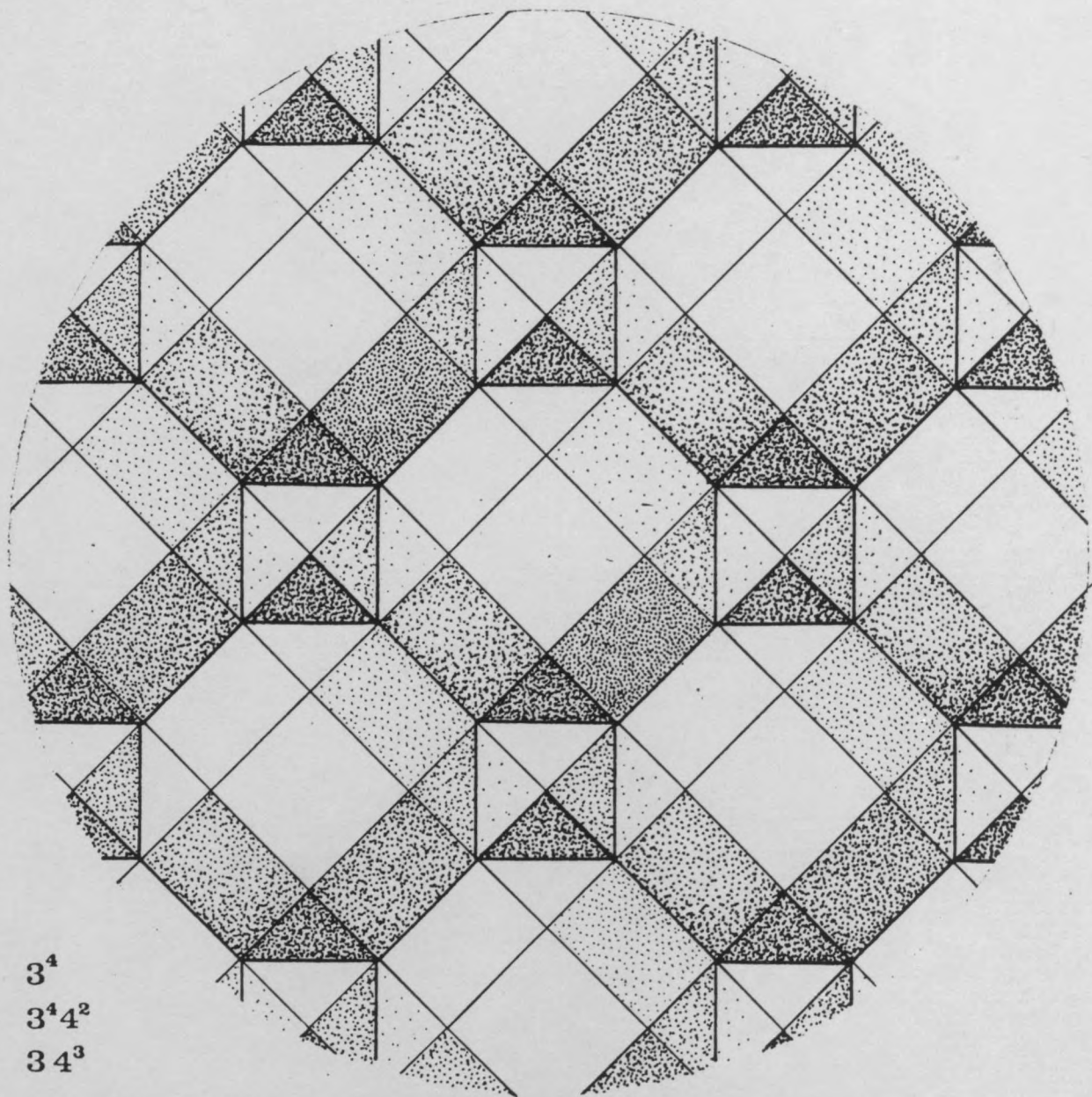
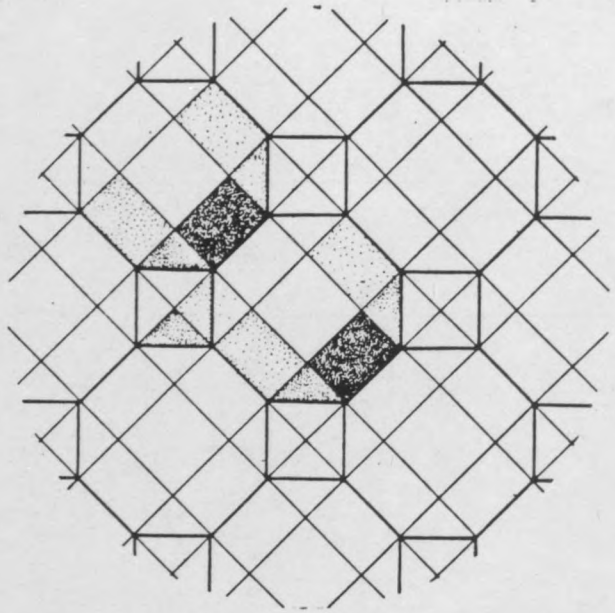


3^3
 $3^2 6 3^2 6$

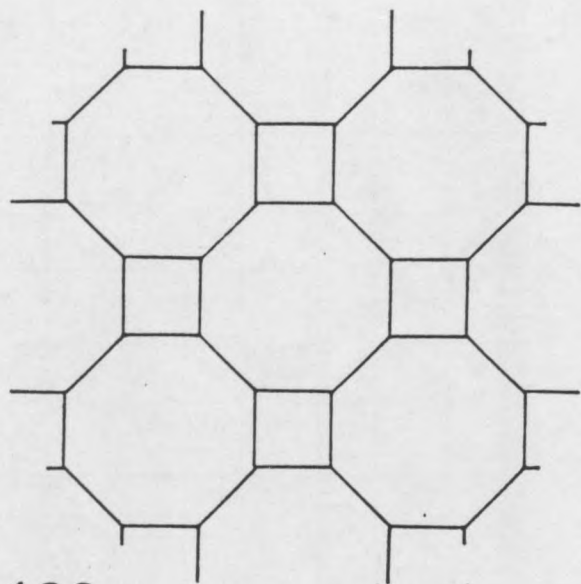
18



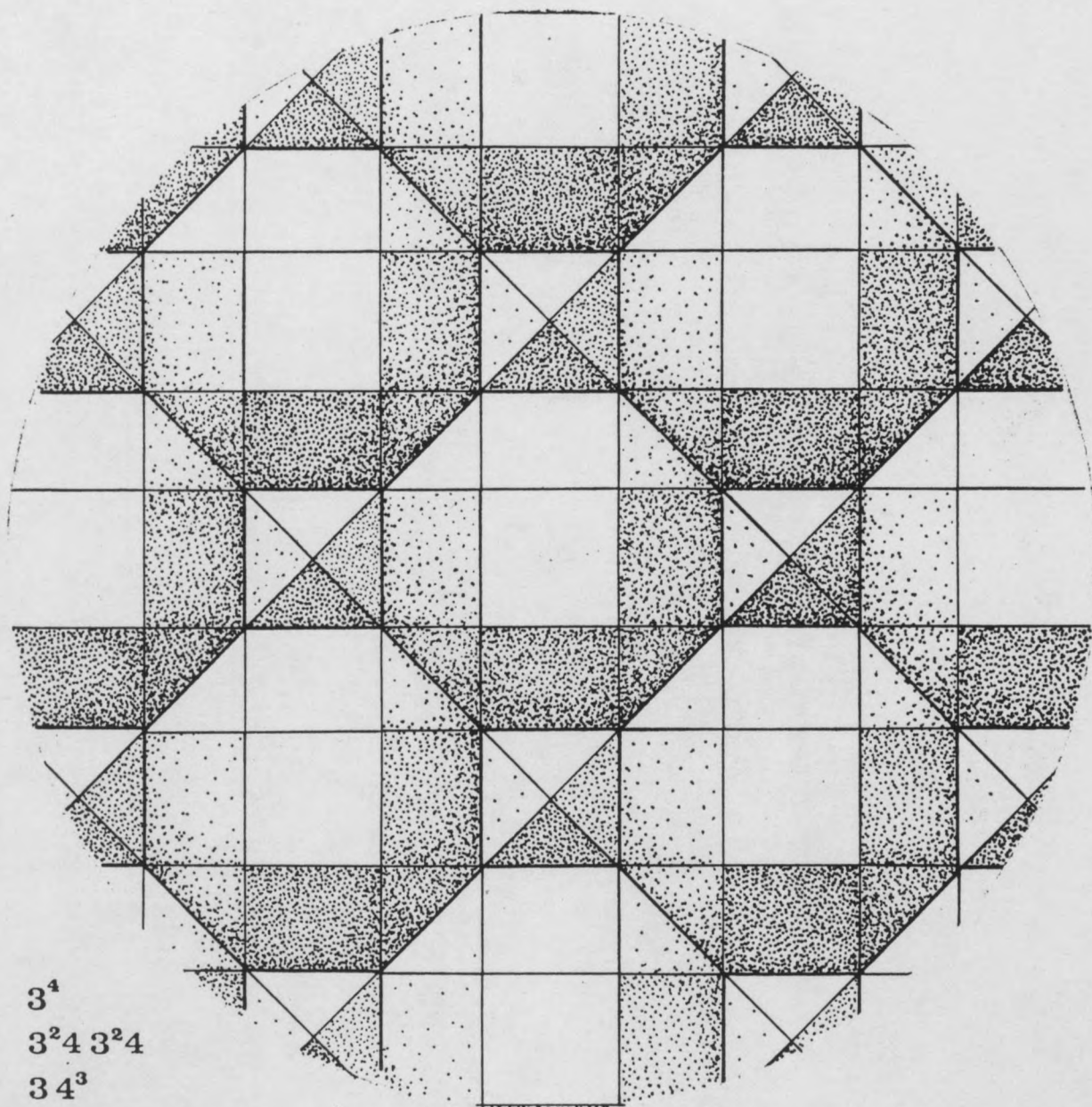
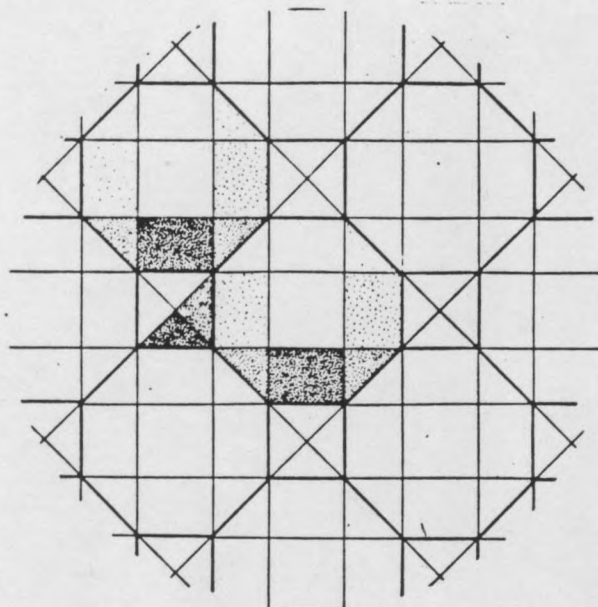
488



3^4
 $3^4 4^2$
 $3 4^3$

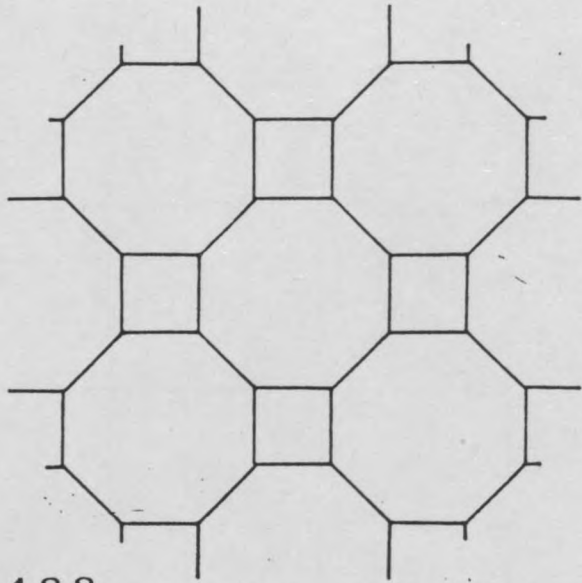


488

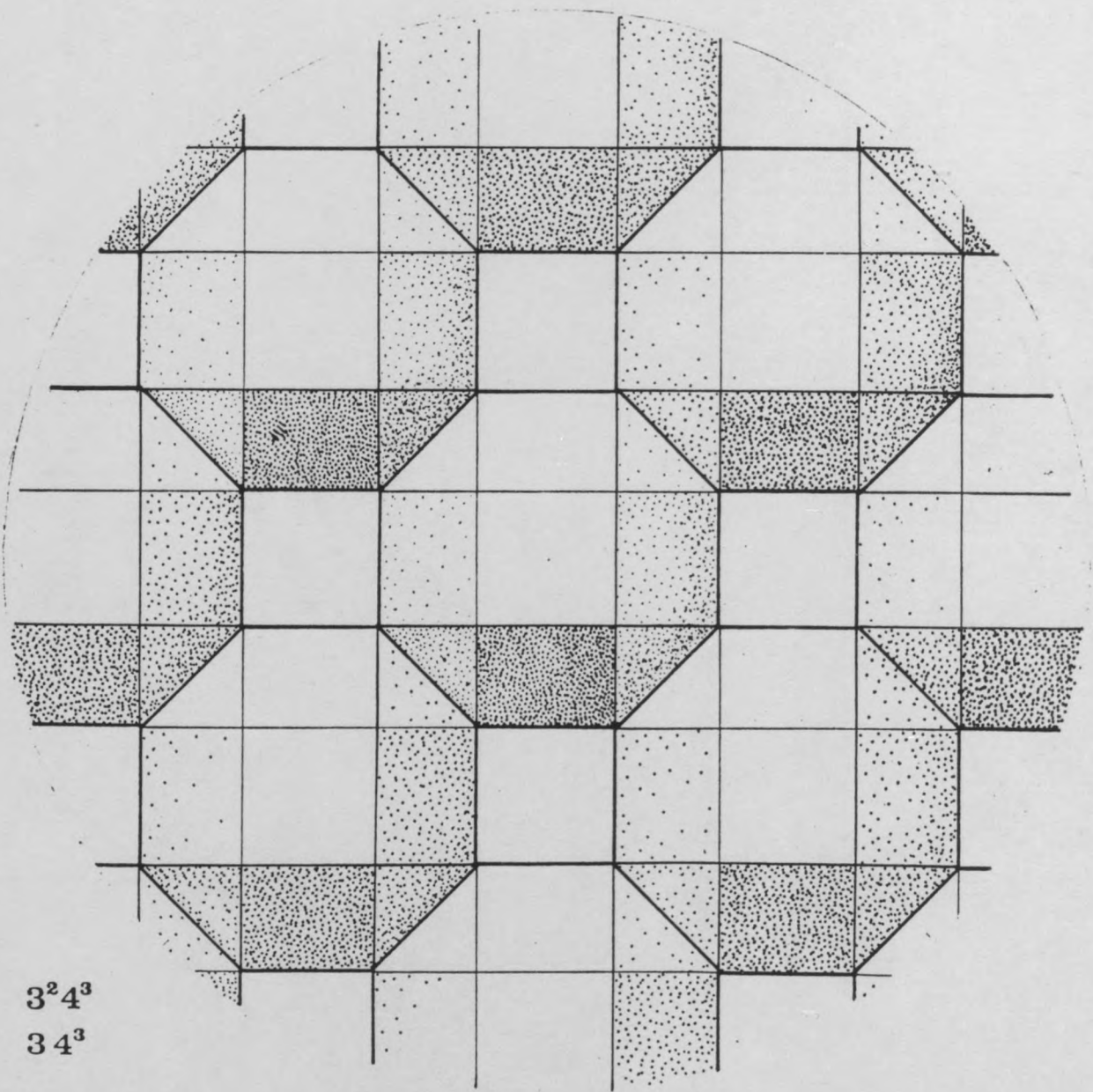
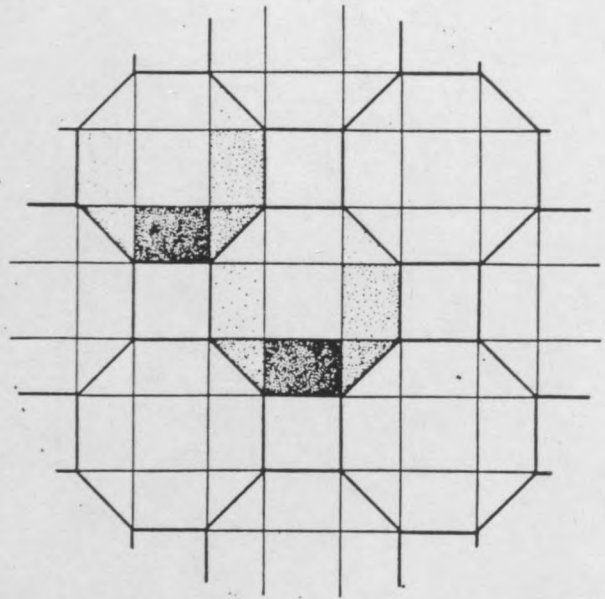


3^4
 $3^2 4 3^2 4$
 $3 4^3$

20

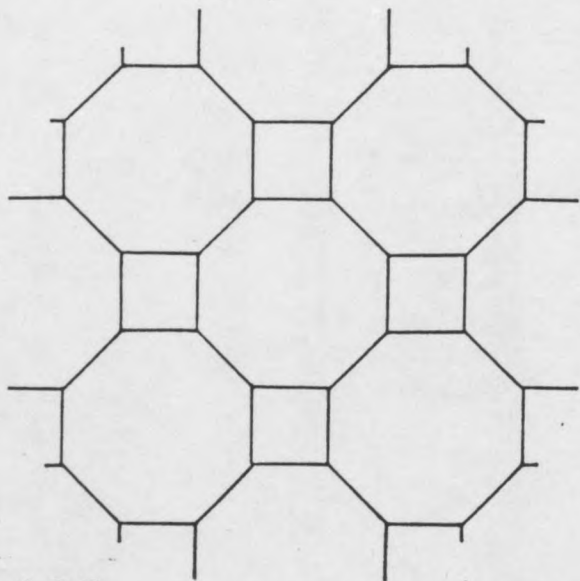


488

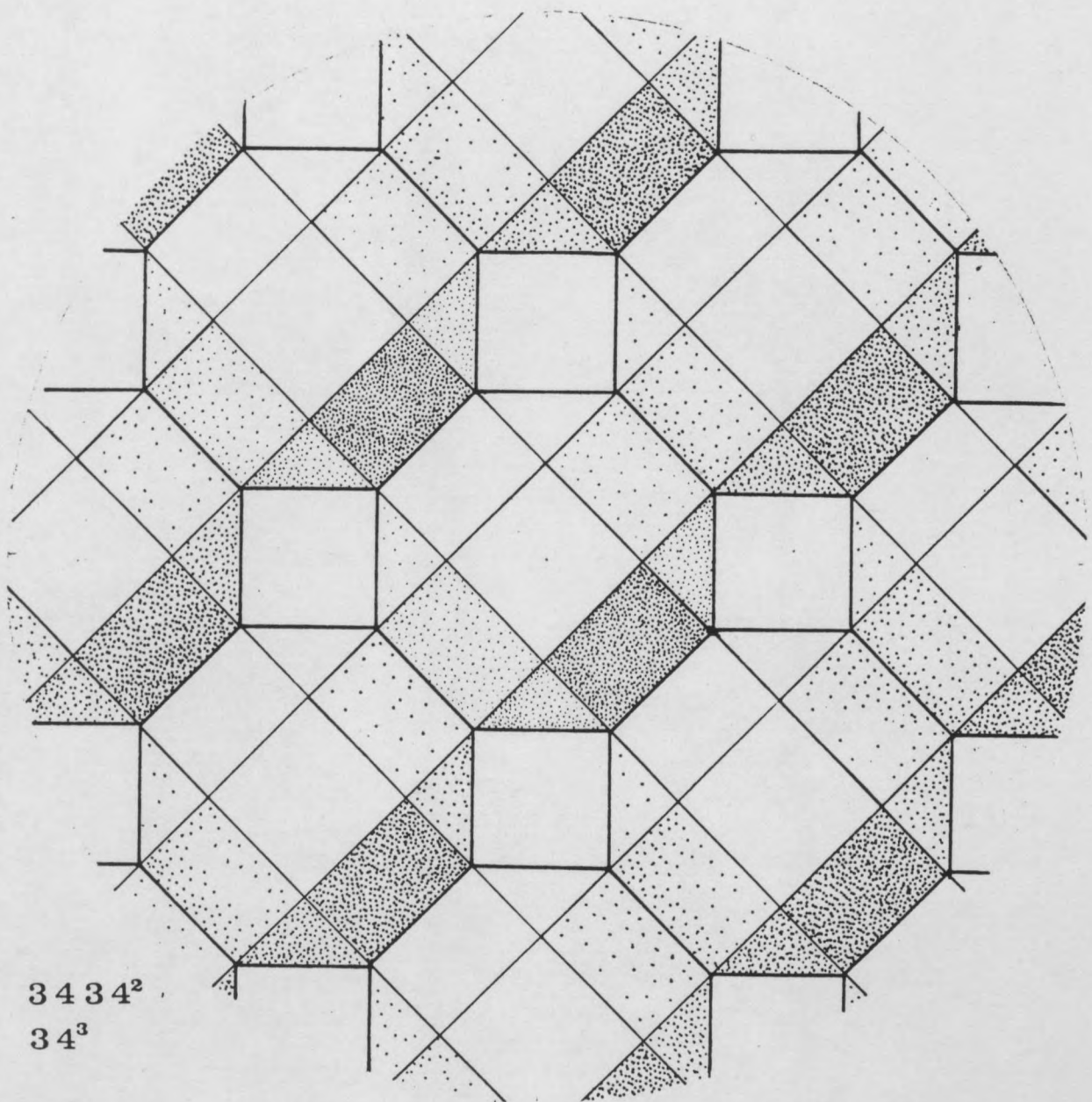
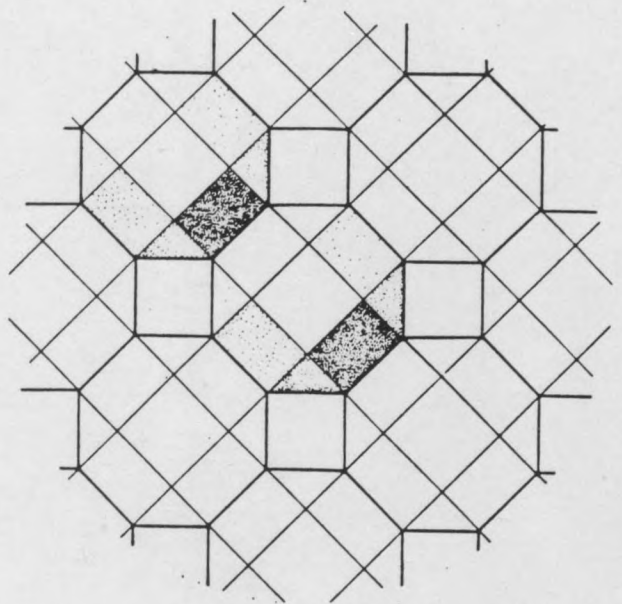


$3^2 4^3$

$3 4^3$

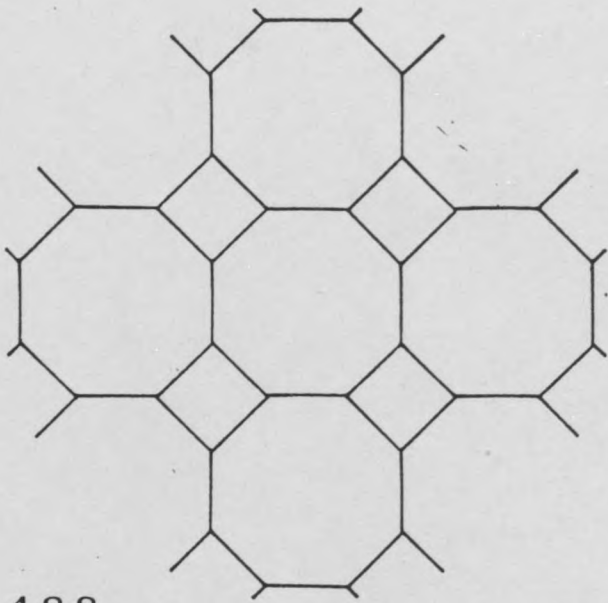


488

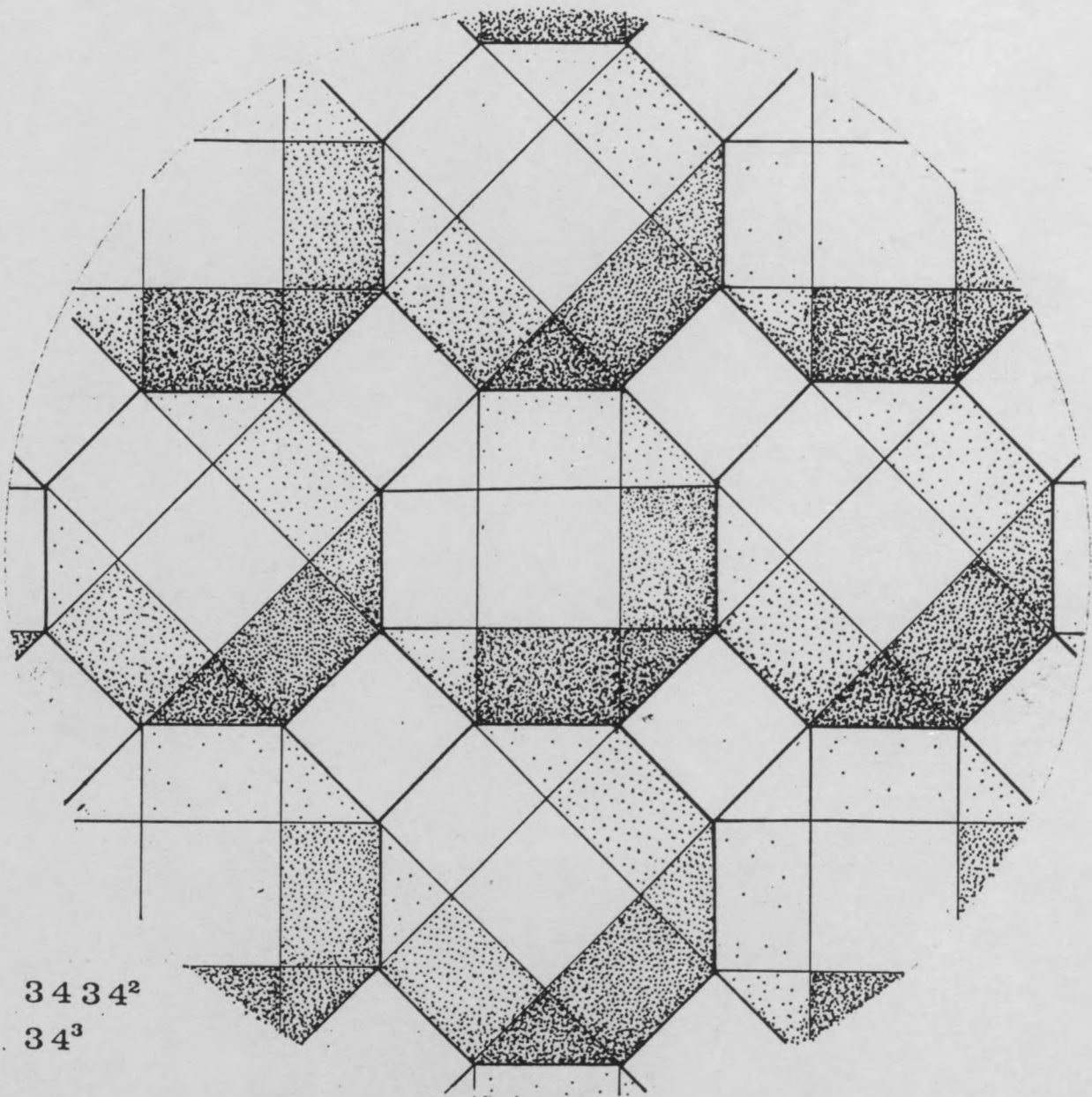
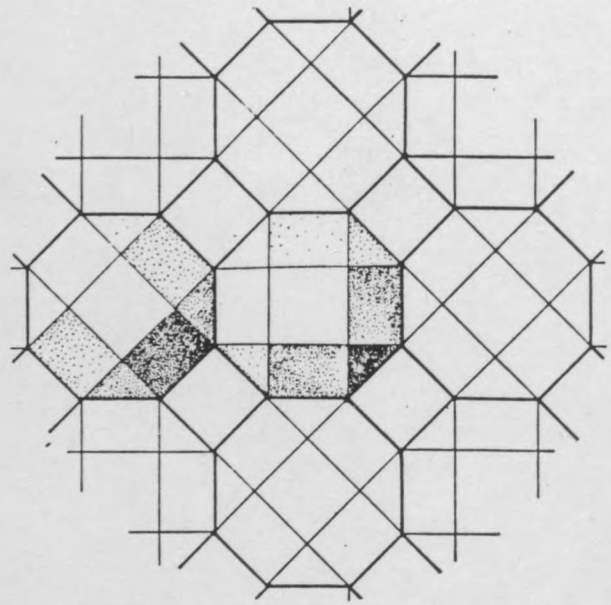


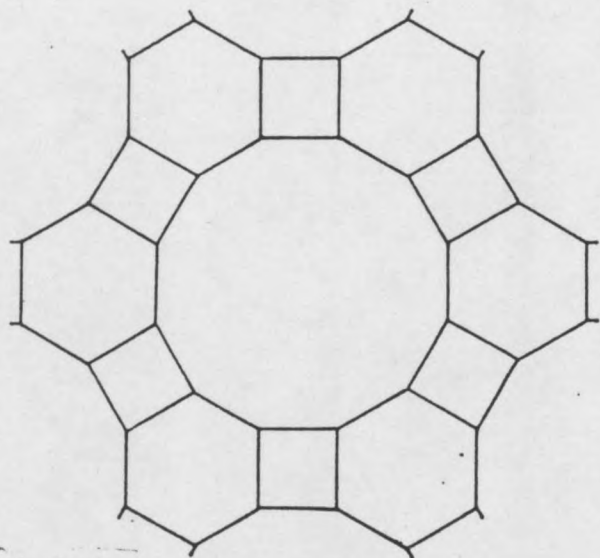
3434²

34³

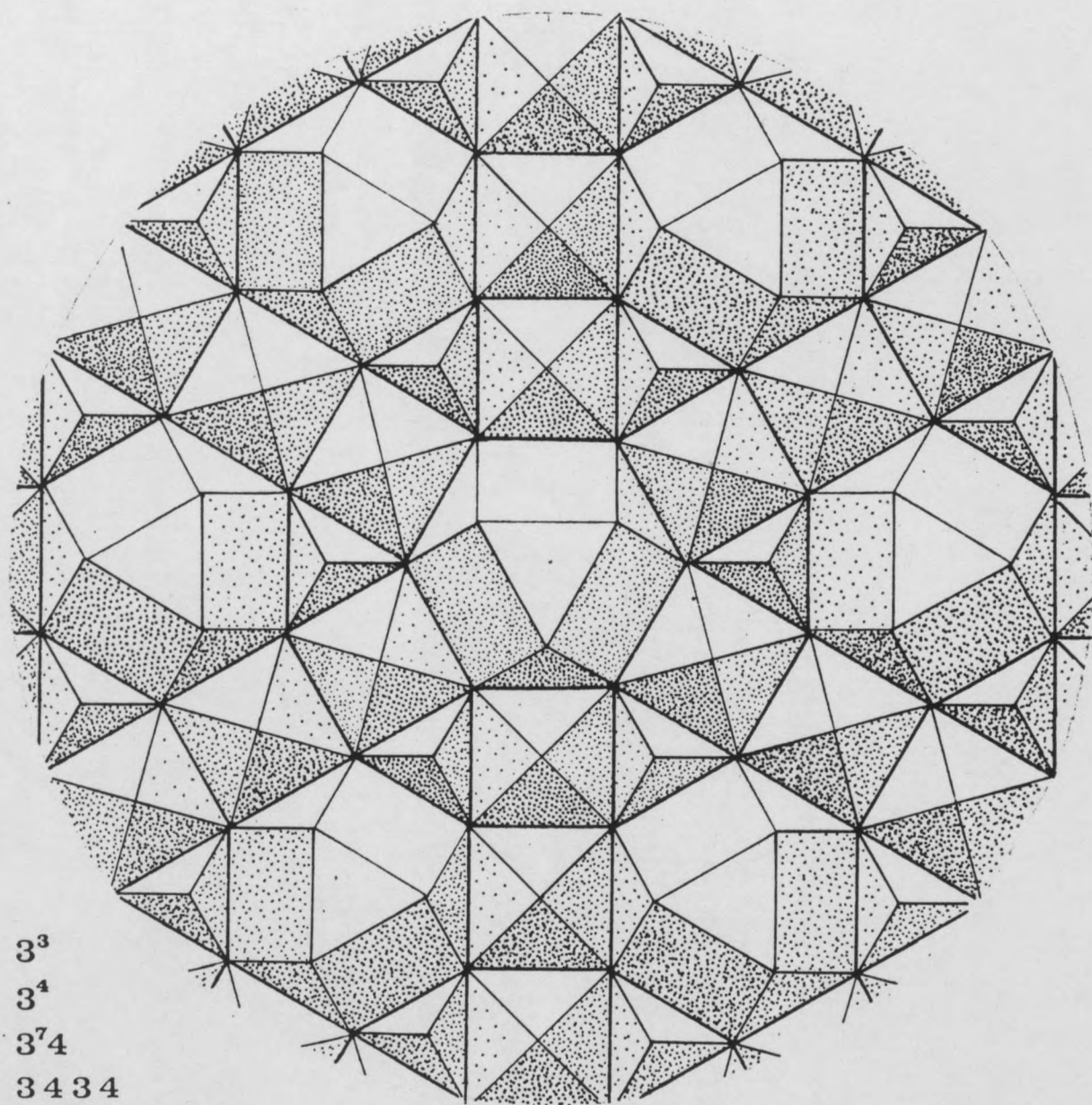
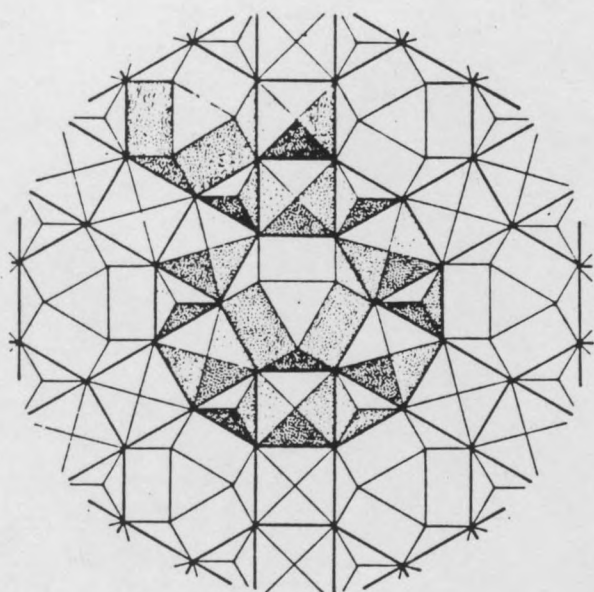


488





4 6 12



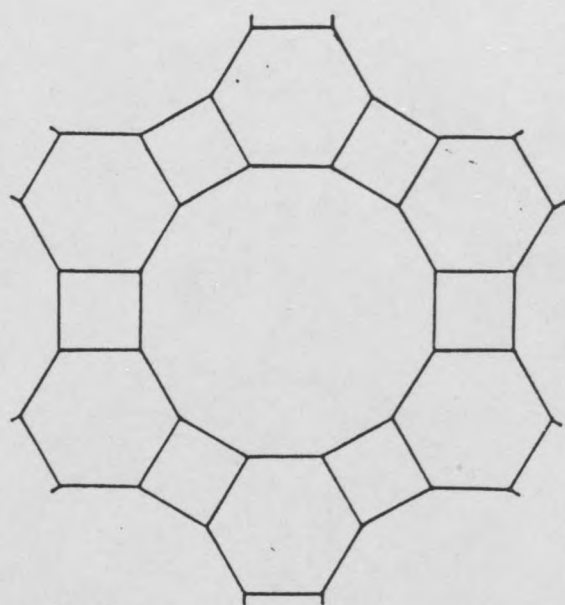
3^3

3^4

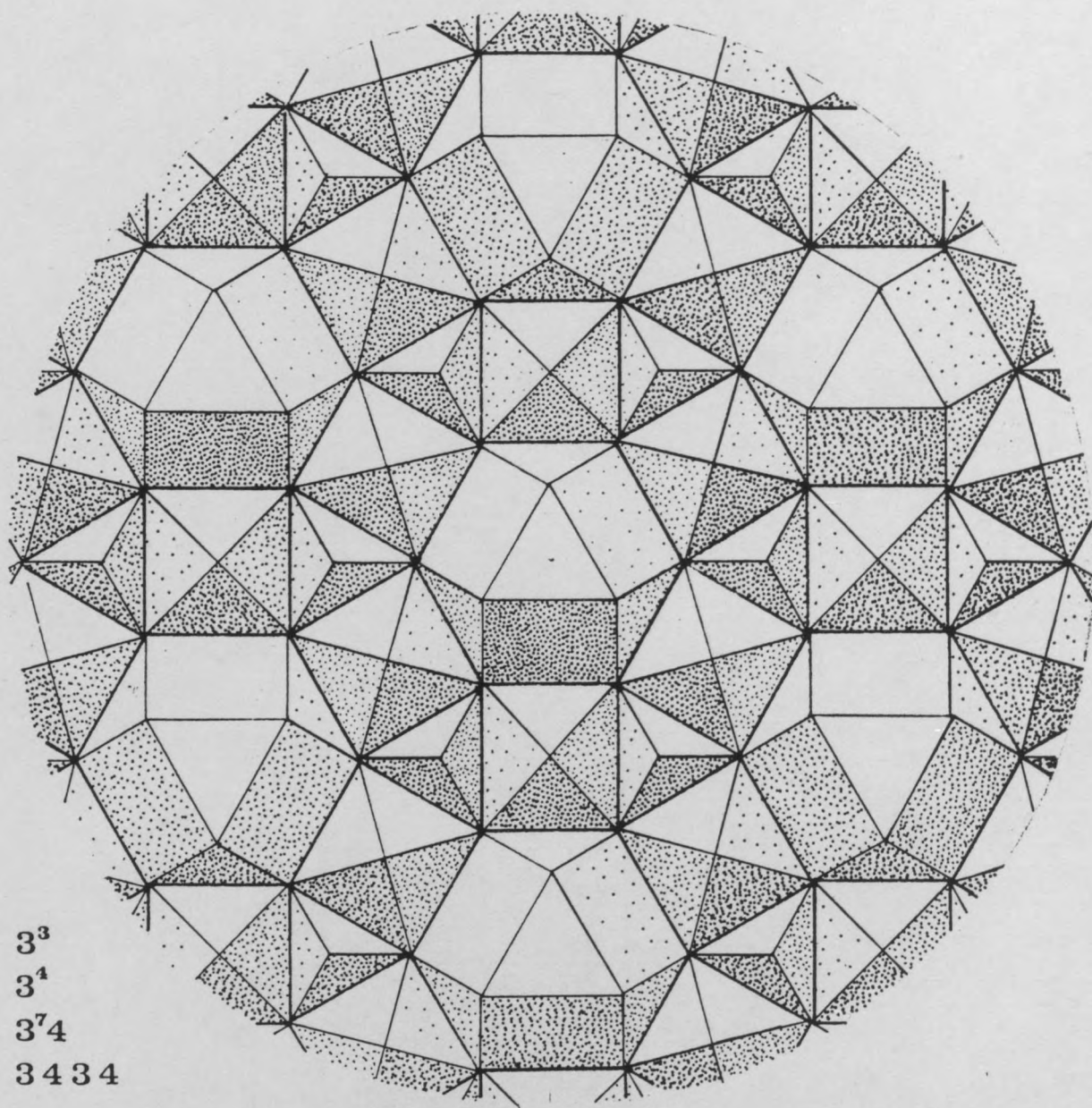
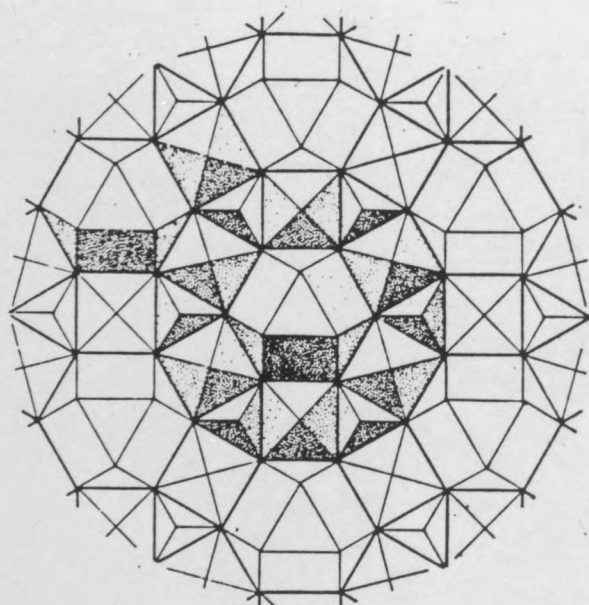
$3^7 4$

3 4 3 4

24



4 6 12

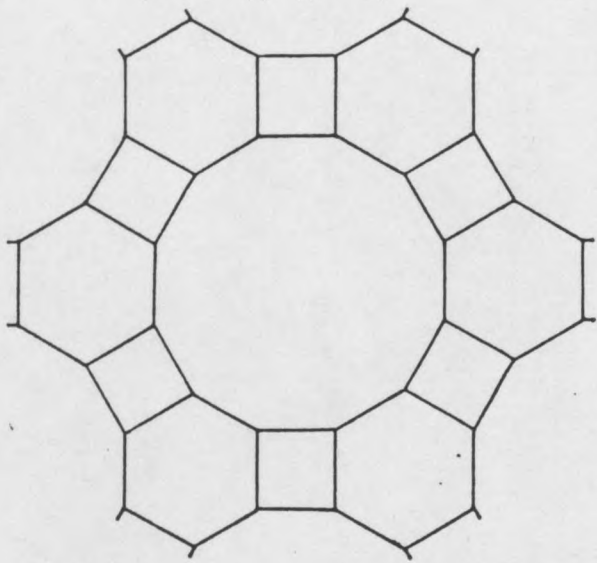


3^3

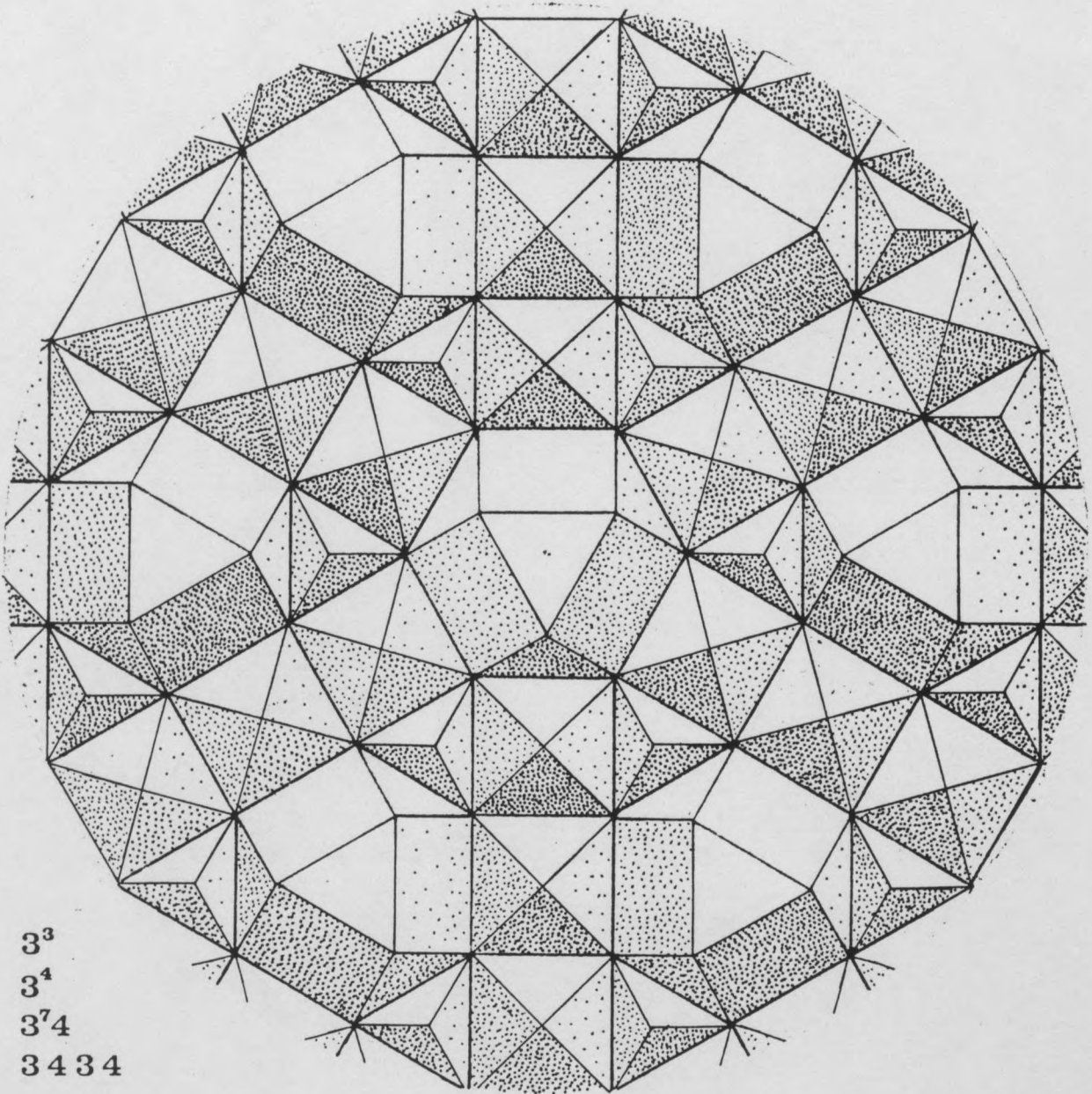
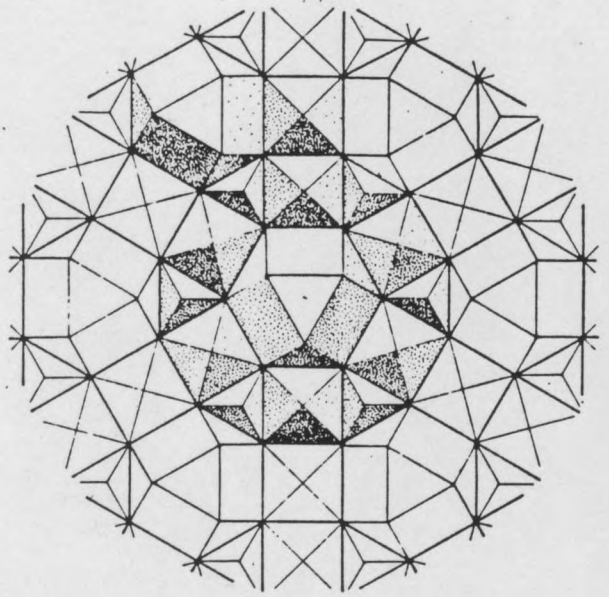
3^4

$3^7 4$

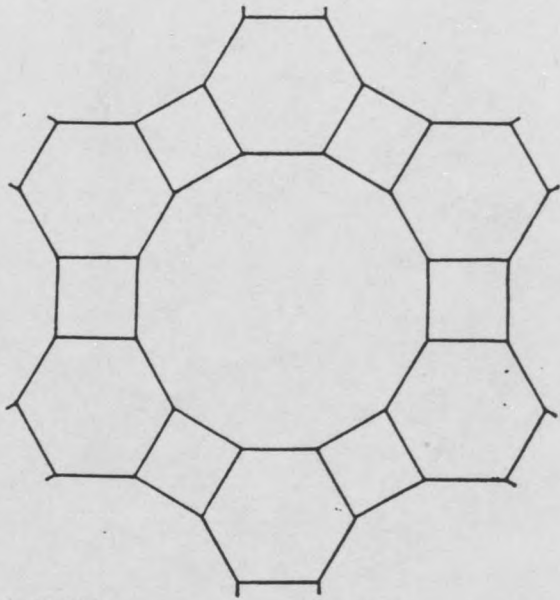
3 4 3 4



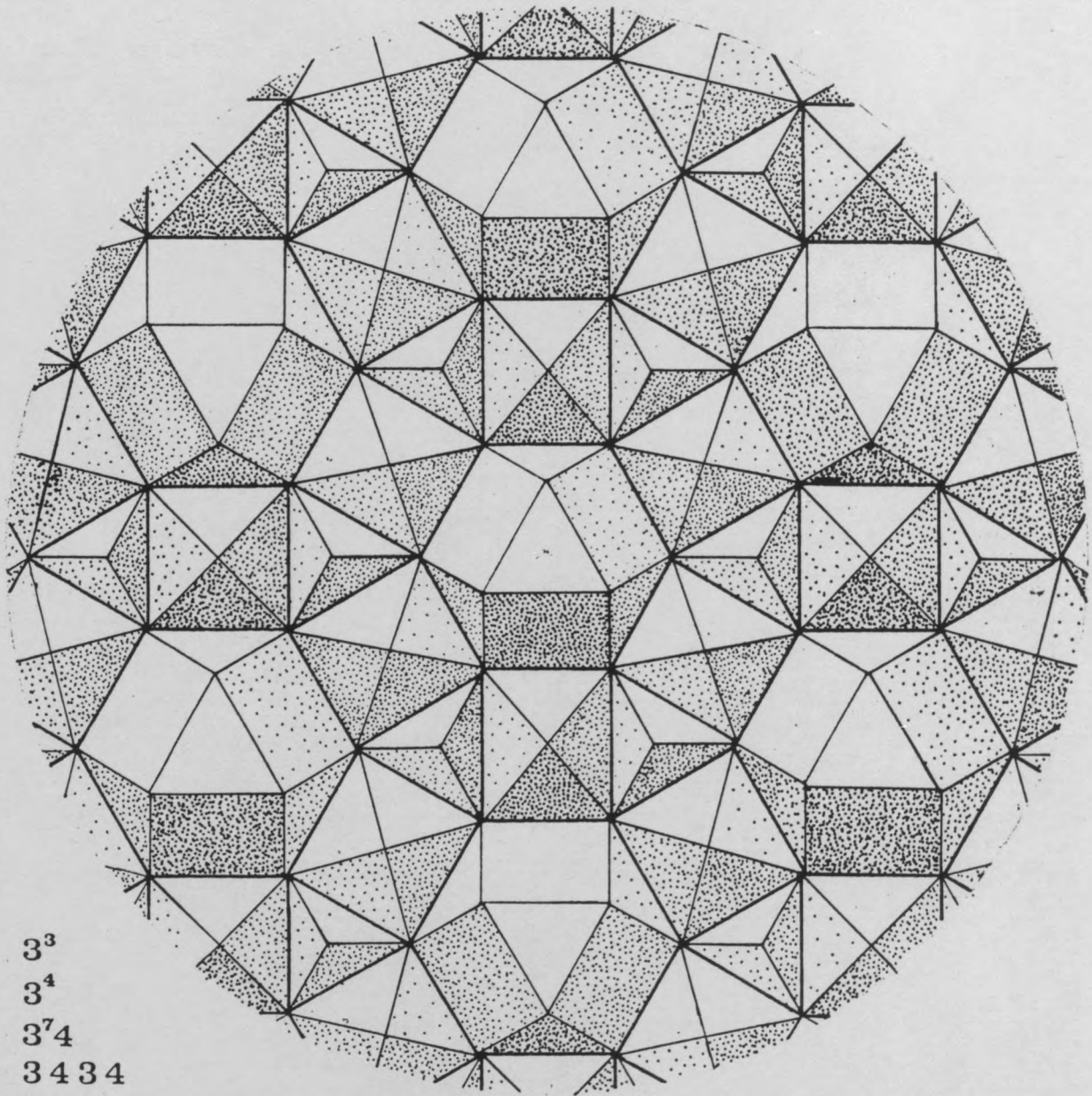
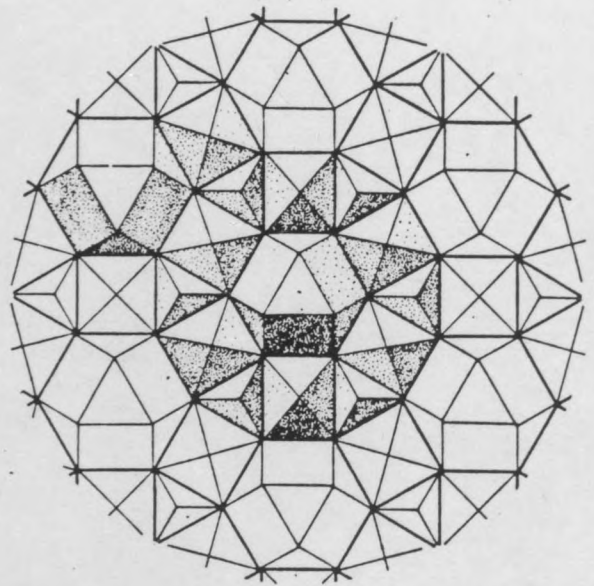
4 6 12



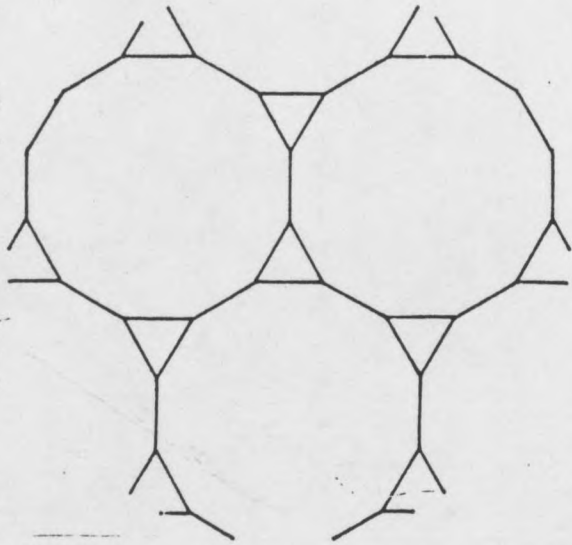
3³
 3⁴
 3⁷4
 3434



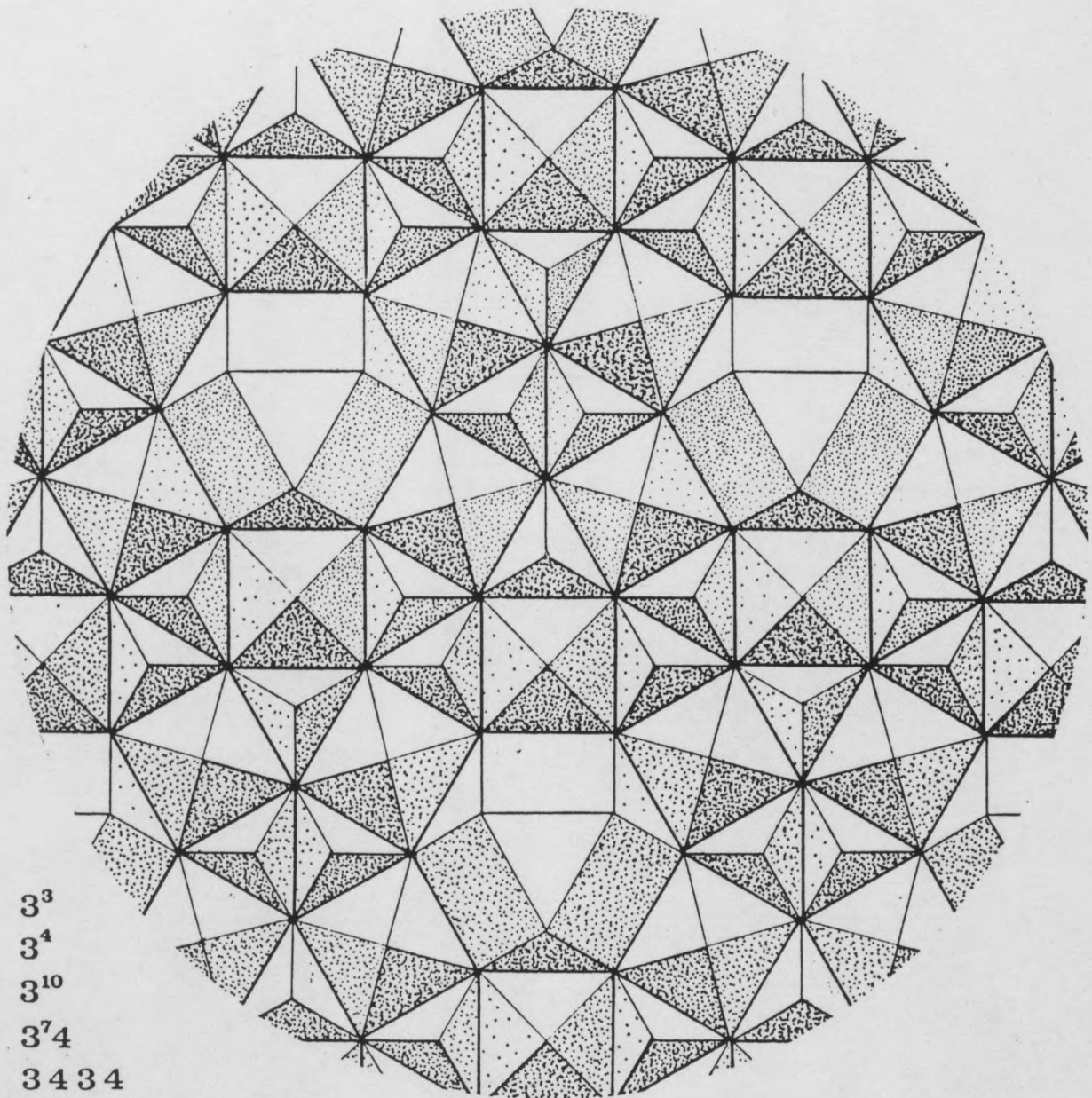
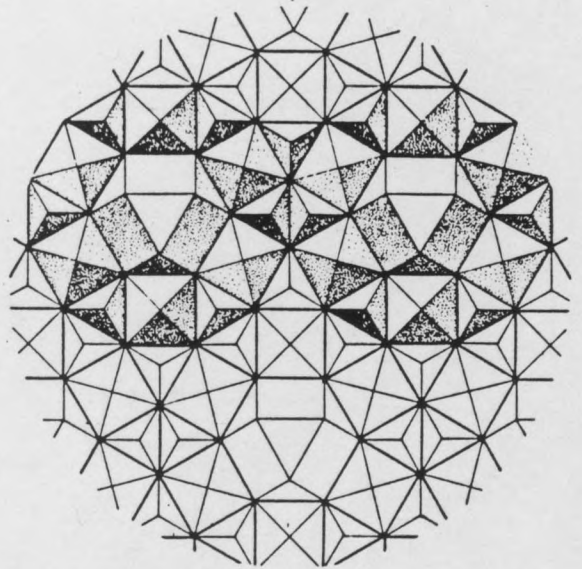
4 6 12



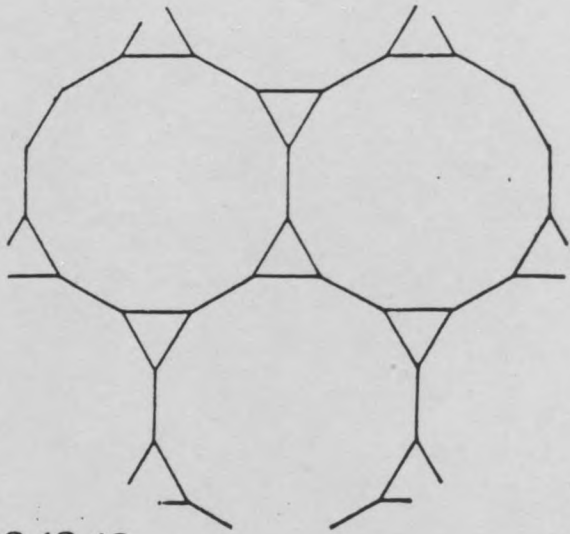
3^3
 3^4
 $3^7 4$
 $3 4 3 4$



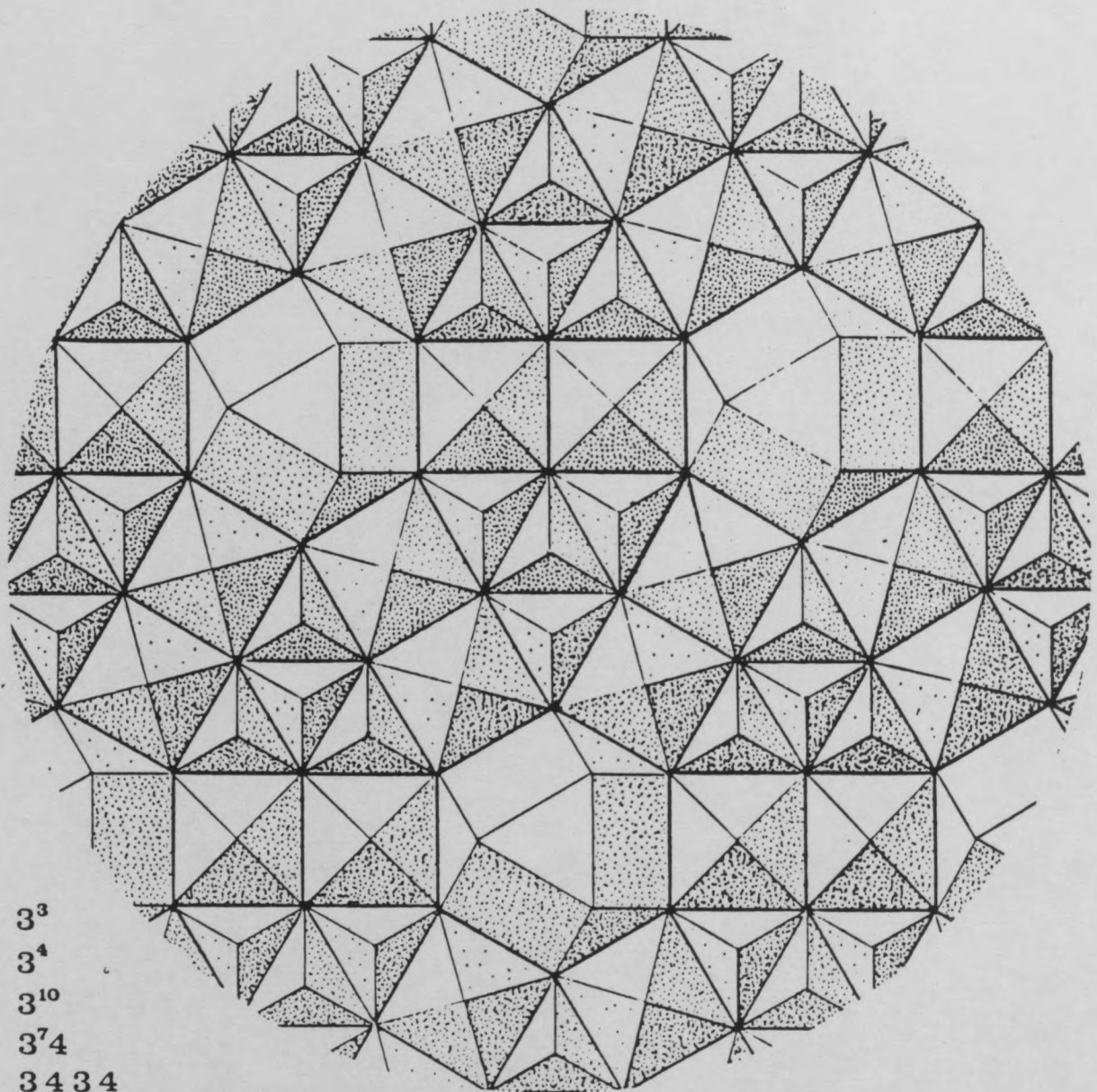
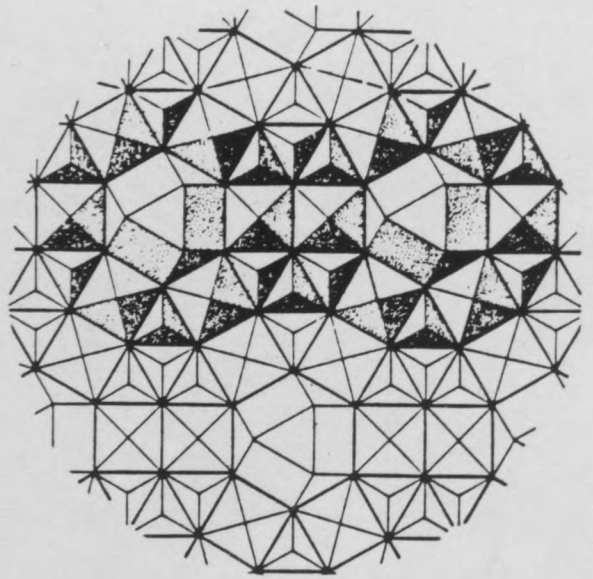
3 12 12



3^3
 3^4
 3^{10}
 $3^7 4$
 3 4 3 4



3 12 12



3^3
 3^4
 3^{10}
 $3^7 4$
 $3 4 3 4$

73

SURFACES GAUFREES COMPOSITES

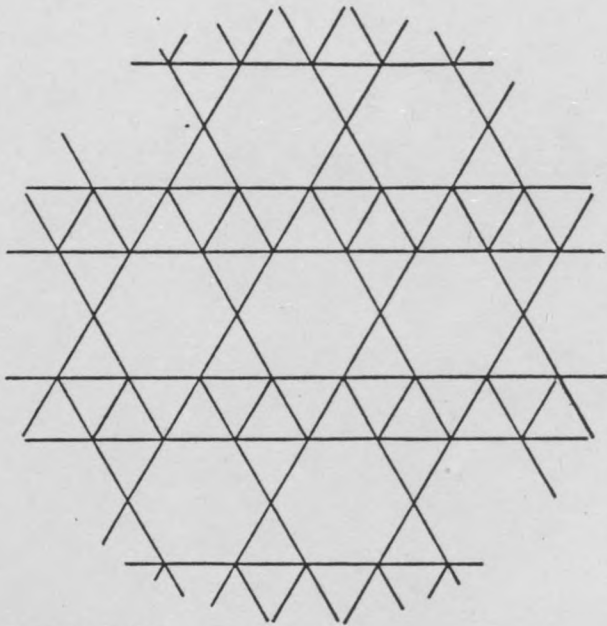
33333
333

33333
333

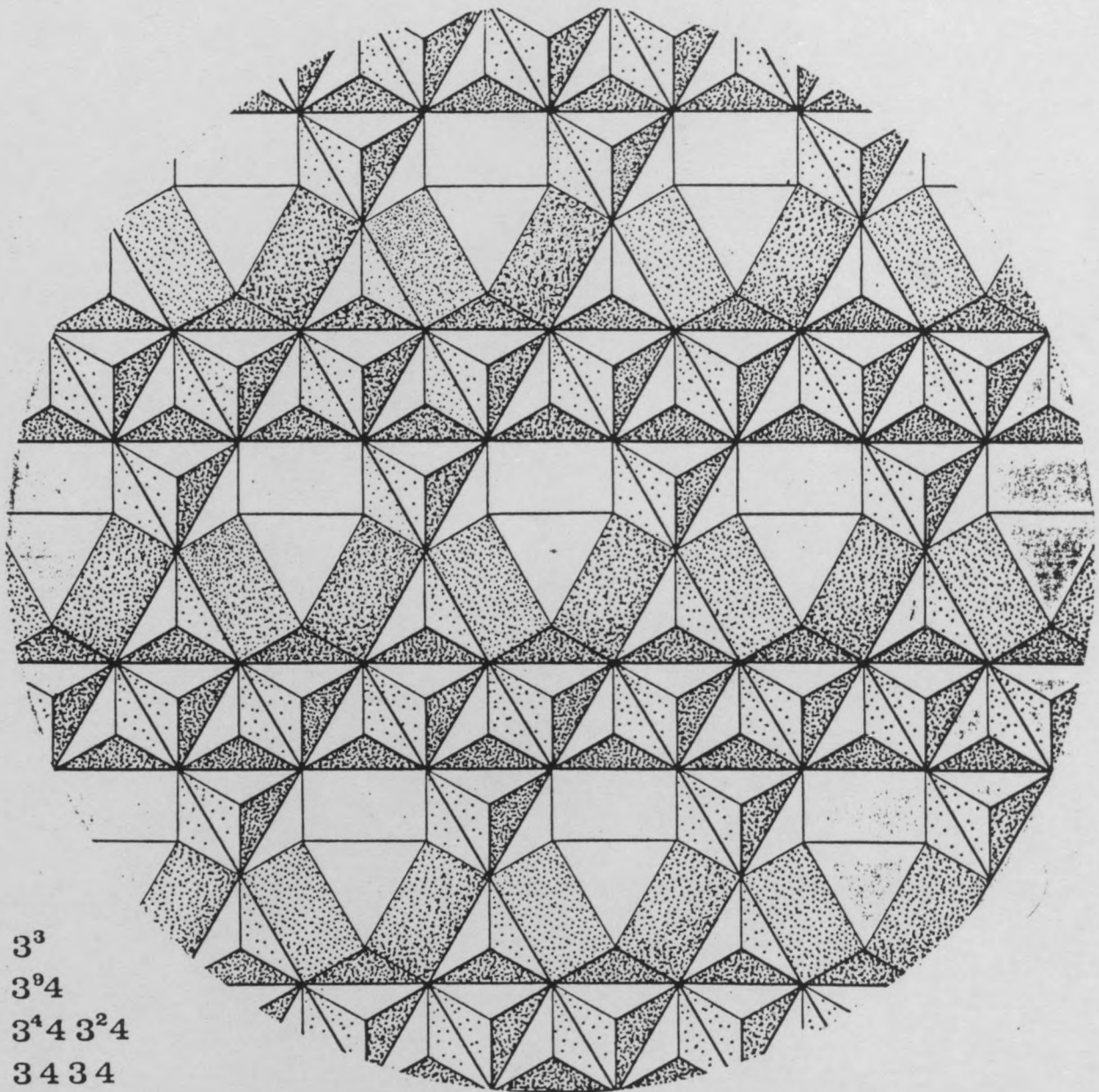
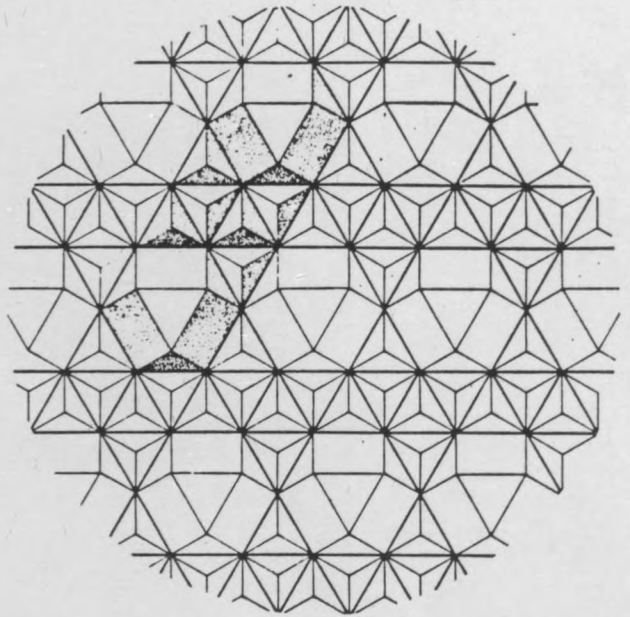


33333
33333
33333
33333
33333

33333
33333
33333
33333

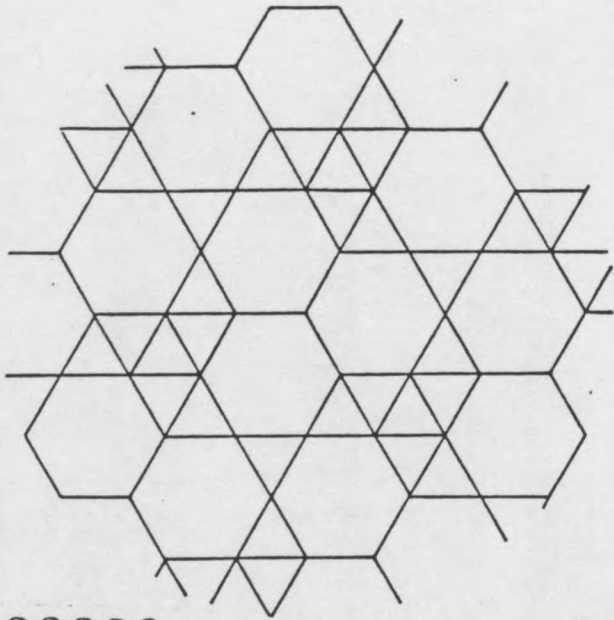


33336
3636

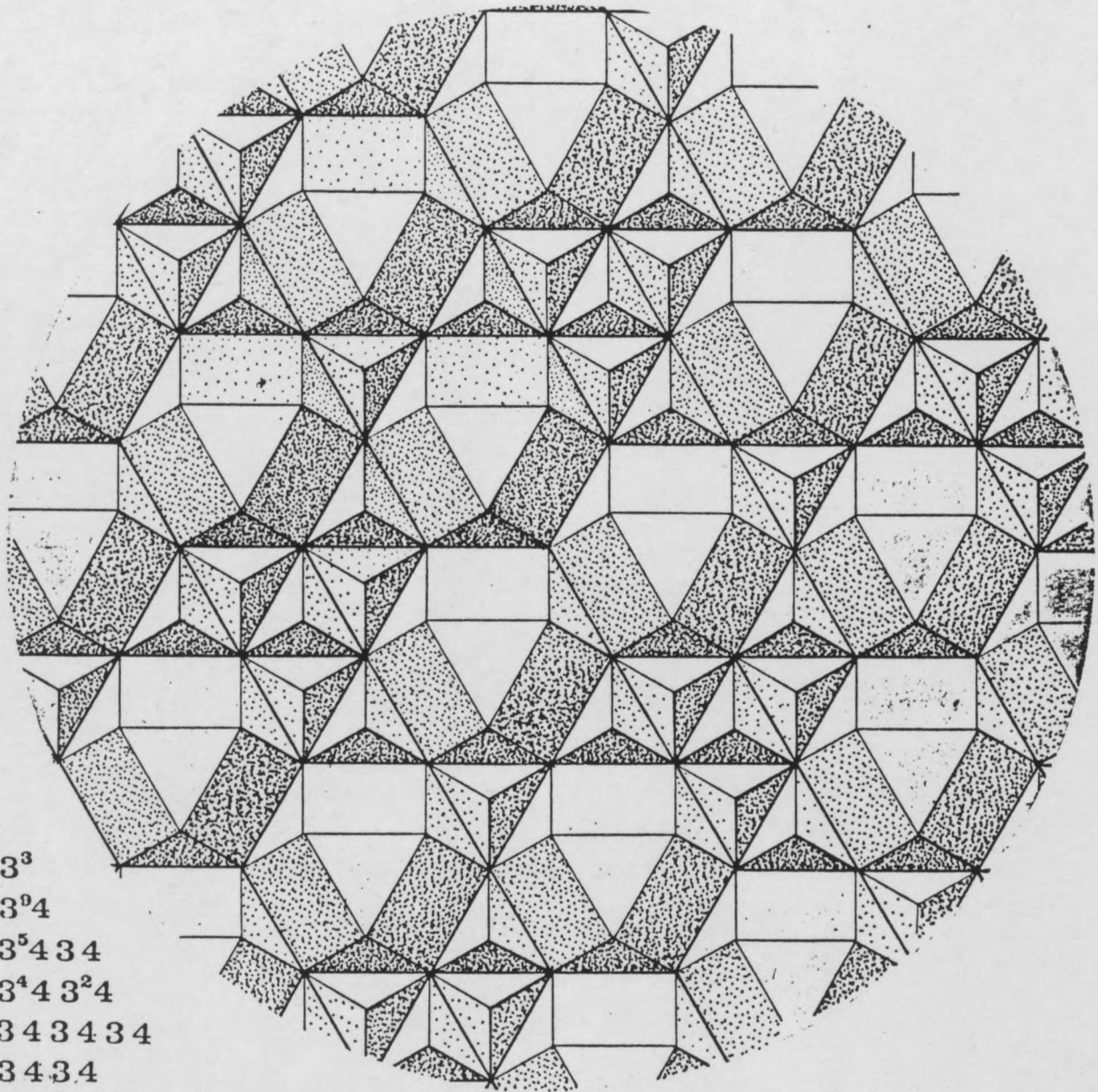
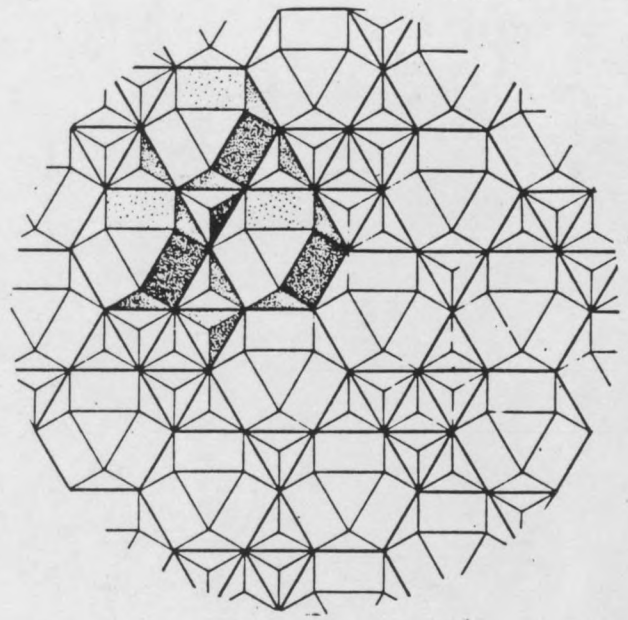


3^3
 $3^3 4$
 $3^4 4 3^2 4$
3434

50

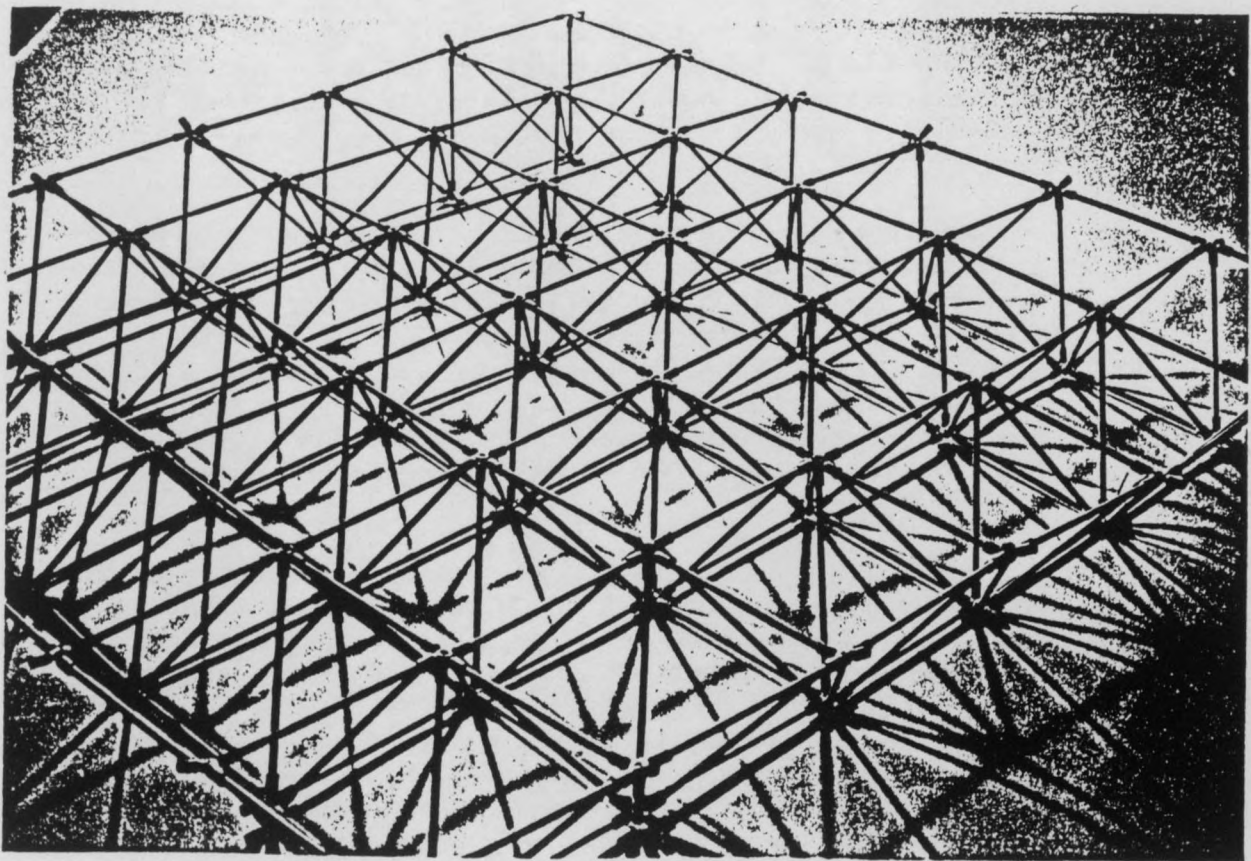


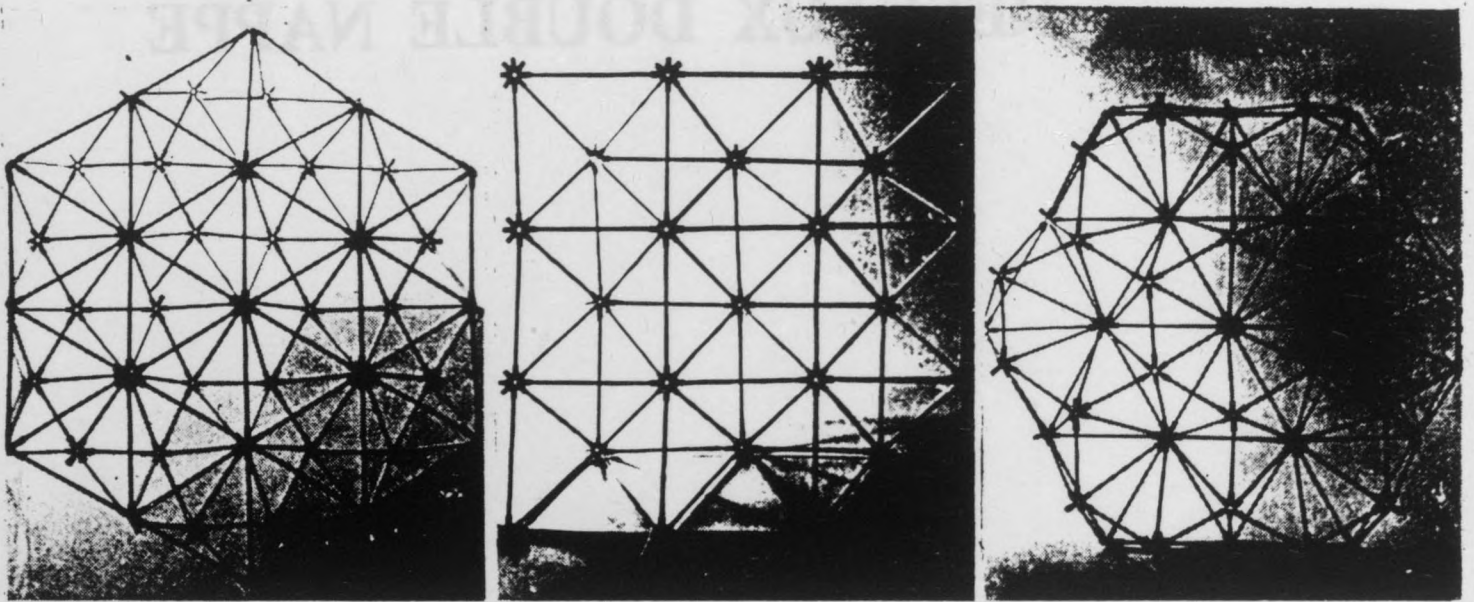
33336
666



3^3
 3^04
 3^5434
 3^443^24
 343434
 3434

RESEAUX DOUBLE NAPPE





Les trois réseaux réguliers.

Un réseau à double nappe est une configuration occupant une tranche d'espace entre deux plans parallèles, composée de un ou plusieurs types de polyèdres simples : prismes, pyramides ou troncatures de polyèdres semi-réguliers, dont les bases et les sommets se situent sur deux niveaux seulement et qui, juxtaposés, forment sur les deux plans parallèles deux tessellations identiques ou appariées.

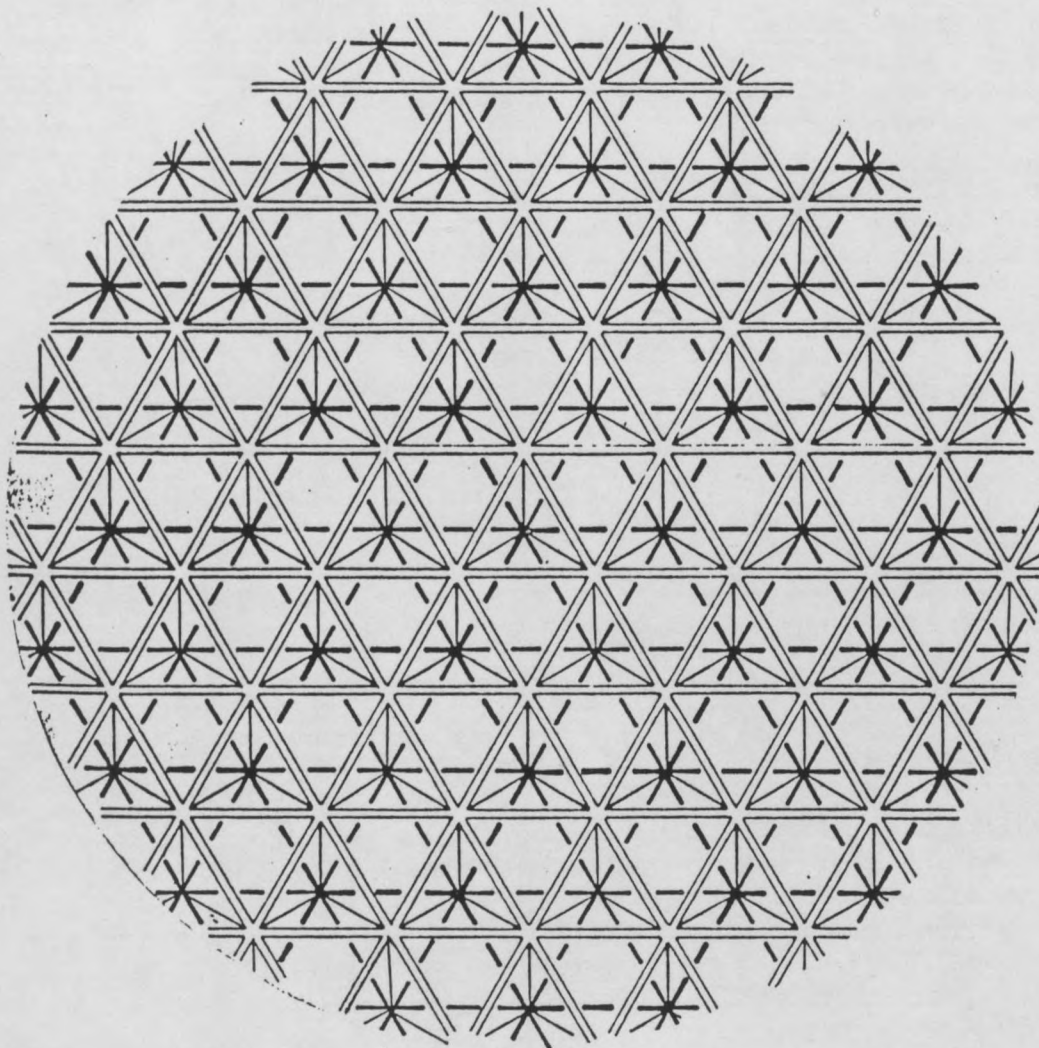
La construction d'un réseau à double nappe consiste à choisir une tessellation de base puis établir une seconde tessellation dont les articulations seront appariées à la première par une transformation adéquate. Cette opération peut être la translation, le dualisme, la pyramidation, le gaufrage, l'automorphisme, etc... La transformation choisie doit être exécutée homogènement sur tous les éléments de la tessellation de base pour obtenir un réseau régulier et répétitif.

Les réseaux prismatiques sont obtenus par la translation orthogonale de la tessellation de base, aboutissant à sa répétition comme une seconde nappe, par conséquent à un maillage parallélépipédique orthogonal de l'espace. On se contente ici de mentionner qu'il existe, évidemment, autant de réseaux prismatiques que de tessellations de diverses classes. Ces compositions prismatiques, bien qu'elles soient encore fréquemment employées dans la construction, présentent, en effet, peu d'intérêt par rapport aux structures véritablement spatiales.

Réseau isotropique

A remarquer qu'à part des méthodes fondées sur la transformation des tessellations, il est possible d'obtenir des réseaux à double nappe par le clivage des empilements compacts. Cette opération, qui n'est pas la plus simple car elle suppose la connaissance préalable des réseaux cristallographiques, consiste à découper une tranche d'espace par deux plans parallèles passant à travers les sommets dans une agglomération régulière de polyèdres.

Parmi les réseaux à double nappe constructibles par clivage, le plus dense dérive, évidemment, de l'empilement compact le plus dense, appelé isotropique, empilement et réseau étant composés par l'entassement compact de tétraèdres et octaèdres réguliers, donc de noeuds d'assemblage, d'arêtes et de faces de triangles équilatéraux tous identiques. Cette structure, par sa densité maximale, est en même temps le plus indéformable de tous les réseaux à double nappe.

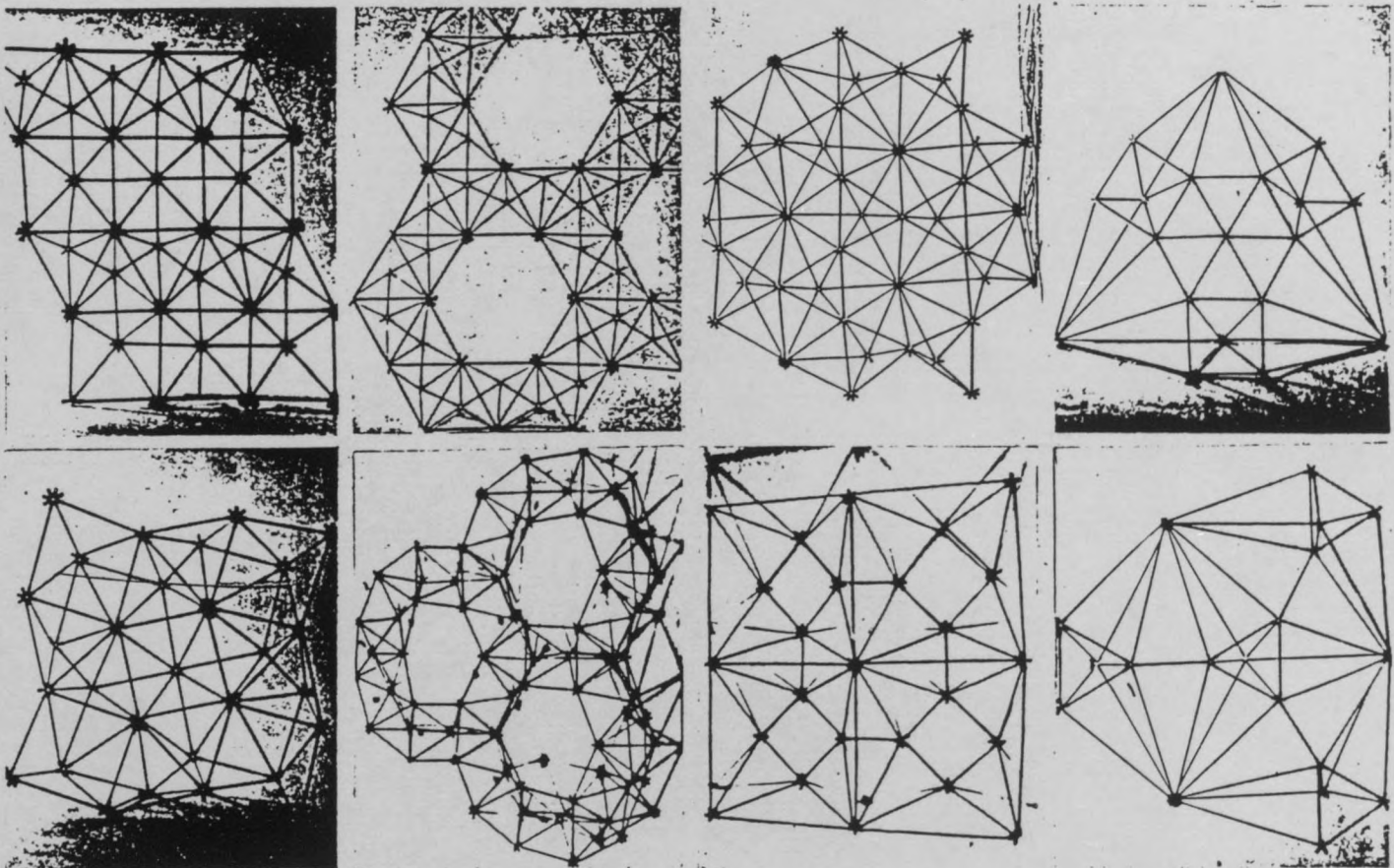


Réseaux duals

Les réseaux duals sont obtenus par l'utilisation simultanée de deux tessellations réciproques, la primaire et sa duale, pour les nappes supérieure et inférieure du réseau, les liaisons obliques entre les deux tessellations produisant une pyramidation bilatérale complète et congruente de la tranche d'espace, sorte de gaufrage pyramidal alternatif.

Ces réseaux, excepté un seul, l'orthogonal qui est parfaitement unitaire, sont composés de deux ou plusieurs longueurs élémentaires, suivant que le réseau dérive d'une tessellation platonique, archimédienne, composite ou automorphe. La hauteur du réseau est à choisir de sorte que les arêtes obliques, ou le plus grand nombre quand il y en a plusieurs types, soient de la même longueur que l'arête unitaire de la trame primaire.

Parmi les trente réseaux duals élaborés ici, les onze dérivés des tessellations isocèles étaient présentés pour la première fois en 1965, voir "Réseaux" dans *Proceeding de l'International Conference on Space Structures*, Londres. Les dix neuf autres réseaux sont choisis parmi les soixante trois trames non-isocèles constructibles, qui semblent être les plus utilisables en tant que structures de grande portée ou de plancher léger.



Les huit réseaux semi-réguliers.

Réseaux automorphes

Les tessellations automorphes, indépendamment du fait qu'elles soient aussi transformables par dualisme, ont la propriété de pouvoir être appariées à elles-mêmes par une sorte d'autoréciprocité. Les deux tessellations composant le réseau sont donc identiques mais leur position sur les deux nappes est décalée l'une par rapport à l'autre. Ces trames autoréversibles ont une symétrie rotatoire locale, lévogyre ou dextrogyre, ou les deux à la fois donnant alors une composition énantiomorphe.

Après l'établissement de liaisons obliques entre les deux couches de sommets, le réseau automorphe obtenu sera composé de pyramides tronquées, ou trapézoïdes, congruentes et alternativement inversées, formant également un gaufrage bilatéral complet de la tranche d'espace. La hauteur du réseau peut être choisie de sorte que la longueur des diagonales, qui sont toutes homothétiques, soit égale à celle des arêtes composant les deux nappes. Toutes les arêtes seront ainsi de la même dimension, ce qui rend ces réseaux, dont trois sont élaborés à titre d'exemple, particulièrement intéressants pour la construction.

Réseaux gaufrés

Les réseaux gaufrés sont obtenus à partir de la surface gaufrée par interconnection des sommets supérieurs des pyramides et calottes polyédriques complémentaires. La tessellation formée par les interconnections peut être isocèle et de membrures identiques à celles de la tessellation de base. En ce cas là, le réseau est entièrement composé d'éléments standard, les obliques étant par définition de longueurs identiques dans une surface gaufrée. Dans les autres cas, les longueurs élémentaires de la nappe nouvelle seront de deux sortes, dont une restera identique avec celle des éléments de la nappe opposée et des diagonales. Ces réseaux seront donc composés de deux types de barres.

L'aspect intriqué de ces charpentes évoque les ogives gothiques de l'époque tardive, au point qu'on soit tenté de les appeler réseaux flamboyants. Outre les quinze compositions élaborées ici, à titre d'exemple, il en existe un très grand nombre.

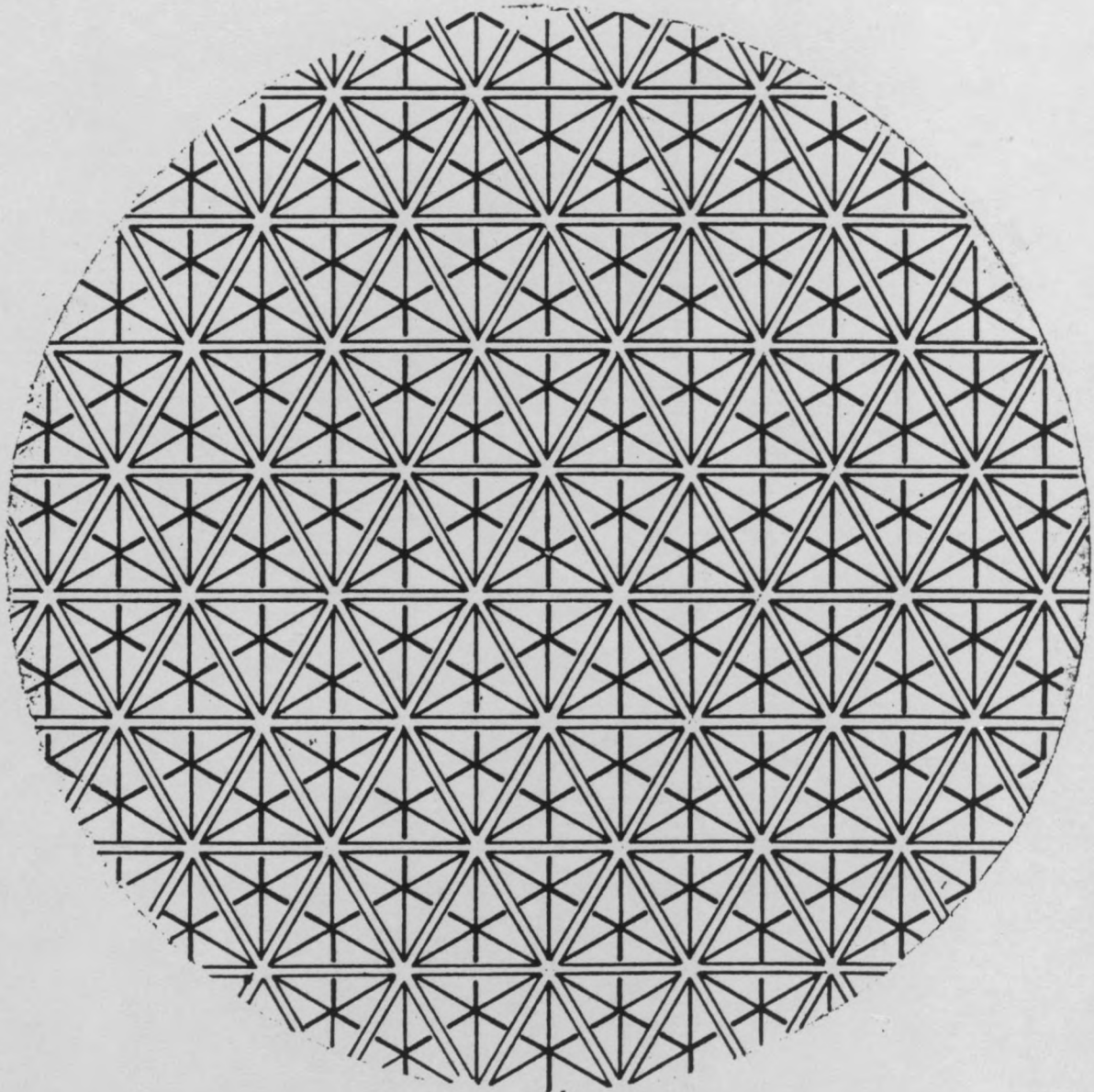
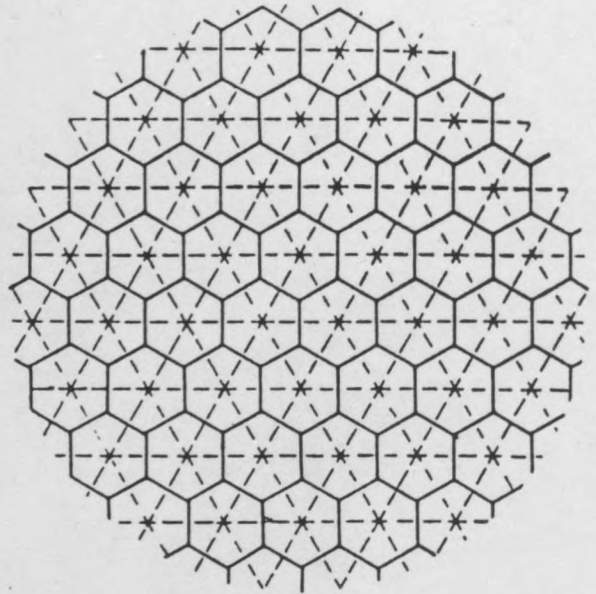
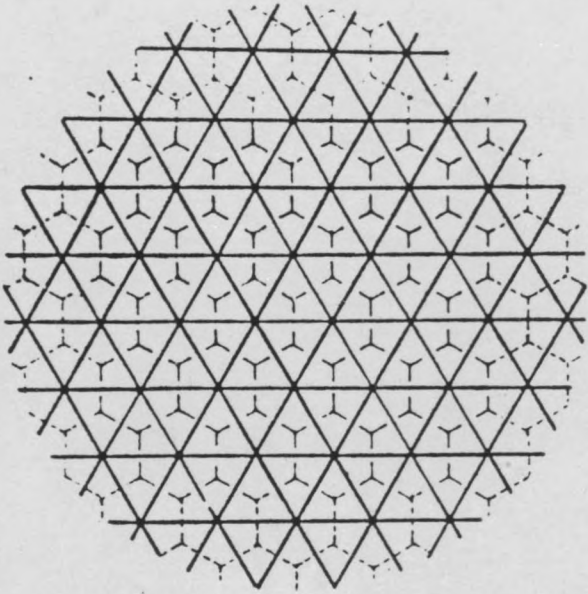
De la multitude des compositions possibles, quarante huit réseaux à double nappe composés à base des tessellations sont énumérés dans le tableau n°10, groupés selon les trois modes de transformation - dualisme, automorphisme, gaufrage - et sont présentés par des figures où la nappe supérieure est indiquée par des traits doubles, la nappe inférieure par des traits pleins et les obliques par des traits plus fins.

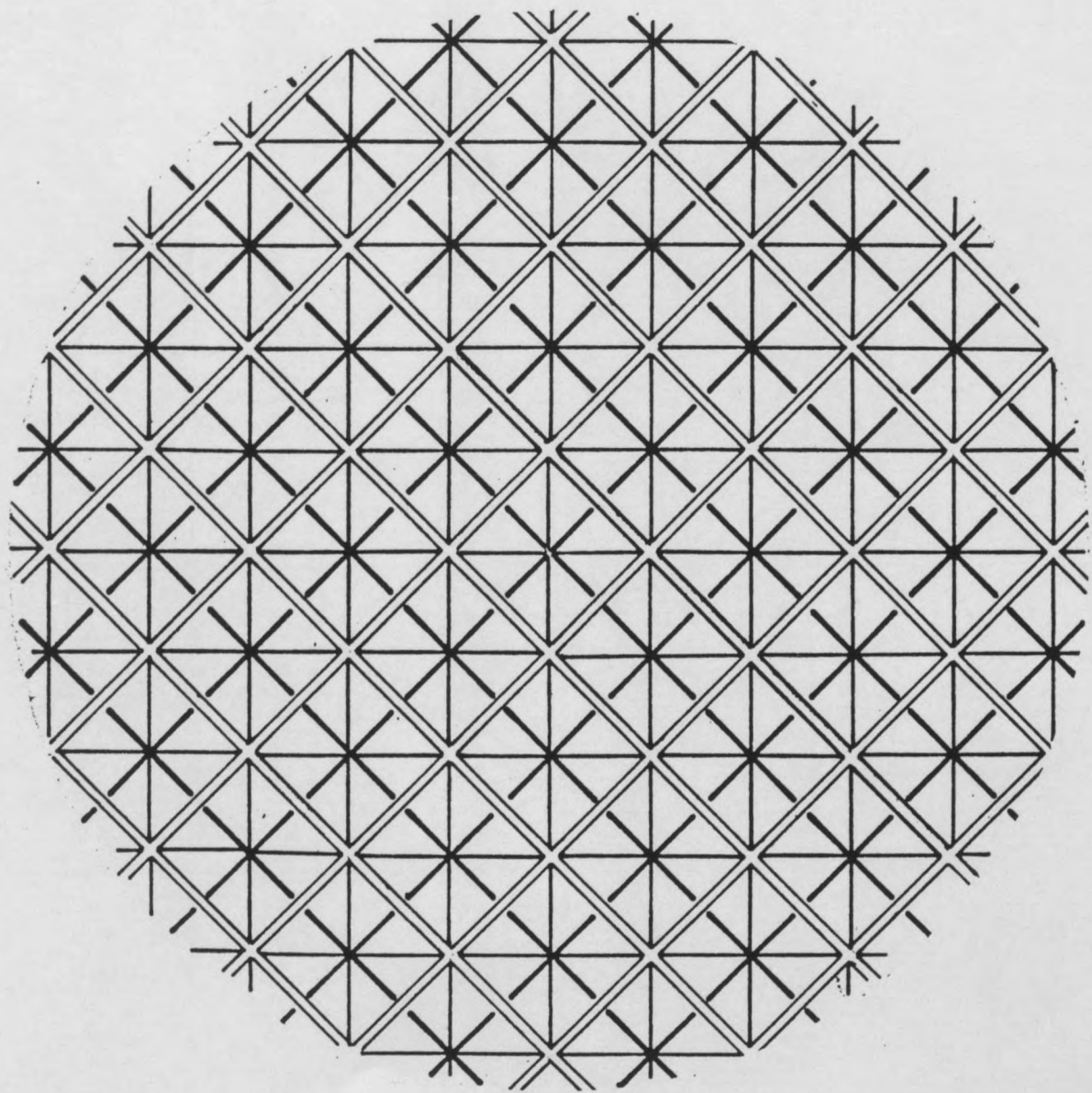
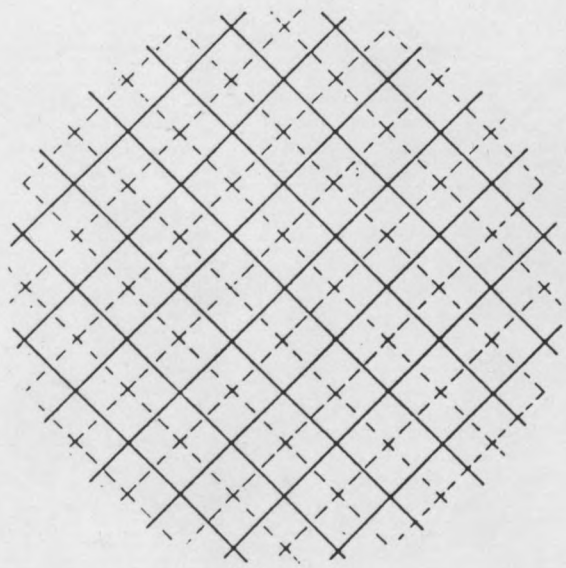
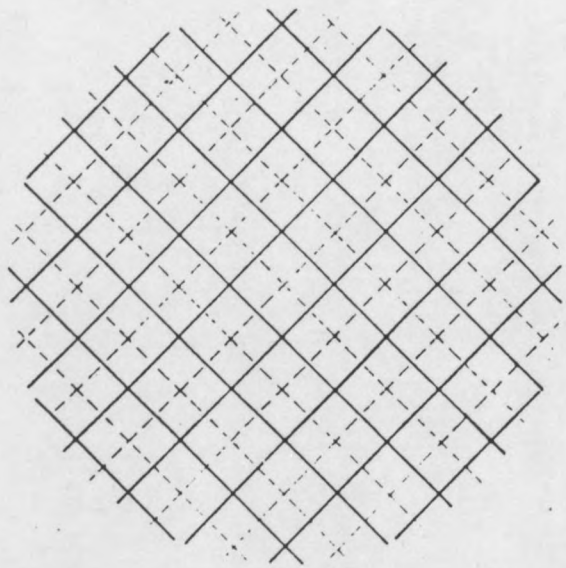
TABLEAU 10 RESEAUX A DOUBLE NAPPE

N°	dérivée de 1a		transformation par
	tessellation	surf. gaufrée	
1	1r		dualisme
2	2r		
3	3r		
4	1s		
5	2s		
6	3s		
7	4s		
8	5s		
9	6s		
10	7s		
11	8s		
12	pentacentrique		
13	3c		
14	7c		
15	8c		
16	9		
17	15		
18	19		
19	22		
20	23		
21	25		
22	29		
23	35		
24	37		
25	41		
26	45		
27	46		
28	50		
29	52		
30	60		
31	2 autom.		automorphisme
32	5 autom.		
33	9 autom.		
34	1r	2	gaufrage
35	2r	4	
36	3r	5	
37	3r	6	
38	3r	7	
39	3s	10	
40	3s	11	
41	4s	14	
42	5s	15	
43	5s	16	
44	5s	17	
45	6s	18	
46	6s	19	
47	6s	22	
48	12c	29	
49	60c	30	

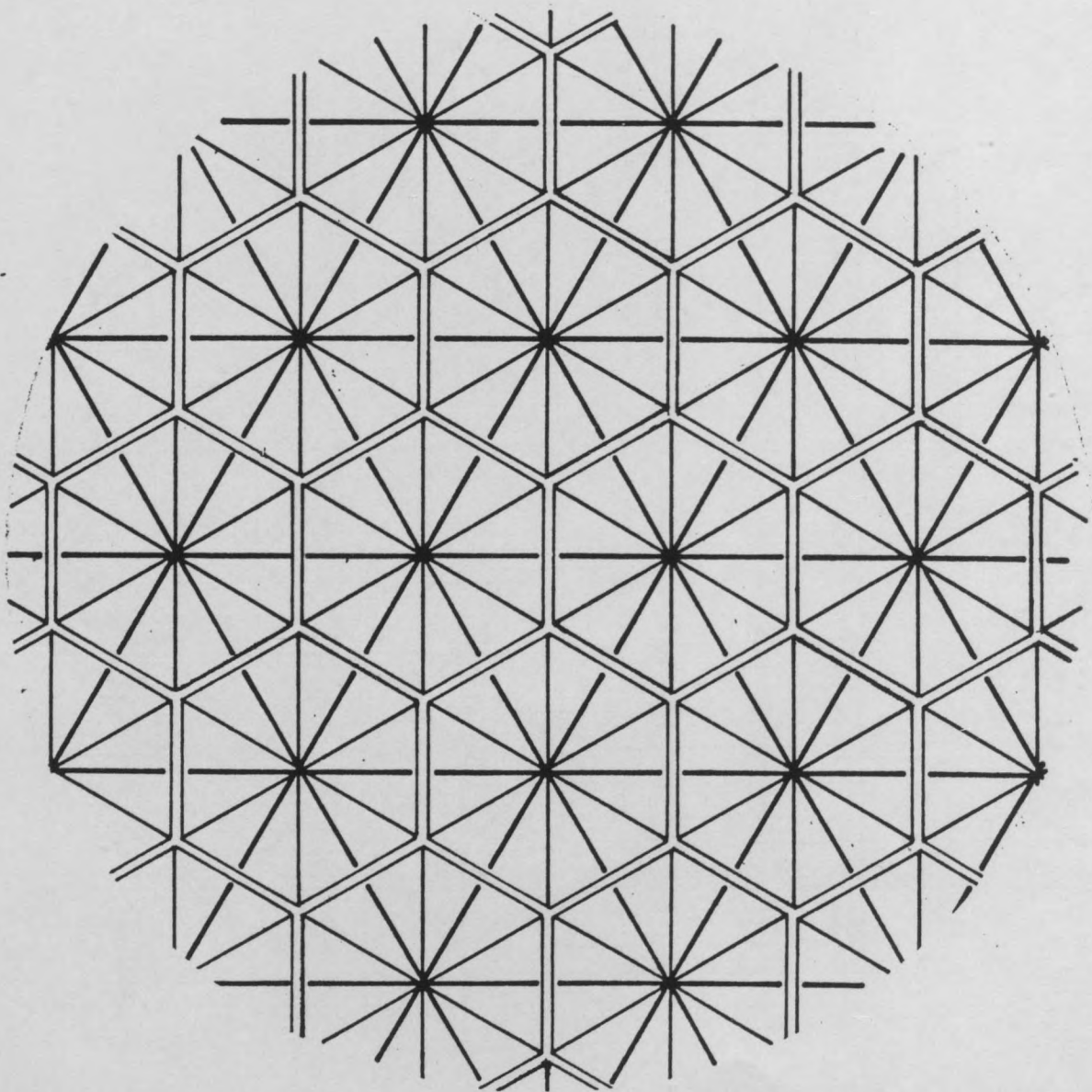
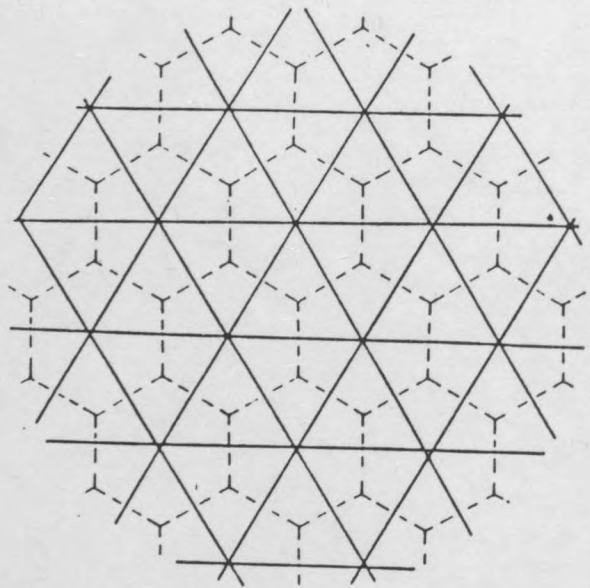
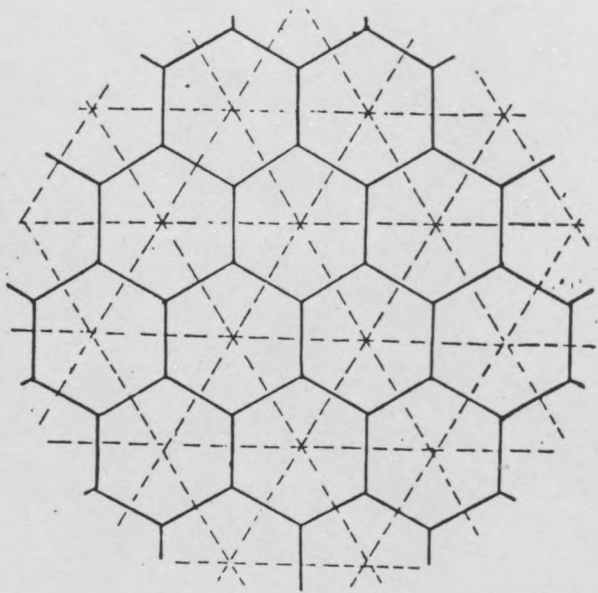
RESEAUX DUALS

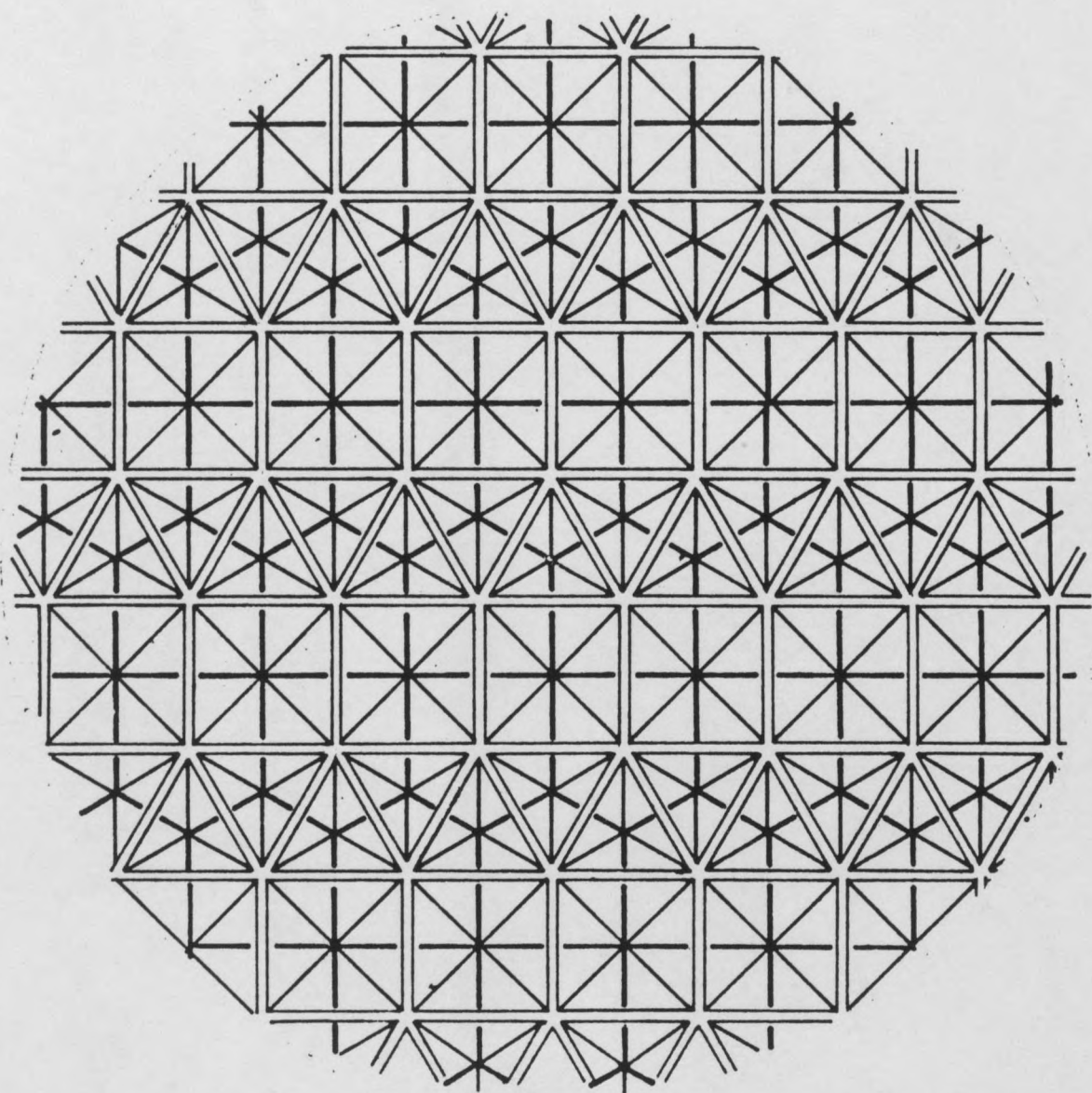
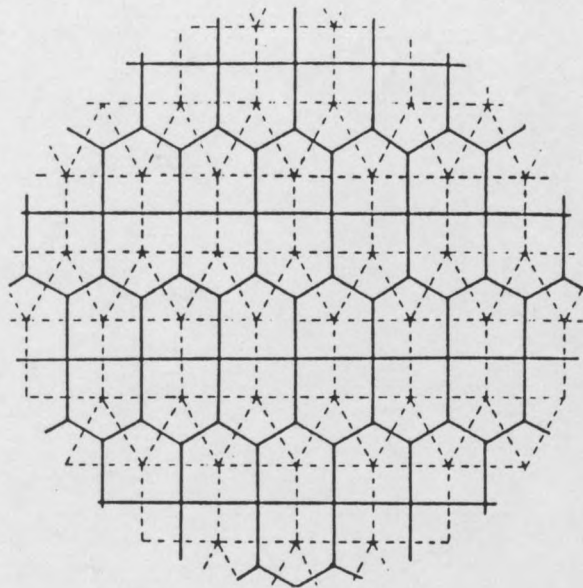
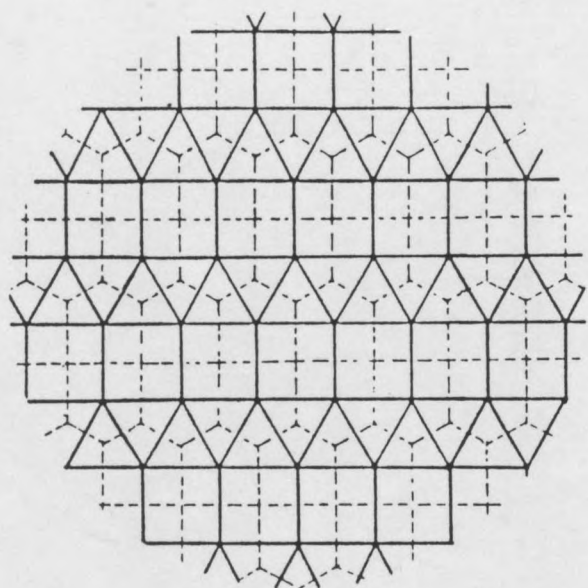
1



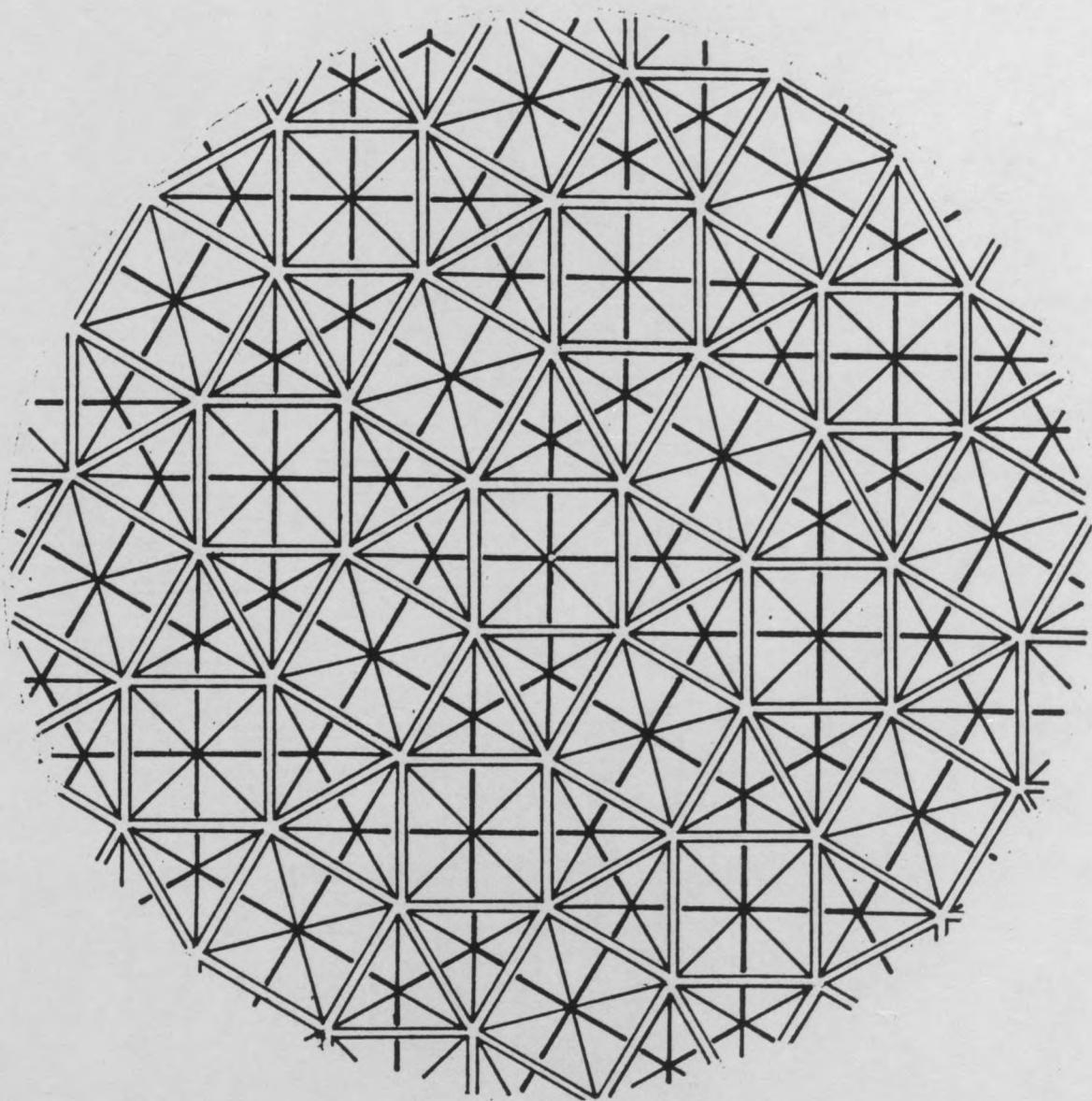
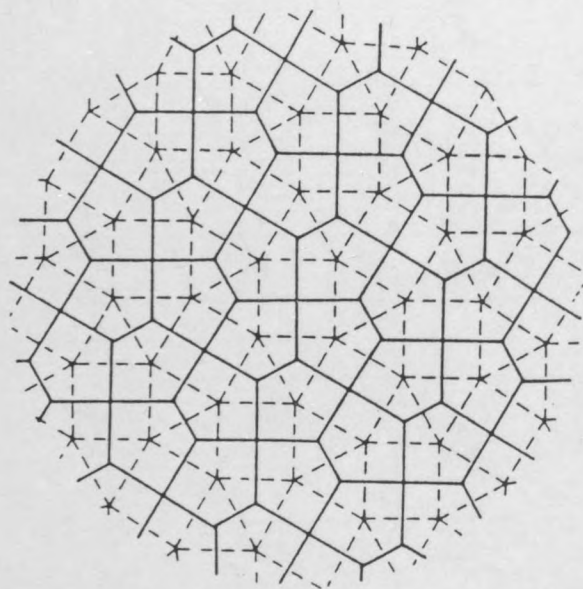
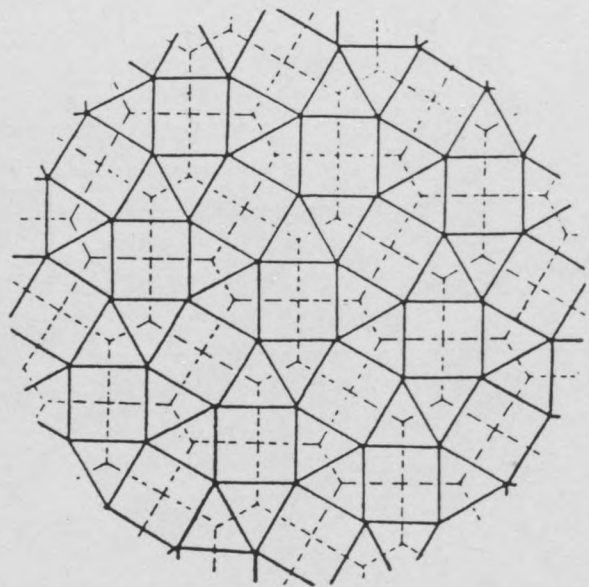


5

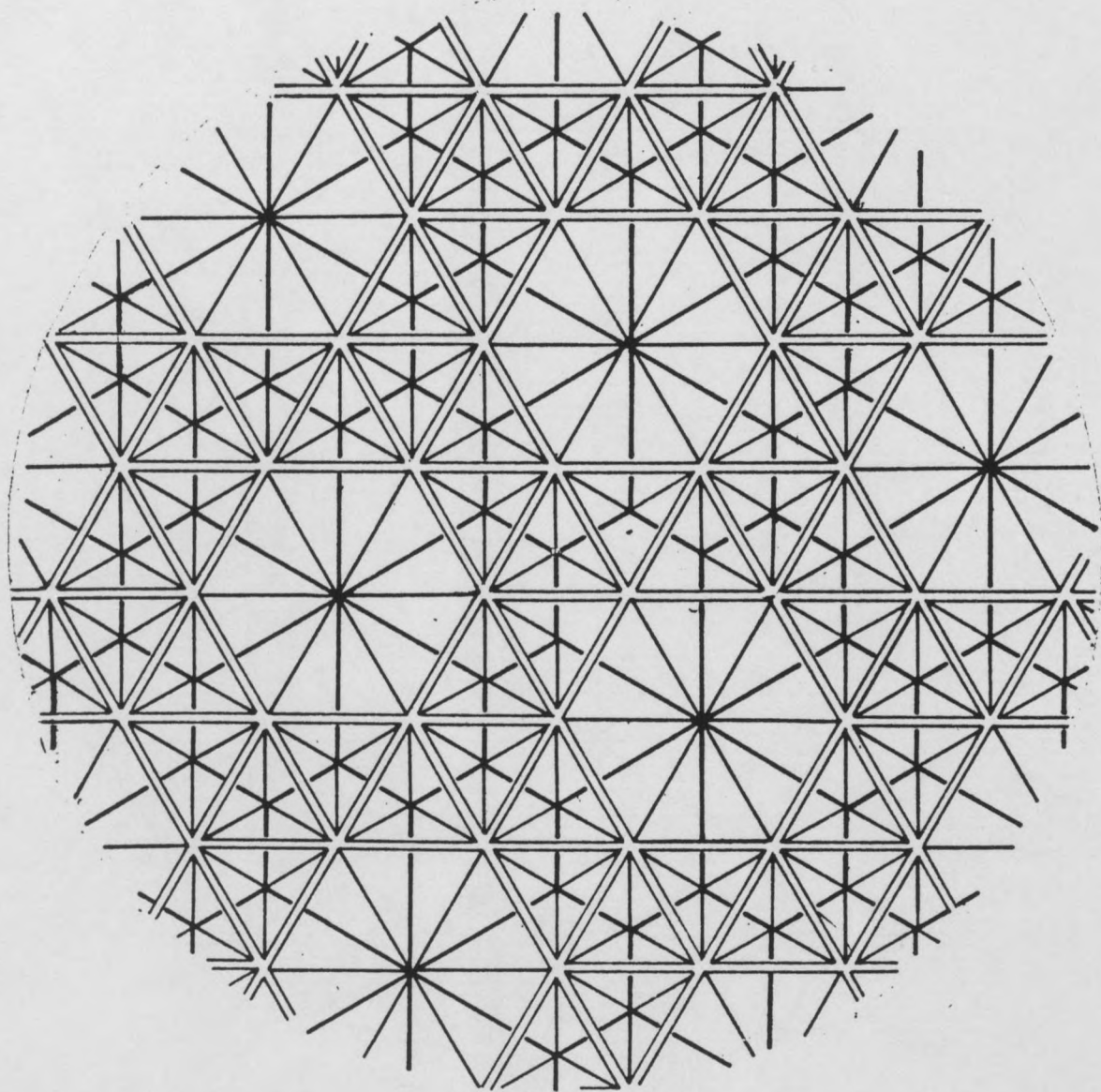
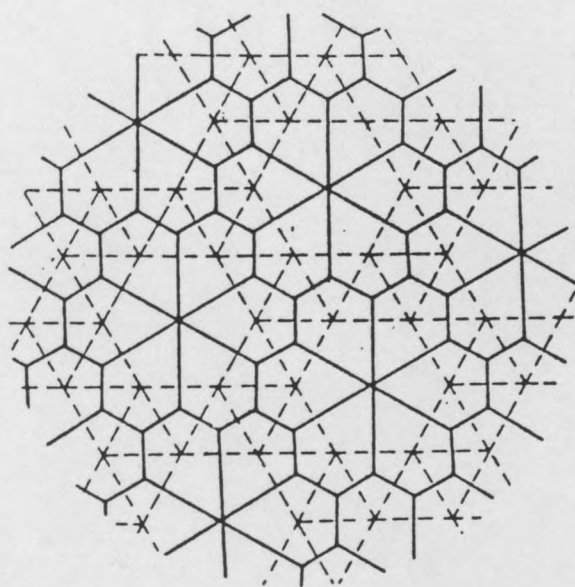
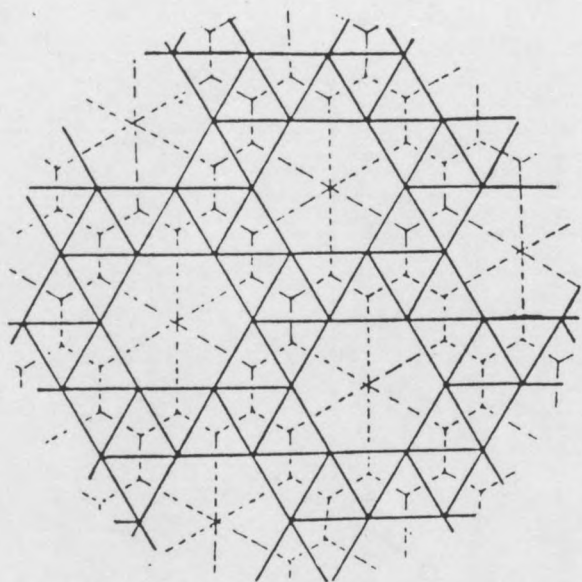




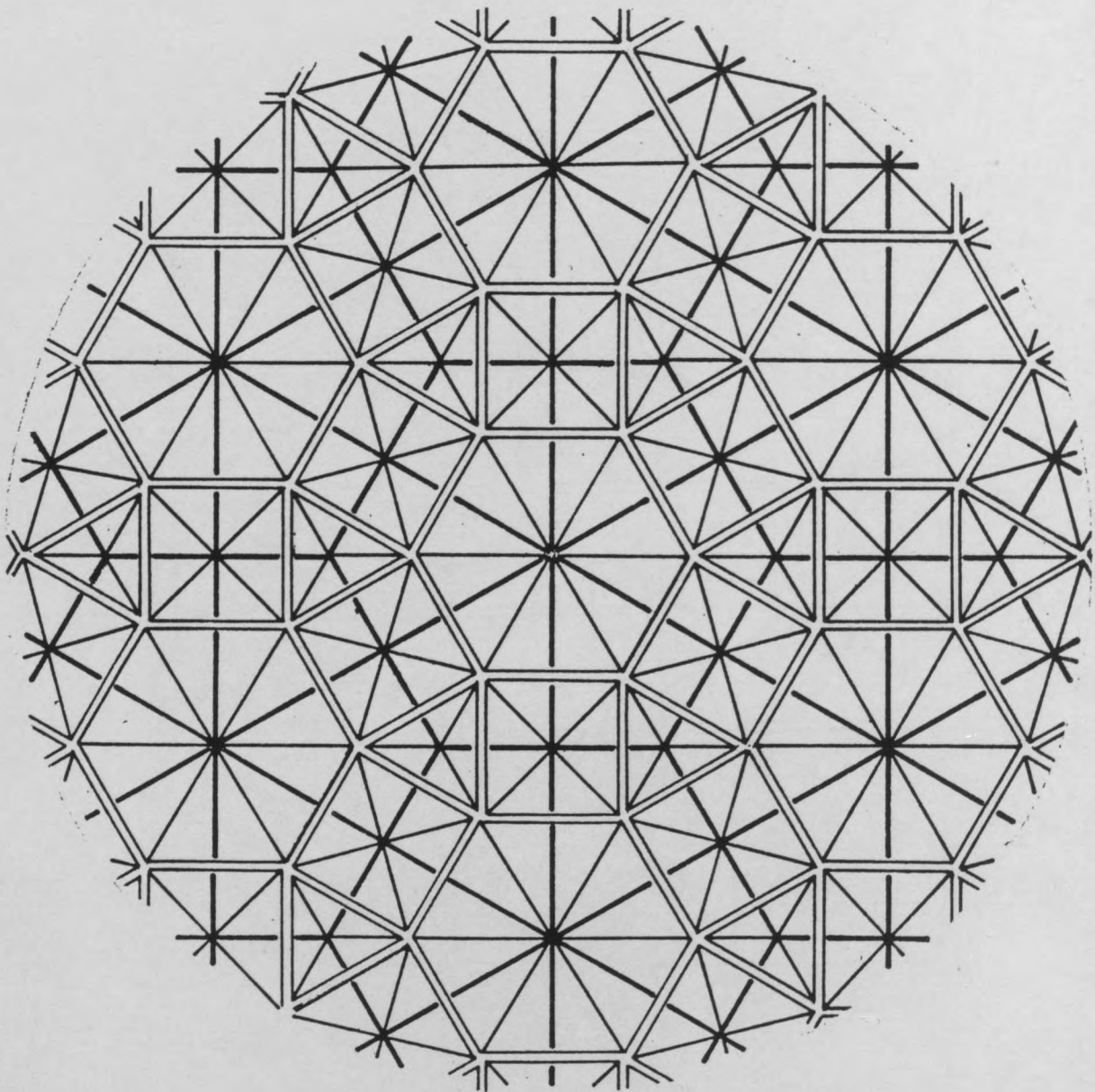
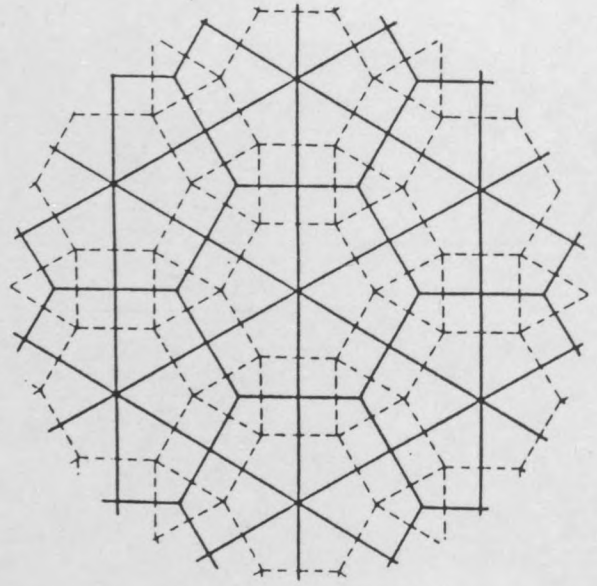
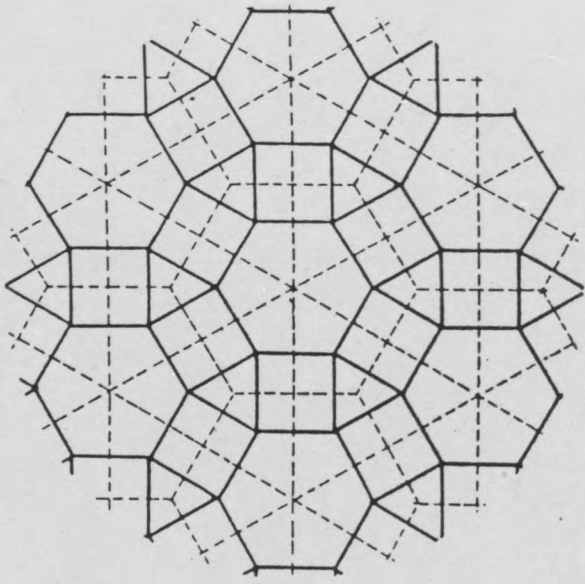
5



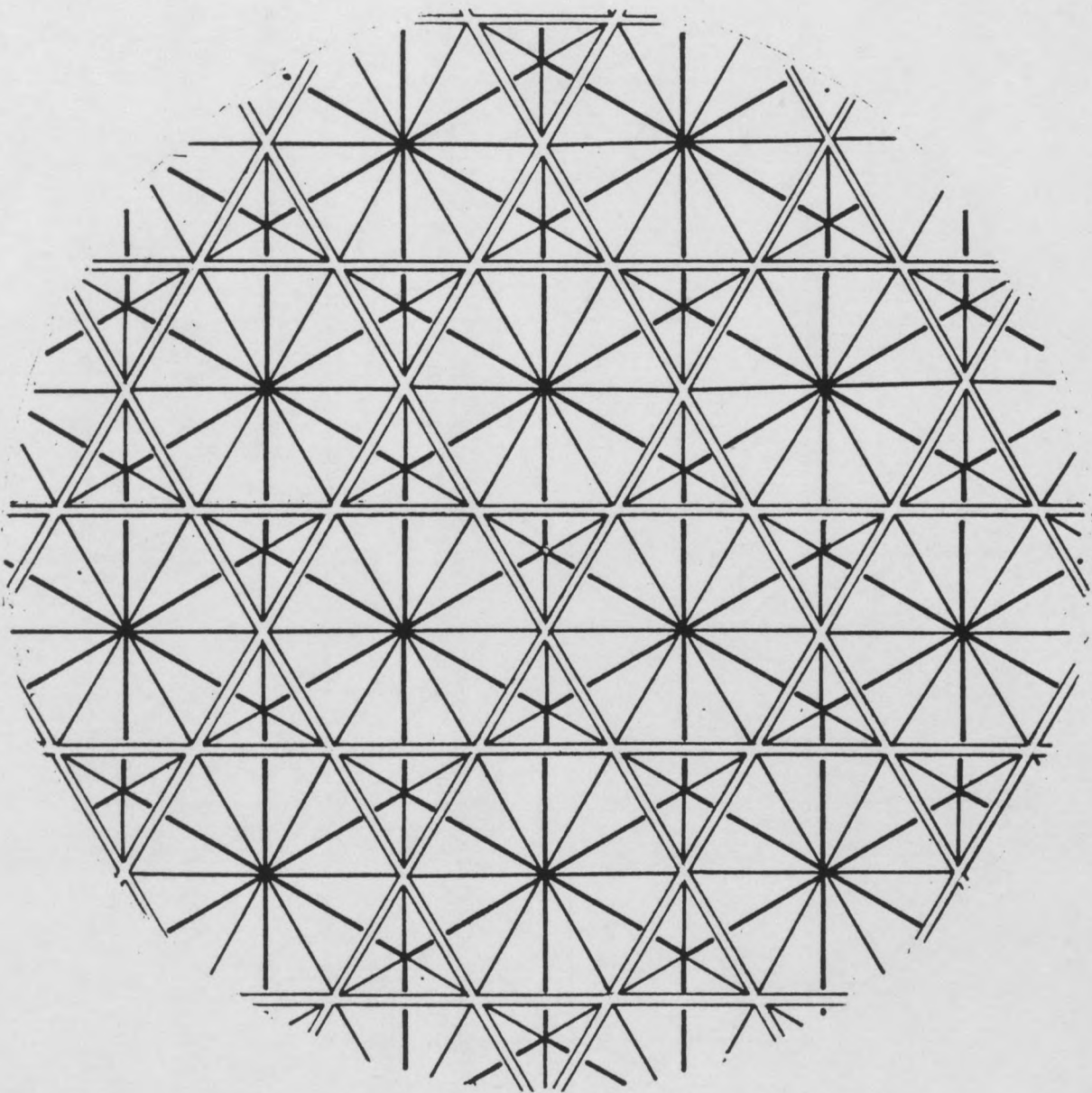
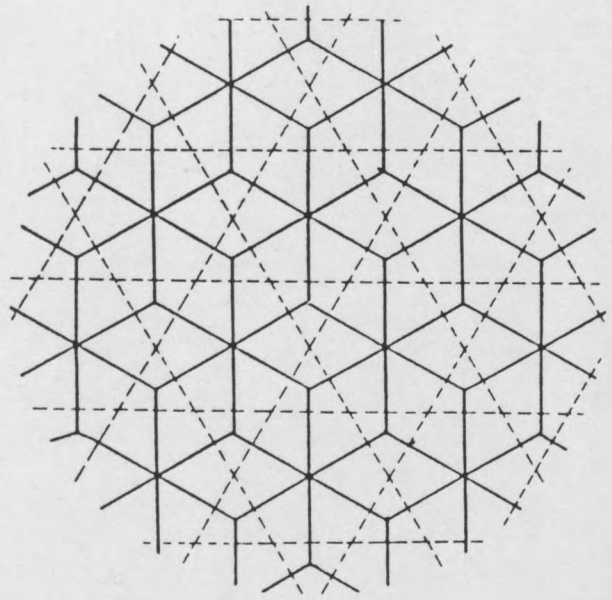
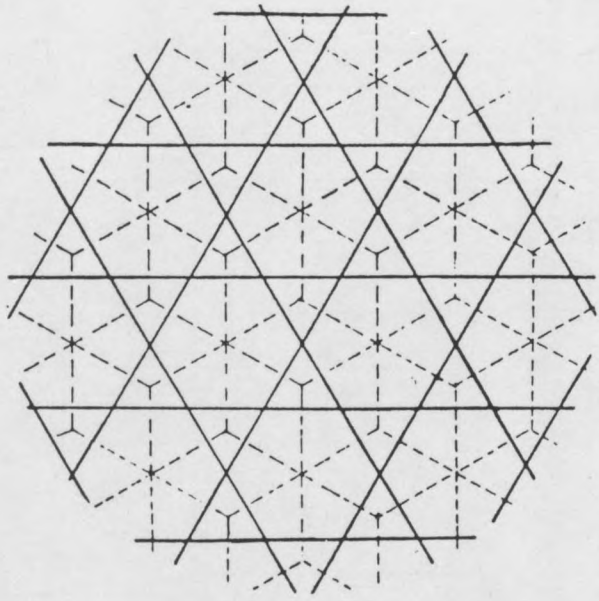
6



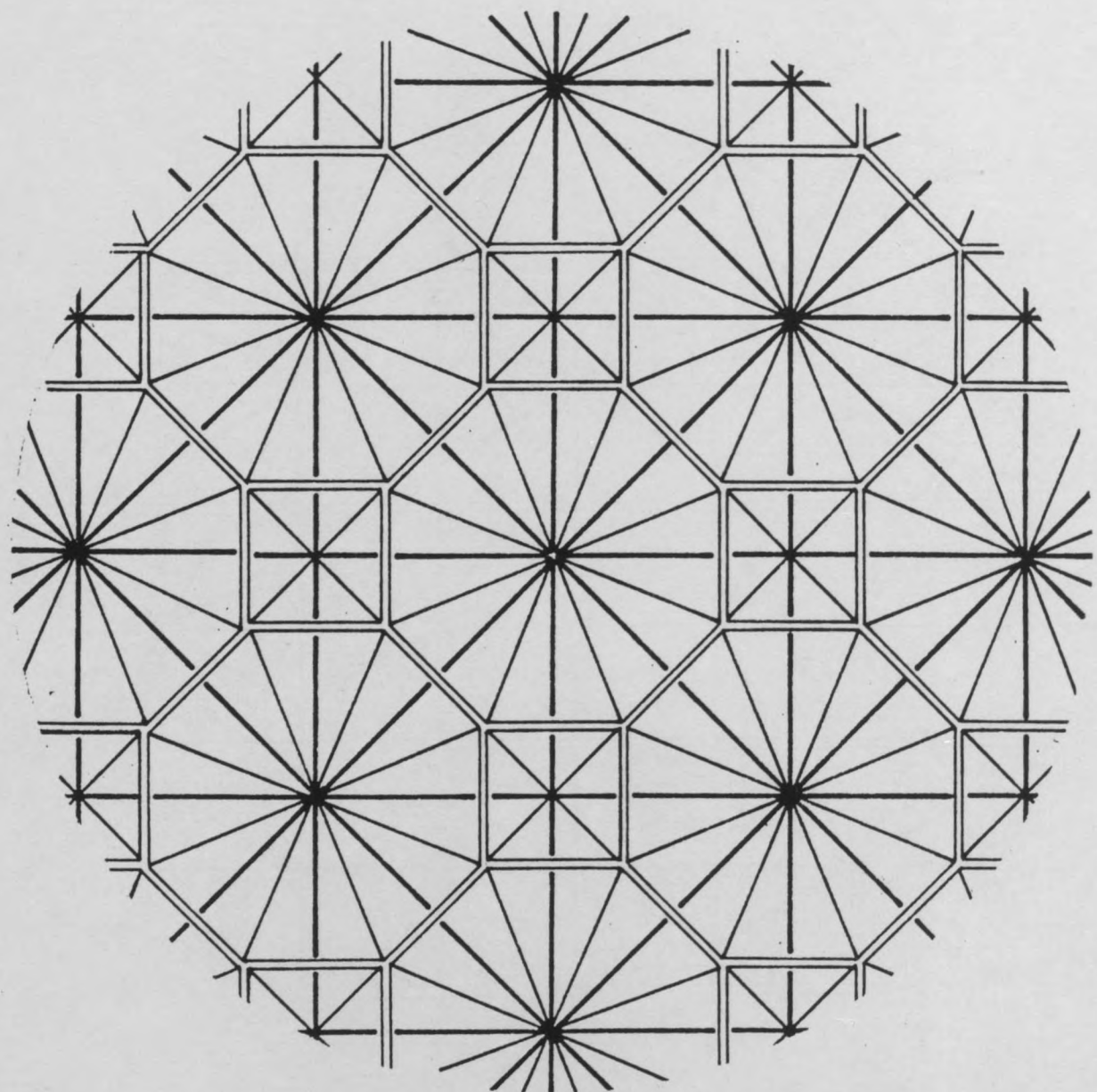
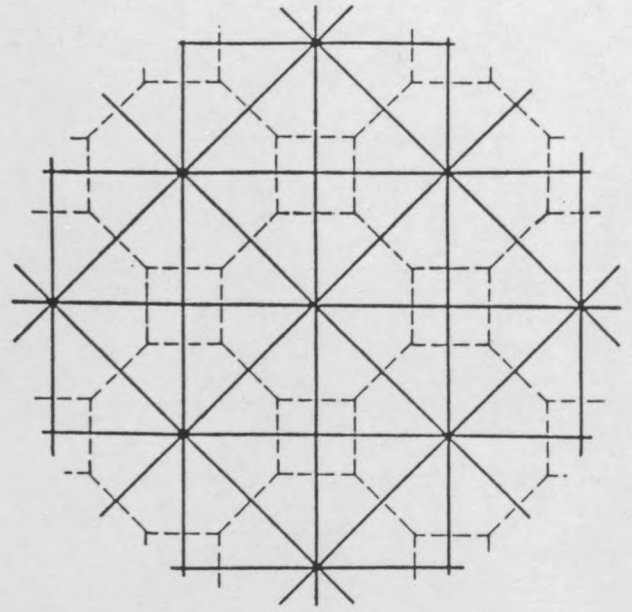
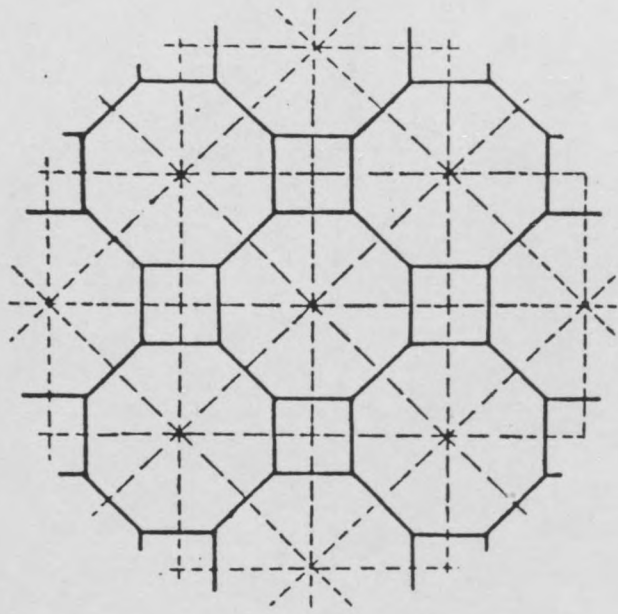
7

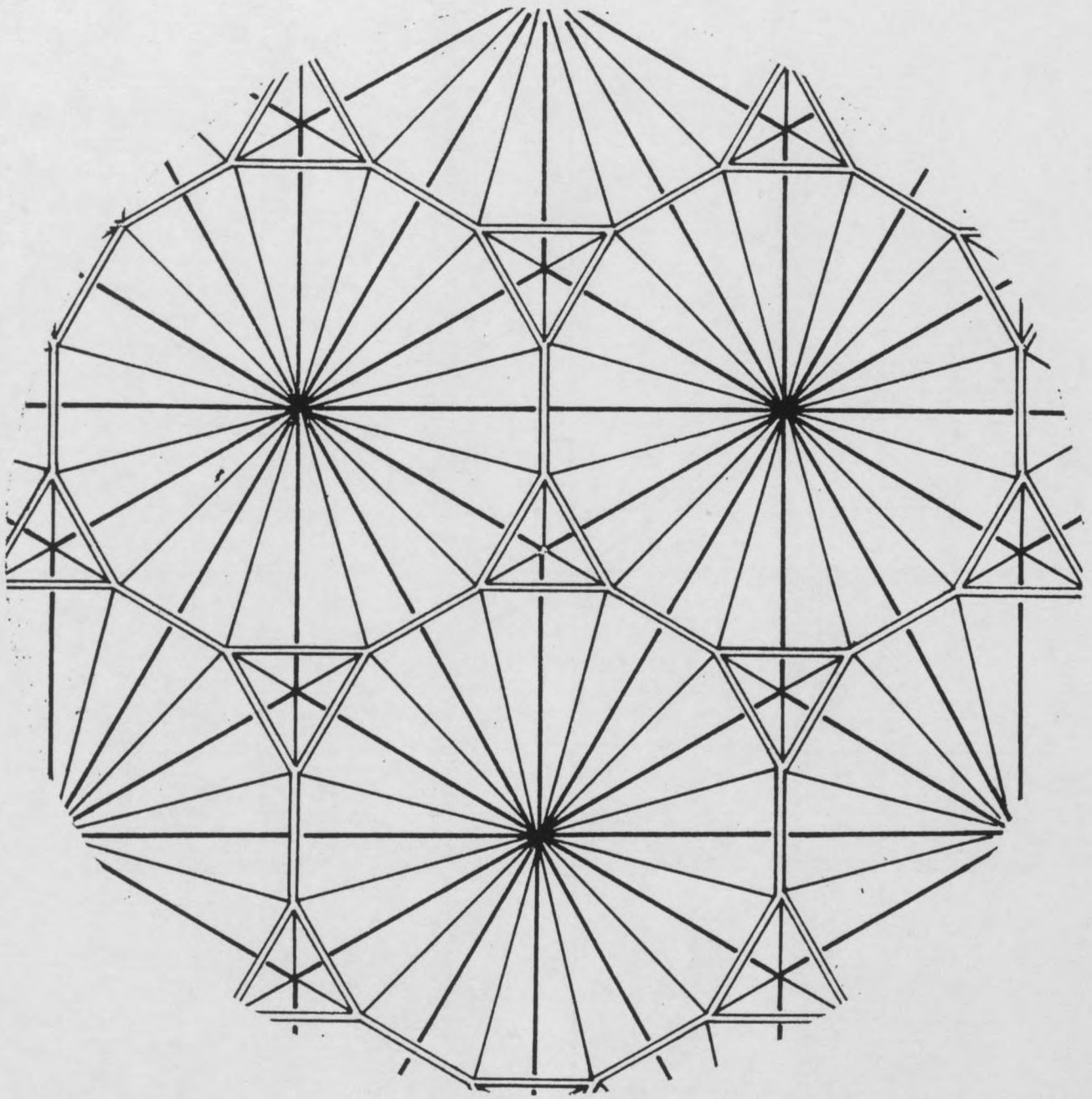
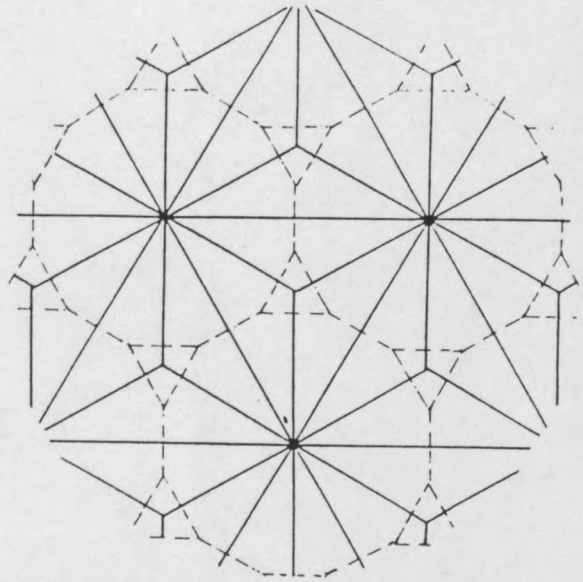
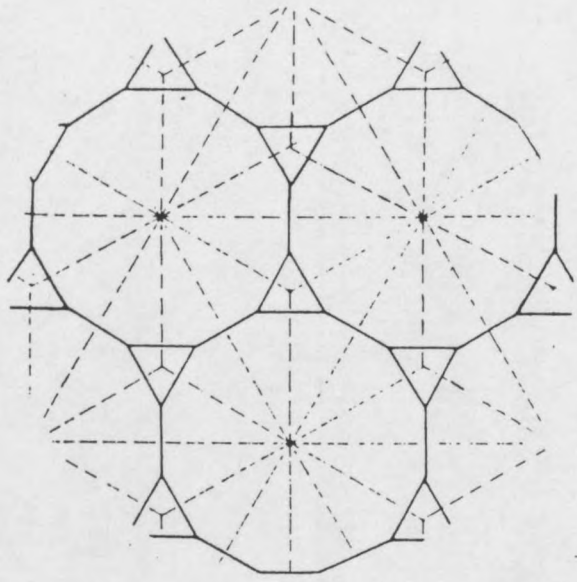


S

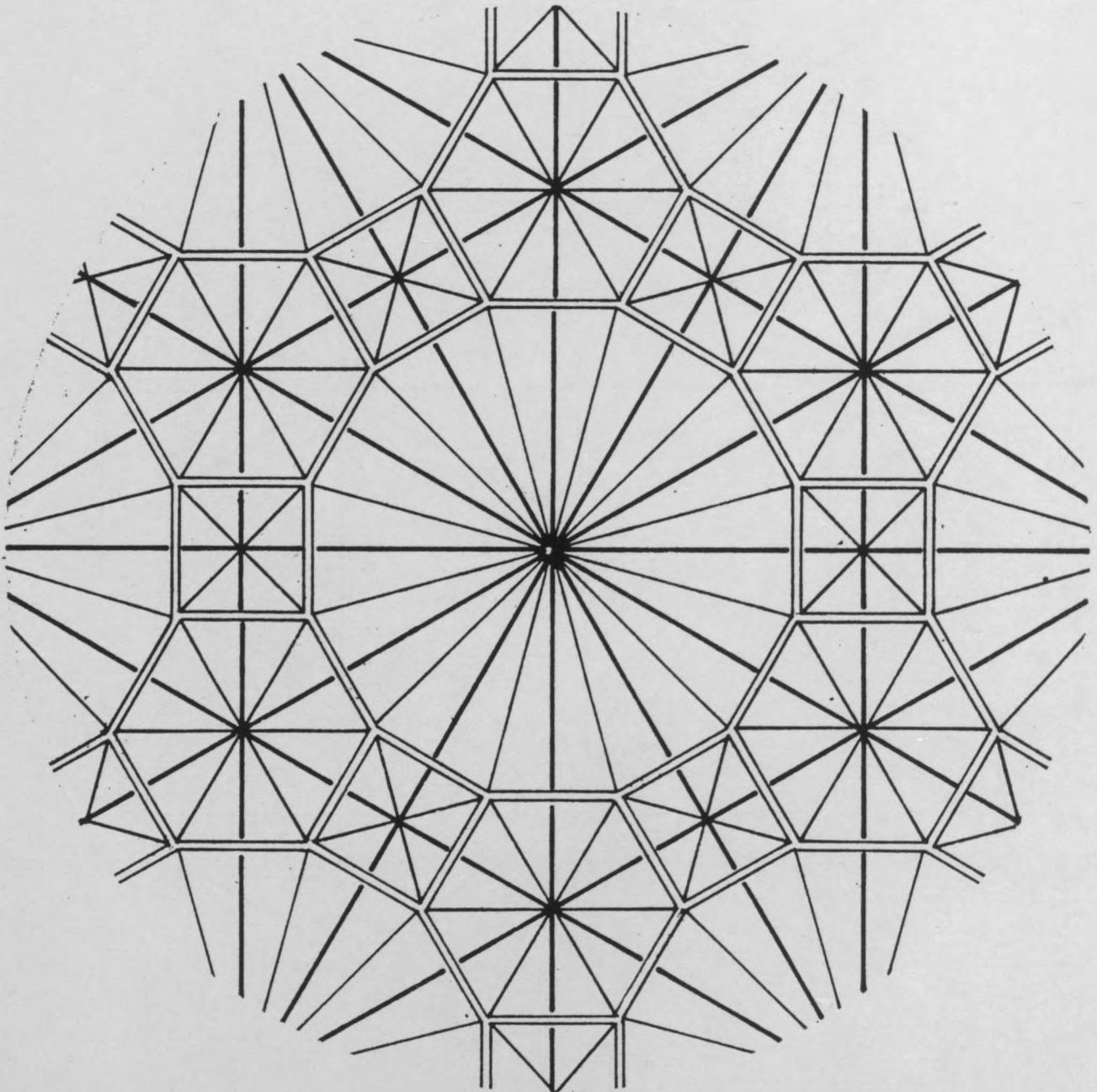
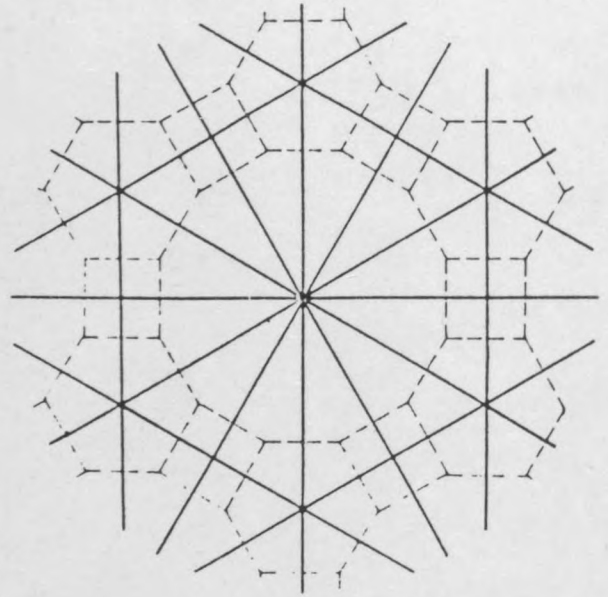
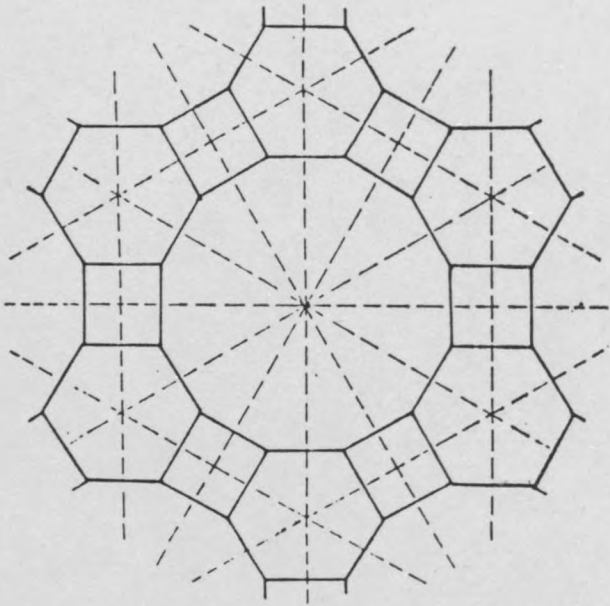


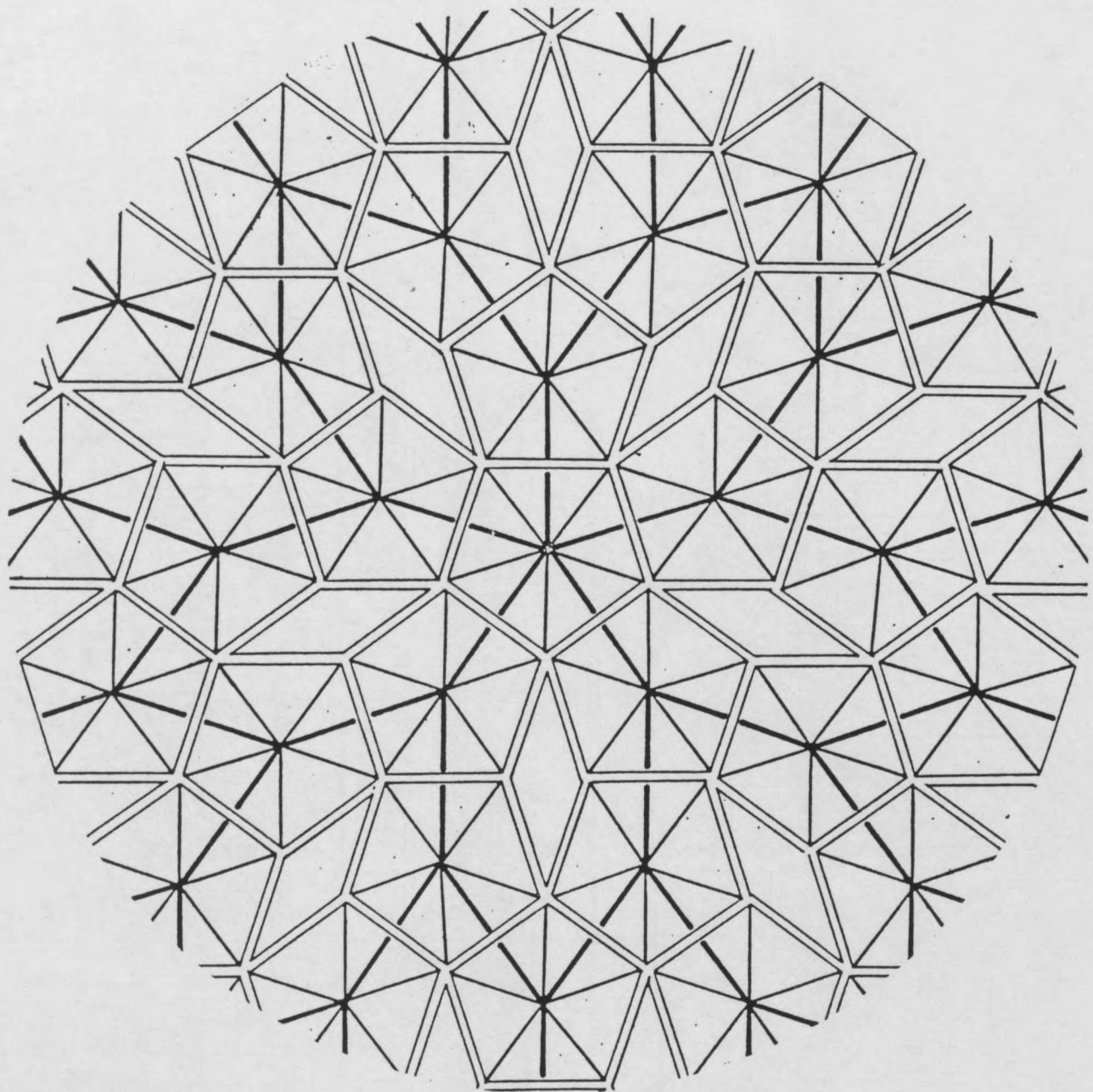
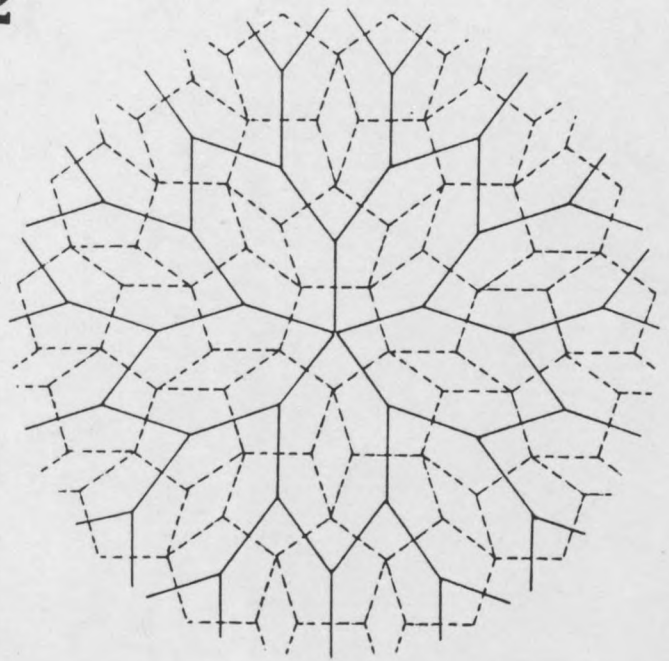
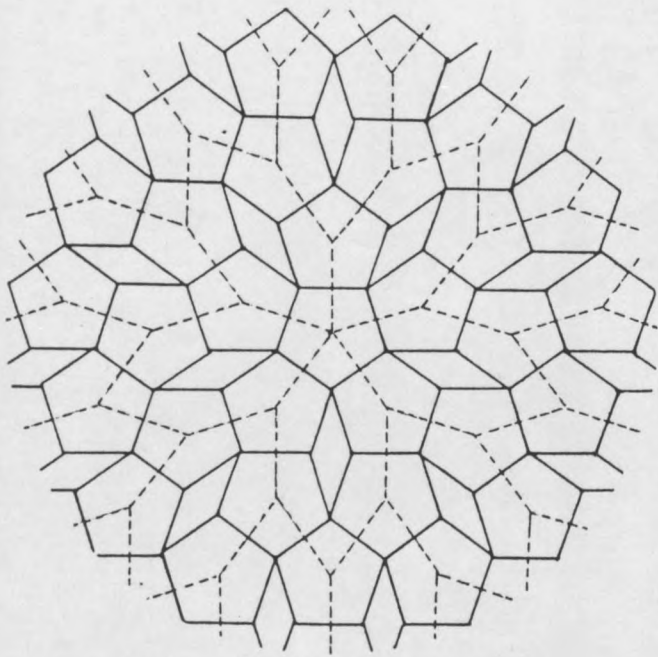
9



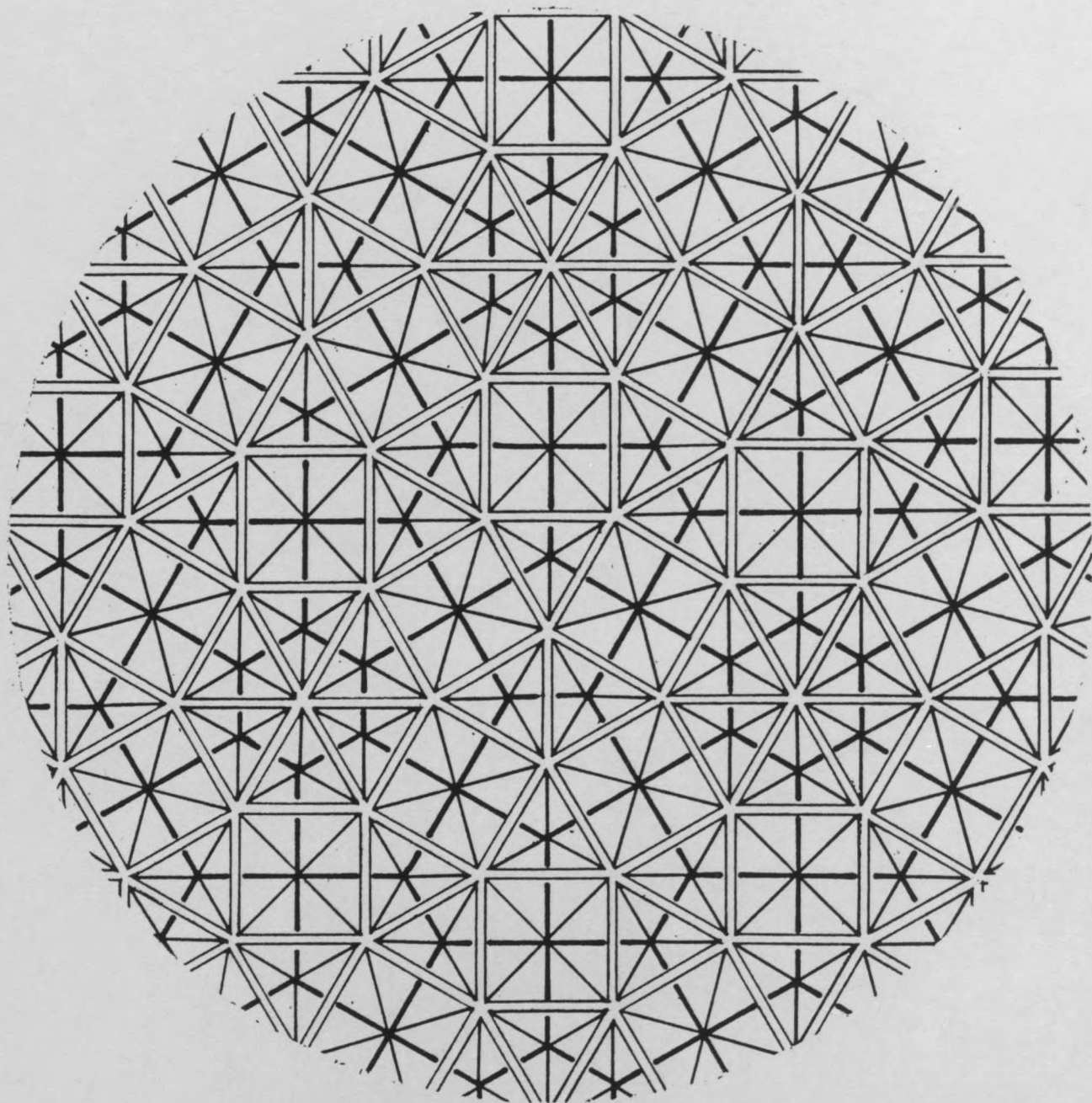
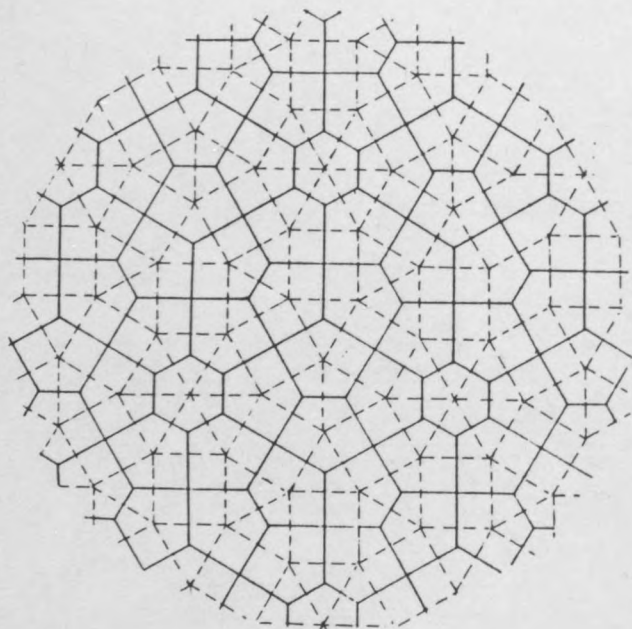
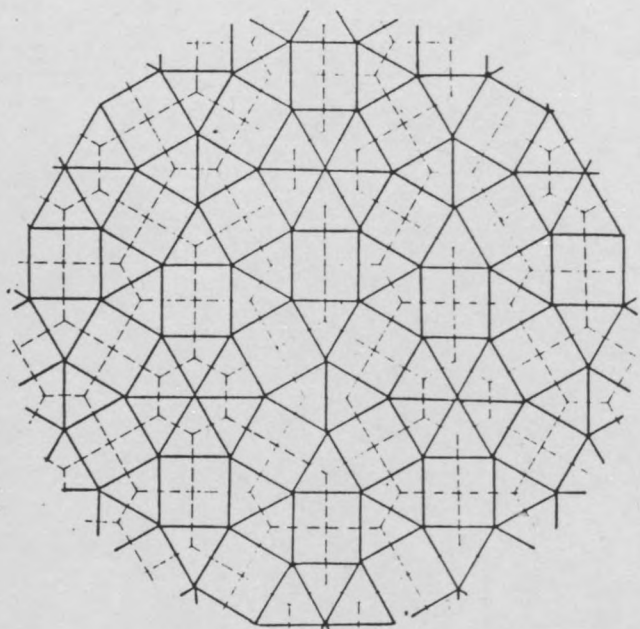


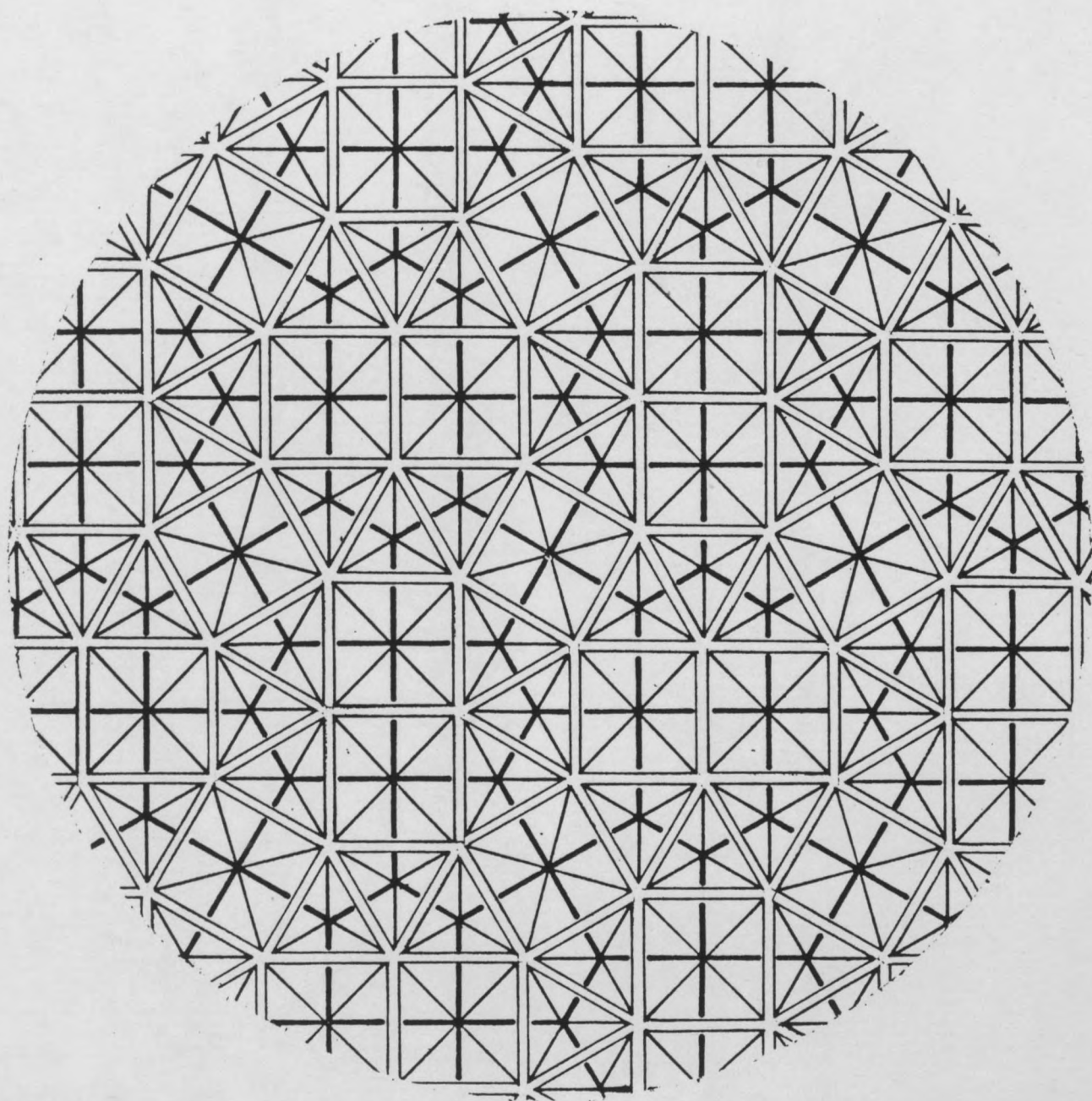
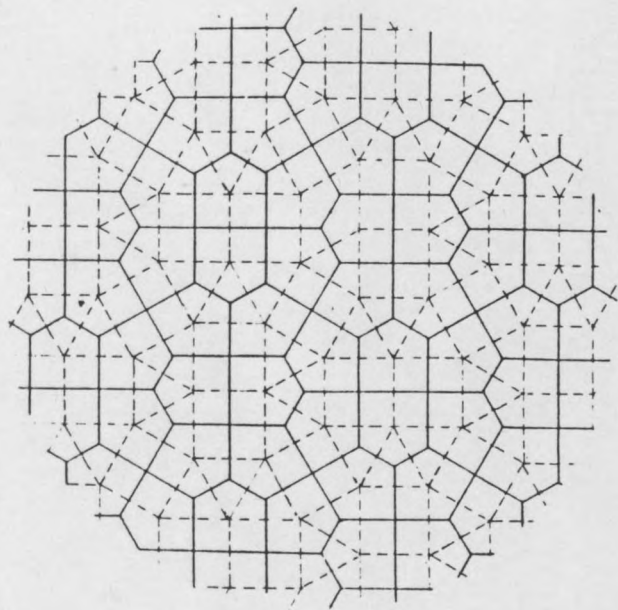
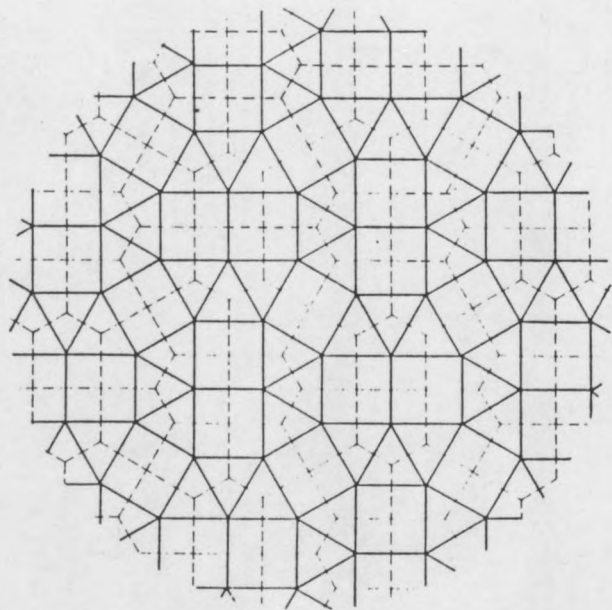
11

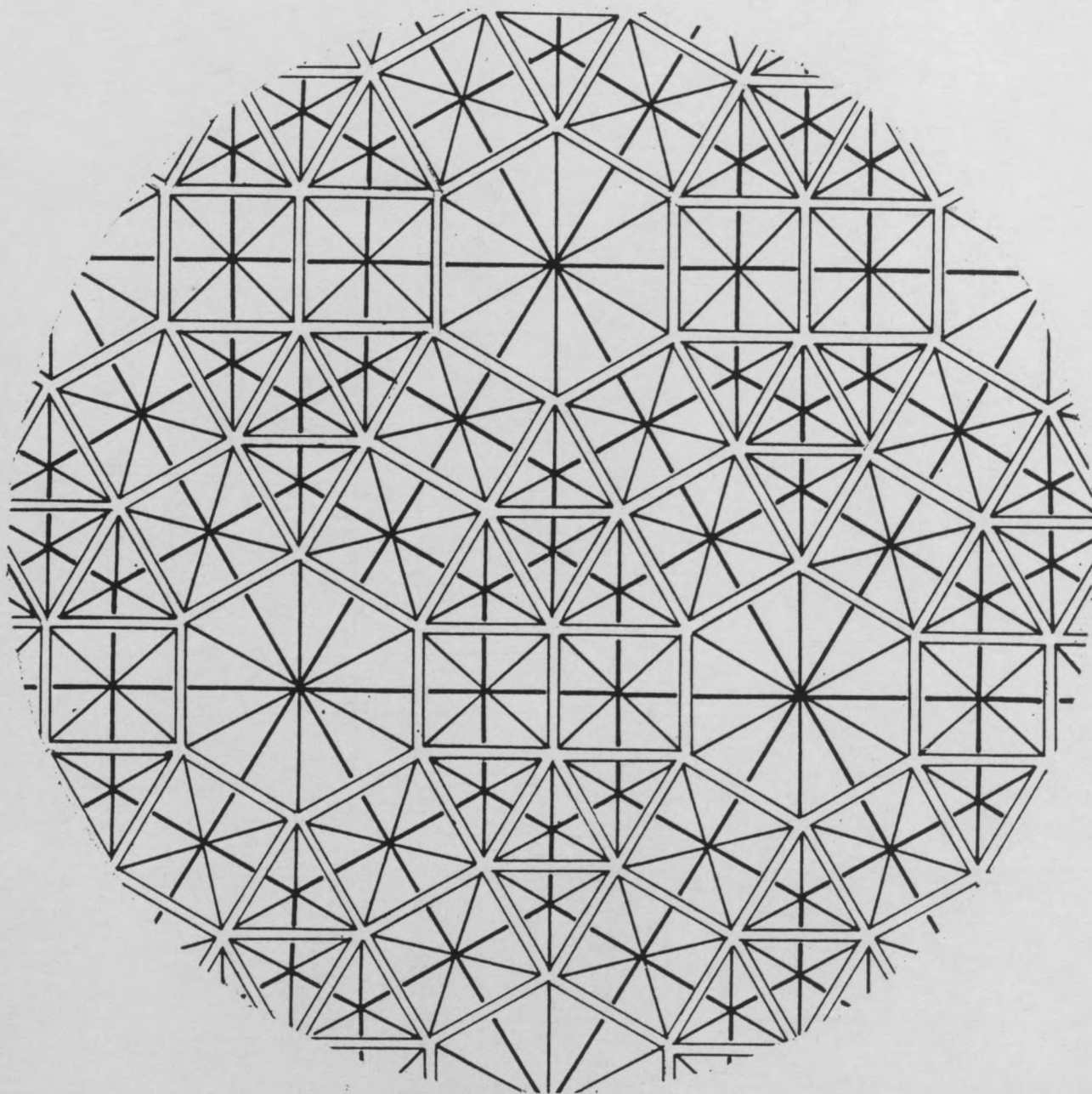
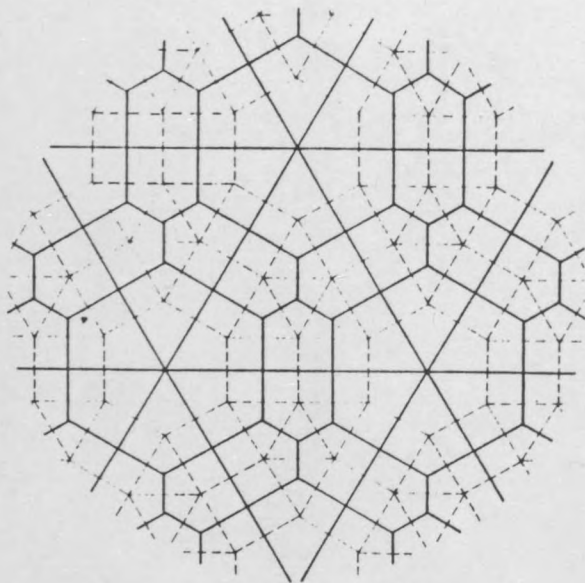
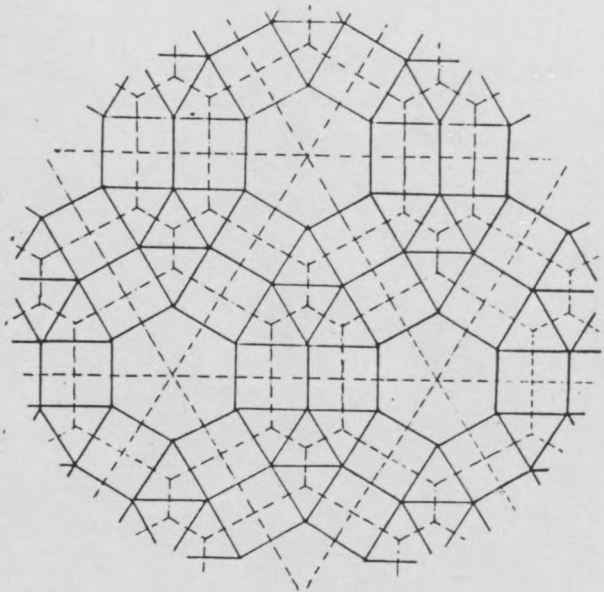


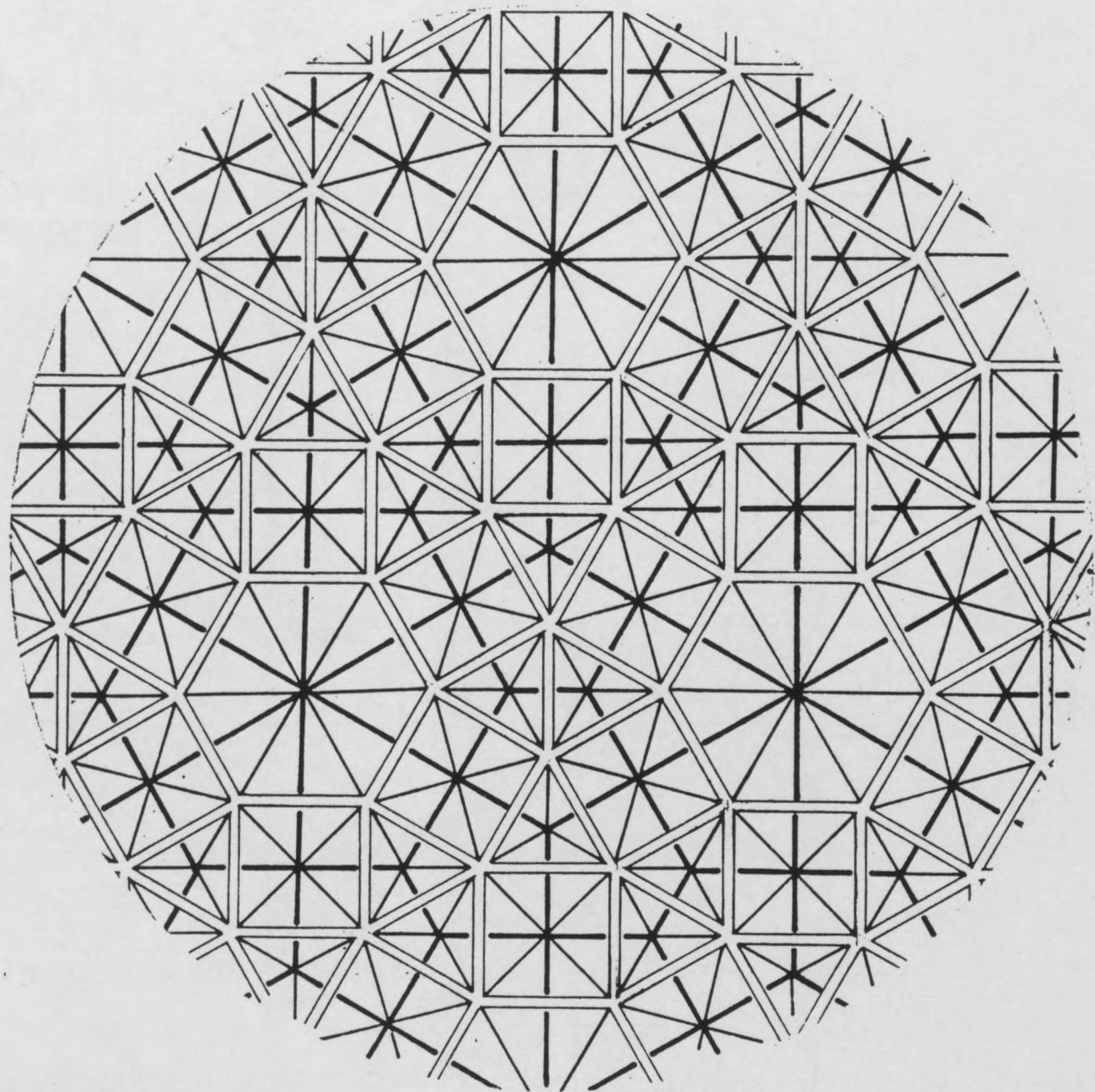
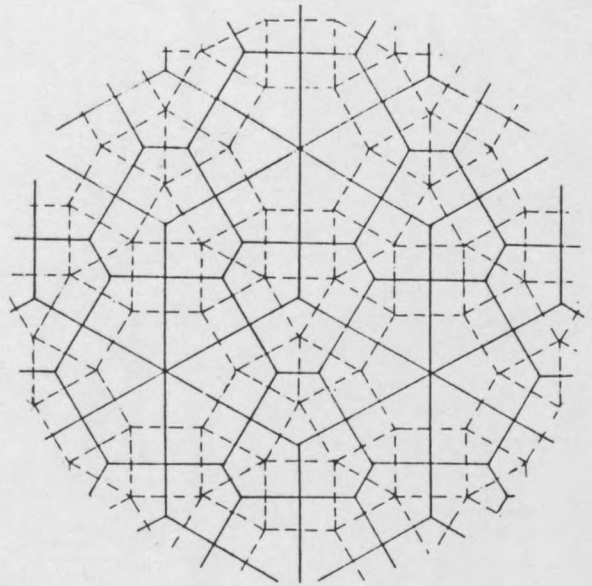
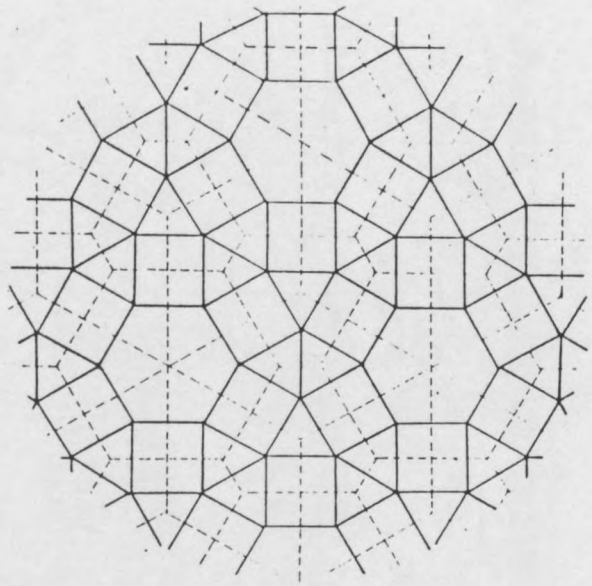


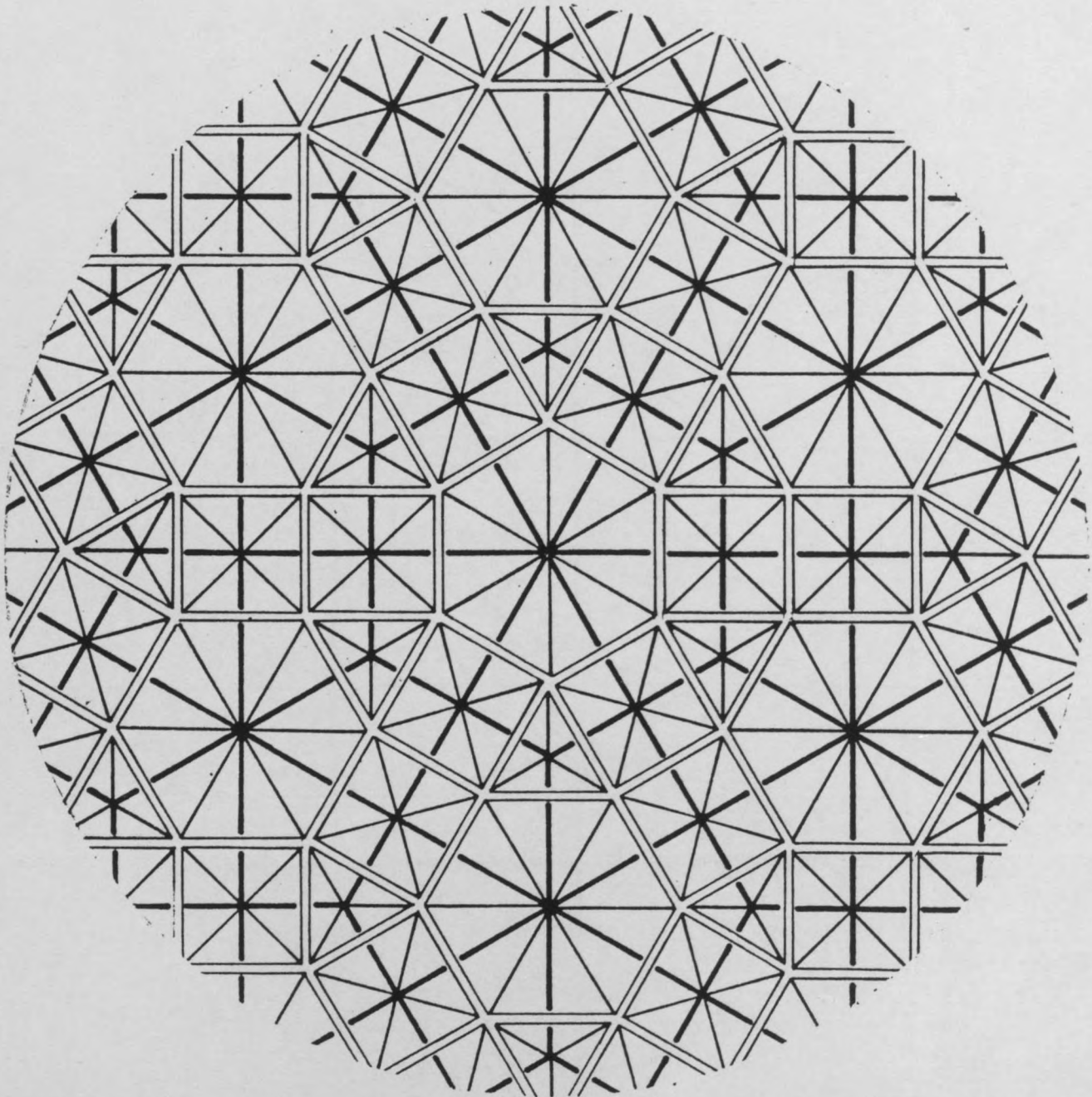
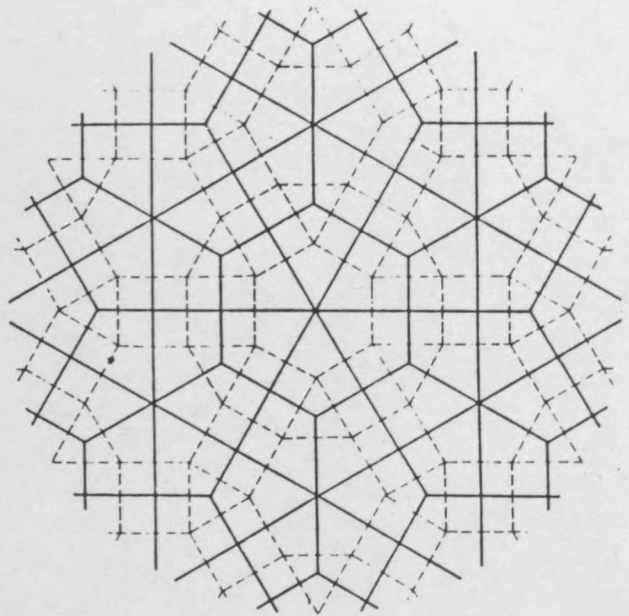
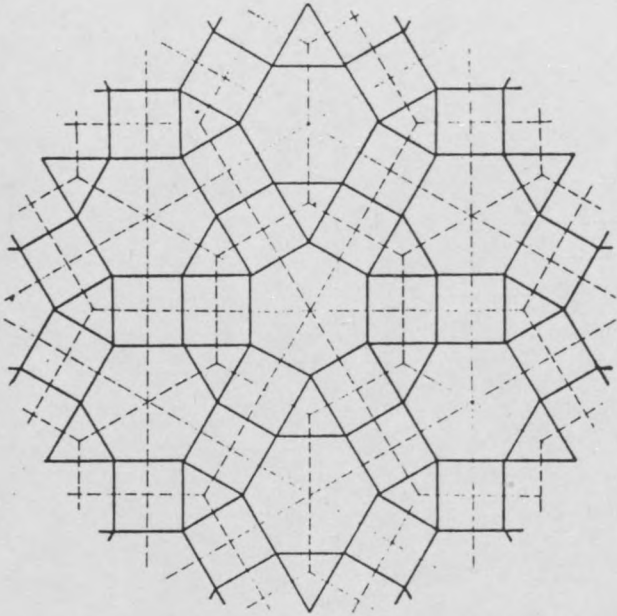
15

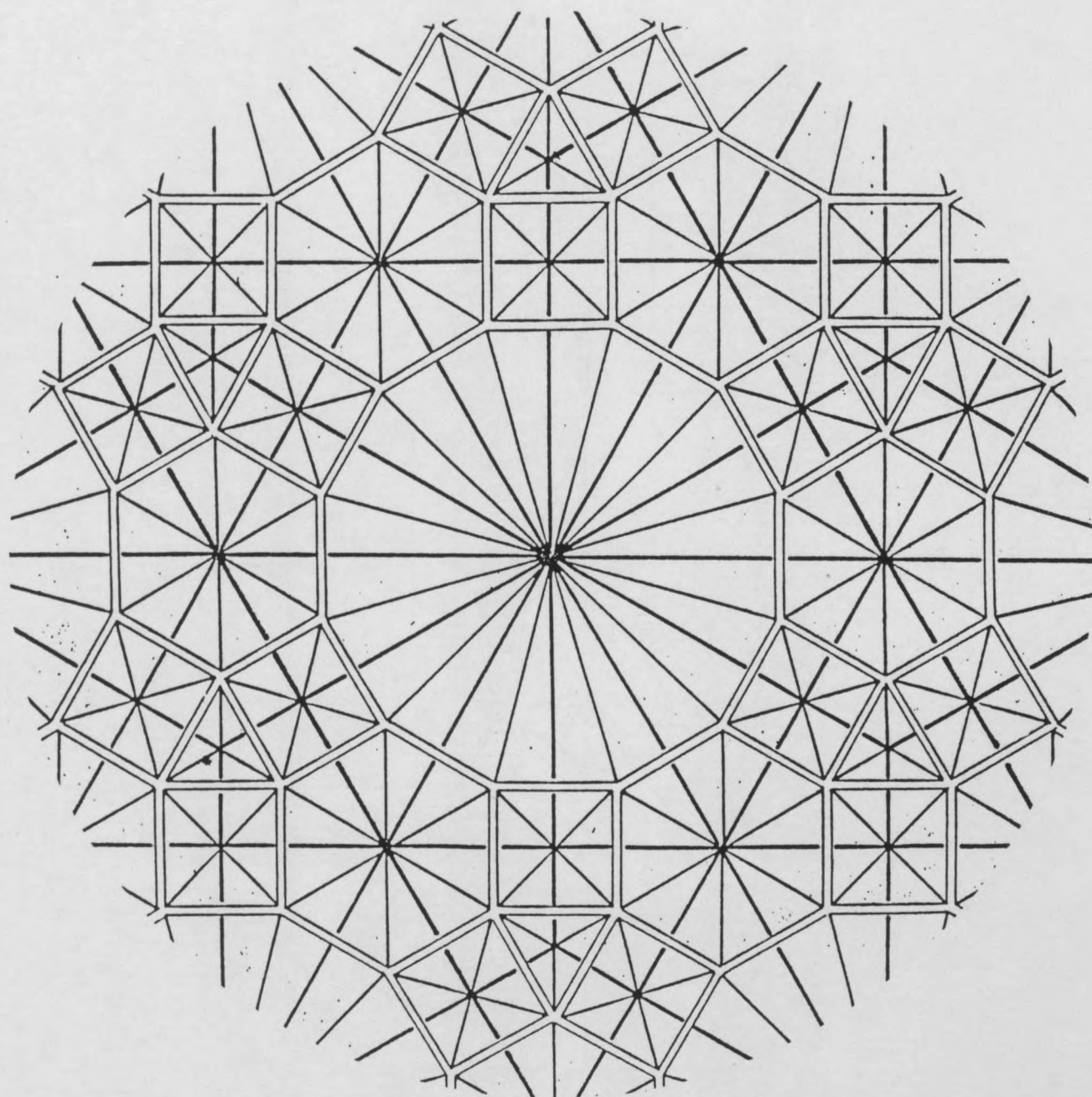
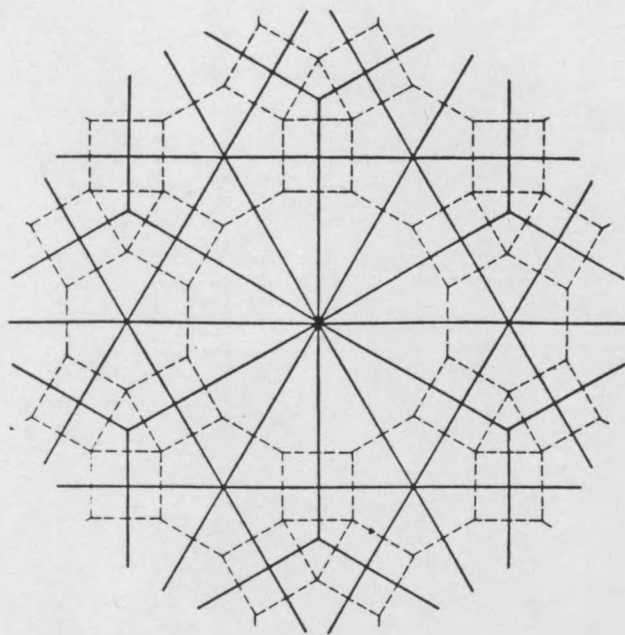
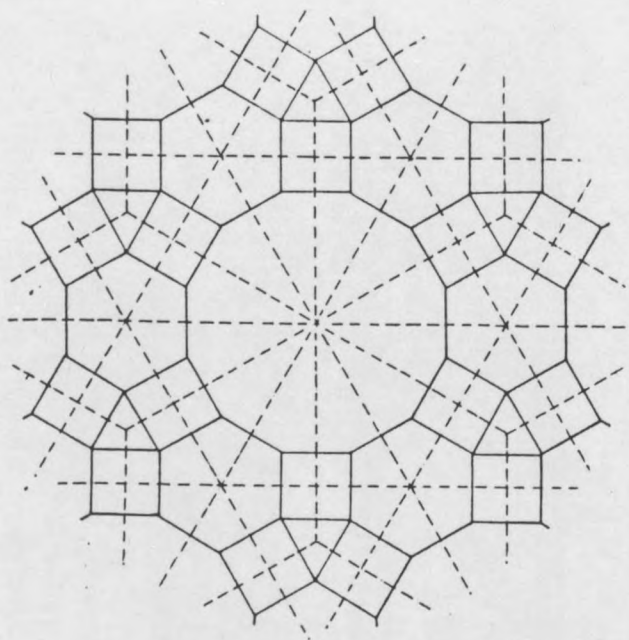


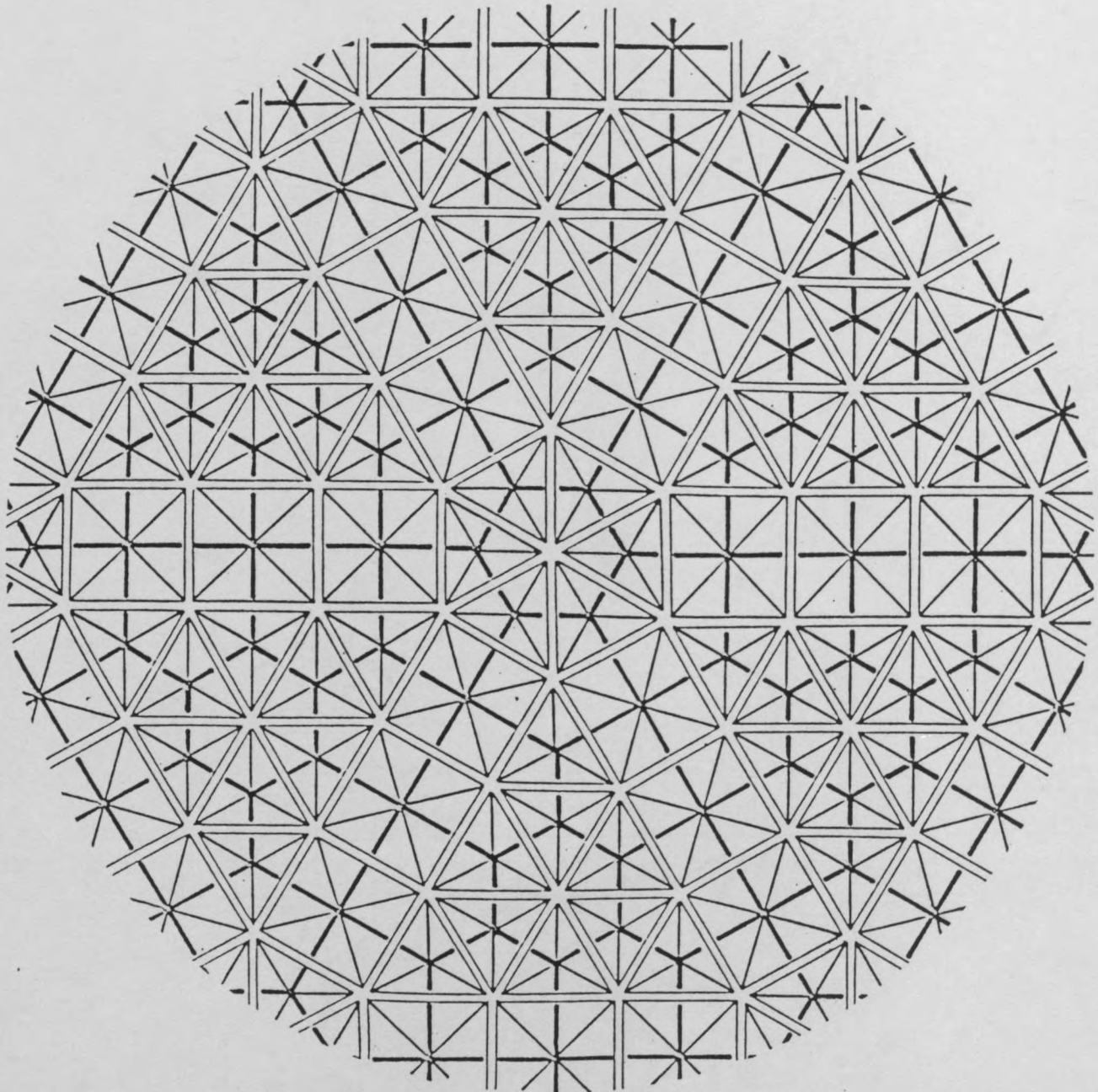
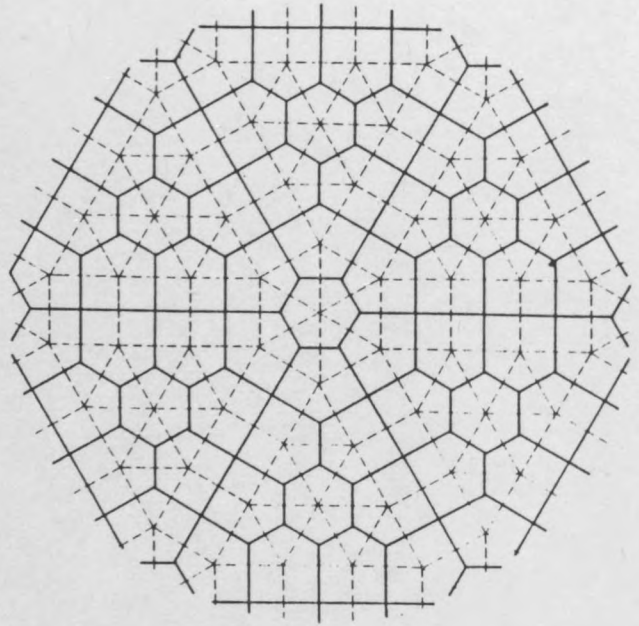
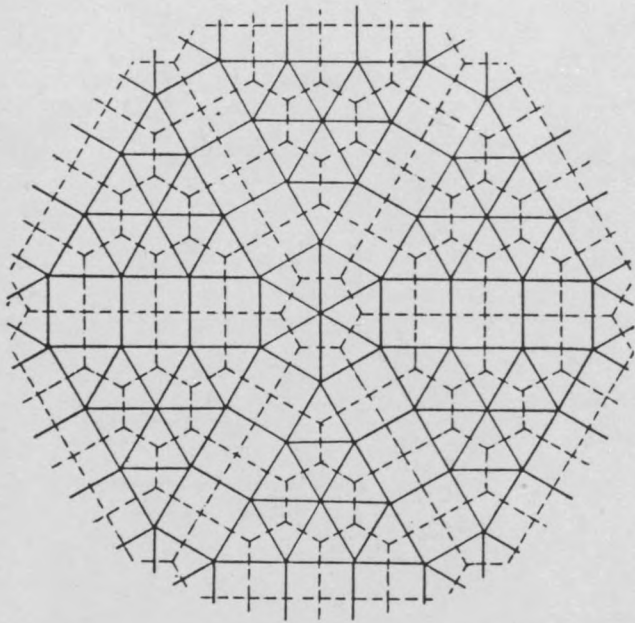


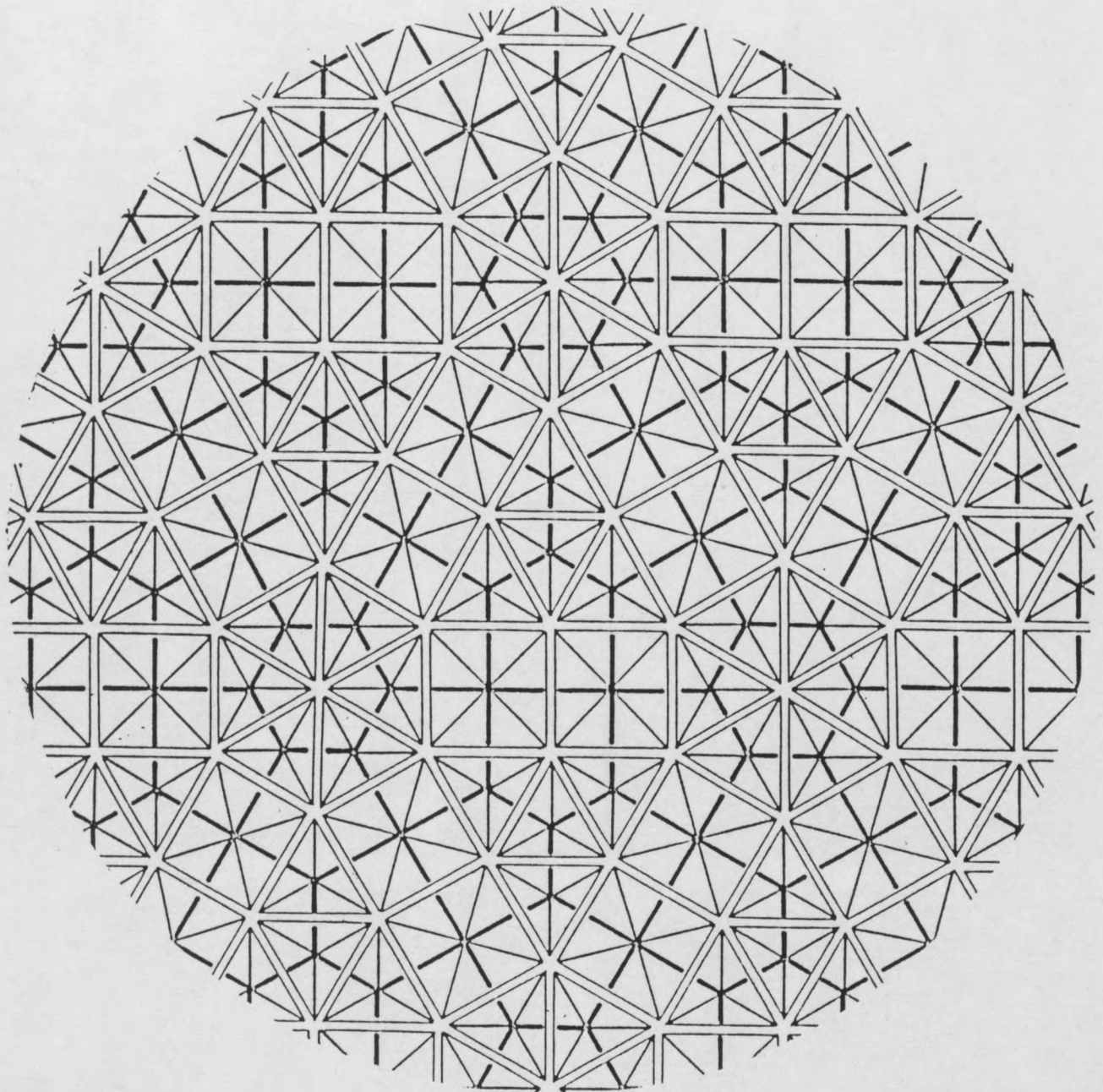
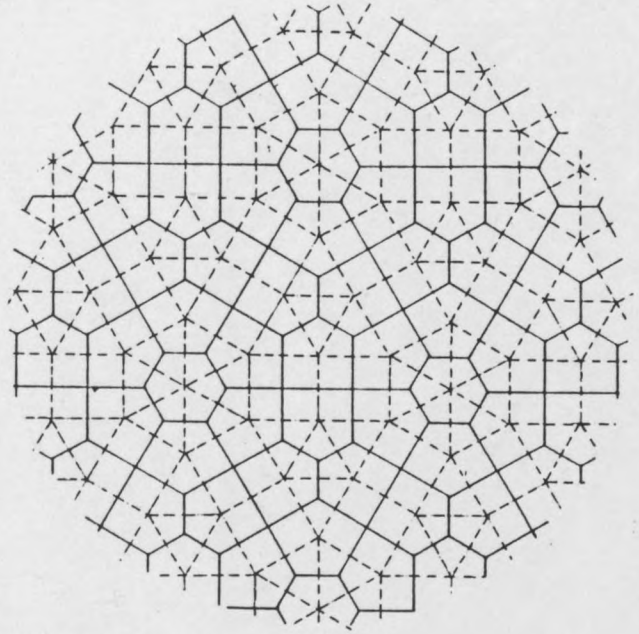
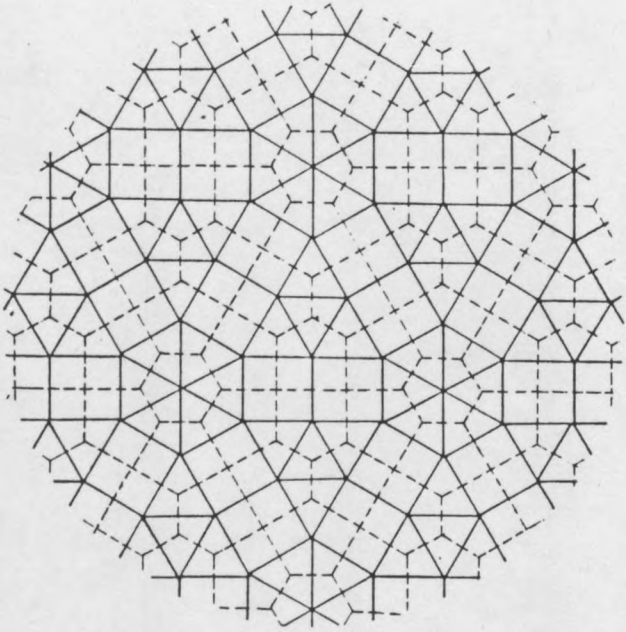


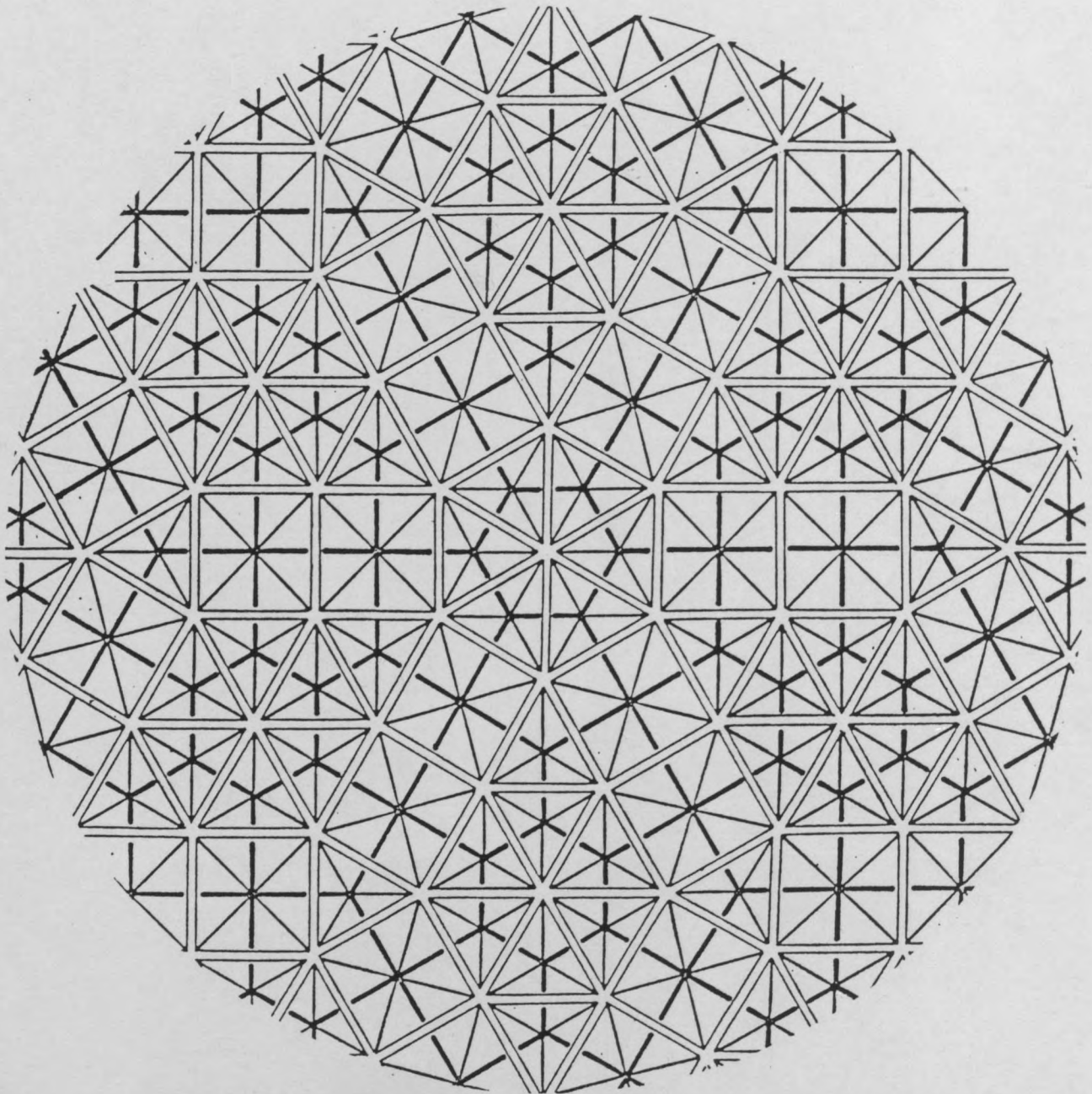
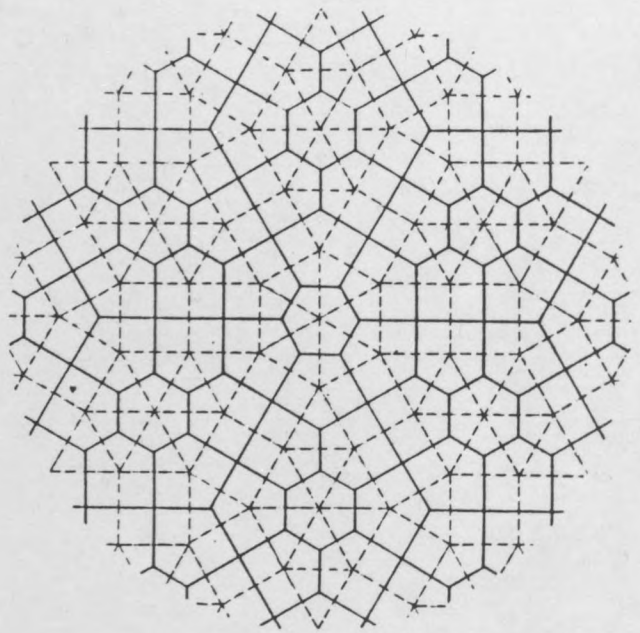
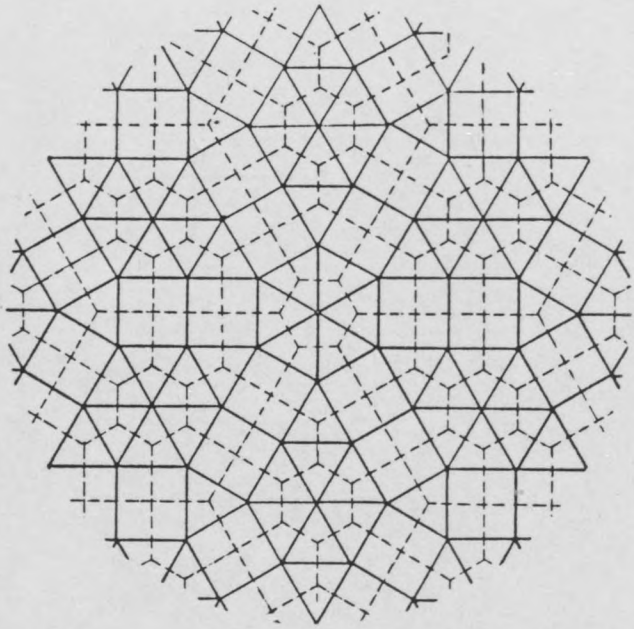


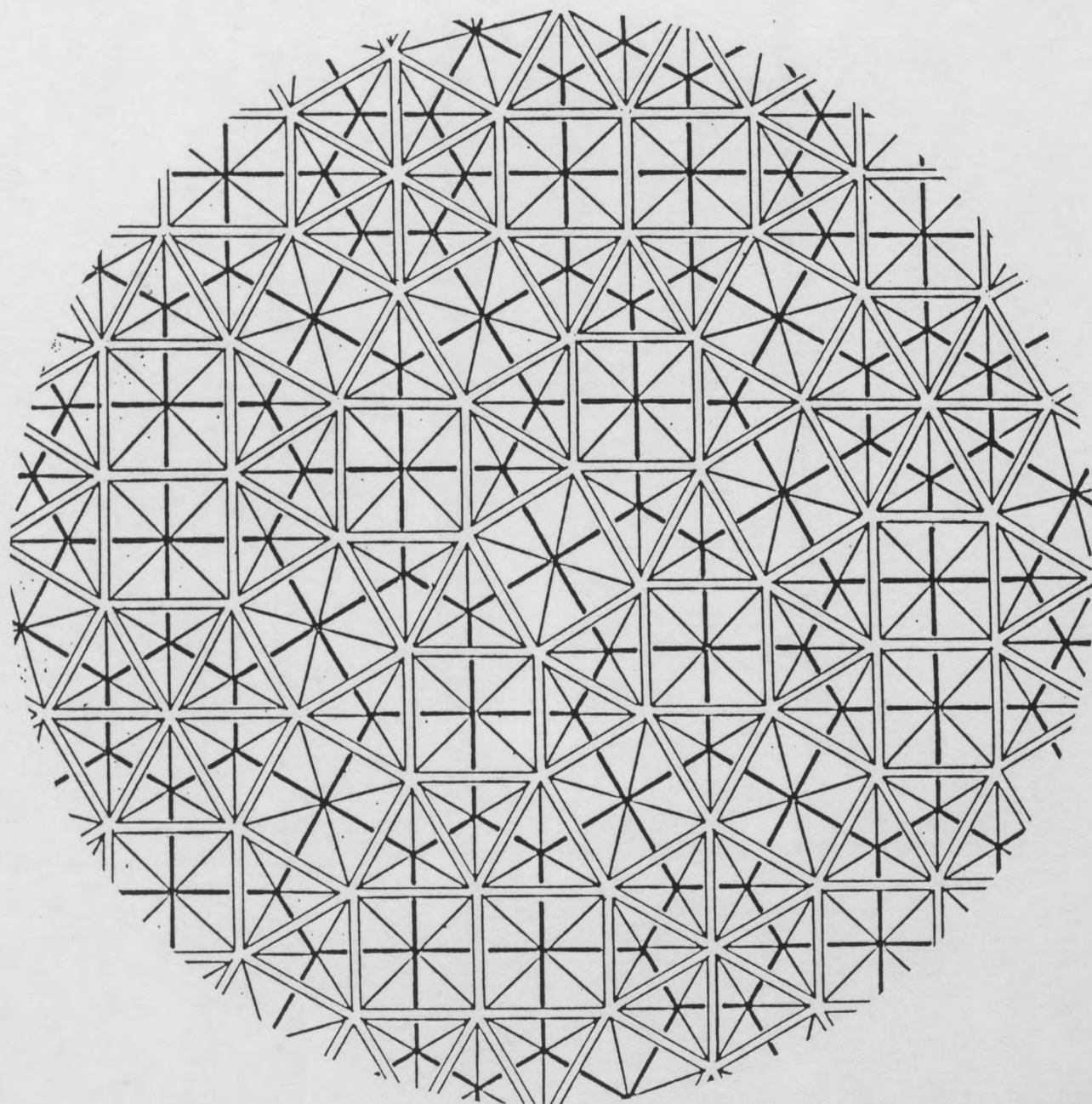
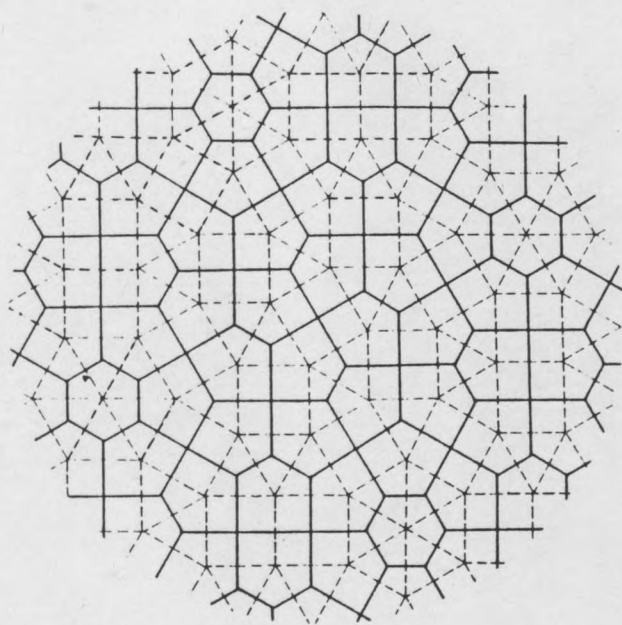
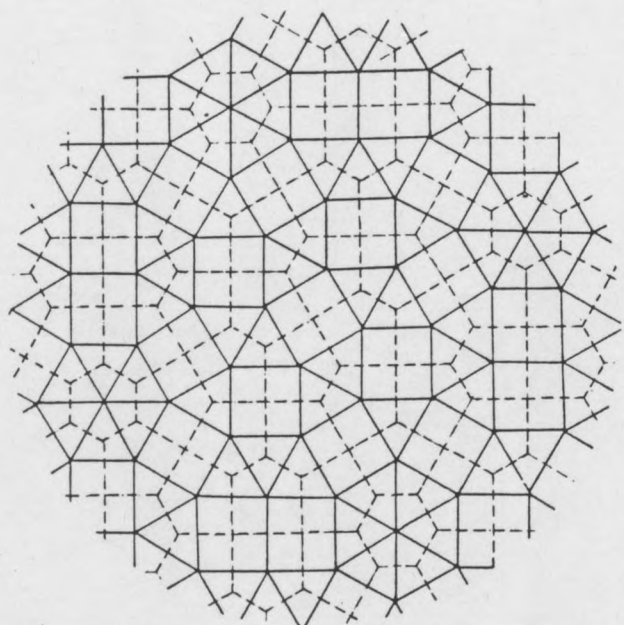


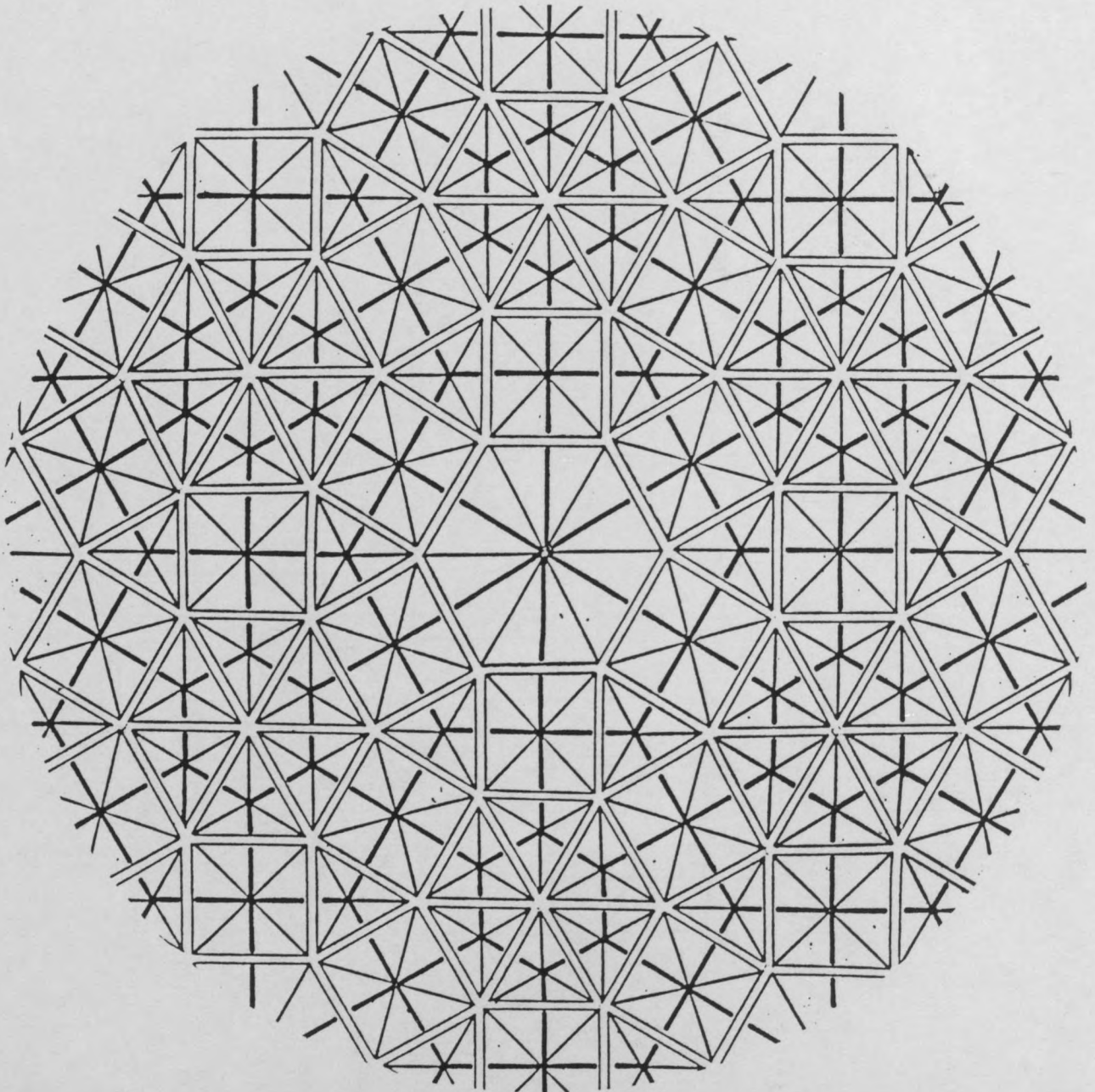
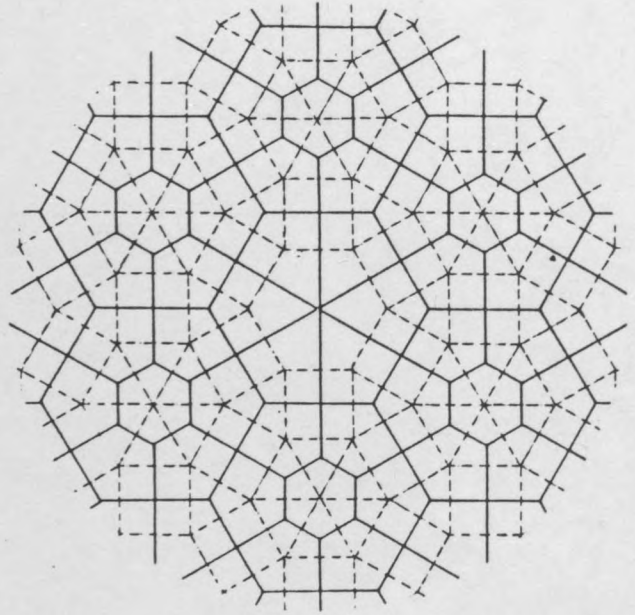
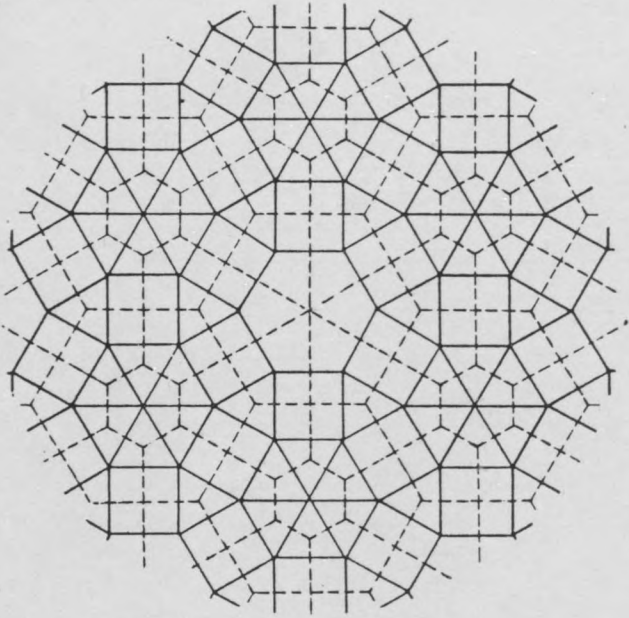


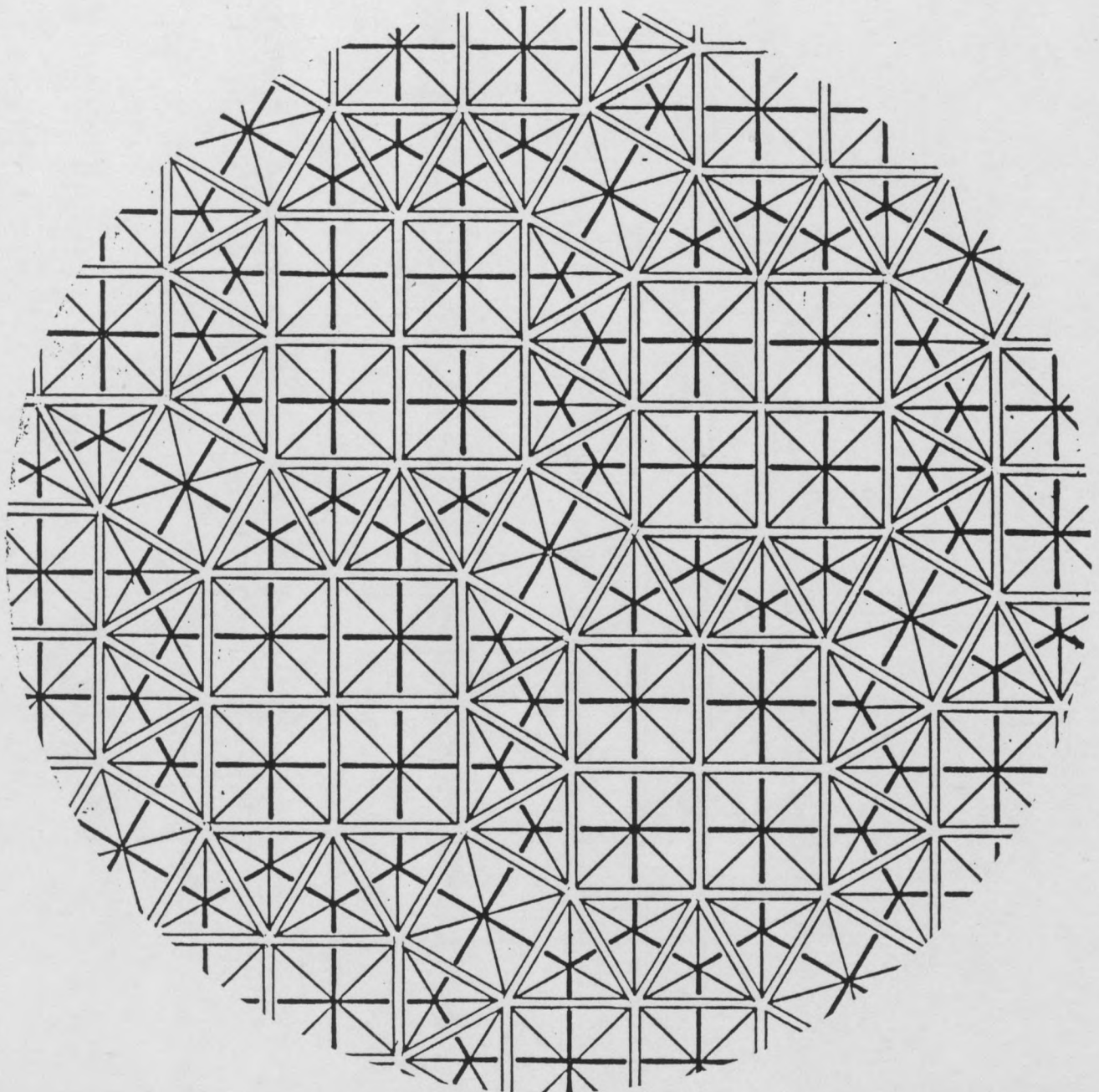
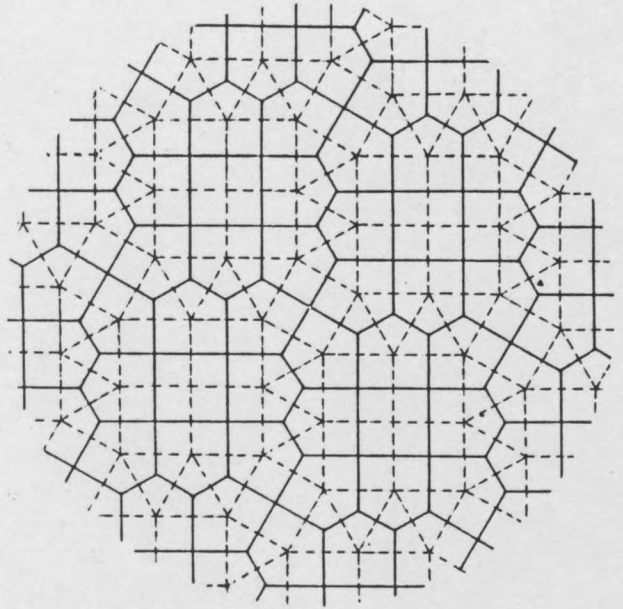
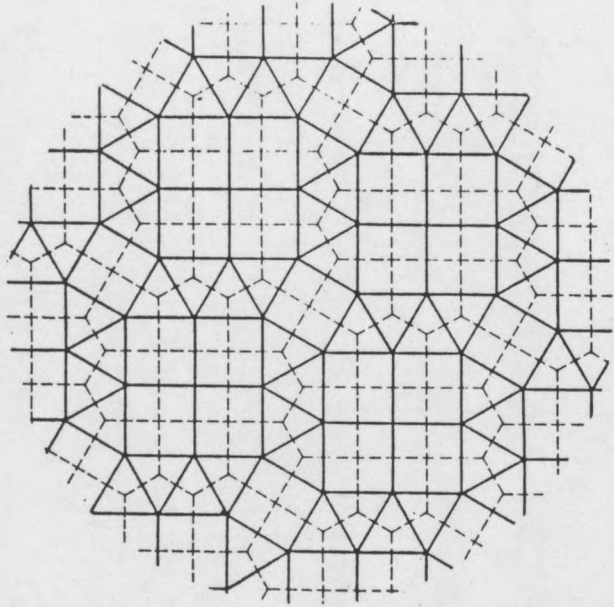


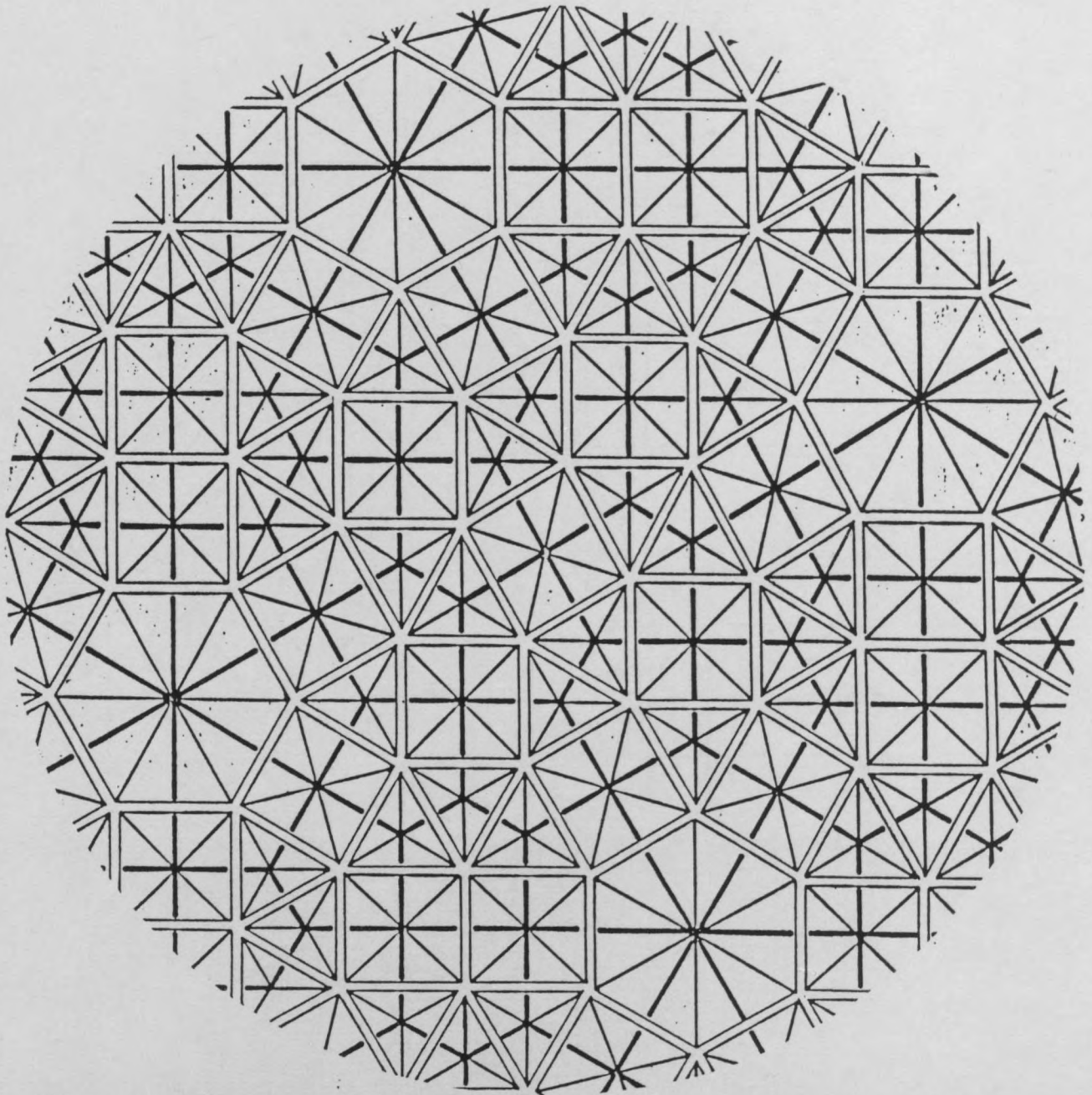
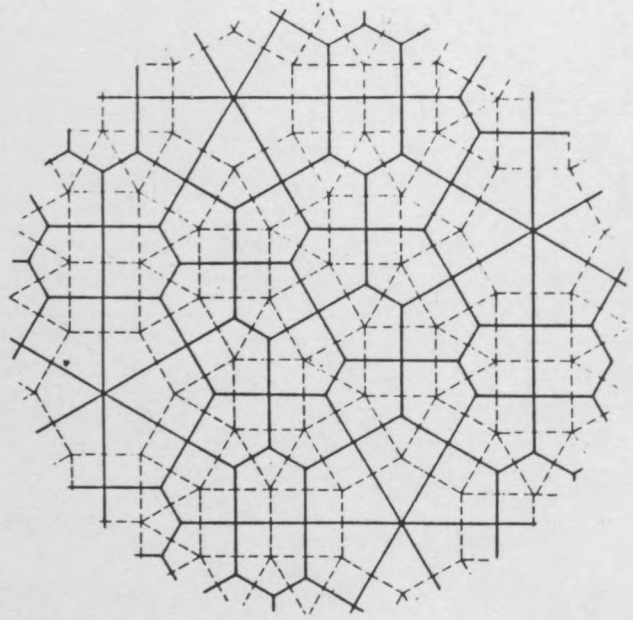
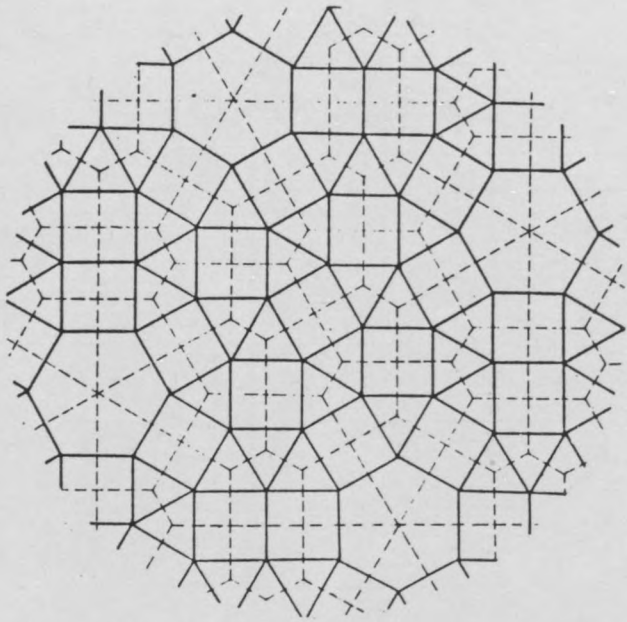


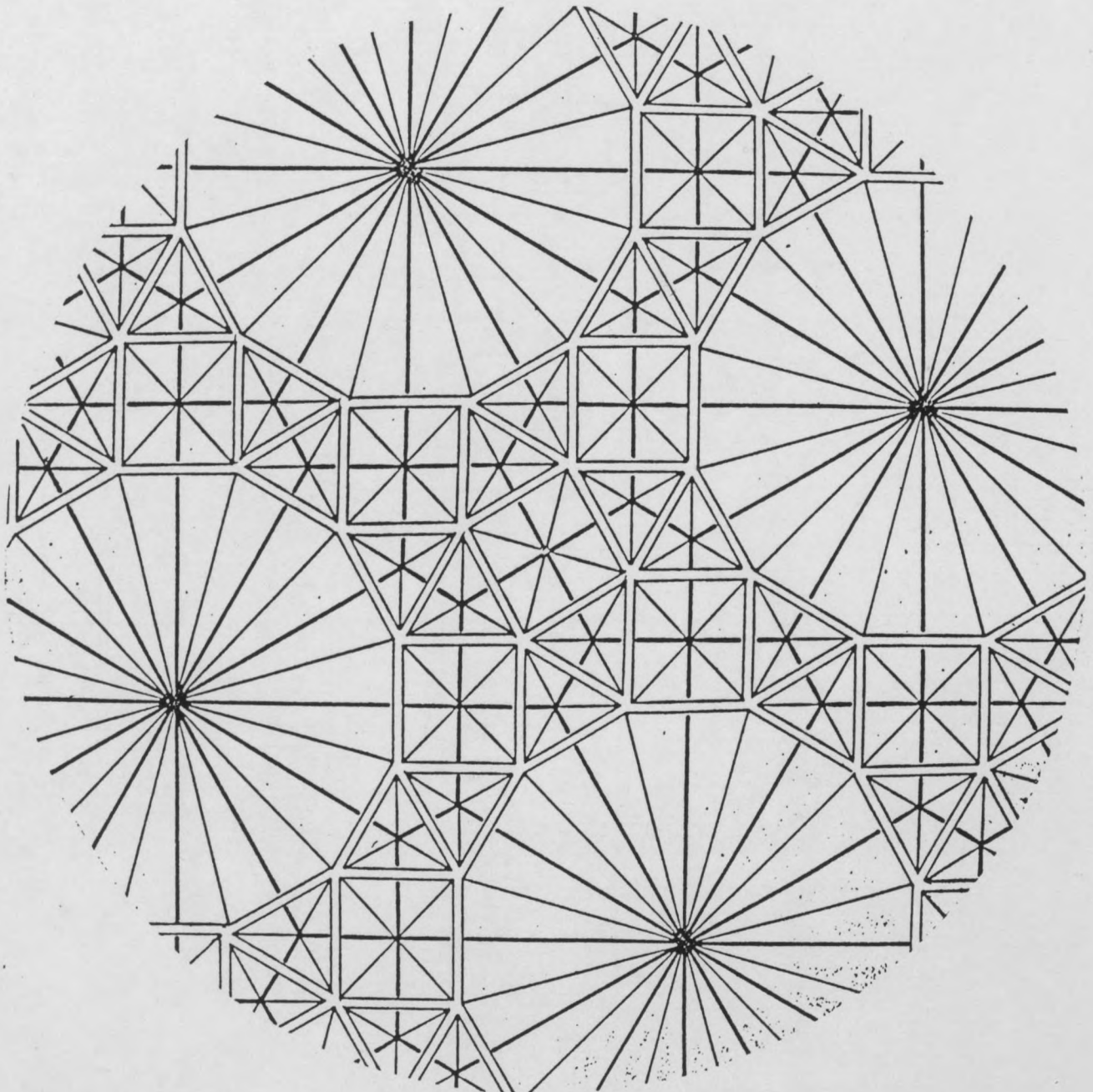
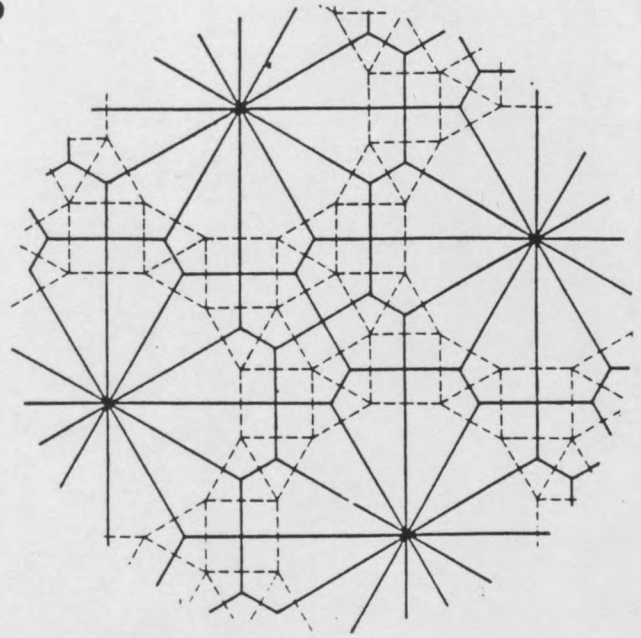
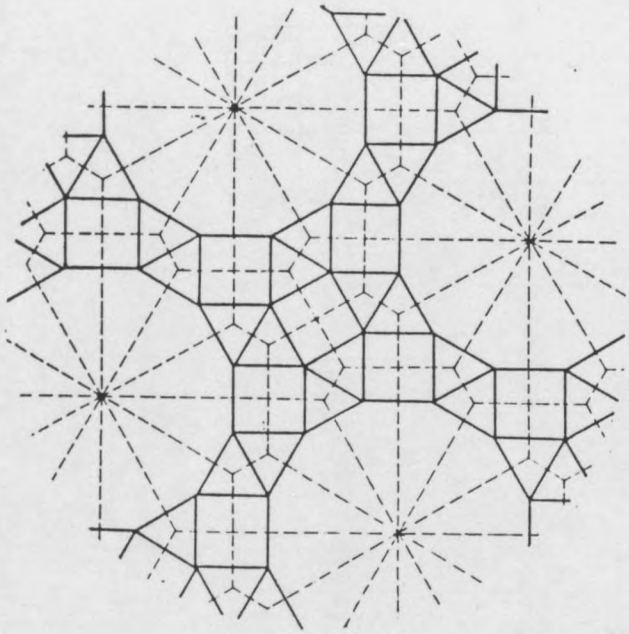


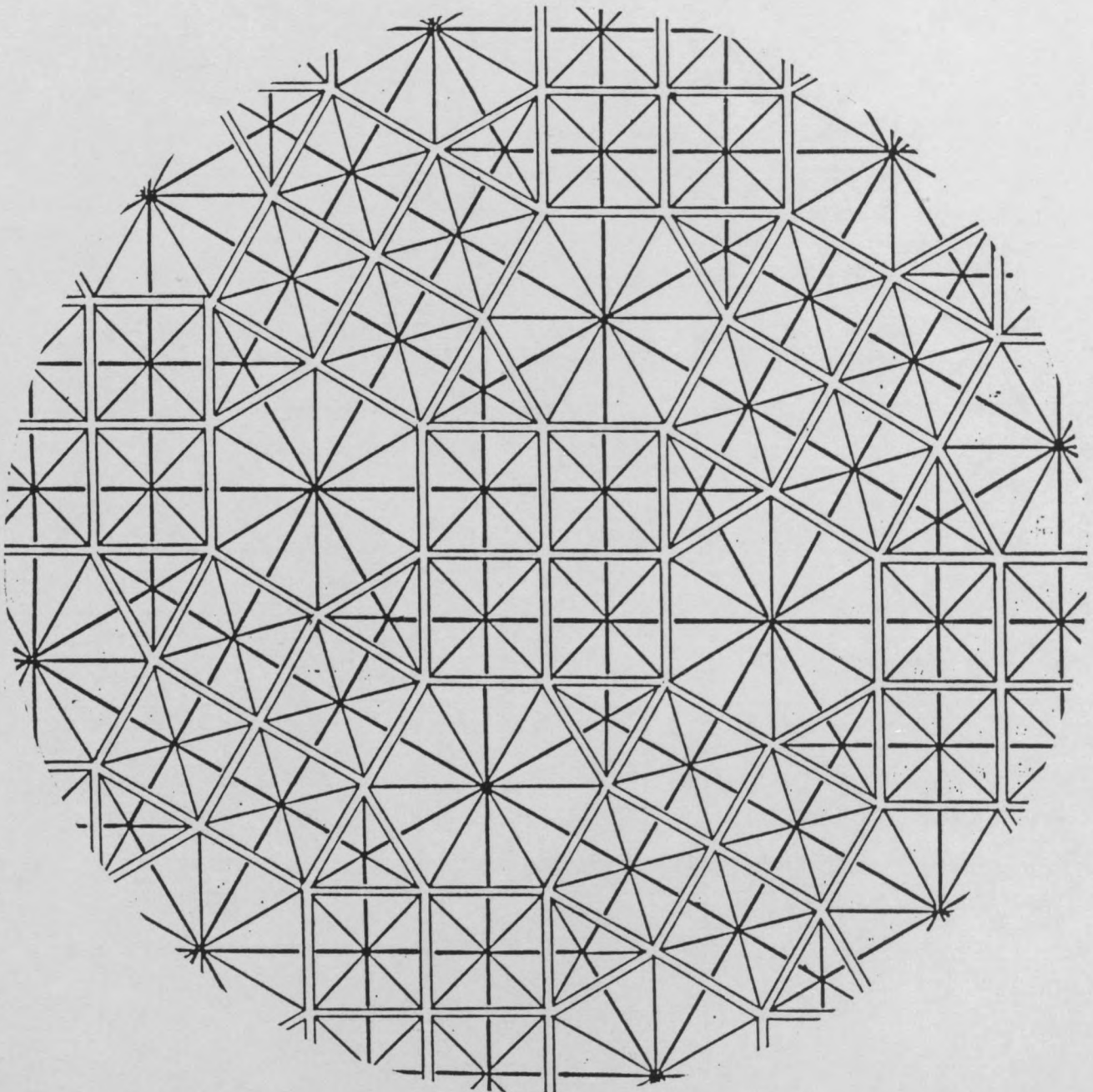
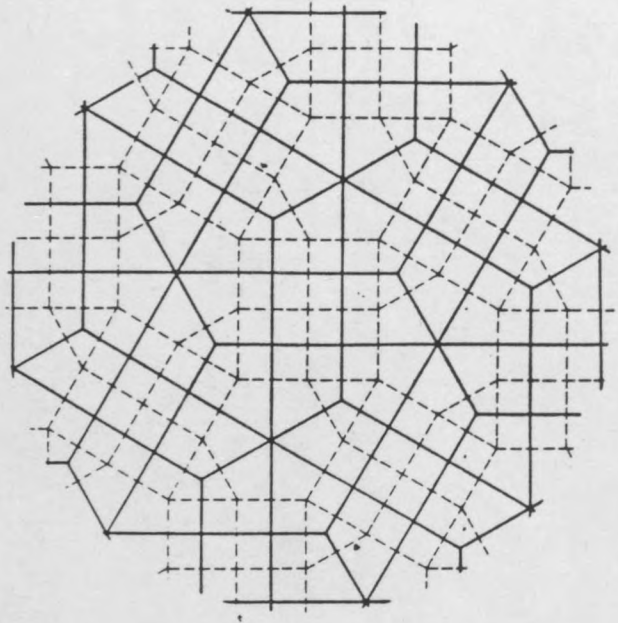
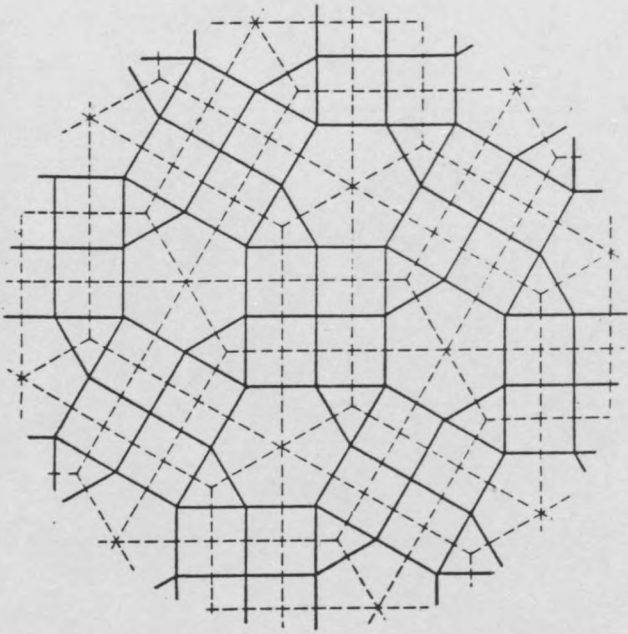


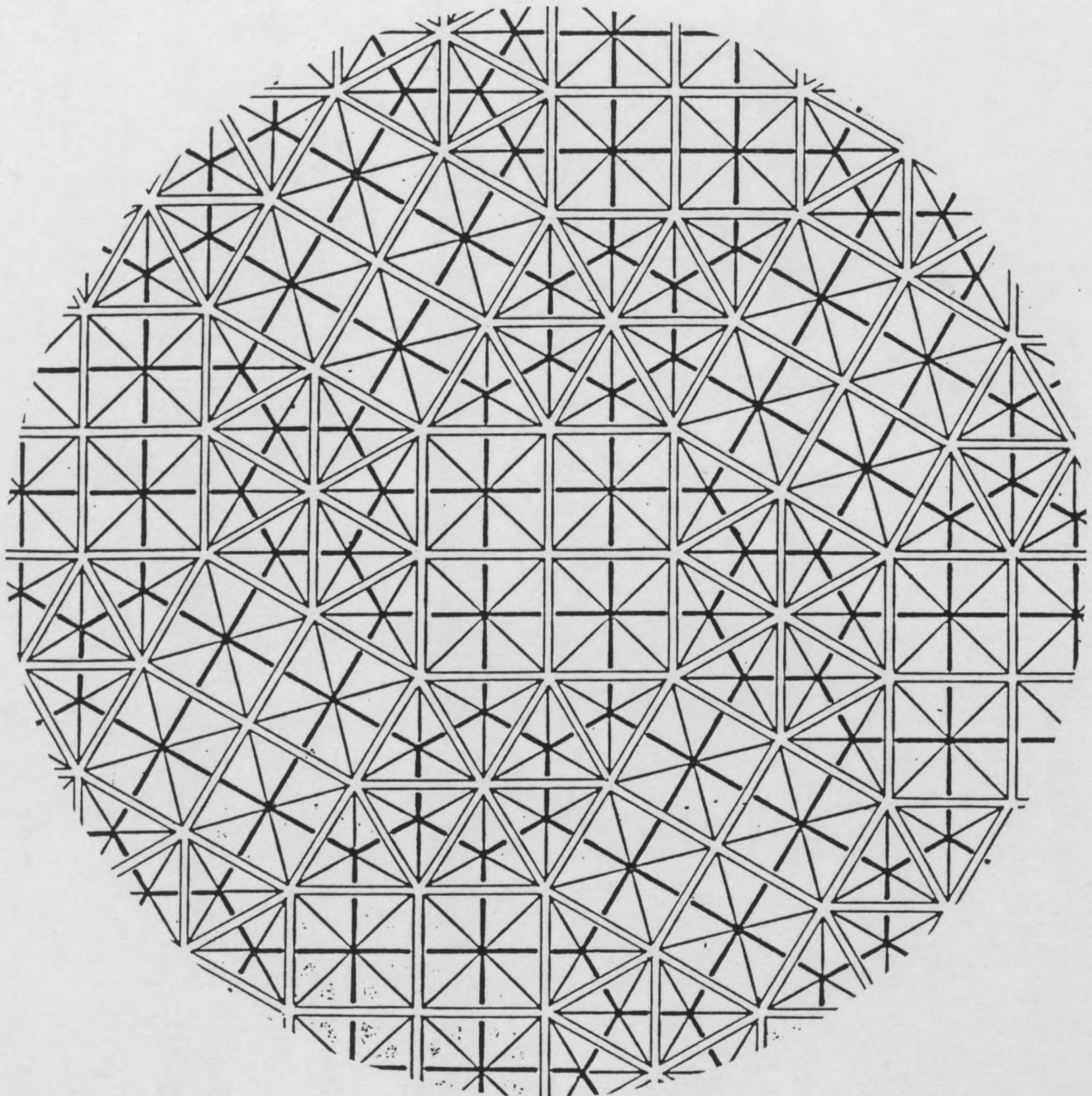
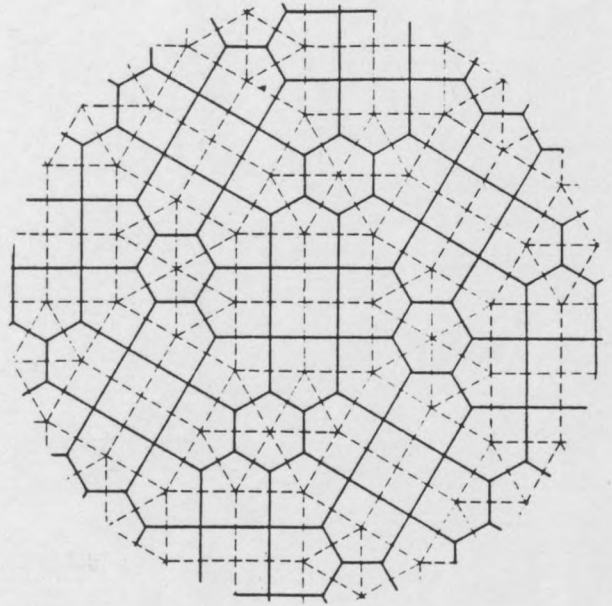
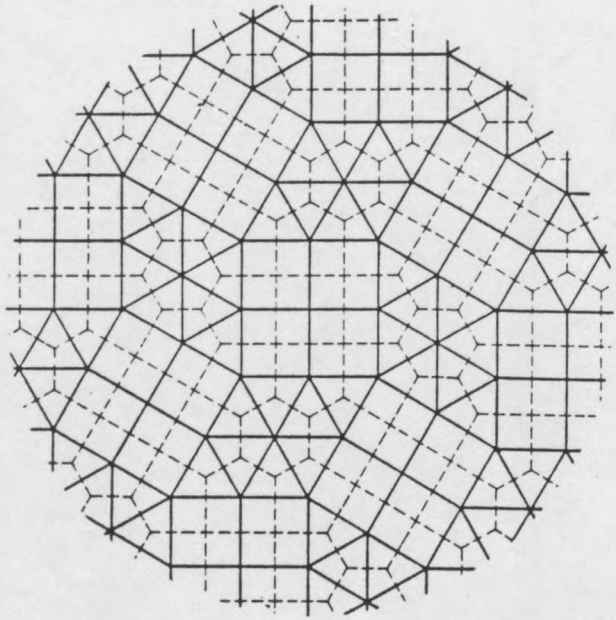


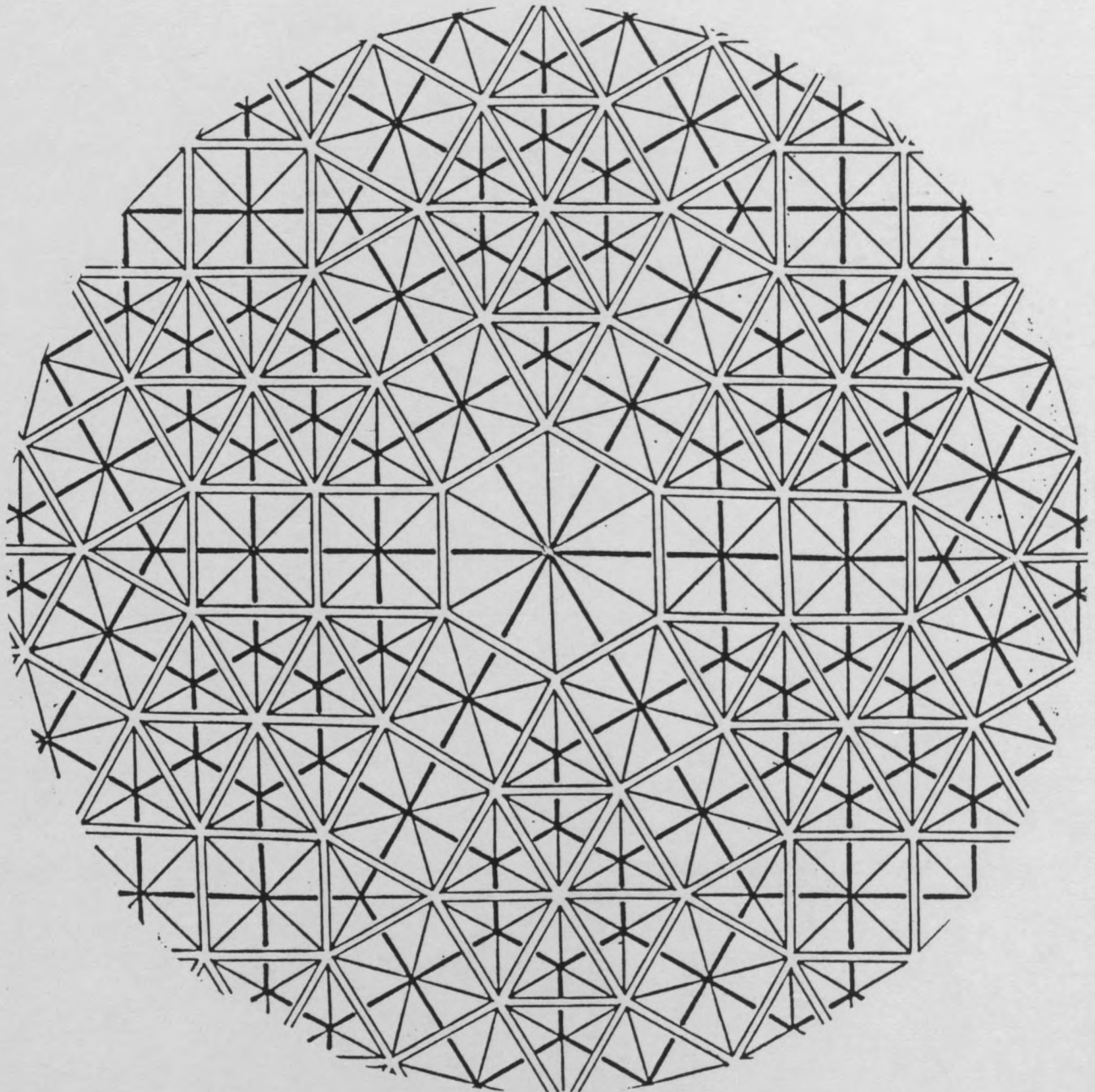
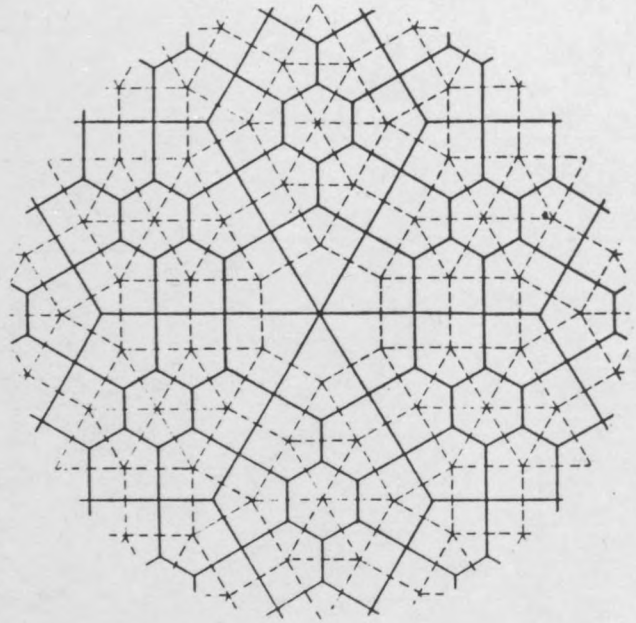
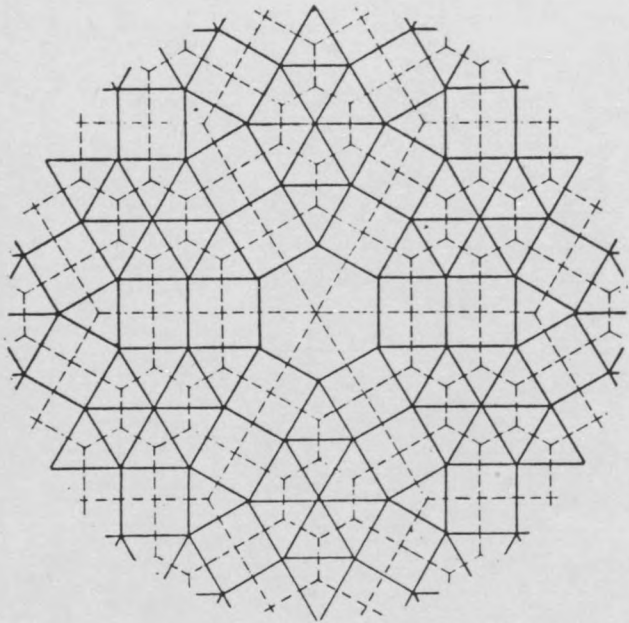


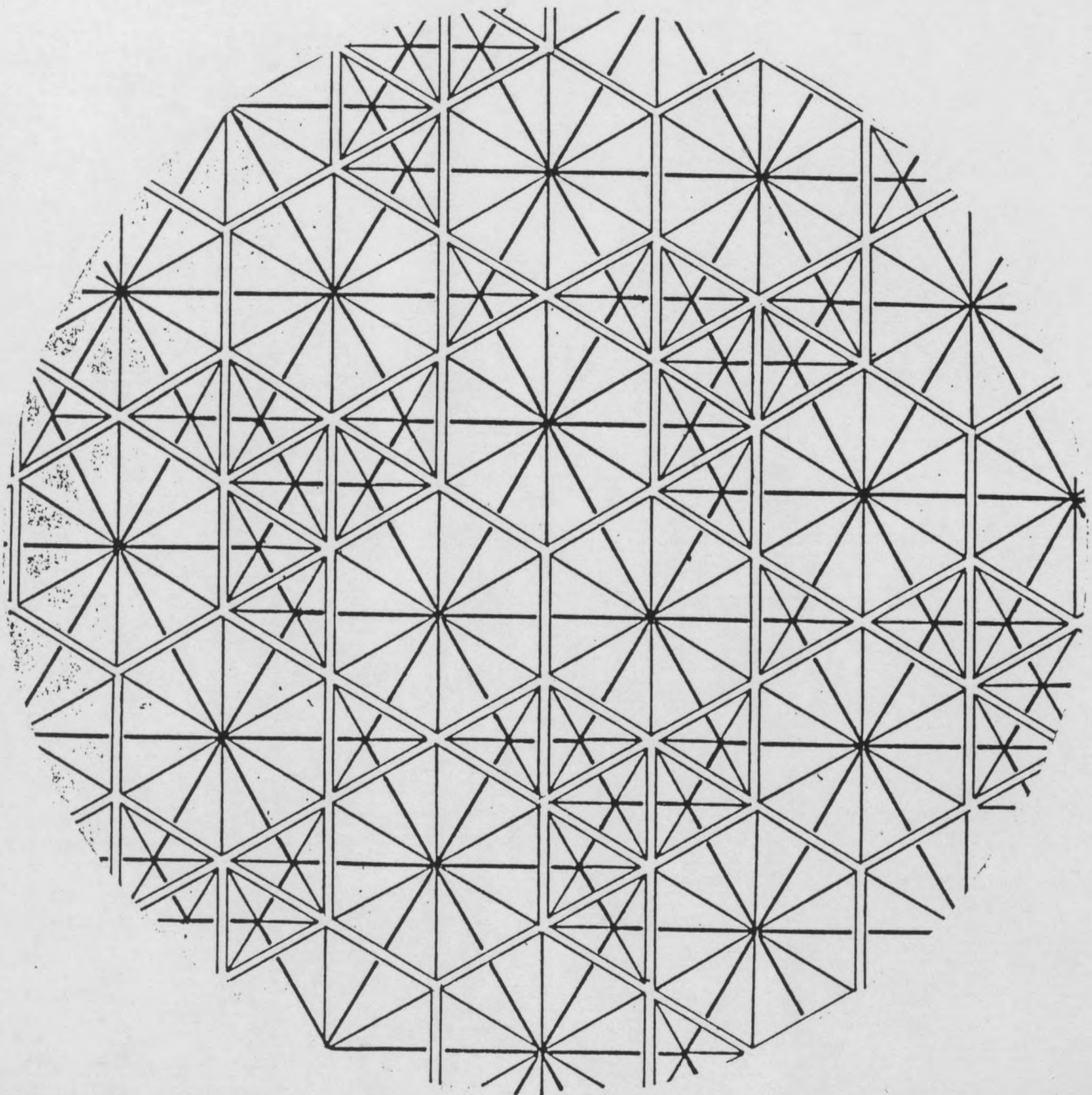
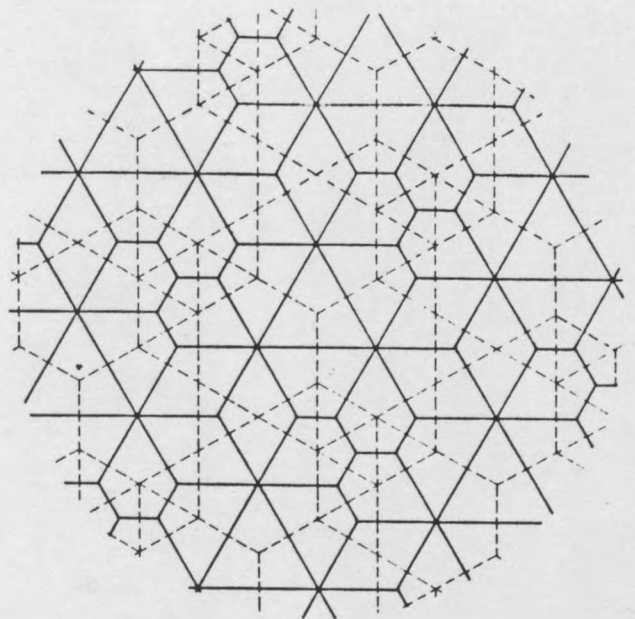
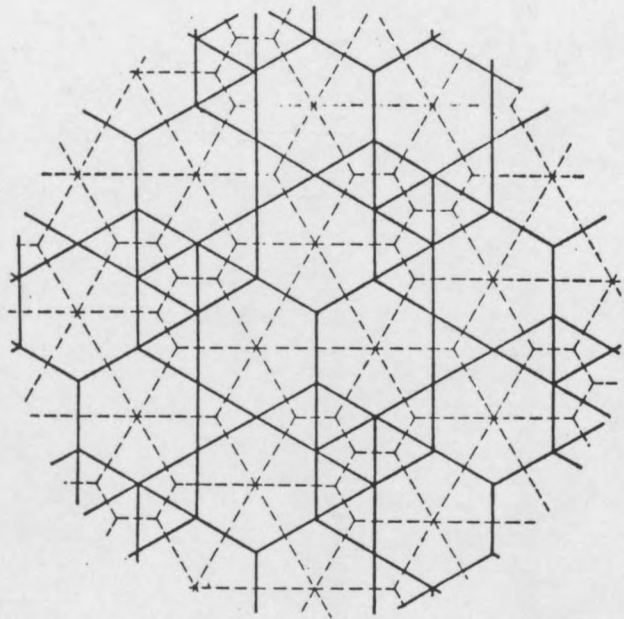




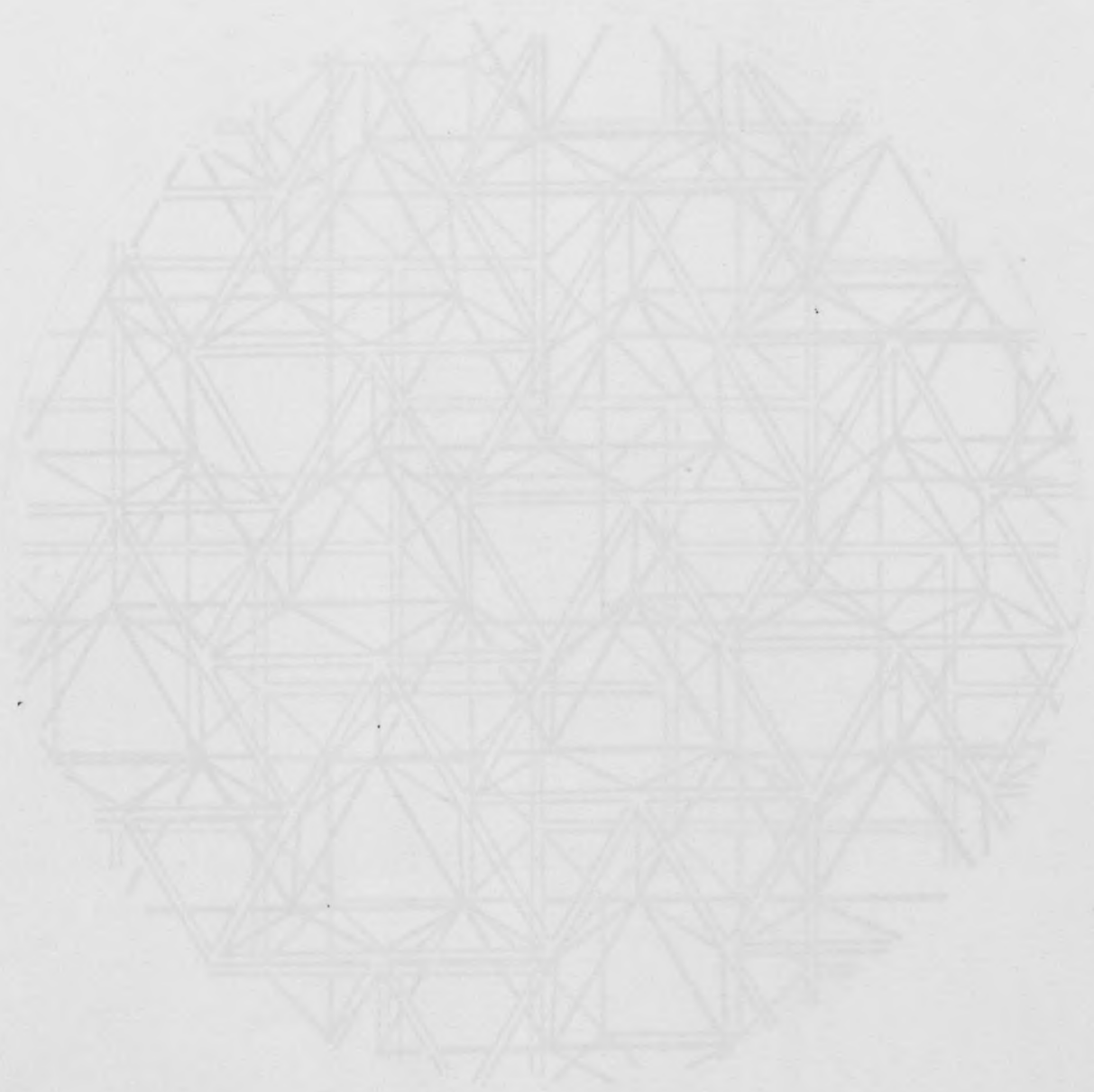
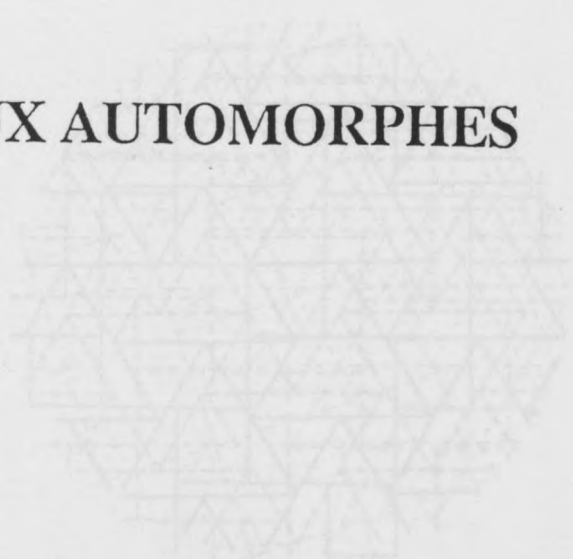


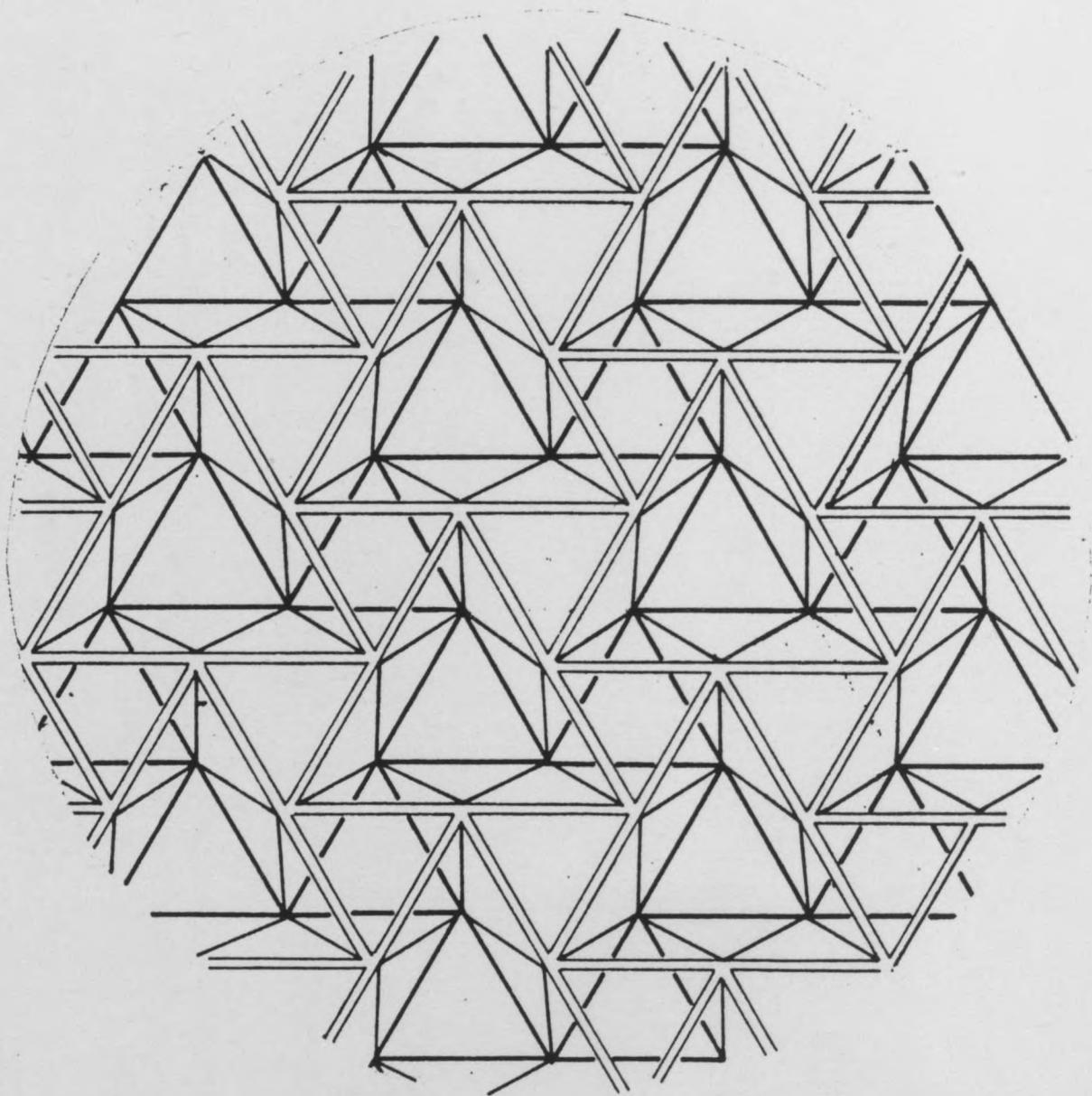
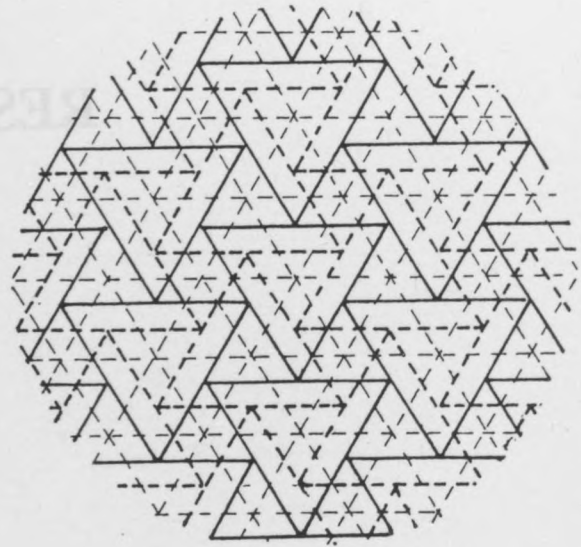
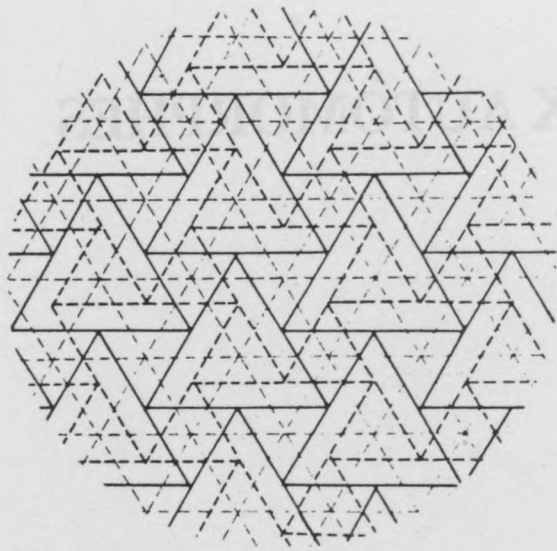


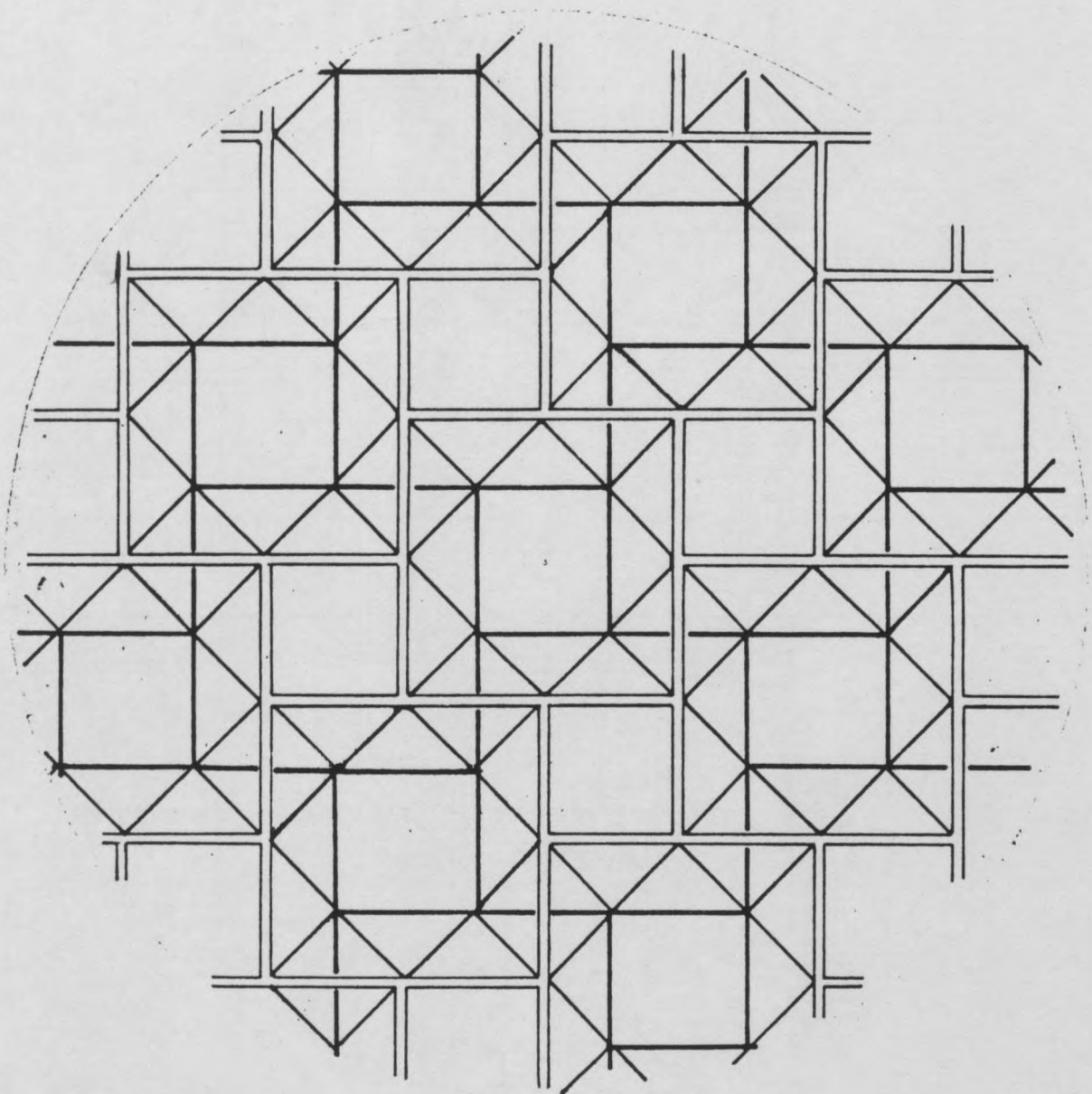
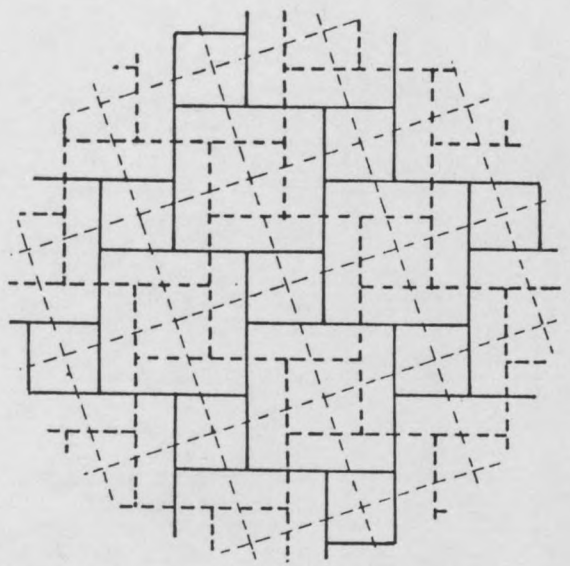
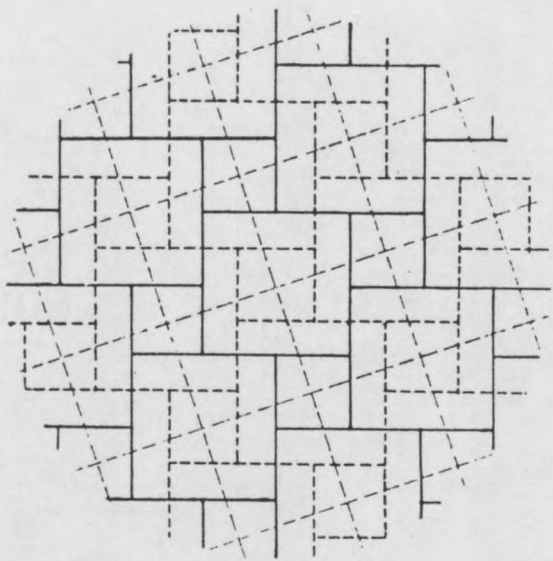


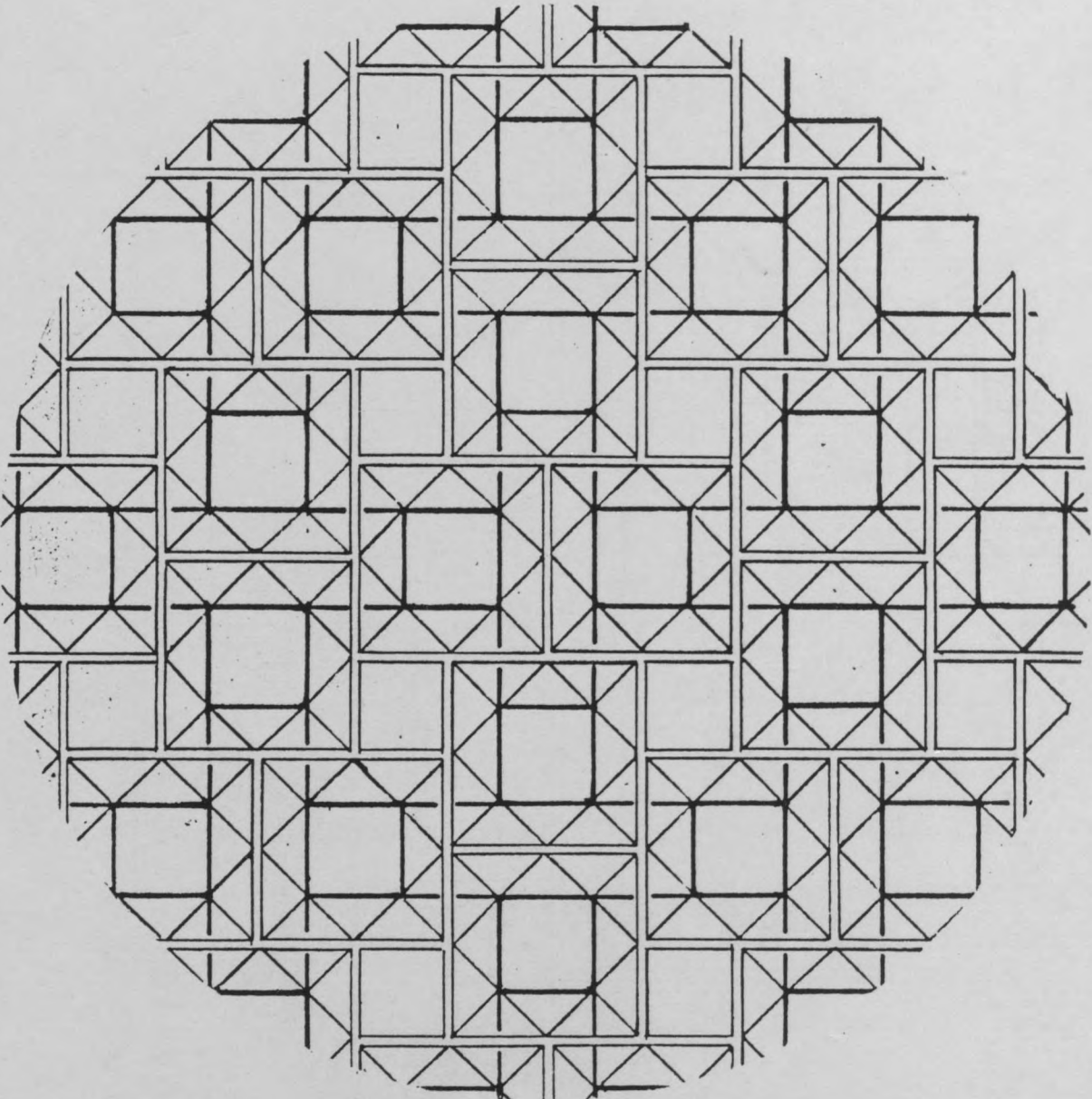
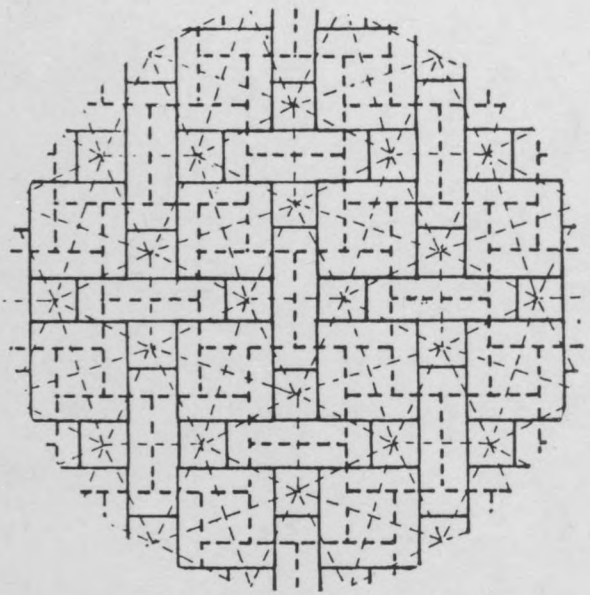
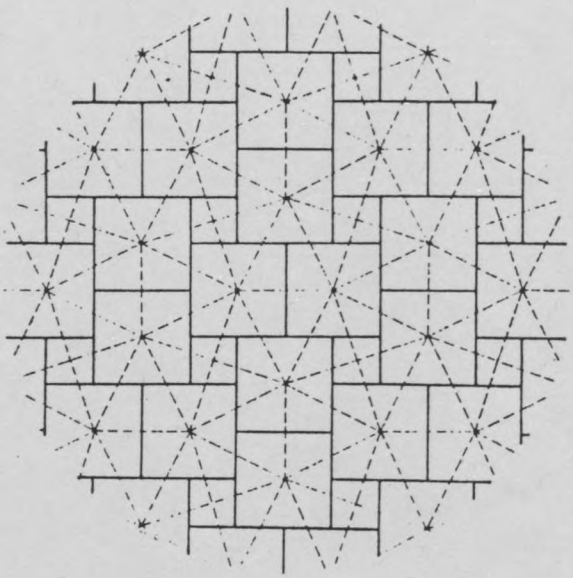


RESEAUX AUTOMORPHES

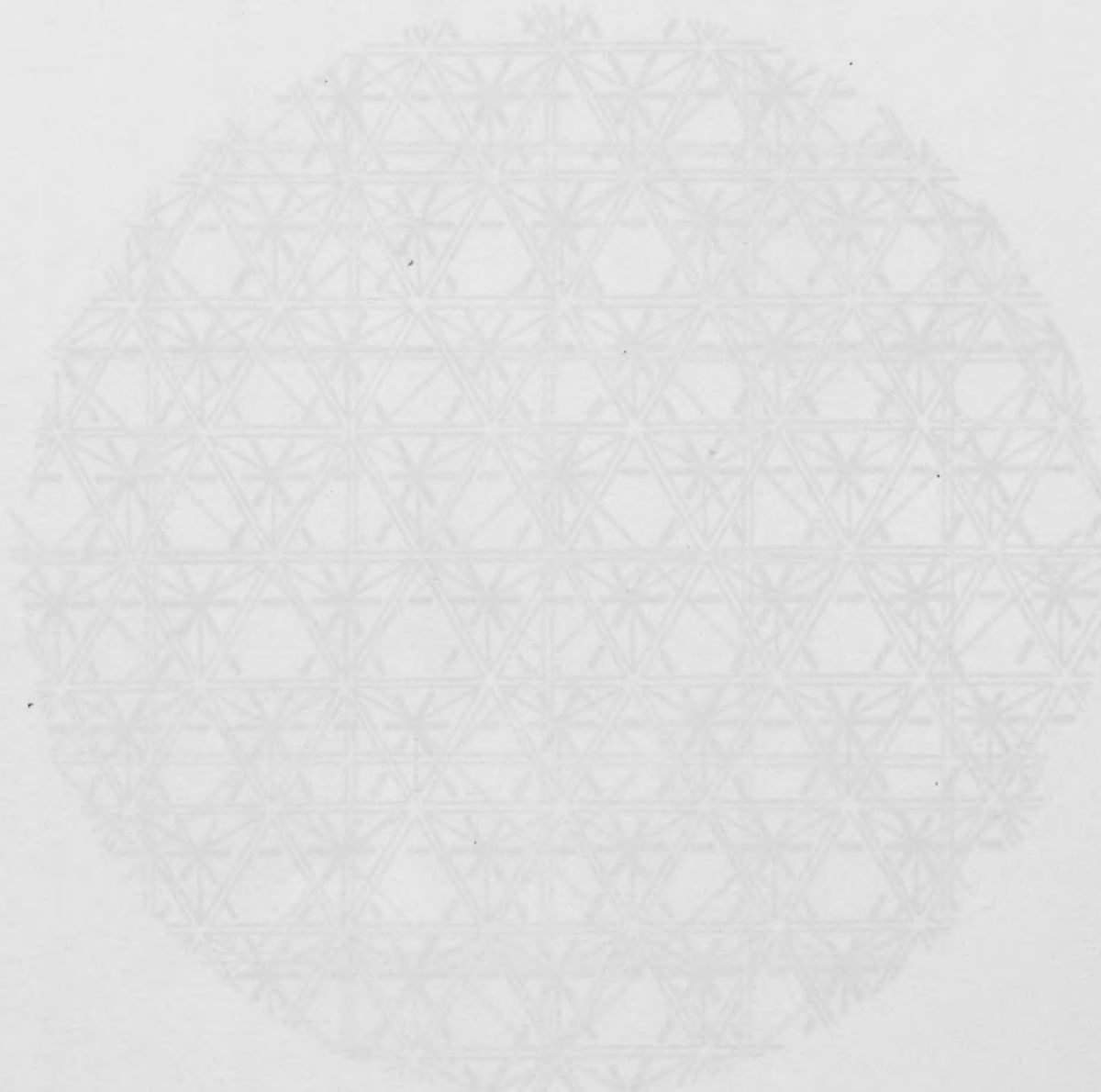
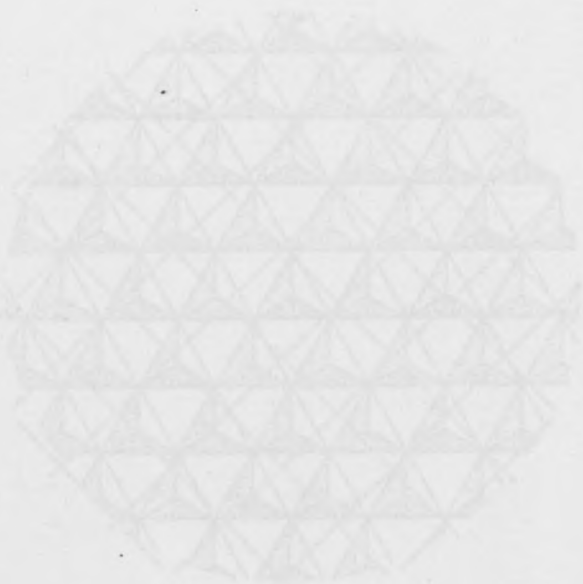






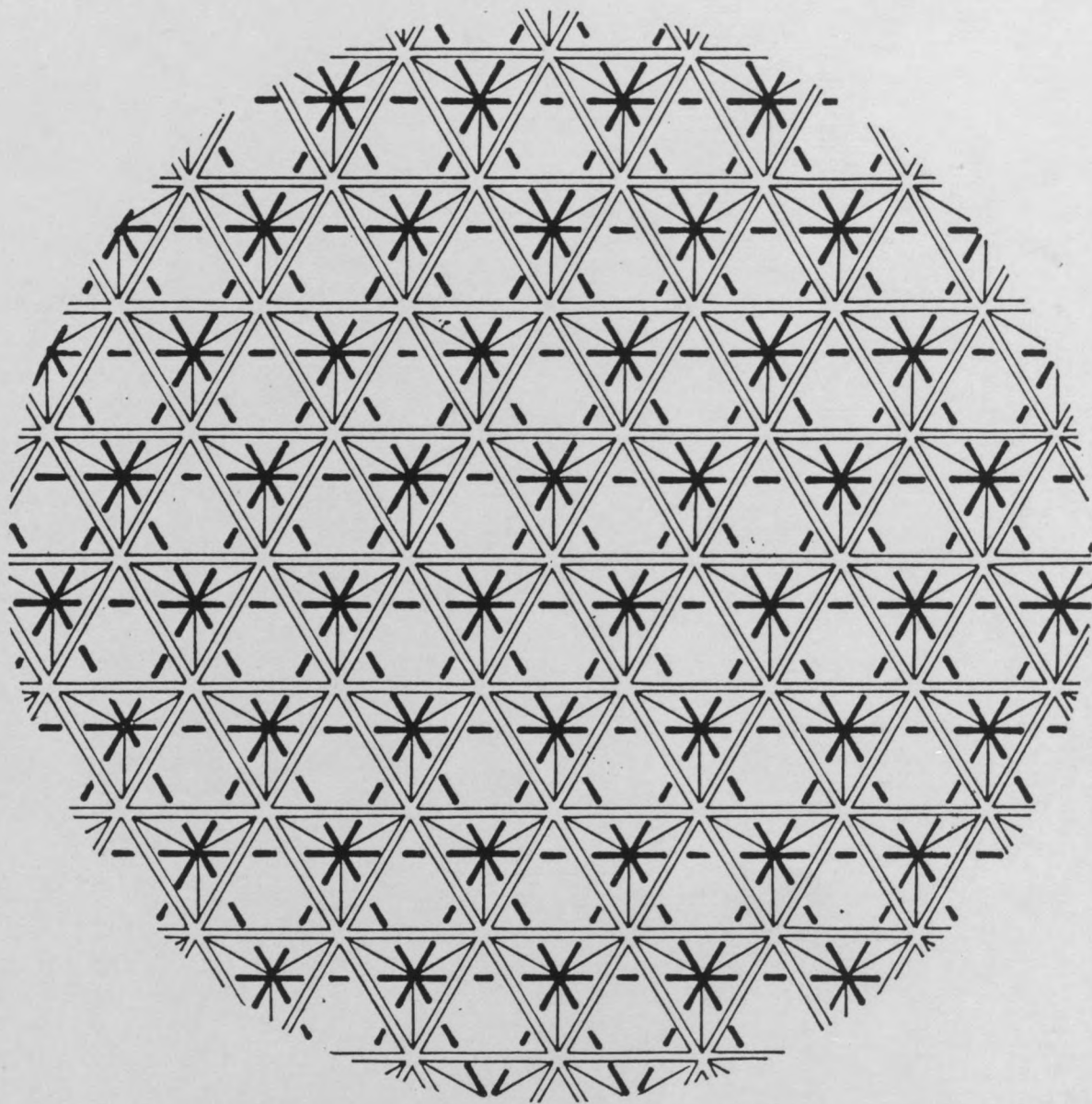
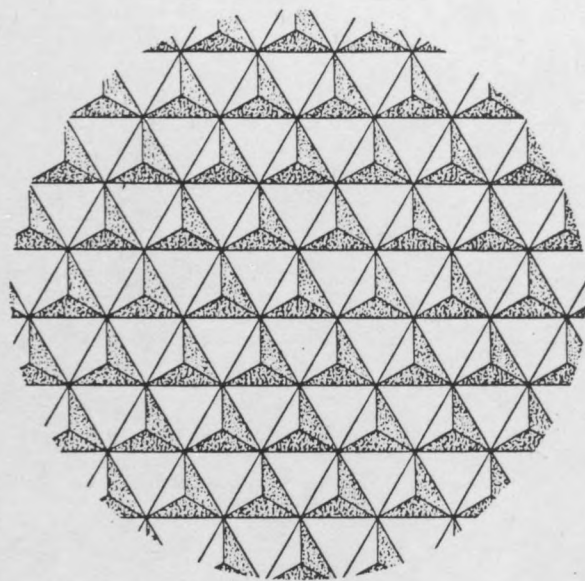
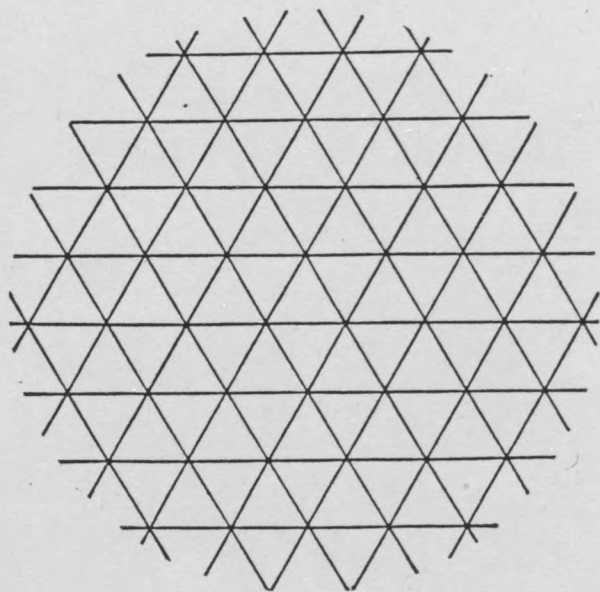


RESEAUX GAUFRES

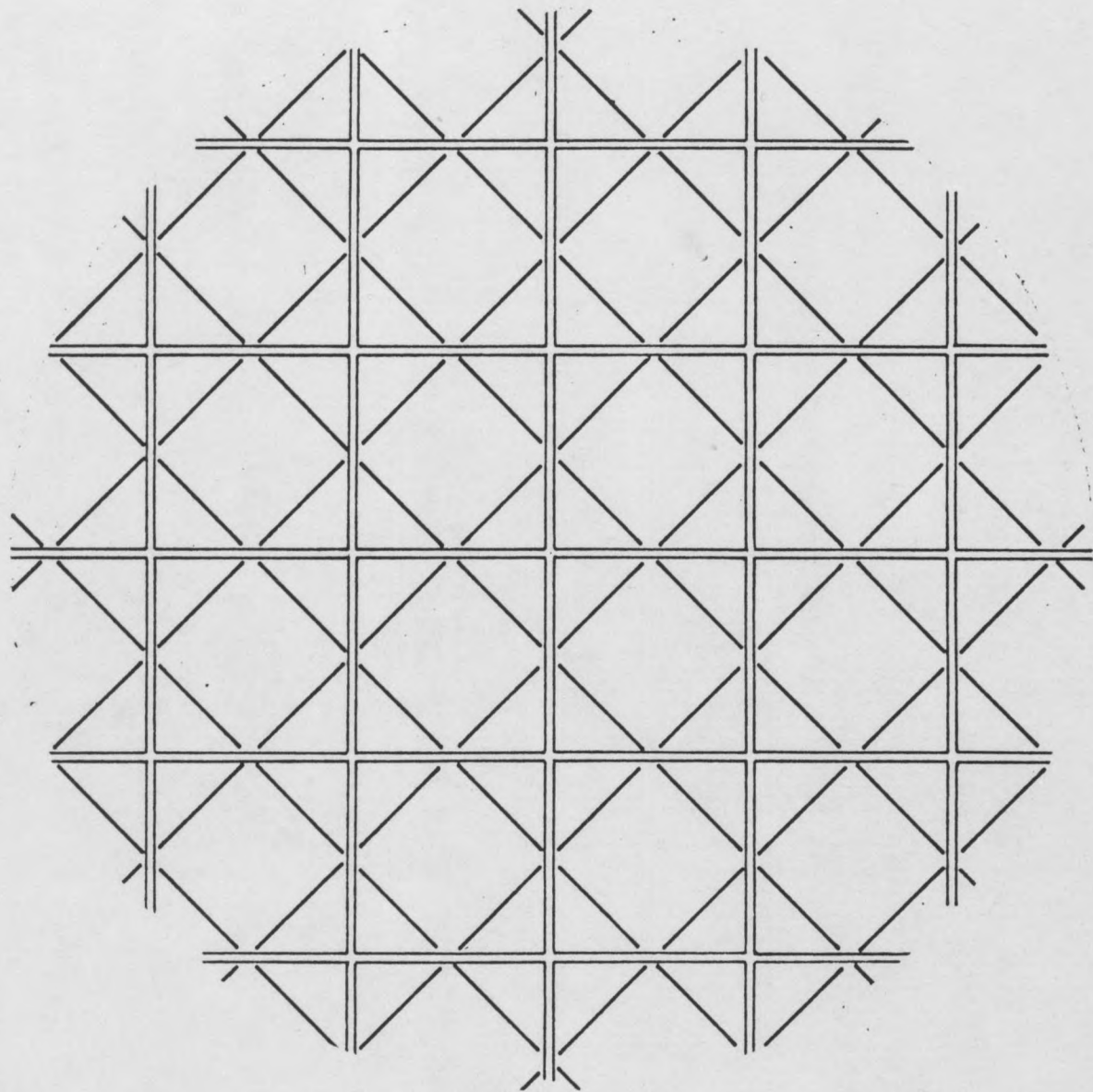
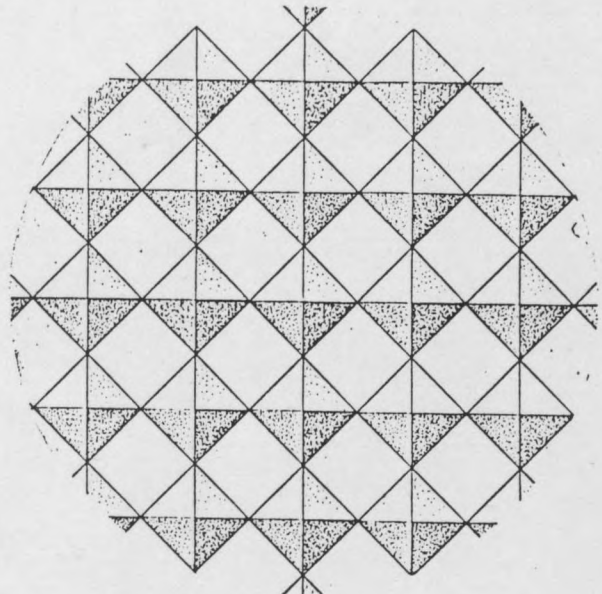
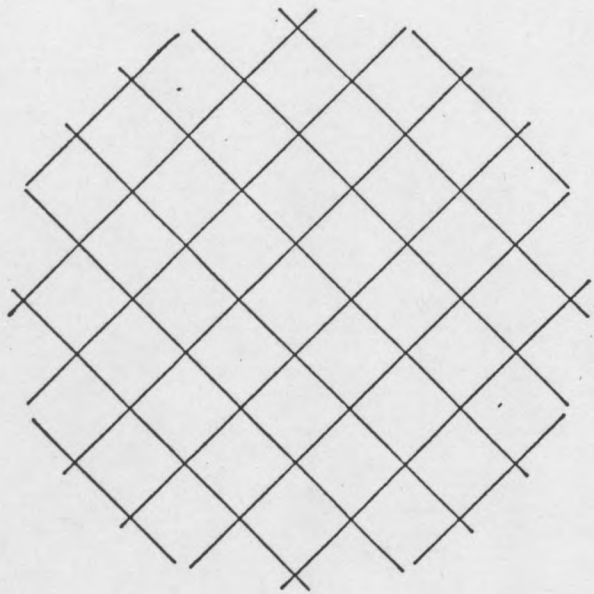


www.lesgaufres.com

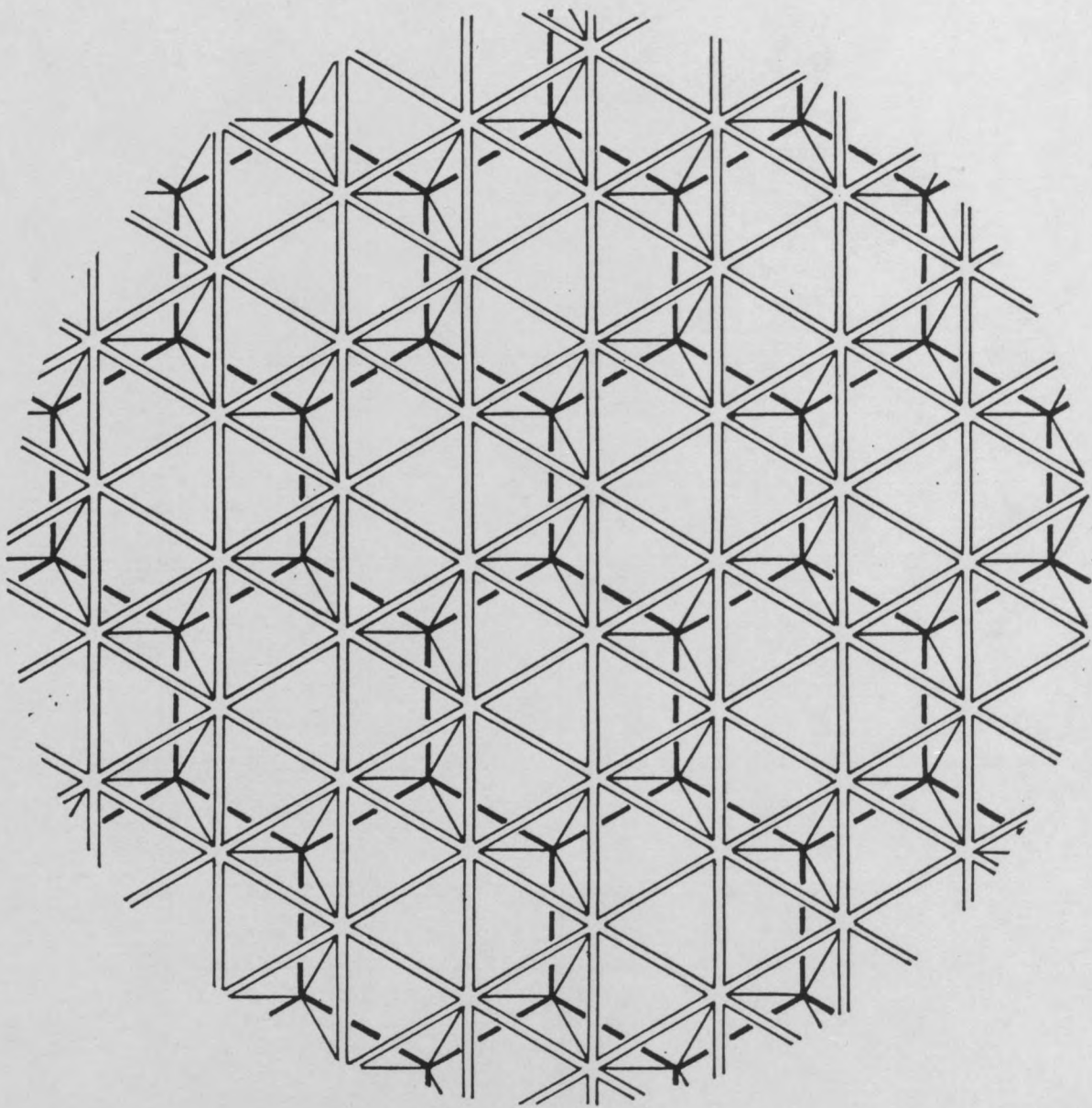
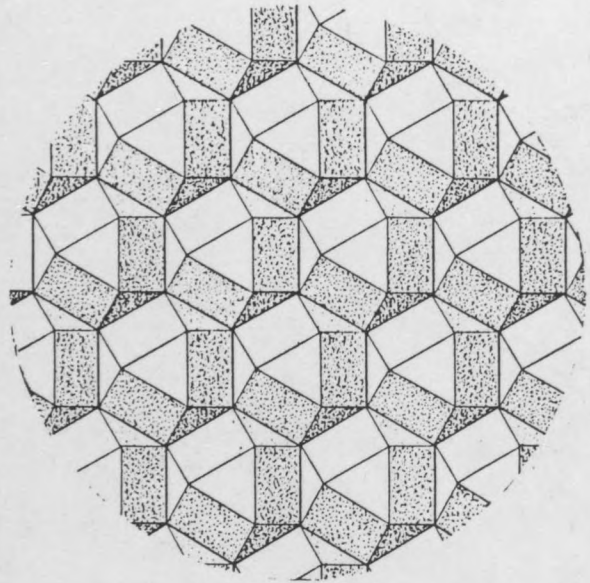
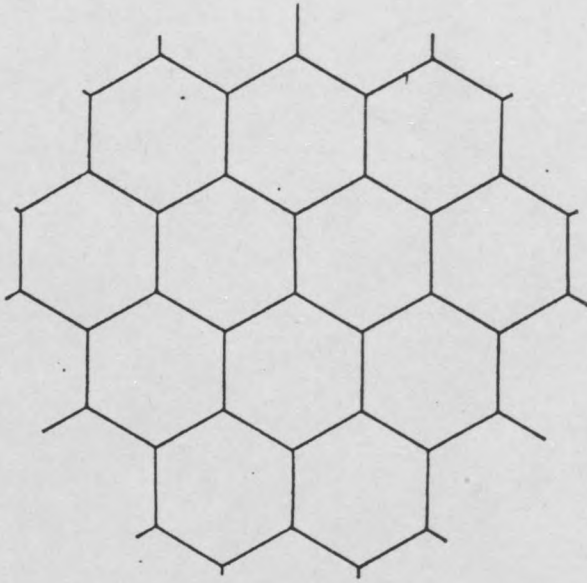
54



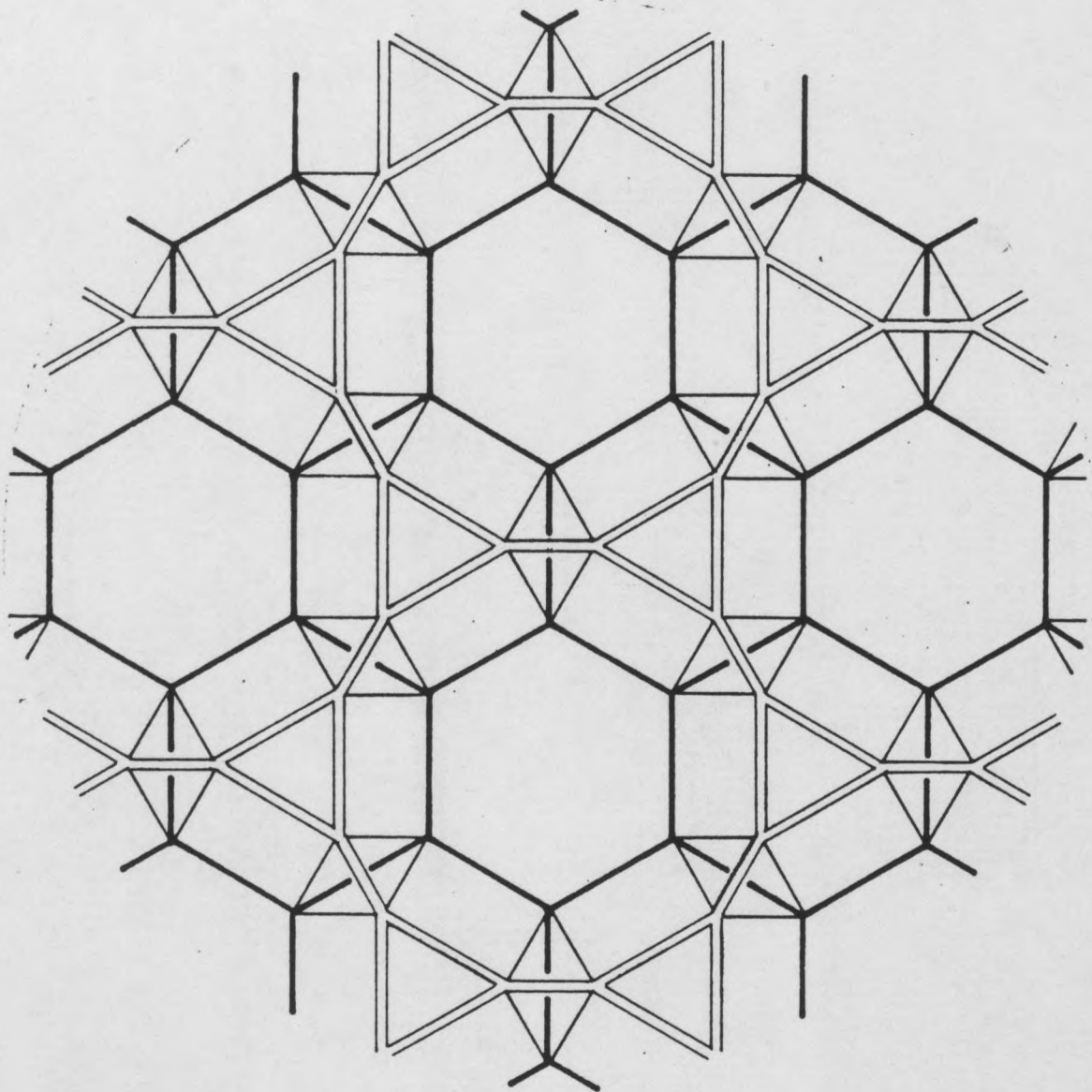
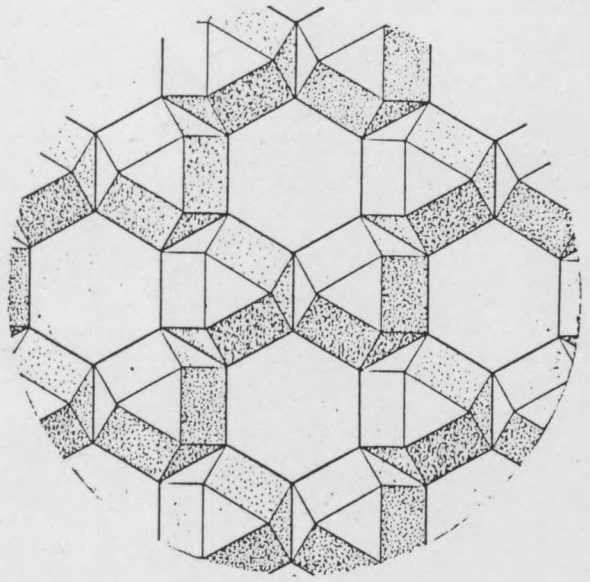
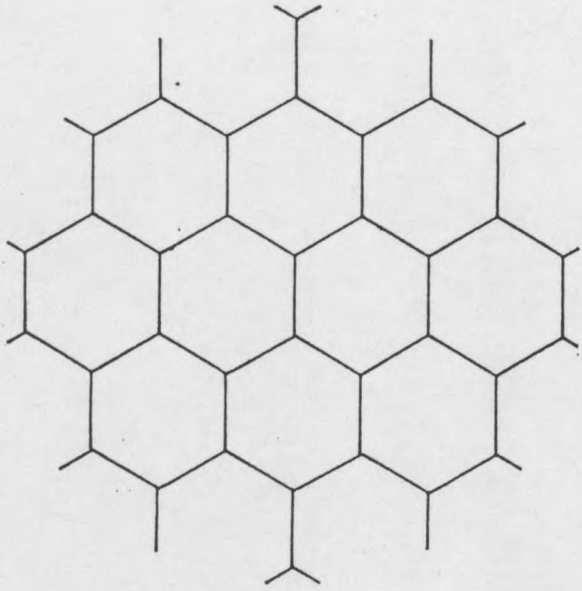
ce réseau correspond à l'arrangement isotropique provenant de l'empilement compact.

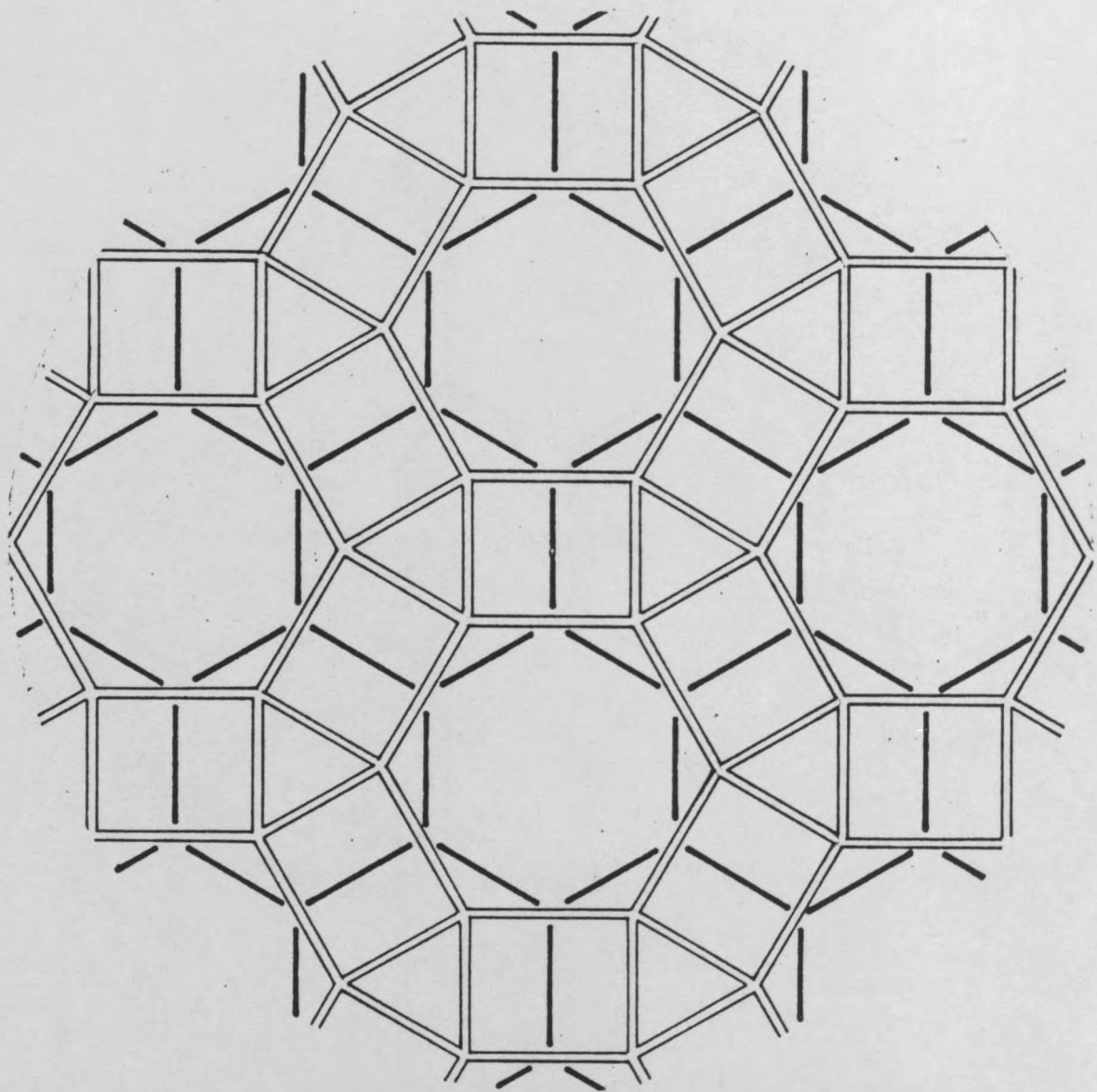
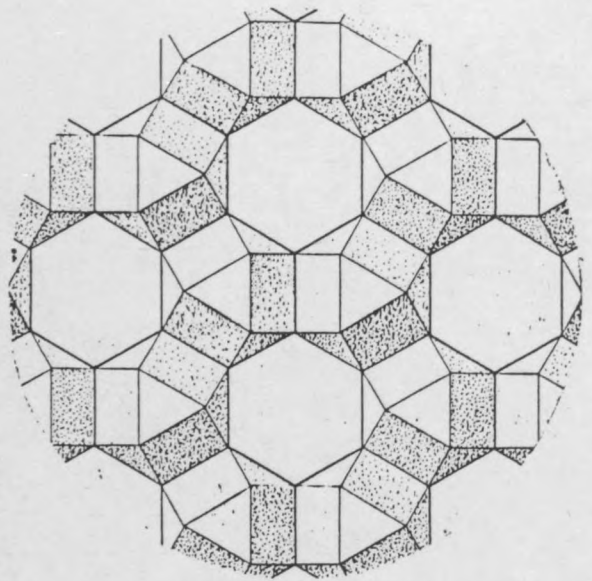
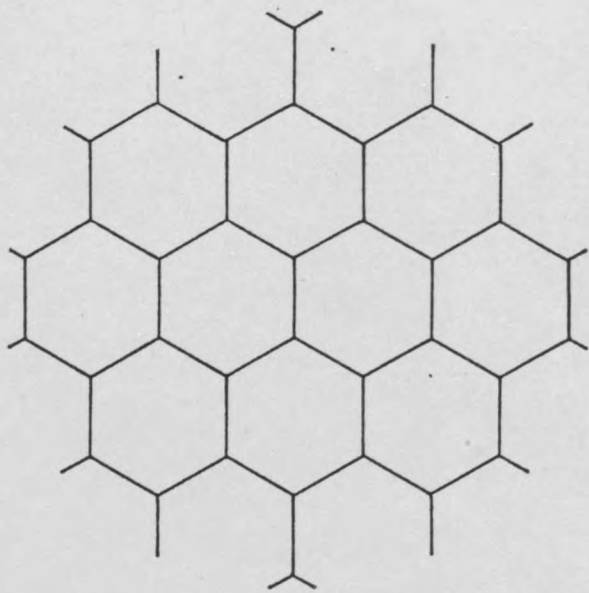


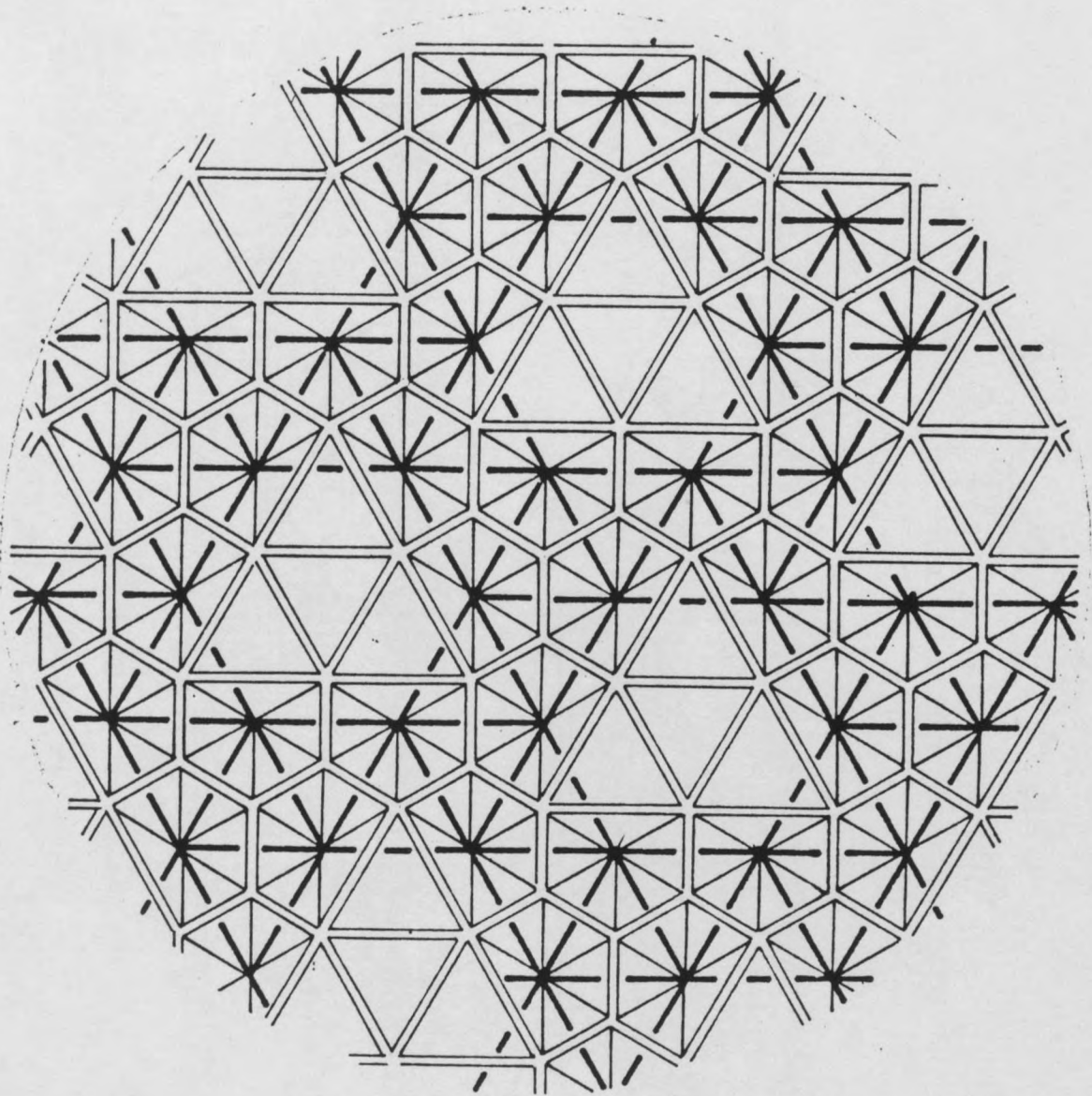
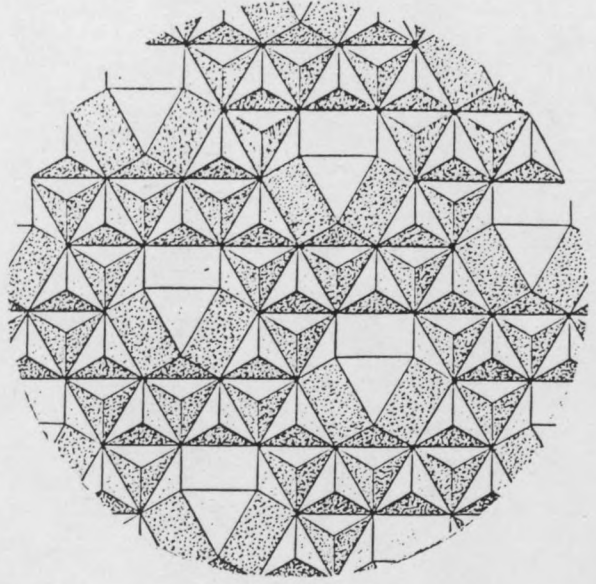
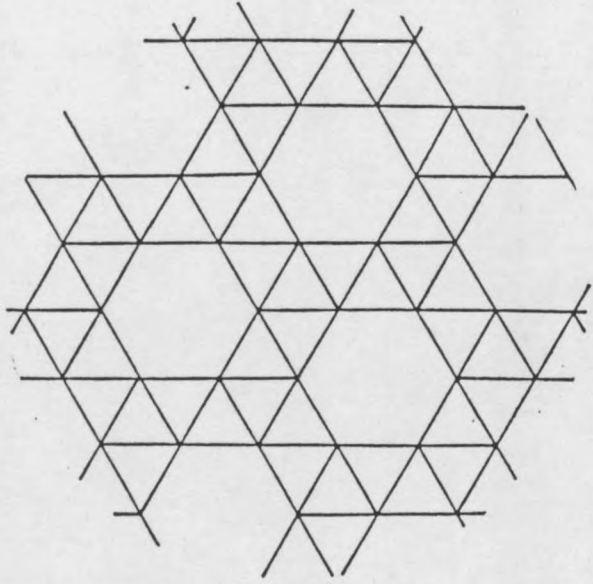
56

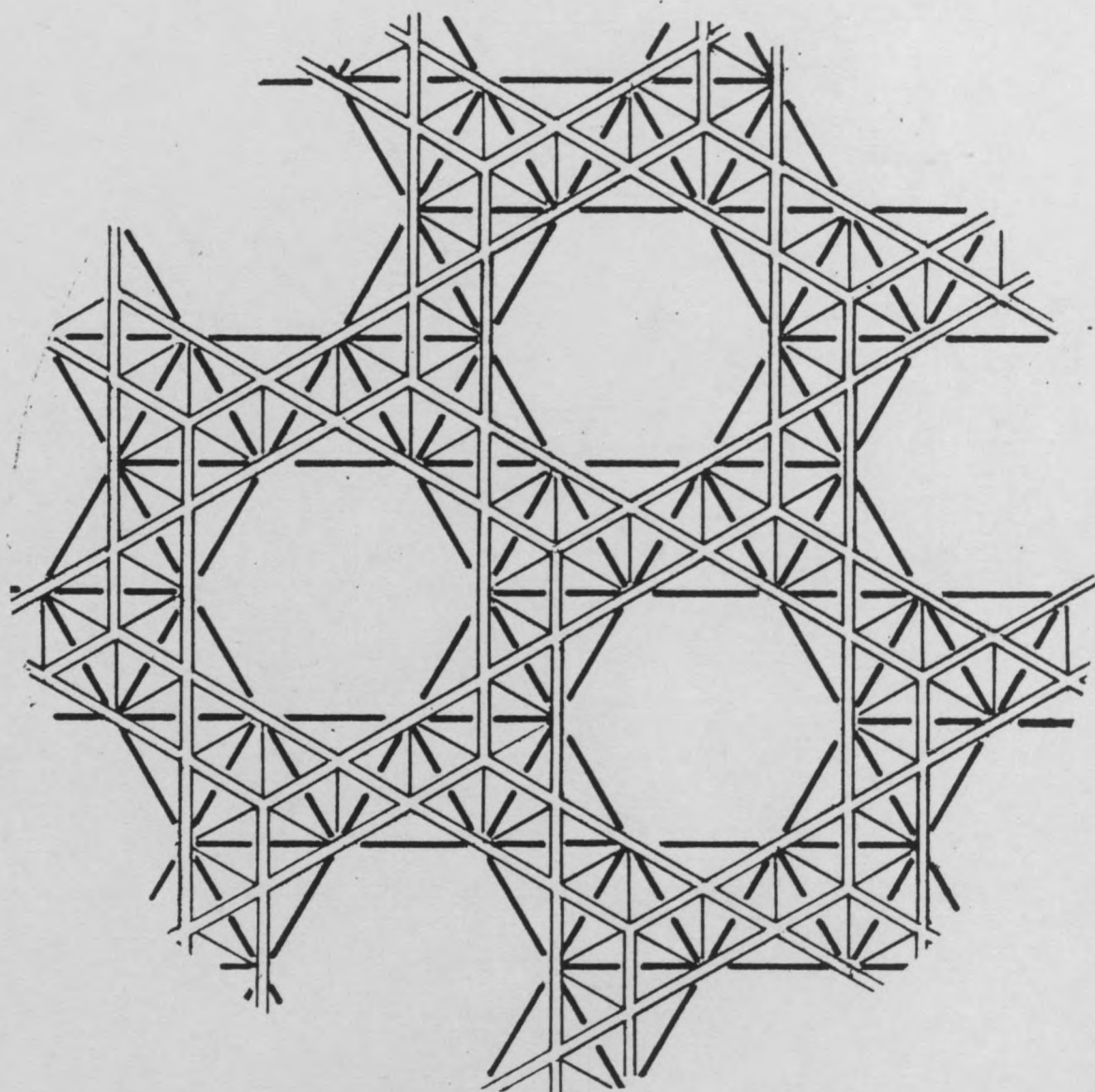
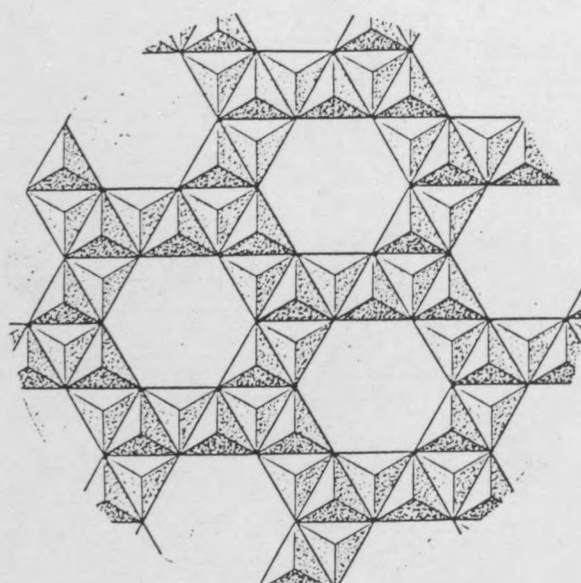
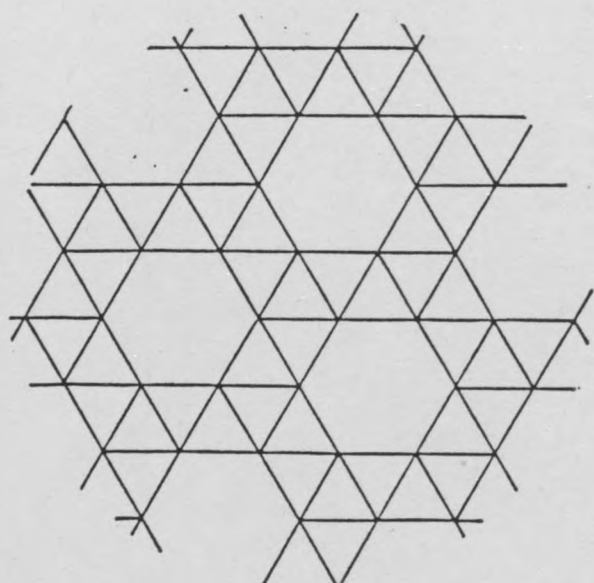


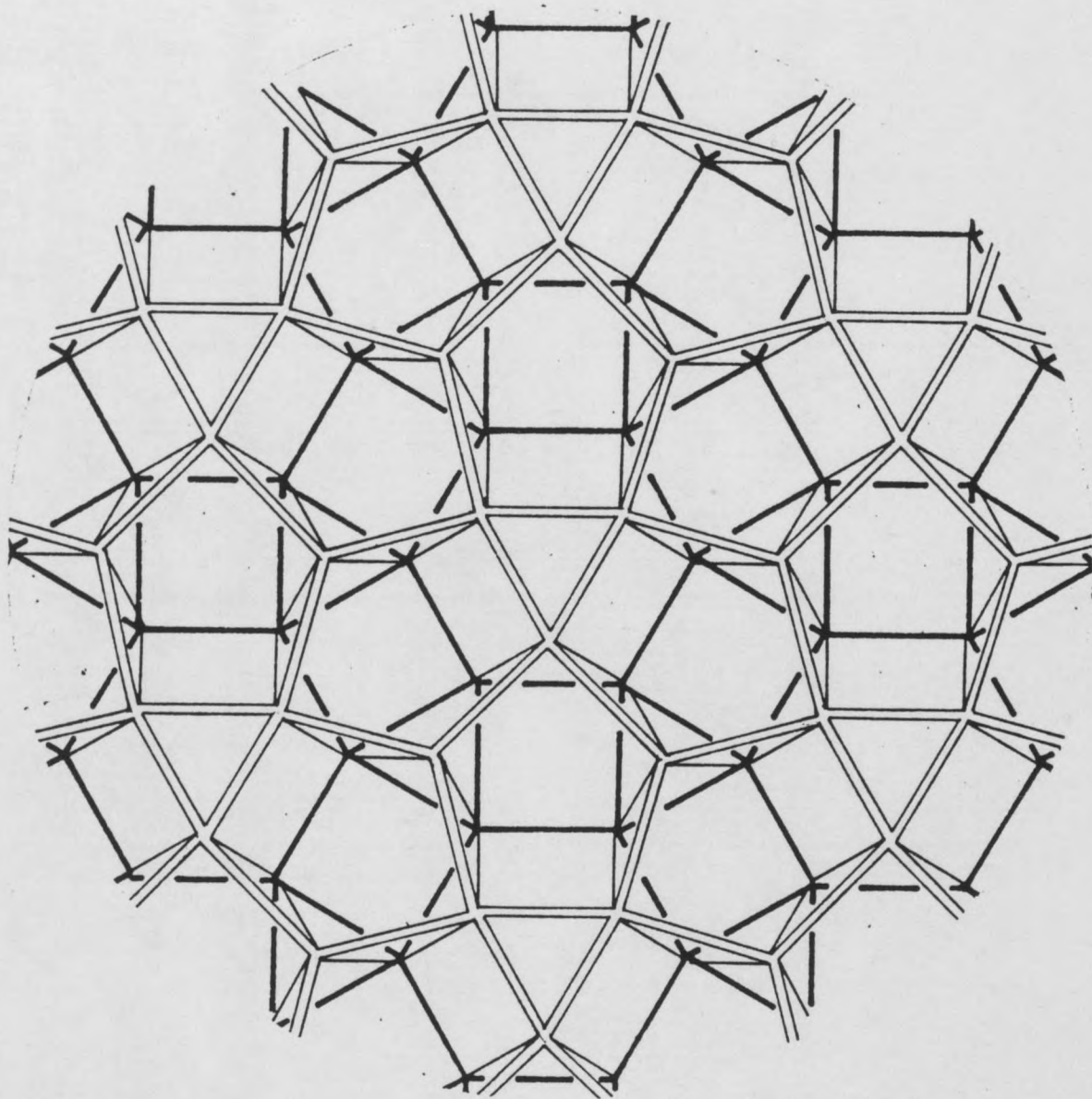
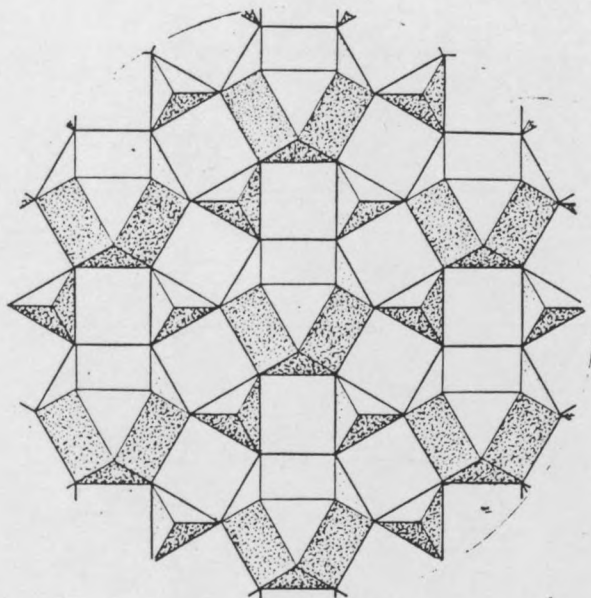
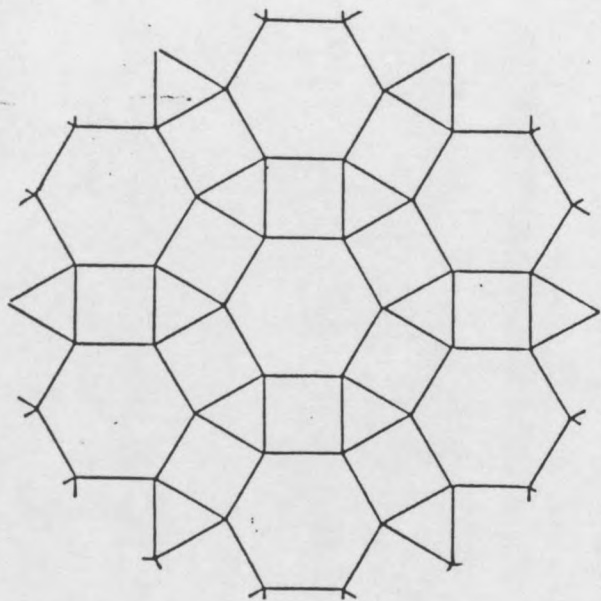
57

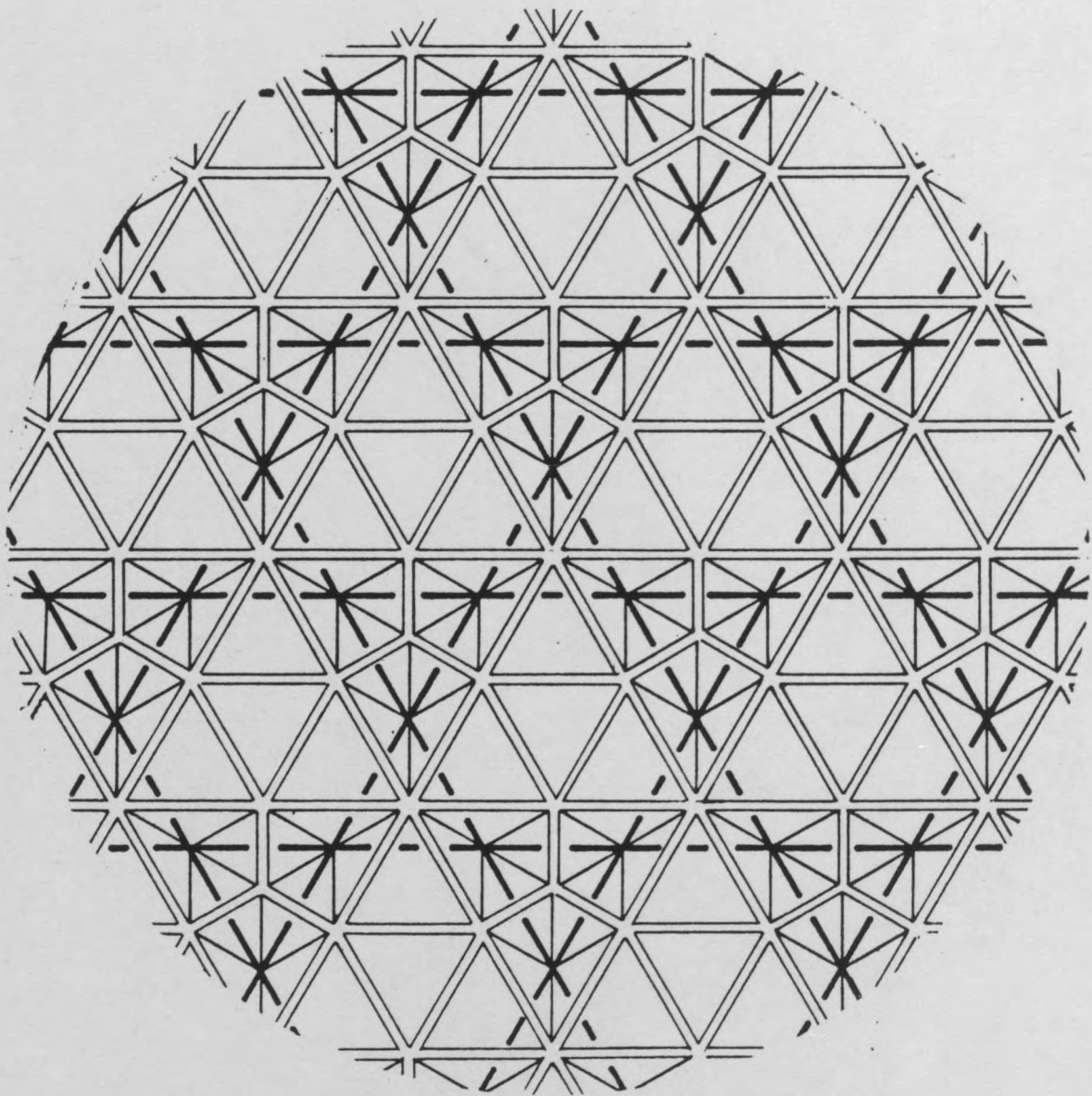
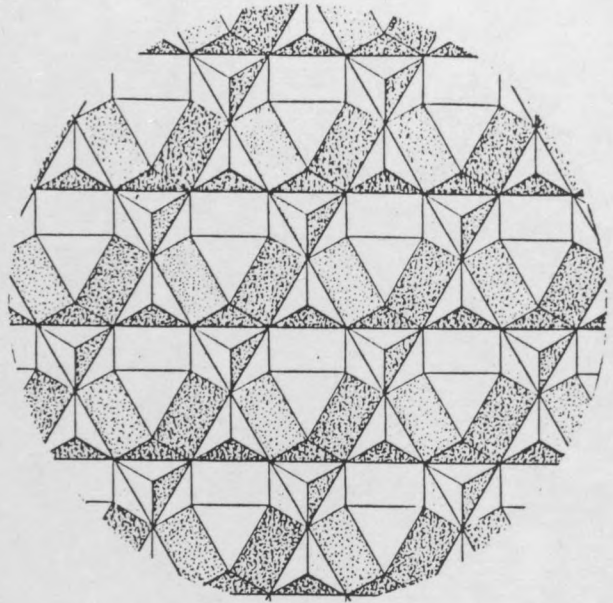
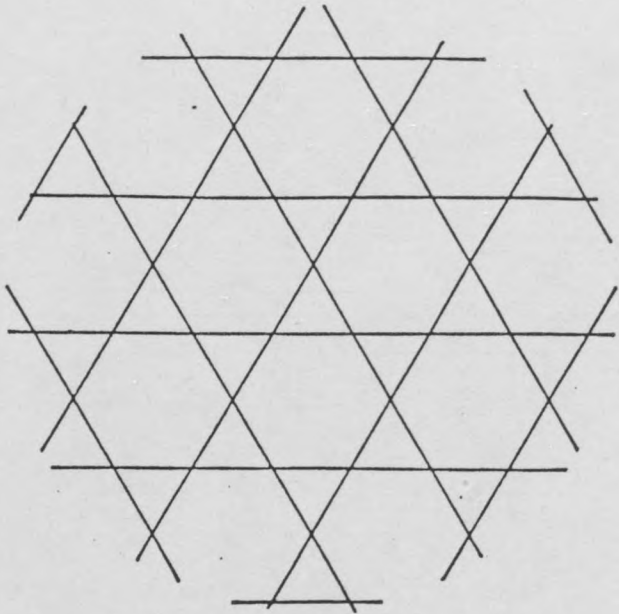




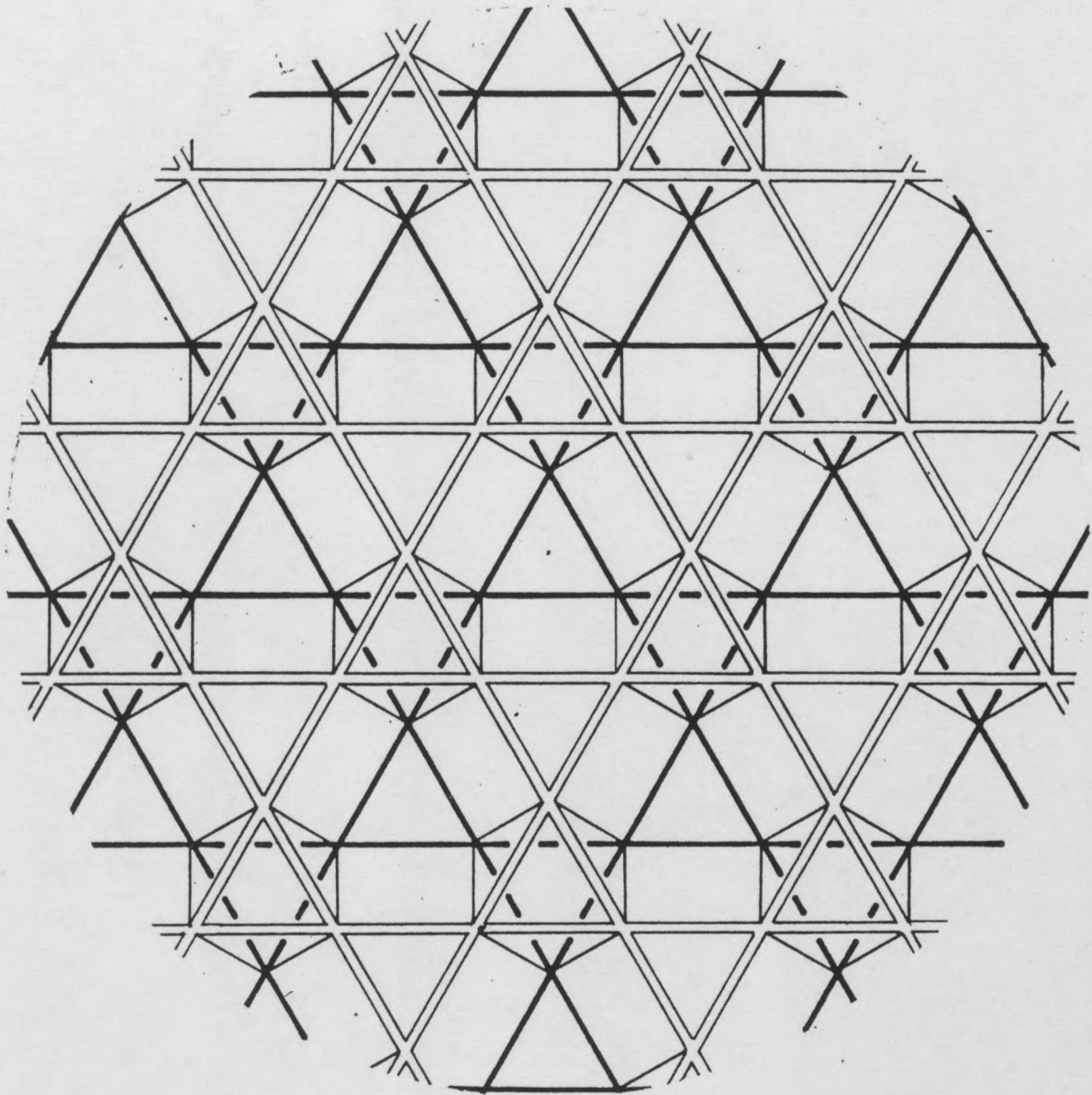
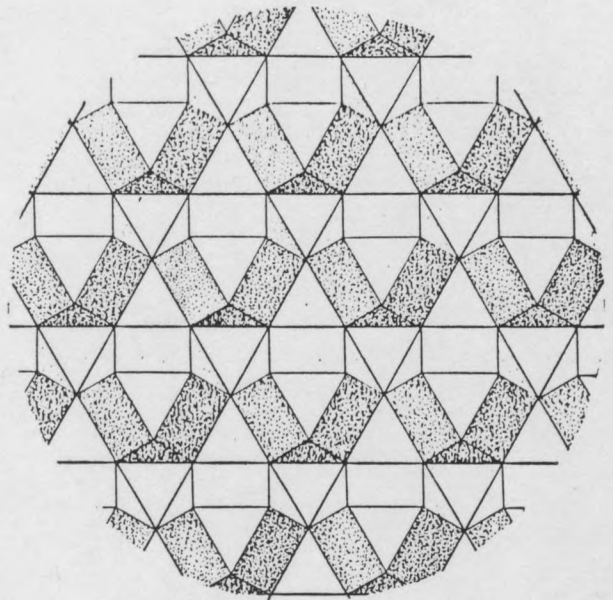
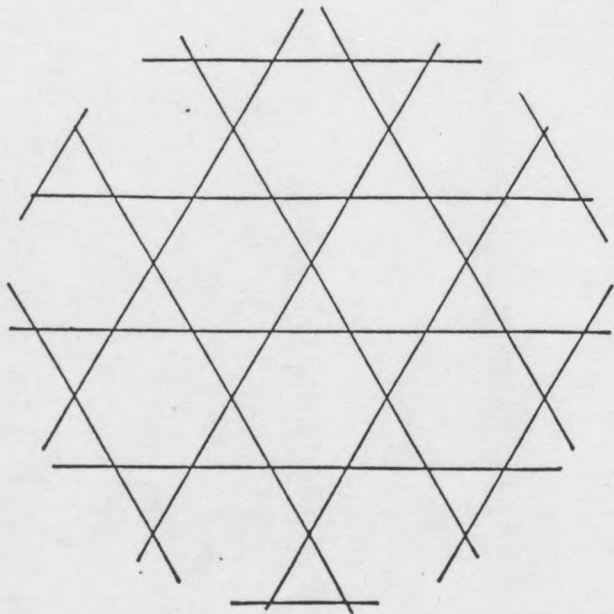


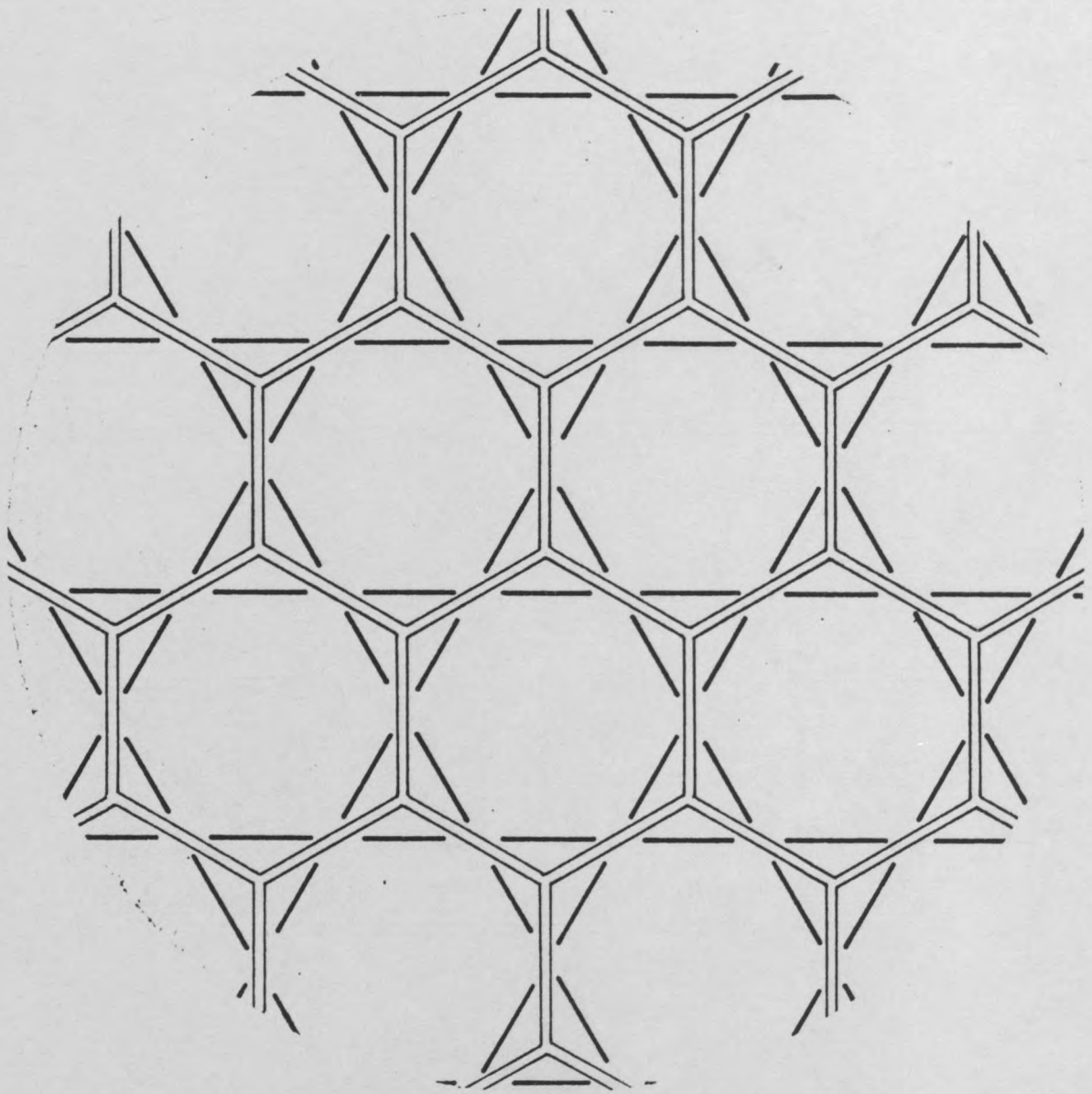
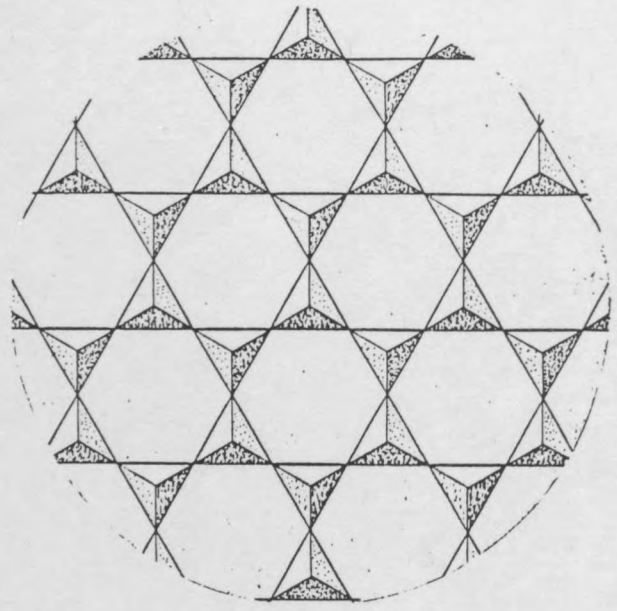
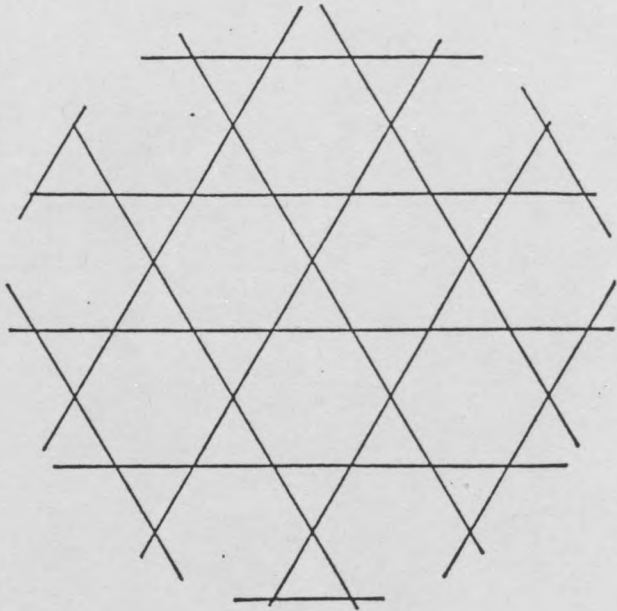




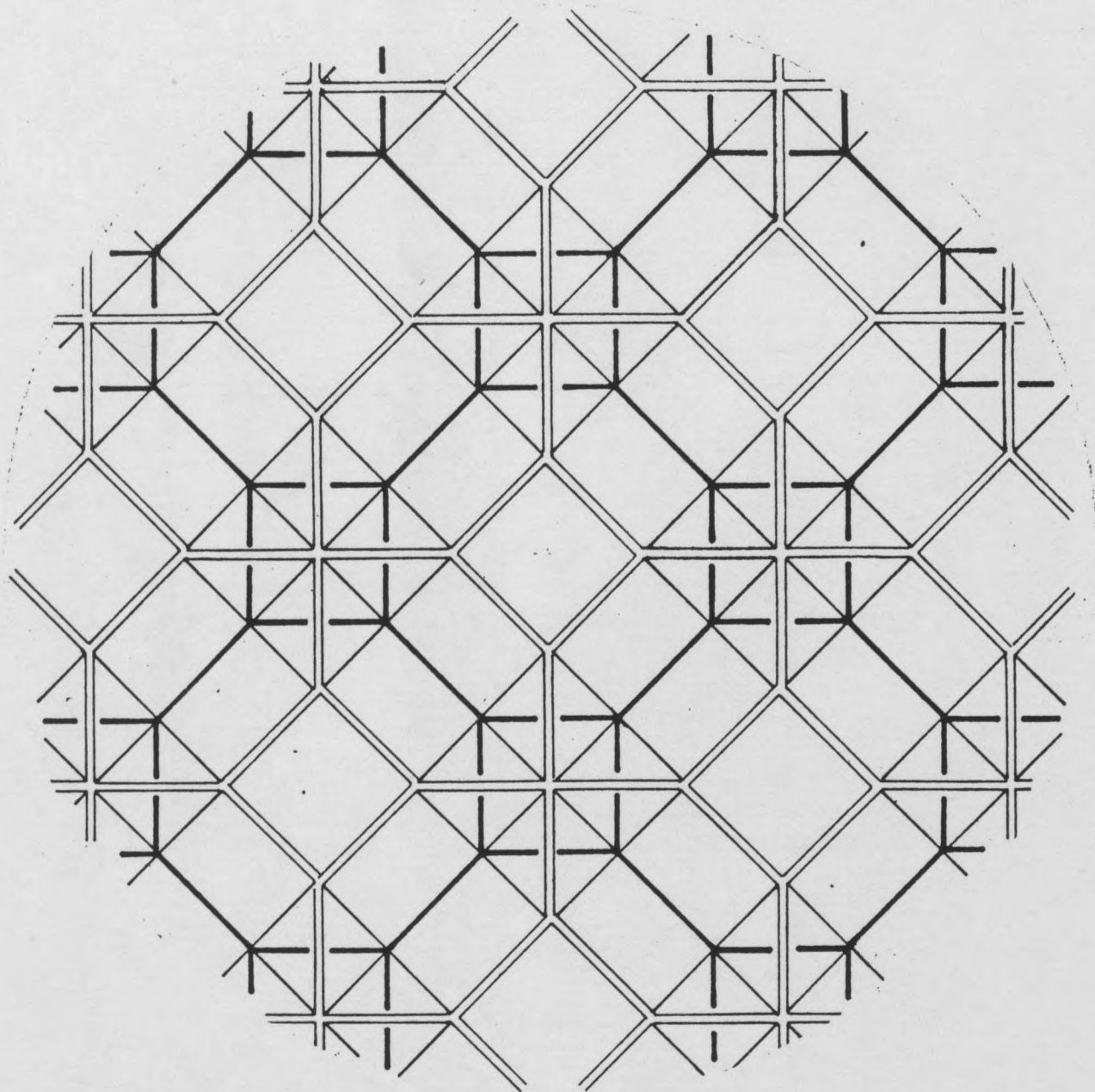
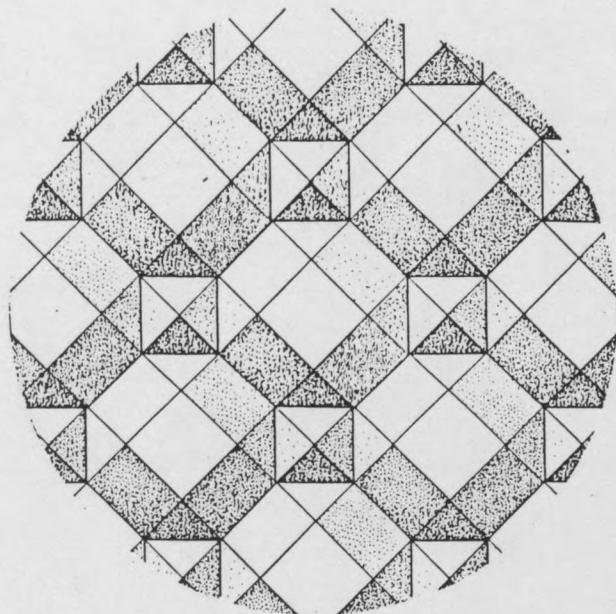
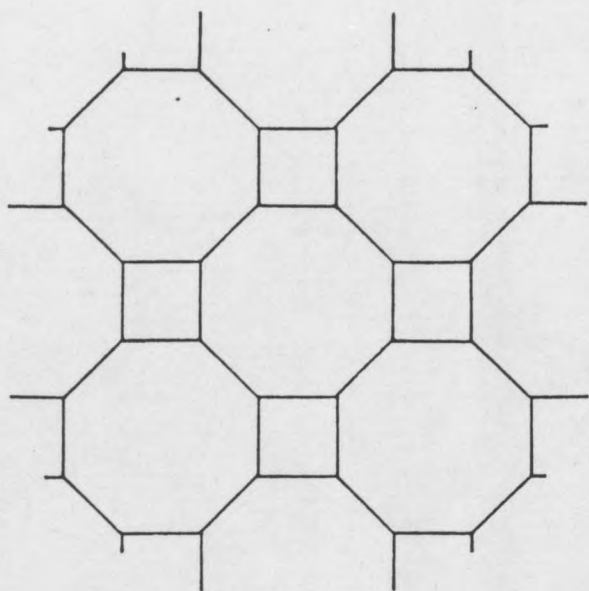


45

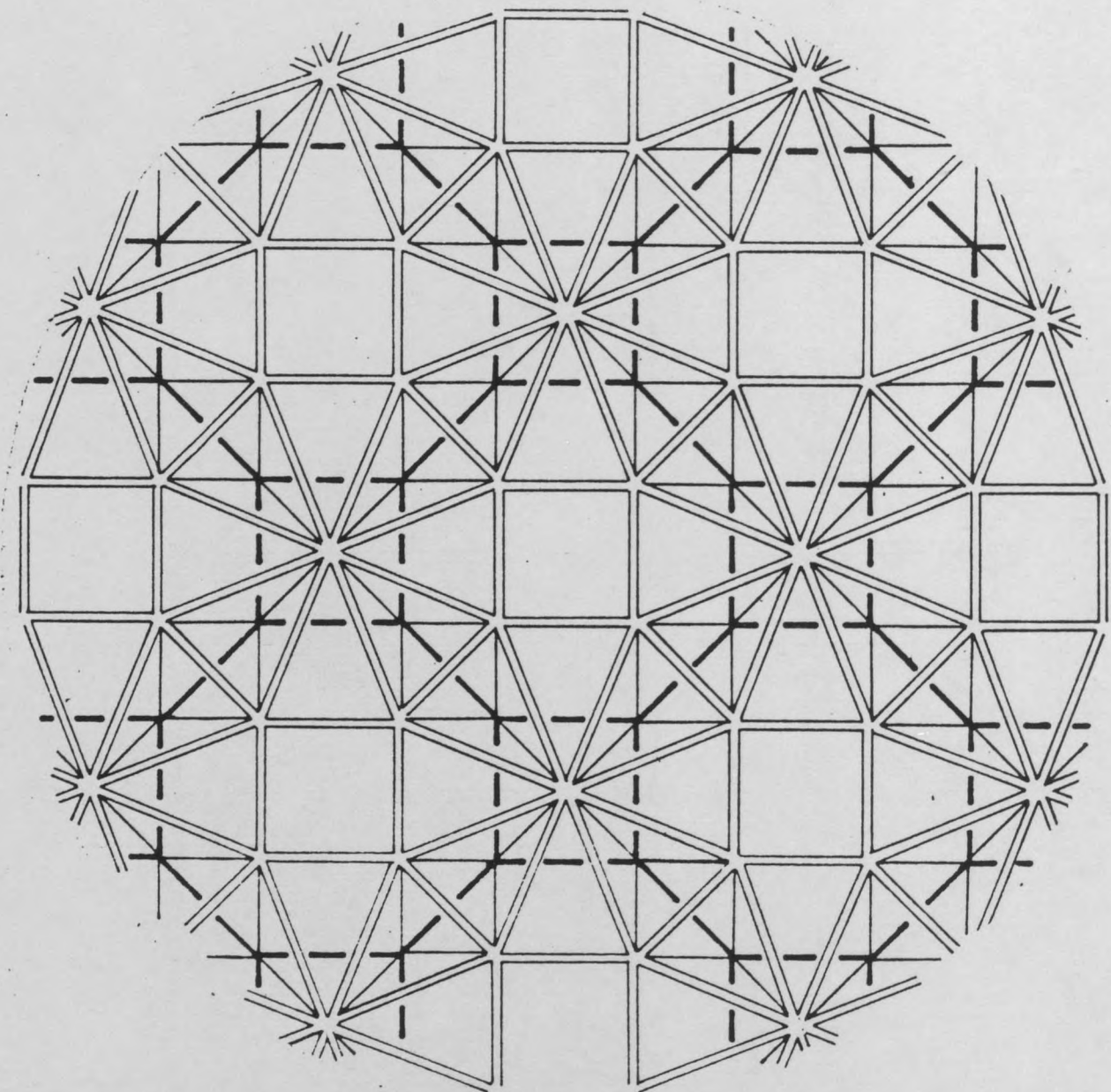
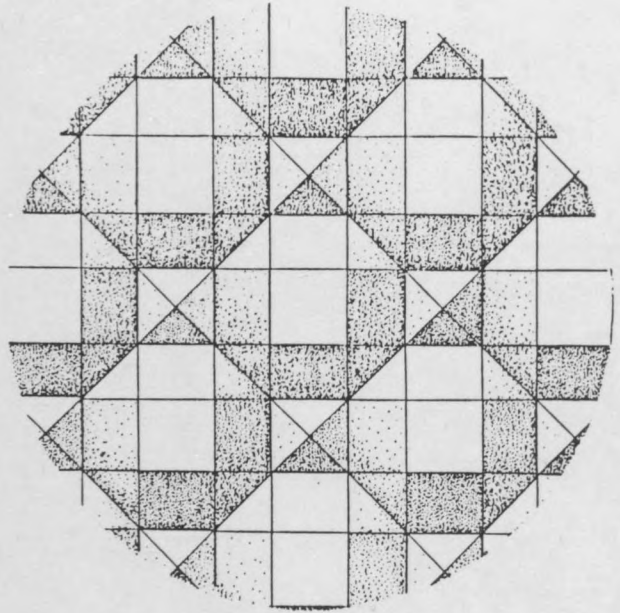
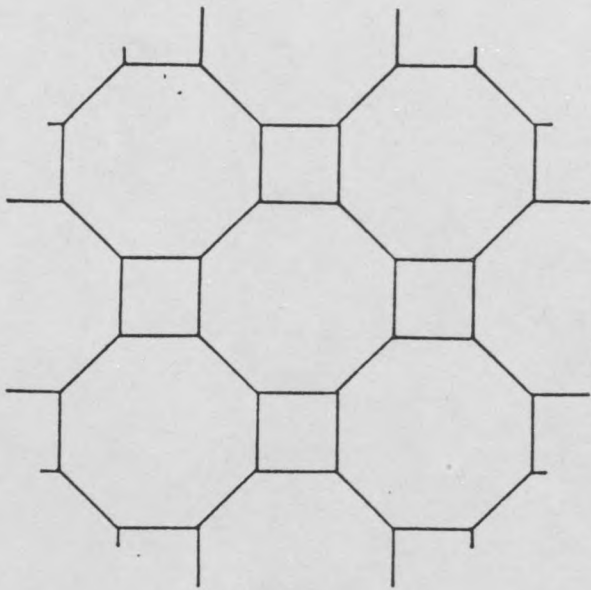




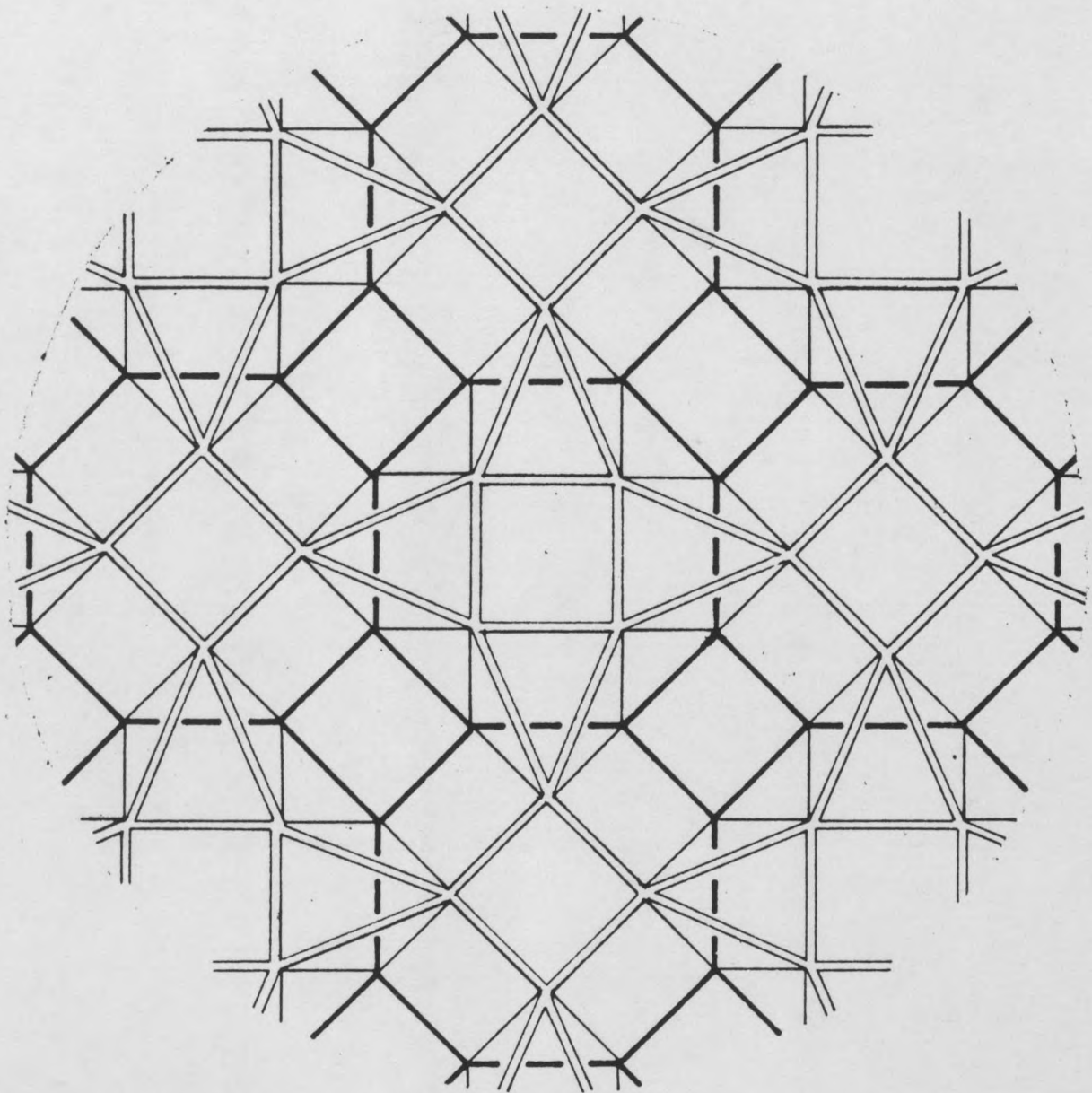
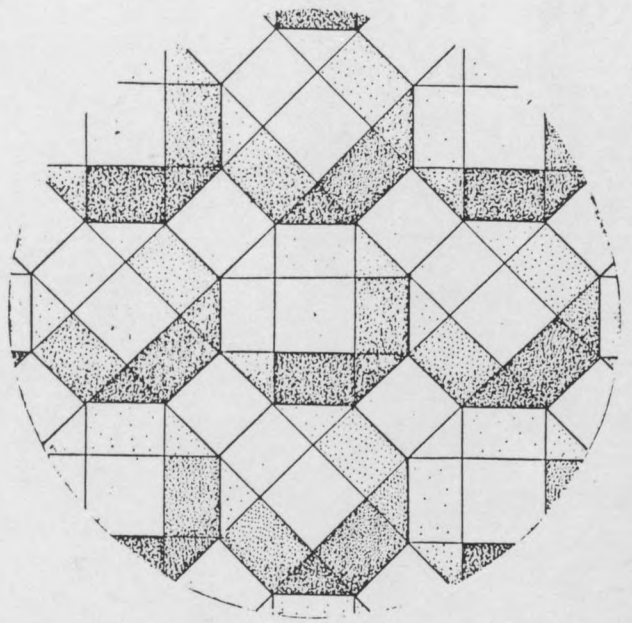
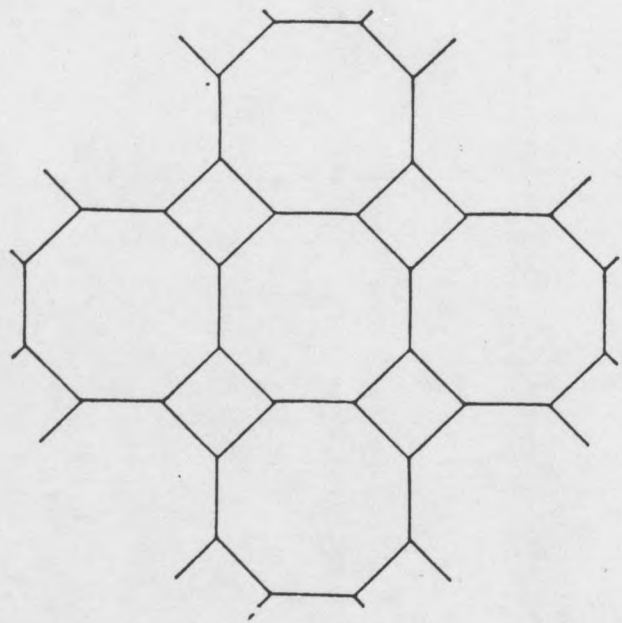
43



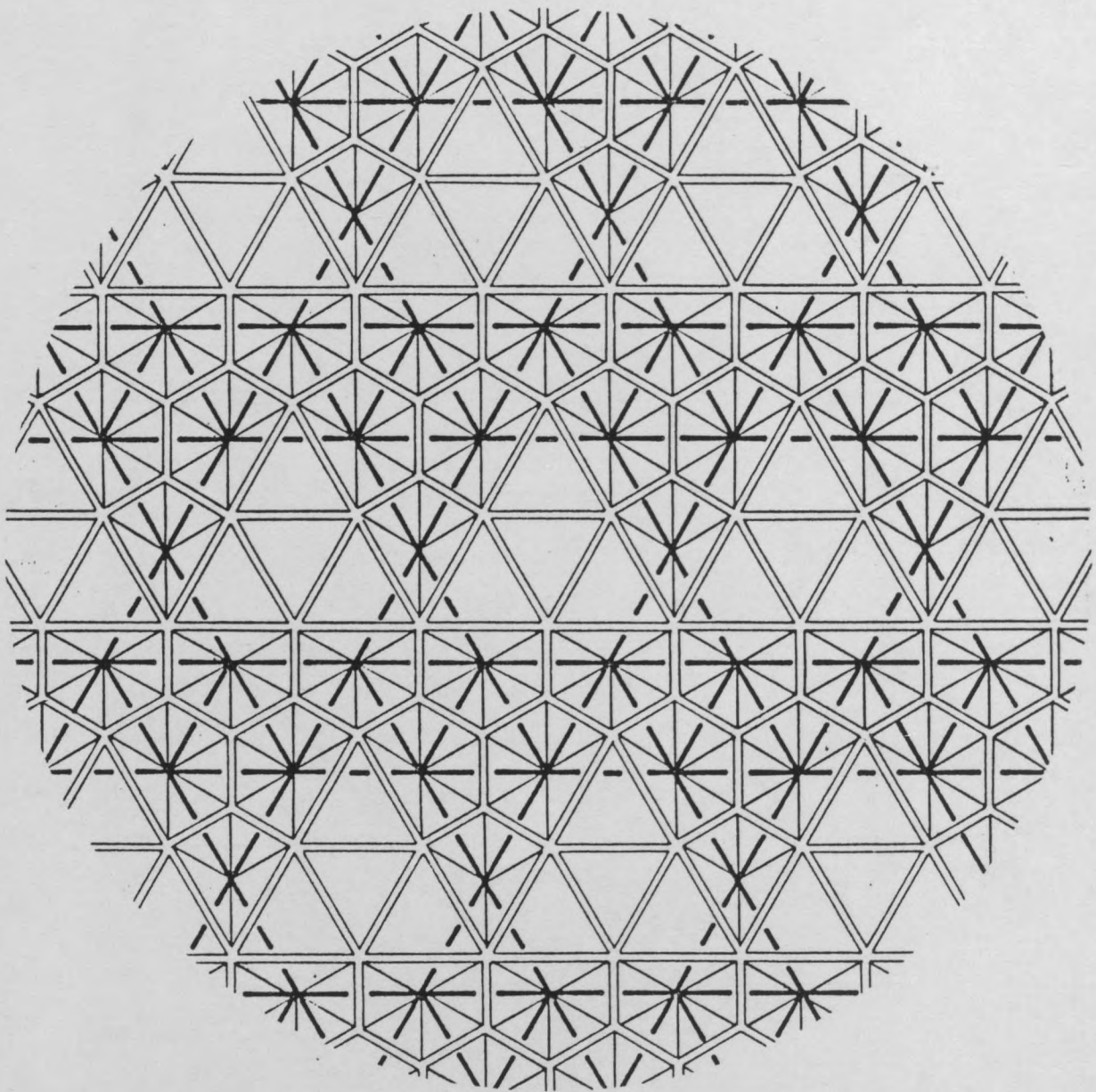
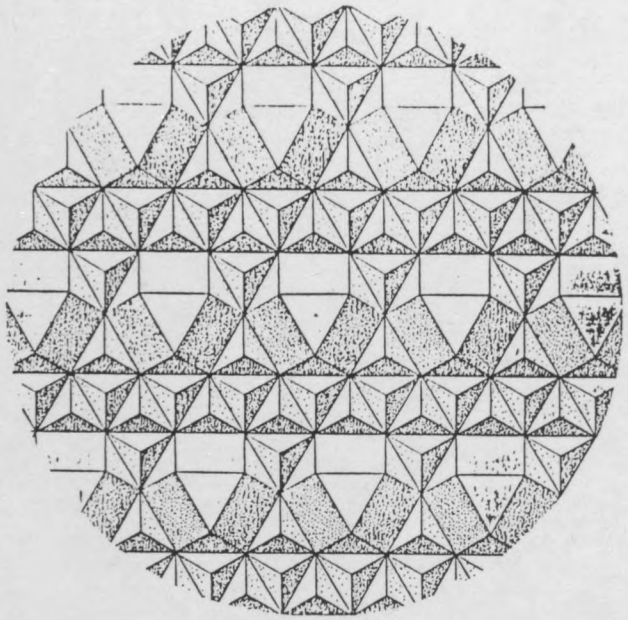
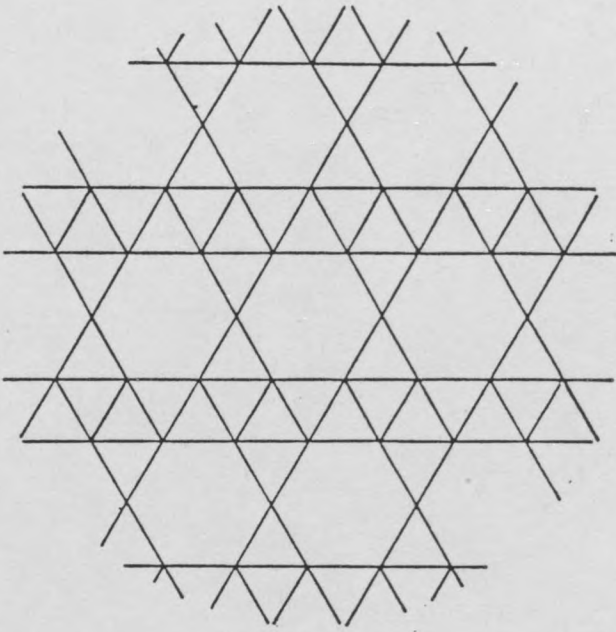
46

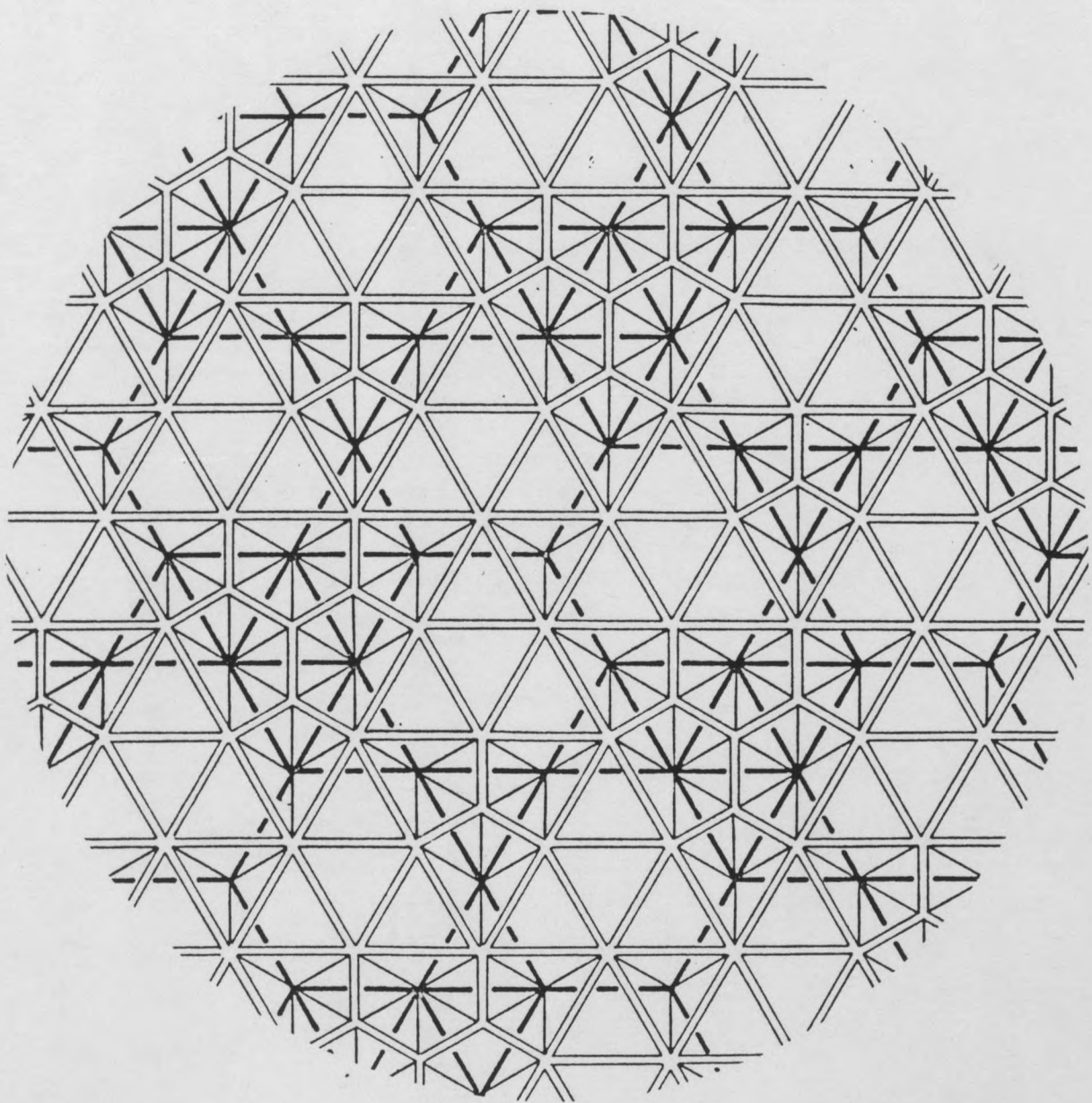
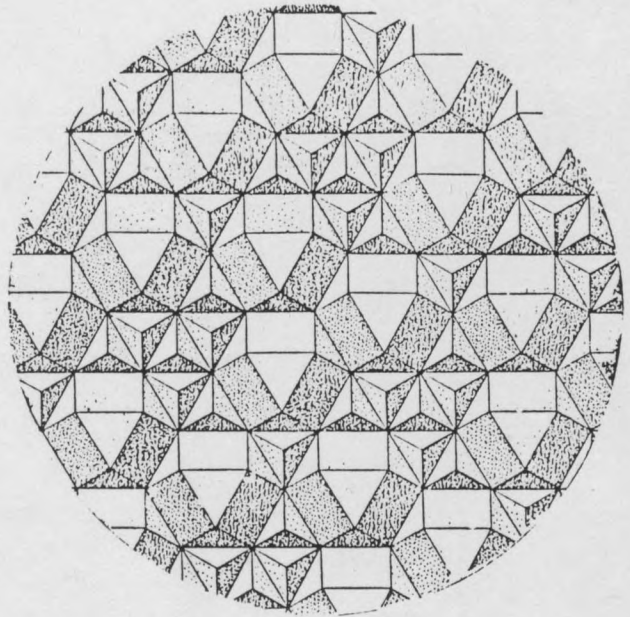
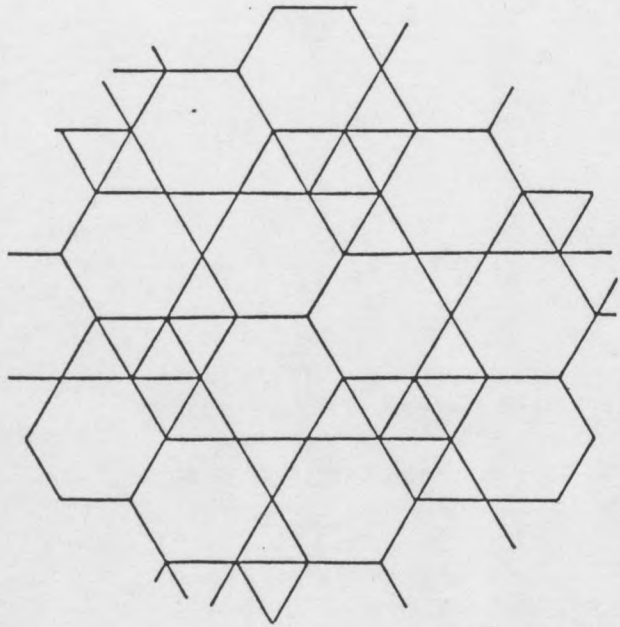


47



48





BIBLIOGRAPHIE

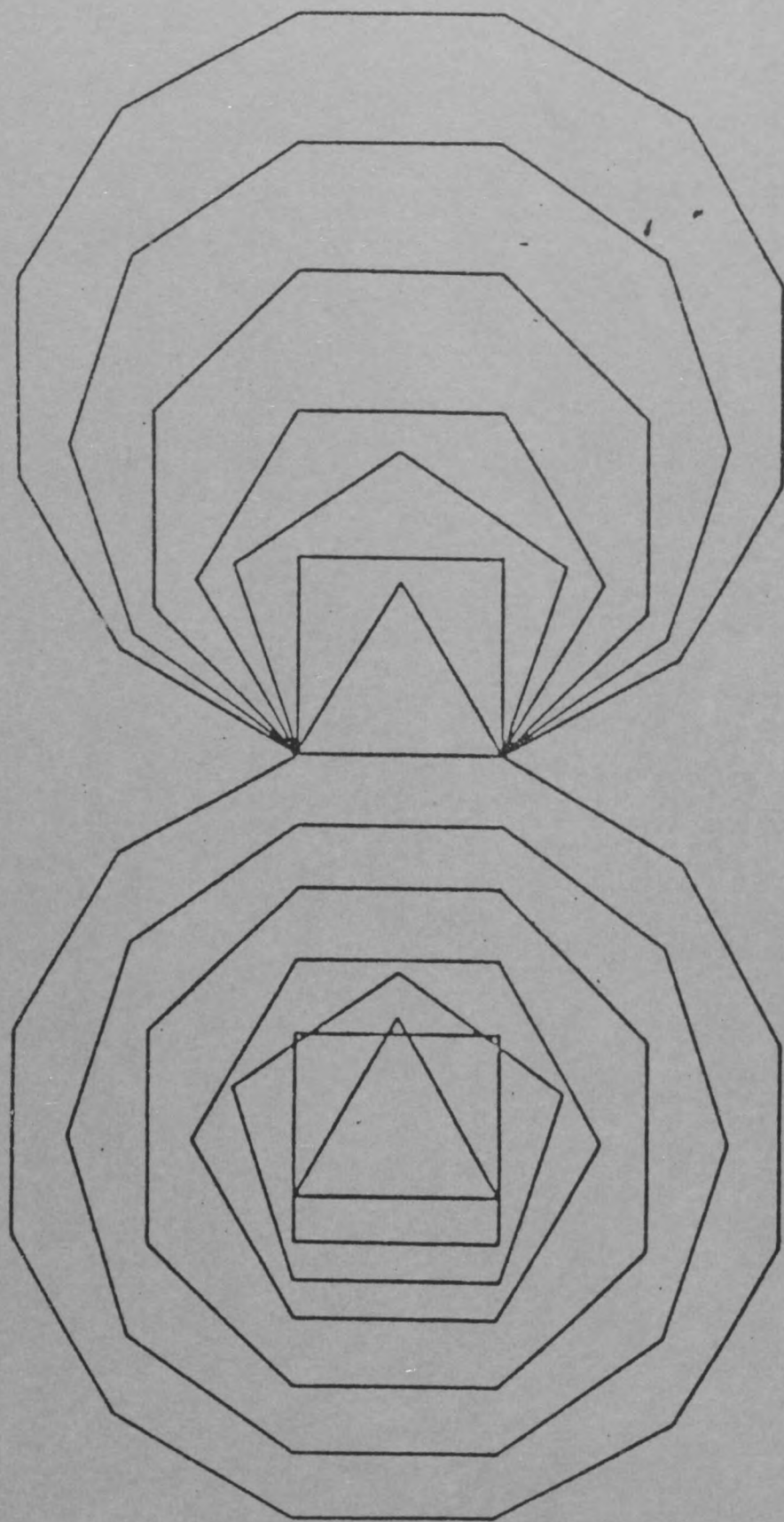
- BADOUREAU A. Mémoire sur les Figures Isocèles
Journal Ecole Polytechnique 1881
- BALL W. et
COXETER H.S.M. Mathematical Recreations and Essays
University of Toronto Press 1974
- BRAVAIS A. Mémoire sur les systèmes formés par
points distribués régulièrement.
Journal Ecole Polytechnique 1850
- BRUCKNER M. Vielecke und Vielflache
Tuebner 1900
- COXETER H.S.M. Introduction to Geometry
John Wiley and Sons New York 1961
- Regular Polytopes
Mac Milan New York 1963
- D'ARCY THOMPSON W. On Growth and Form
Cambridge University Press 1942
- EMMERICH D.G. Structures Stéréométriques et Réseaux
Techniques et Architecture
n°5 1963 et n°1 1965
- Réseaux
Int. Conf. on Space Structures
Blackwell London 1966
- Cours de Géométrie constructive
Morphologie
Grande Masse Paris 1967
- Systèmes Stéréométriques
Rapport de recherche C.O.R.D.A. 1977
- FEDOROV E.S. Systems of Planigons as
Typical Isohedra
Bull. Acad. Imp. Petersbourg 1916
- FEJES TOTH L. Regular Figures
Pergamon Press New York 1964
- FOURREY E. Curiosités Géométriques
Vuibert et Nony Paris 1907

- GARDNER M. Mathematical Puzzles and Diversions
Simon and Schuster I et II 1959 et 1961
- Extraordinary Nonperiodic Tiling that
enriches the Theorie of Tiles
Scientific American January 1977
- GOLDBERG M. Central Tessellations
in Scripta Mathematica 1955
- GRUNBAUM B. Lectures of Lost Mathematics
University of Washington
Seattle Fall 1975
- GRUNBAUM B. et
SHEPHARD G.C. Tiling by Regular Polygones
Mathematics Magazine 1977
- Isohedral Tiling of the Plane
by Polygones
in Math. Helvetici Birkhauser Basel 1978
- Some Problems on Plane Tiling
The Mathematical Gardner Wadsworth 1981
- HAJOS G. Bevezetes à Geometriaba
Tankonyvkiado Budapest 1966
- HILBERT D. et
COHN-VOSSEN S. Geometry and the Imagination
Chelsea New york 1952
- HILTON H. Mathematical Crystallography
Theory of Groups of Movements
Dover New York 1963
- KELVIN W. Homogenous Division of Space
Proc. Royal Soc. London
- KEPES G. Module Proportion Symmetry Rythm
Braziler New York 1966
- KEPLER J. Harmonices Mundi Libri V
Linz 1619
- LEVY L. Sur les pavages à l'aide
de polygones réguliers
Bull. Soc. Philomath. Paris 1890
- LIETZMAN W. Anschauliche Topologie
Oldenburg Munchen 1955
- LOEB A. Color and Symetry
John Wiley and Sons. New York 1971

- LYUSTERNIK L.A. Convex Figures and Polyhedra
Dover New York 1963
- MARTYN CUNDY H. et
ROLLET A.P. Mathematical Models
Clarendon Oxford 1961
- NICOLLE J. La Symétrie et ses Applications
Albin Michel Paris 1950
- PHILLIPS F.C. An Introduction to Crystallography
Longman New York 1971
- POINSOT L. Mémoire sur les Polygones et
les Polyèdres
Journal Ecole Polytechnique 1810
- RADEMACHER H. et
TOEPLITZ O. Zahlen und Figuren
Springer Berlin 1930
- SCHLEGEL V. Theorie der homogen Zusammengesetzten
Raümbilde
Nova Acta Leop. Carol 1883
- STEINHAUSS H. Mathématiques en Instantanés
Flammarion Paris 1964
- WARUSFEL A. Les Nombres et leurs Mystères
Microcosme Seuil 1961
- WEYL H. Symmetry
Princeton University Press 1952

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	3
POLYGONES ET LEURS ASSEMBLAGES	15
TESSELLATIONS	25
Tessellations régulières	29
Tessellations semi-régulières	33
Tessellations composites	43
Tessellations non homogènes	107
Tessellations automorphes	111
Arrangements concentriques et irréguliers	125
Opérations sur les tessellations	131
SURFACES GAUFREES	135
Surfaces gaufrées régulières	139
Surfaces gaufrées semi-régulières	147
Surfaces gaufrées composites	169
RESEAUX DOUBLE NAPPE	173
Réseaux duals	179
Réseaux automorphes	211
Réseaux gaufrés	215
BIBLIOGRAPHIE	232
TABLE DES MATIERES	235



Diffusé par les Editions de la Villette
144, rue de Flandre 75019 PARIS - Tel 42 08 79 70

Prix : 80 Frs