



**HAL**  
open science

# Schémas numériques pour la simulation des écoulements diphasiques compressibles transsoniques de type Baer-Nunziato

Tassadit Asmaa, Frédéric Coquel, Quang Huy Tran

► **To cite this version:**

Tassadit Asmaa, Frédéric Coquel, Quang Huy Tran. Schémas numériques pour la simulation des écoulements diphasiques compressibles transsoniques de type Baer-Nunziato. SMAI 2013, May 2013, Seignosse Le Penon, Landes, France. hal-01901958

**HAL Id: hal-01901958**

**<https://hal.science/hal-01901958>**

Submitted on 23 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Schémas numériques pour la simulation des écoulements diphasiques compressibles transsoniques de type Baer-Nunziato

Tassadit Asmaa<sup>1,2</sup>

Frédéric Coquel<sup>3</sup>

Quang Huy Tran<sup>1</sup>

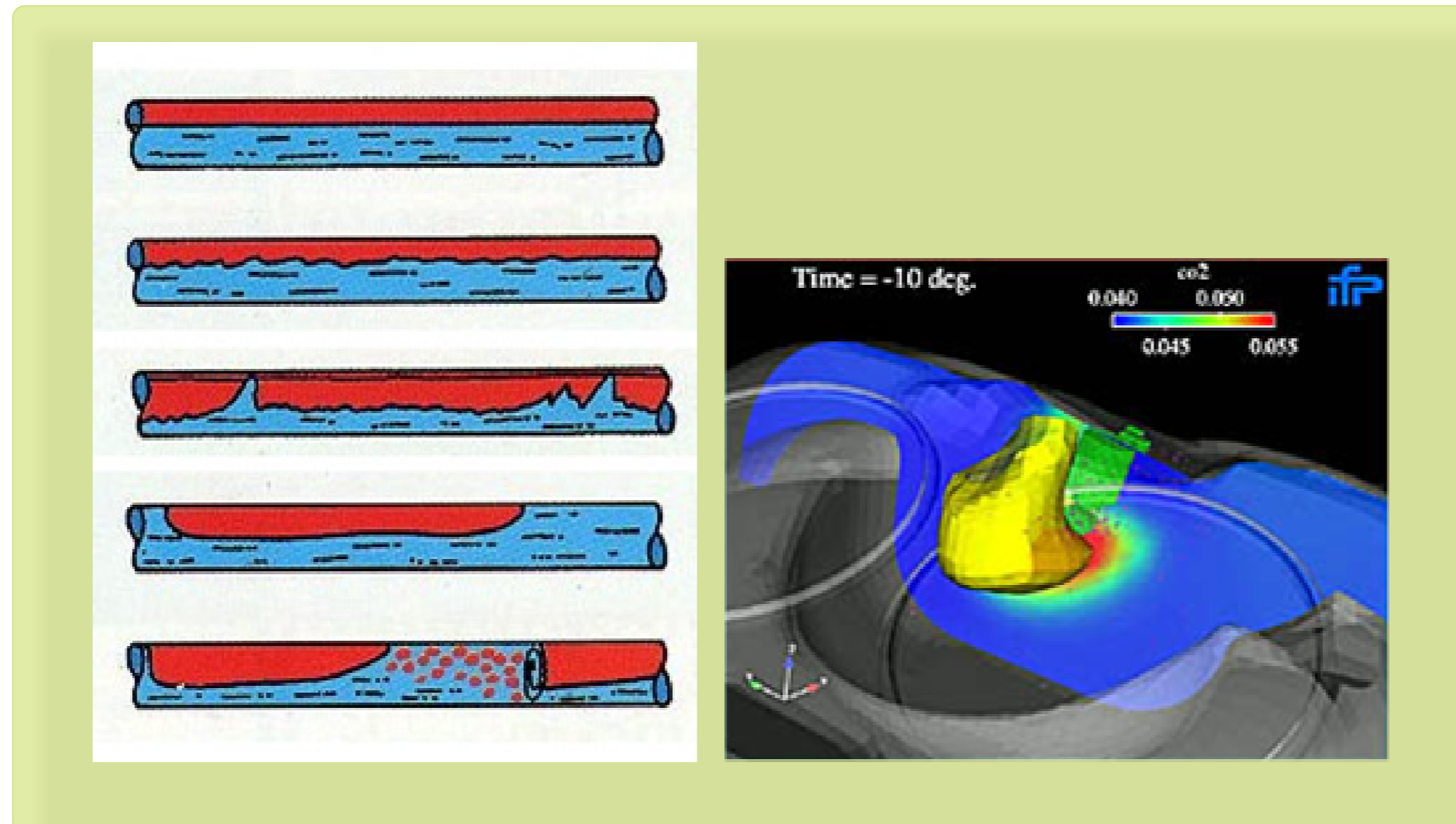
## Contexte scientifique et industriel

### Objectif

Simuler un écoulement diphasique transsonique.

### Applications

- simulation de bouchons dans les conduites pétrolières
- simulation des goutelettes de carburant dans les moteurs



### Propriétés à obtenir

Proposer un nouveau schéma numérique pour le système de Baer-Nunziato complet qui permettra de :

- s'affranchir des non-linéarités des lois d'état et contrôler la positivité des densités
- franchir la résonance : obtenir un schéma multi-régime et assurer l'unicité de la solution

### Difficultés

- résonance : perte de la base de diagonalisation lorsque la différence des vitesses de chaque phase est égale à la vitesse du son
- non-unicité de la solution : jusqu'à trois solutions dans la solution exacte

## Système de départ et son approximation

### Système de départ

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha) + \bar{u} \partial_x(\alpha) &= 0, \\ \partial_t(\alpha\rho) + \partial_x(\alpha\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\alpha\rho u) + \partial_x(\alpha\rho u^2 + \alpha p) - p \partial_x(\alpha) &= 0, \\ \partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}) &= 0, \\ \partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{\alpha}\bar{p}) - p \partial_x(\bar{\alpha}) &= 0, \end{aligned}$$

- lois d'état :  $p = p(\rho)$  et  $\bar{p} = \bar{p}(\bar{\rho})$  avec  $\alpha + \bar{\alpha} = 1$ ,
- $(\alpha, \rho, u, p)$  et  $(\bar{\alpha}, \bar{\rho}, \bar{u}, \bar{p})$  sont appelées *porteuse* et *granulaire* avec  $\alpha$  : fraction volumique,  $\rho$  : densité,  $u$  : vitesse et  $p$  : pression

### Système relaxé

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha) + \bar{u} \partial_x(\alpha) &= 0, \\ \partial_t(\alpha\rho) + \partial_x(\alpha\rho u) &= 0, \\ \partial_t(\alpha\rho u) + \partial_x(\alpha\rho u^2 + \alpha\Pi(\tau, \bar{\tau})) - \Pi(\tau, \bar{\tau}) \partial_x(\alpha) &= 0, \\ \partial_t(\alpha\rho\bar{\tau}) + \partial_x(\alpha\rho\bar{\tau}u) &= \lambda(\alpha\rho)(\tau - \bar{\tau}), \\ \partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}) &= 0, \\ \partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{\alpha}\bar{\Pi}(\bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}})) - \Pi(\tau, \bar{\tau}) \partial_x(\bar{\alpha}) &= 0, \\ \partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{\tau}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{\tau}\bar{u}) &= \lambda(\bar{\alpha}\bar{\rho})(\bar{\tau} - \bar{\bar{\tau}}). \end{aligned}$$

$$\Pi(\tau, \bar{\tau}) = p(\bar{\tau}) + a^2(\bar{\tau} - \tau), \quad \bar{\Pi}(\bar{\tau}, \bar{\bar{\tau}}) = \bar{p}(\bar{\bar{\tau}}) + \bar{a}^2(\bar{\bar{\tau}} - \bar{\tau})$$

$\tau = 1/\rho$ ,  $a$  et  $\bar{a}$  vitesses lagrangiennes

### Résolution par splitting de phase

Idee : faire des allers-retours entre le sous-système granulaire :

$$\begin{aligned} \partial_t(\bar{\alpha}) + \bar{u} \partial_x(\bar{\alpha}) &= 0, & (3a) \\ \partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}) &= 0, & (3b) \\ \partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{\alpha}\bar{\Pi}) - \Pi \partial_x(\bar{\alpha}) &= 0, & (3c) \\ \partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{\tau}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{\tau}\bar{u}) &= 0, & (3d) \end{aligned}$$

connaissant  $\Pi$  constant, et le sous-système porteur connaissant  $\bar{u}$  constant :

$$\begin{aligned} \partial_t(\alpha) + \bar{u} \partial_x(\alpha) &= 0, & (4a) \\ \partial_t(\alpha\rho) + \partial_x(\alpha\rho u) &= 0, & (4b) \\ \partial_t(\alpha\rho u) + \partial_x(\alpha\rho u^2 + \alpha\Pi) - \Pi \partial_x(\alpha) &= 0, & (4c) \\ \partial_t(\alpha\rho\bar{\tau}) + \partial_x(\alpha\rho\bar{\tau}u) &= 0. & (4d) \end{aligned}$$

Revient à résoudre l'équation algébrique scalaire non-linéaire :

$$\Pi[\alpha] \xrightarrow[\text{(3)}]{\text{phase granulaire}} \bar{u} \xrightarrow[\text{(4)}]{\text{phase porteuse}} \Pi[\alpha].$$

### Nouveau schéma, interprétation en terme d'EDP

$$\partial_t(\alpha) + \bar{u} \partial_x(\alpha) = 0, \quad (5a)$$

$$\partial_t(\alpha\rho) + \partial_x(\alpha\rho u) = 0, \quad (5b)$$

$$\partial_t(\alpha\rho u) + \partial_x(\alpha\rho u^2 + \alpha\Pi) - \Pi \partial_x(\alpha) = (\bar{\Pi}_\beta - \Pi) \partial_x \alpha, \quad (5c)$$

$$\partial_t(\alpha\rho\bar{\tau}) + \partial_x(\alpha\rho\bar{\tau}u) = \frac{\theta}{\theta\tau + (1-\theta)\bar{\tau}} \frac{(u-\bar{u})(\bar{\Pi}_\beta - \Pi)}{a^2 + p_\tau(\bar{\tau})} \partial_x \alpha \quad (5d)$$

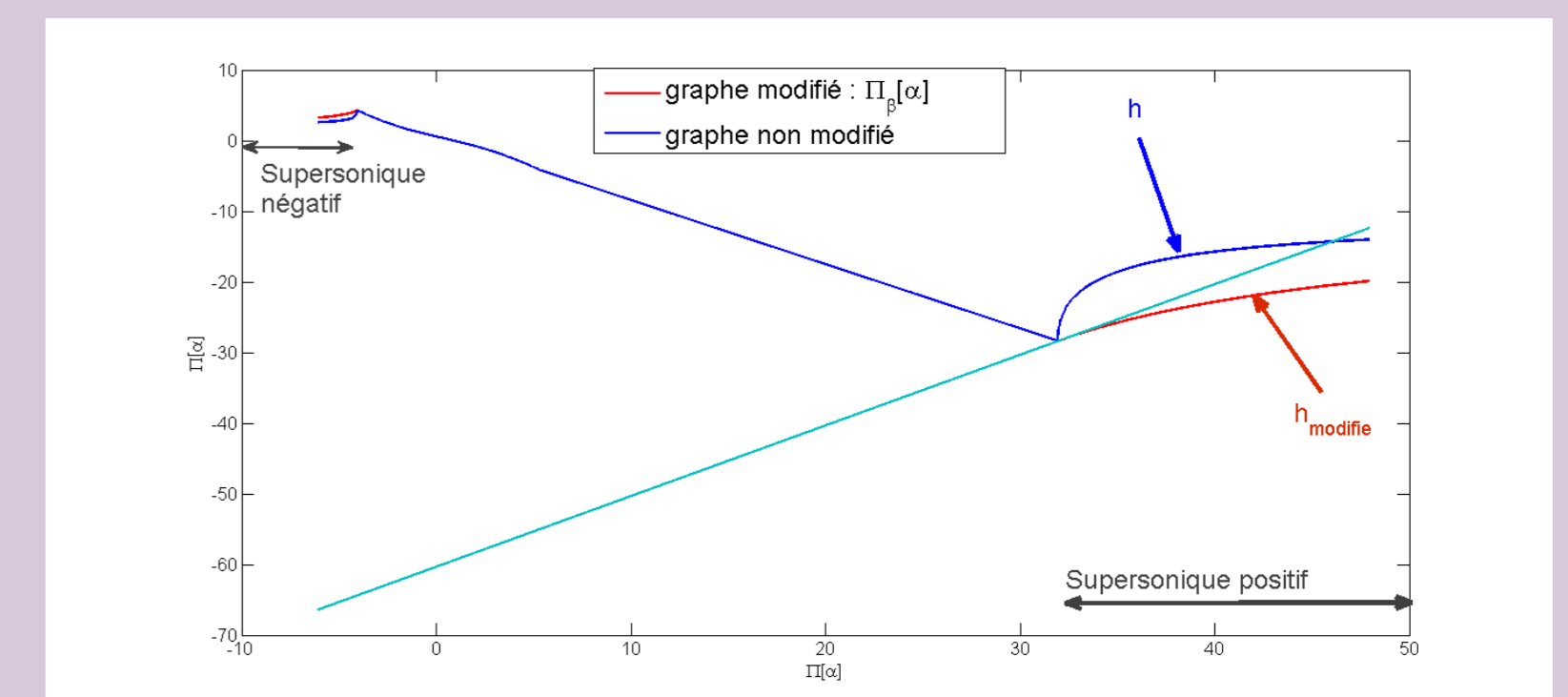
$$\partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}) = 0, \quad (5e)$$

$$\partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{\alpha}\bar{\Pi}) - \Pi \partial_x(\bar{\alpha}) = (\bar{\Pi}_\beta - \Pi) \partial_x \bar{\alpha}, \quad (5f)$$

$$\partial_t(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{\tau}) + \partial_x(\bar{\alpha}\bar{\rho}\bar{\tau}\bar{u}) = 0. \quad (5g)$$

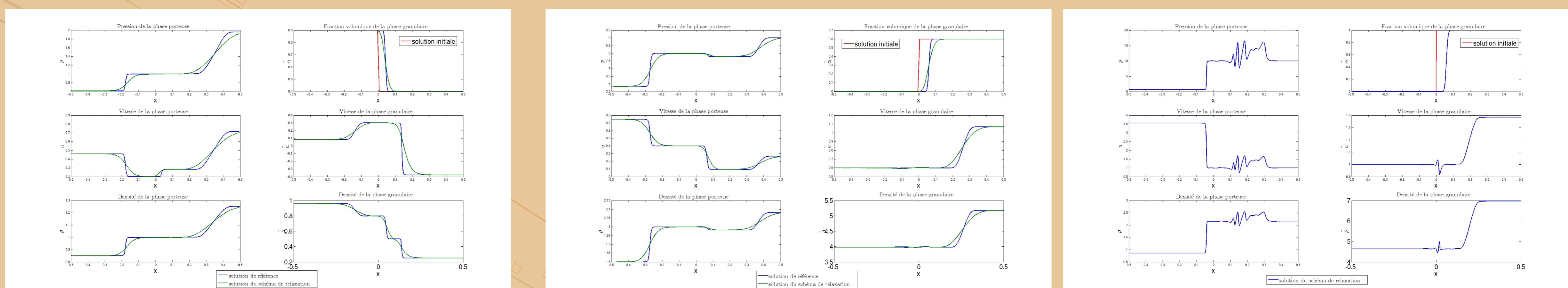
- Modification par régularisation dissipative : démonstration avec (5d)
- Soit  $\theta \in [0, 1]$  : choix de  $\theta$  pour assurer positivité et bornitude des densités : robustesse.

### Modification du graphe en supersonique relatif



## Résultats

### Cas test 1 : Ondes multiples ; cas test 2 : une phase évanescente ; cas test 3 : deux phases évanescentes



### Conclusion

- Calculs pour tous les régimes d'écoulement
- Dissipativité, positivité des densités : contrôlées
- Subsonique : validé
- Unicité, positivité, bornitude des densités même pour les phases évanescents

<sup>1</sup> IFP Energies nouvelles  
DTIMA (R11)  
1 & 4, avenue de Bois-Préau  
92852 Reuil-Malmaison Cedex

<sup>2</sup> École Doctorale Paris Centre  
Case 188  
4 place Jussieu  
75252 Paris Cedex 05

<sup>3</sup> École Polytechnique  
CMAP UMR 7641  
Route de Saclay  
91128 PALAISEAU Cedex