



HAL
open science

Etudes des modèles d'endommagement à gradient en grandes déformations

Blandine Crabbé, Jean-Jacques Marigo, Eric Chamberland, Joachim Guilié

► **To cite this version:**

Blandine Crabbé, Jean-Jacques Marigo, Eric Chamberland, Joachim Guilié. Etudes des modèles d'endommagement à gradient en grandes déformations. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899363

HAL Id: hal-01899363

<https://hal.science/hal-01899363>

Submitted on 19 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

13ème Colloque National en Calcul des Structures

B. Crabbé¹, J.-J. Marigo¹
E. Chamberland², J. Guilié³

¹ Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique, Palaiseau, crabbe@lms.polytechnique.fr, marigo@lms.polytechnique.fr

² GIREF, Université Laval, Québec, eric.chamberland@giref.ulaval.ca

³ Centre de technologie de Ladoux, Michelin, Clermont-Ferrand, joachim.guilie@fr.michelin.com

Résumé — Nous étudions les modèles d'endommagement à gradient dans le cadre des grandes déformations. Pour cela, nous établissons les solutions analytiques homogènes et localisées dans le cas unidimensionnel en choisissant un potentiel hyperélastique adapté. Les résultats sont ensuite confrontés à des simulations numériques effectuées via l'implémentation de ces modèles dans le logiciel éléments finis FEniCS.

Mots clés — Endommagement à gradient, hyperélasticité.

1 Introduction

1.1 Introduction

Griffith fut l'un des pionniers de la mécanique de la rupture, et le premier à concevoir un lien entre la propagation d'une fissure et la création d'une énergie de surface. Il a su voir la croissance d'une fissure comme le résultat d'une compétition entre la restitution d'énergie de déformation et la création d'une énergie de surface au cours d'un incrément de longueur de fissure. Depuis ce temps, l'intérêt pour la modélisation de la nucléation et la propagation des fissures n'a fait que croître. En 1998, Francfort et Marigo ont proposé une approche variationnelle de la rupture [2], dans laquelle l'évolution de l'endommagement ou d'une fissure est régie par un principe de minimisation d'énergie. Dans le cadre de matériaux fragiles, avec un comportement adoucissant, ils ont construit des modèles d'endommagement qui reposent sur 3 grands principes : l'irréversibilité, la stabilité et le bilan d'énergie. Ils ont régularisé ces modèles en ajoutant à l'énergie un terme contenant un gradient spatial d'endommagement pondéré par un paramètre ℓ appelé *longueur caractéristique*. Au cours des dernières années, ces modèles ont été largement enrichis par l'apport de couplages avec de la plasticité, de la température ou de la dynamique. Cependant, ils sont toujours restés dans le cadre des petites déformations. Le but de ce travail est désormais d'étudier la pertinence de ces modèles dans un contexte de grandes déformations, tant d'un point de vue analytique que numérique.

1.2 Notations

Par la suite, nous noterons \mathbf{E} le tenseur des déformations de Green-Lagrange, \mathbf{F} le tenseur gradient de déformation, $\mathbf{\Pi}$ le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, \mathbf{S} le second tenseur de Piola-Kirchhoff, $\boldsymbol{\sigma}$ le tenseur des contraintes de Cauchy, et respectivement E, F, Π, S, σ leurs valeurs scalaires dans le cas 1D. La variable scalaire d'endommagement sera notée α . Le déplacement scalaire sera noté u . Les dérivées par rapport à la coordonnée spatiale x seront notées avec un prime, comme par exemple u' . Le produit scalaire entre deux vecteurs sera noté avec un \cdot , comme par exemple $\nabla\alpha \cdot \nabla\alpha$. λ et μ sont les coefficients de Lamé, A le module d'Young. ψ est le potentiel élastique et W l'énergie de déformation. On note Ω la configuration de référence de la structure étudiée.

On note \mathcal{C}_t l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles à l'instant t , et $\mathcal{D}(\alpha_t) = \{\beta : \alpha_t \leq \beta \leq 1 \text{ dans } \Omega\}$ l'ensemble des champs d'endommagement accessibles depuis α à l'instant t , c'est-à-dire qui tiennent compte de la condition d'irréversibilité.

2 Hyperélasticité endommagement

2.1 Modèle

L'étude de modèles d'endommagement à gradient en grandes déformations en 1D nécessite le choix d'un potentiel élastique adapté. Le modèle d'hyperélasticité le plus élémentaire est celui de Saint-Venant Kirchhoff. Cependant, il possède certaines lacunes auxquelles nous pallions en utilisant un potentiel de Ciarlet-Geymonat [1], qui est une extension de ce modèle. La construction d'une telle loi repose sur plusieurs critères : cette loi doit être polyconvexe en \mathbf{F} et vérifier les conditions (1), (2), (3)

$$\psi(\mathbf{F}) = \frac{\lambda}{2}(\text{tr}\mathbf{E})^2 + \mu\text{tr}(\mathbf{E}^2) + O(\|\mathbf{E}\|^3) \quad (1)$$

$$\psi(\mathbf{F}) \rightarrow +\infty \quad \text{quand} \quad \det(\mathbf{F}) \rightarrow 0^+ \quad (2)$$

$$\psi \geq (\|\mathbf{F}\| + \|\text{cof}\mathbf{F}\| + \det\mathbf{F}) \quad (3)$$

où tr désigne la trace d'un tenseur, $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et $\|\text{cof}\mathbf{F}\| = \frac{1}{2} [(\text{tr}\mathbf{F}^T\mathbf{F})^2 - \text{tr}(\mathbf{F}^T\mathbf{F})^2]$. On remarque que le matériau de Saint Venant-Kirchhoff est le matériau le plus simple dont la loi vérifie (1). La condition (2) traduit le fait que pour réduire un volume à 0, une énergie infinie est nécessaire. Enfin, la condition (3) exprime la coercivité de la fonction ψ .

On part d'une écriture générale d'une loi vérifiant les conditions précédentes, sous la forme

$$\psi(\mathbf{F}) = a\|\mathbf{F}\|^2 + b\|\text{cof}\mathbf{F}\|^2 + c(\det\mathbf{F})^2 - d\ln(\det\mathbf{F})^2 + e, \quad (4)$$

où a, b, c, d et e sont des constantes réelles, et le développement de cette expression mène à l'écriture de la densité d'énergie de Ciarlet-Geymonat pour un espace de dimension 3

$$\psi(\mathbf{F}) = \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right)\text{tr}(\mathbf{E}) + \frac{\lambda}{2} [\text{tr}^2(\mathbf{E}) - \text{tr}(\mathbf{E}^2)] + 8c \det(\mathbf{E}) - \frac{\lambda + 2\mu}{4} \ln \det(1 + 2\mathbf{E}) \quad (5)$$

où c une constante matériau strictement positive, respectant la relation $c = \frac{1}{4}(\Gamma'(1) + \Gamma''(1))$, $\Gamma'(1) \in \left[-\frac{\lambda}{2} - \mu, -\mu\right]$ et $\Gamma''(1) \in \left[\frac{\lambda}{2} + \mu, \lambda + \mu\right]$.

Pour écrire le potentiel de Ciarlet-Geymonat en dimension 1, il faut repartir de (4), qui s'écrit alors

$$\psi(F) = (a + c)F^2 - d\ln F^2 + e \quad (6)$$

On développe $\ln F^2$ à l'ordre 2

$$\ln F^2 = 2E - \frac{(2E)^2}{2} + O(\|E\|^3) \quad (7)$$

La condition (1) donne

$$(a + c)(1 + 2E) - d(2E - 2E^2) + e = \frac{A}{2}E^2, \quad (8)$$

et on obtient finalement par identification

$$a + c = d = -e = \frac{A}{4}. \quad (9)$$

D'où l'écriture de la densité d'énergie de Ciarlet-Geymonat en 1D

$$\psi(F) = \frac{A}{2} \left(E - \frac{1}{2} \ln(1 + 2E) \right) \quad (10)$$

où

$$E = u' + \frac{u'^2}{2}. \quad (11)$$

Pour des petites déformations, le développement de $\ln(1 + 2E) = 2\ln(1 + u')$ autour de 0 donne une approximation de la densité d'énergie

$$\psi(F) = \frac{A}{2}u'^2, \quad (12)$$

et l'on retrouve bien l'expression de la loi de Hook. Pour des grandes déformations, on a $u' \ll u'^2$ et $\ln(1+u') \ll u'^2$, ce qui donne

$$\psi(F) = \frac{A}{2} \frac{u'^2}{2}. \quad (13)$$

La contrainte de Piola-Kirchhoff 2 vaut

$$S = \frac{A}{2} \frac{2E}{1+2E}, \quad (14)$$

et en dimension 1, la contrainte de Cauchy est égale à la contrainte de Piola-Kirchhoff 1, d'où

$$\sigma = \Pi = \frac{A}{2} \frac{2E}{\sqrt{1+2E}} \quad (15)$$

ou encore

$$\sigma = \frac{A}{2} \left(1 + u' - \frac{1}{1+u'} \right). \quad (16)$$

2.2 Evolution de l'endommagement dans une barre soumise à une traction simple

2.2.1 Energie totale et stabilité d'ordre 1

Afin de prendre en compte l'évolution de l'endommagement au sein du matériau hyperélastique, on doit définir la relation de dépendance du module d'Young du matériau au paramètre d'endommagement

$$A(\alpha) = A_0(1 - \alpha)^2 \quad (17)$$

où A_0 est le module d'Young du matériau sain, ainsi que l'énergie dissipée au cours d'un processus d'endommagement homogène

$$w(\alpha) = w_1 \alpha \quad (18)$$

avec w_1 une constante.

Soit (u, α) un couple de déplacement-endommagement admissible de $\mathcal{C}_I \times \mathcal{D}(\alpha_I)$. L'énergie totale du système en dimension 1 en l'absence de forces extérieures s'écrit

$$\mathcal{E}_I(u, \alpha) = \int_{\Omega} \left[\frac{A(\alpha)}{2} \left((u' + \frac{u'^2}{2}) - \ln(1+u') \right) + w(\alpha) + \frac{1}{2} w_1 \ell^2 (\alpha')^2 \right] dx \quad (19)$$

que l'on dérive au sens de Gâteaux dans la direction (v, β) afin d'exprimer la stabilité d'ordre 1 (voir [4])

$$\begin{aligned} \mathcal{E}'_I(u, \alpha)(v, \beta) &= \int_{\Omega} \frac{A(\alpha)}{2} \left((1+u') - \frac{1}{1+u'} \right) v' dx + \int_{\Omega} \frac{A'(\alpha)}{2} \left((u' + \frac{u'^2}{2}) - \ln(1+u') \right) \beta dx \\ &+ \int_{\Omega} (w'(\alpha) \beta + w_1 \ell^2 \alpha' \beta') dx \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_I \times \mathcal{D}(\alpha_I) \end{aligned} \quad (20)$$

En prenant $\beta = 0$ dans (20), on obtient

$$\int_{\Omega} \frac{A(\alpha)}{2} \left(1 + u' - \frac{1}{1+u'} \right) v' = 0 \quad \forall v \in \mathcal{C}_I \quad (21)$$

et l'on retrouve l'équation d'équilibre en 1D

$$\Pi'(x) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (22)$$

En prenant $v = 0$, on obtient le critère d'endommagement pour un matériau hyperélastique de Ciarlet-Geymonat

$$\frac{A'(\alpha)}{2} \left(u' + \frac{u'^2}{2} - \ln(1+u') \right) + w'(\alpha) - w_1 \ell^2 \alpha'' \geq 0 \quad (23)$$

qui s'écrit aussi

$$\frac{A'(\alpha)}{2} \left(E - \frac{1}{2} \ln(1+2E) \right) + w'(\alpha) - w_1 \ell^2 \alpha'' \geq 0 \quad (24)$$

Remarque. Comme écrit en introduction, la loi d'évolution de l'endommagement telle qu'établie dans [2] comporte trois items : l'irréversibilité, la stabilité et le bilan d'énergie. L'irréversibilité de l'endommagement est satisfaite en choisissant un espace pour les champs d'endommagement adéquat. Le bilan d'énergie donne quant à lui la condition de cohérence dans le domaine Ω et sur ses bords. Toutefois, il n'est pas utilisé dans les simulations numériques, c'est pour cela qu'il n'est pas détaillé ici.

2.2.2 Endommagement homogène

Soit une barre de longueur L de section homogène soumise à une traction croissante à déplacement imposé en l'extrémité $x = L$ de valeur $u_t(L) = U_t = tL$. En $x = 0$ l'extrémité de la barre est encastree : $u_t(0) = 0$. Les champs de déplacement dans la barre valent donc $u_t(x) = tx$.

On écrit le critère d'endommagement (23) en fonction du temps à $\alpha = 0$, avec $u' = t$

$$f(t) = -A_0 \left(t + \frac{t^2}{2} - \ln(1+t) \right) + w_1 \quad (25)$$

On a

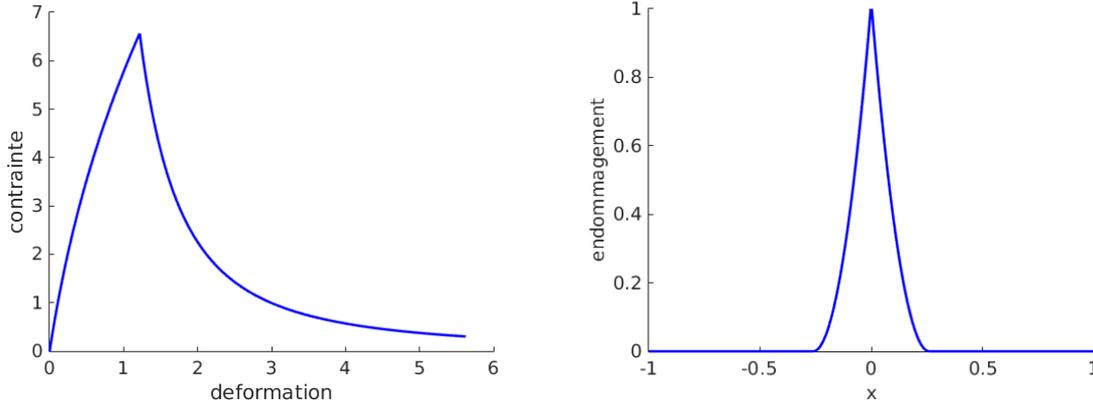
$$f'(t) = -A_0 \left(\frac{t(2+t)}{1+t} \right) \quad (26)$$

Ainsi, $f'(t)$ est négative, le critère d'endommagement est atteint quelque soit la vitesse de traction imposée. Il n'est pas possible de déterminer analytiquement le temps auquel le critère est atteint, noté t_e , et la contrainte critique, notée σ_c , à cause de la présence du terme en ln.

On peut alors écrire (24) dans le cas où il est atteint, et exprimer α en fonction de la déformation de Green-Lagrange E

$$\alpha = 1 - \frac{w_1}{A_0 \left(E - \frac{1}{2} \ln(1+2E) \right)} \quad (27)$$

On injecte ensuite (27) dans (15) avec la loi (17), et on trace l'évolution de la contrainte de Cauchy en fonction de la déformation de Green-Lagrange en Figure 1a.



(a) Réponse en contraintes d'un VER avec endommagement homogène (b) Localisation de l'endommagement sur une barre 1D

FIGURE 1 – Endommagement d'un matériau de Ciarlet-Geymonat tel que défini en (10)

2.2.3 Localisation de l'endommagement

Soit un intervalle $(X_0 - d, X_0 + d)$ de la barre sur lequel l'endommagement se localise. Le profil d'endommagement se détermine en résolvant le cas d'égalité du critère d'endommagement (24), dans le cas où la dérivée spatiale de l'endommagement n'est plus nulle. On a

$$w_1 \ell^2 \alpha'' = w'(\alpha) - A_0(1-\alpha) \left(E - \frac{1}{2} \ln(1+2E) \right) \quad (28)$$

En multipliant (28) par α' , en notant $a(\alpha) = (1-\alpha)^2$, et en rappelant que $S = \partial\psi/\partial E$ où ψ est donné en (10), on a

$$\left(\frac{1}{a(\alpha)} - 1 \right) \left(\frac{\partial\psi(E)}{\partial E} E - \psi(E) \right) + w(\alpha) - \frac{w_1 \ell^2}{2} (\alpha')^2 = 0 \quad (29)$$

ψ étant une fonction convexe de E , on retrouve le potentiel élastique dual $\psi^*(S) = SE - \psi(E)$. Lorsque $S = 0$, une fissure est apparue dans la barre en X_0 , et le profil d'endommagement est donné par

$$\frac{\ell}{\sqrt{2}} \frac{d\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \pm dx \quad (30)$$

avec les conditions de raccordement $\alpha(X_0 \pm d) = 0$ et $\alpha'(X_0 \pm d) = 0$. Ces dernières conditions permettent de déterminer d , et de montrer que la taille du support de localisation est directement proportionnelle à la longueur interne ℓ

$$2d = 2\sqrt{2}\ell \quad (31)$$

On retrouve alors le même profil de localisation que pour un matériau linéaire élastique, tracé en Figure 1b.

2.3 Implémentation numérique

Une première étude numérique de l'adaptabilité des modèles d'endommagement à gradient au formalisme des grandes déformations a été menée en implémentant ces modèles dans le logiciel d'éléments finis FEniCS.

Le temps est discrétisé en un ensemble $\{t_i\}_{i=0}^n$ avec un pas de temps Δt . Résoudre numériquement le problème d'endommagement revient à minimiser à instant t_i la fonctionnelle de l'énergie potentielle qui est la différence entre l'énergie de déformation et le potentiel des efforts extérieurs W_{ext}

$$\mathcal{P}_i(u, \alpha) = \int_{\Omega} W[u(x), \alpha(x), \nabla \alpha(x)] dx - W_{ext} \quad (32)$$

par rapport à la variable d'endommagement α et à la variable de déformation u .

En supposant connu le champ de déplacement et d'endommagement à l'instant t_{i-1} , la solution à l'instant t_i est obtenue en résolvant le problème de minimisation sous contrainte suivant

$$\arg \min_{(u, \alpha)} \{ \mathcal{P}_i(u, \alpha) : u \in \mathcal{C}(t_i), \alpha \in \mathcal{D}_i \}, \quad (33)$$

où $\mathcal{D}_i = \{ \alpha \in H^1(\Omega) : \alpha_{i-1} \leq \alpha(x) \leq 1 \}$ et \mathcal{C}_i est l'ensemble des champs de déplacement cinématiquement admissibles à l'instant t_i . Dans le cas étudié, il n'y a pas de forces extérieures donc l'énergie potentielle \mathcal{P}_i est égale à l'énergie de déformation, que l'on écrit de la manière suivante

$$\mathcal{P}_i(u, \alpha) = \int_{\Omega} \Psi(u) dx + G_c c_w \int_{\Omega} \left(\frac{w(\alpha)}{\ell} + \ell \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) dx \quad (34)$$

où G_c est l'énergie de rupture et c_w est une constante de normalisation.

Les modèles d'endommagement choisis (17) et (18) permettent d'obtenir une fonctionnelle $\mathcal{P}_i(u, \alpha)$ qui est quadratique en α . De plus, bien que n'étant pas convexe par rapport au couple (u, α) , elle l'est par rapport à chacune des variables. La minimisation de la fonctionnelle se fait par le choix d'une stratégie de minimisation alternée : à chaque pas de temps, on minimise par rapport à u à α fixé puis par rapport à α à u fixé, et ce jusqu'à convergence, comme décrit dans l'algorithme suivant

<p>– <i>Initialisation</i> : poser $(u^{(0)}, \alpha^{(0)}) := (u_{i-1}, \alpha_{i-1})$</p> <p>– <i>Itération p</i> :</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. Calculer, sous la contrainte $u(x) = t_i \varepsilon_0$ sur $\partial_D \Omega$, $u^{(p)} := \arg \min_u \mathcal{P}_i(u, \alpha^{(p-1)})$ 2. Calculer, sous la contrainte $\alpha_{i-1} \leq \alpha \leq 1$ sur Ω, $\alpha^{(p)} := \arg \min_{\alpha} \mathcal{P}_i(u^{(p)}, \alpha)$ <p>– <i>Fin</i> : Répéter jusqu'à $\ \alpha^{(p)} - \alpha^{(p-1)}\ _{\infty} \leq \text{tol}$. Poser $(u_i, \alpha_i) := (u^{(p)}, \alpha^{(p)})$</p>
--

avec $\partial_D \Omega$ la frontière du domaine Ω sur laquelle les déplacements sont imposés, ϵ_0 la vitesse de déformation imposée, et tol la valeur de la tolérance choisie pour la convergence de la minimisation alternée.

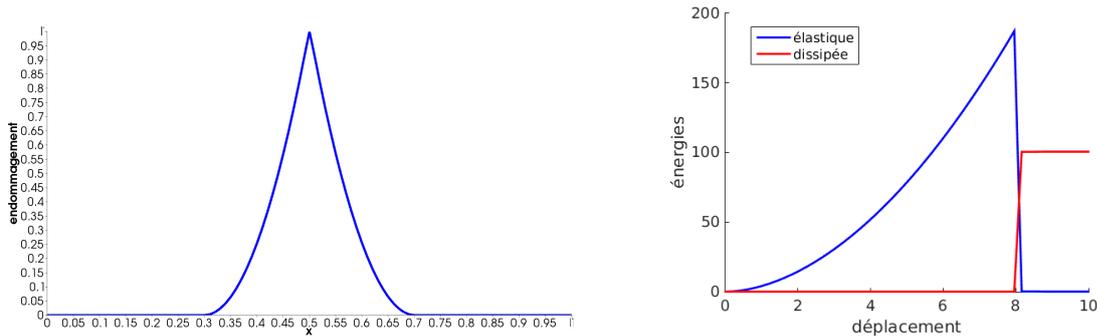
Afin de tenir compte de la condition d'irréversibilité, le problème d'endommagement est un problème de minimisation sous contraintes : à chaque pas de temps, l'endommagement doit être supérieur ou égal à la valeur de l'endommagement du pas de temps précédent, et inférieur à la valeur 1. On utilise le solveur TAO Linear Bound Solver qui s'applique aux inégalités linéaires avec une contrainte sur les variables. L'algorithme GPCG (gradient projection conjugate gradient) est utilisé pour résoudre le problème d'endommagement de manière itérative. Il s'applique aux problèmes de minimisation sous contraintes dont la fonction objective est quadratique et convexe. Il est aussi possible d'utiliser la méthode TRON, dont le GPCG n'est qu'un cas particulier pour les problèmes quadratiques.

Le problème en déplacement est non linéaire, on utilise le solveur snes et un algorithme de Newton pour le résoudre. La résolution des deux problèmes est sensible au choix des solveurs, préconditionneurs, et des paramètres du modèle. Il faut notamment choisir une taille de maille $h = L/(N + 1)$ assez petite par rapport à la longueur interne ℓ . Une élasticité résiduelle non nulle k_{ell} permet de préserver l'ellipticité du problème dans les régions endommagées où l'élasticité est proche de zéro.

Les résultats d'une simulation réalisée avec les paramètres donnés dans le Tableau 1 sont visibles en Figure 2. Dans ce cas, nous avons utilisé pour résoudre le problème d'endommagement la méthode TRON associée au solveur linéaire NASH. Nous avons imposé des conditions de Dirichlet pour α sur les deux extrémités de la barre afin d'assurer la localisation de l'endommagement. La barre casse pour des déformations de l'ordre de 800%. Le profil de localisation visible en Figure 2a correspond bien à la solution analytique donnée par (30). La Figure 2b montre l'évolution du potentiel élastique et de l'énergie dissipée en fonction du déplacement imposé : lorsque la barre casse, le potentiel élastique chute brusquement, et l'énergie dissipée prend la valeur G_c donnée dans le Tableau 1.

TABLE 1 – Paramètres géométriques, matériaux et numériques pour un test de traction en 1D

L	N	A	G_c	ℓ	k_{ell}	tol
1.0	1000	10.0	100.0	0.14	1e-6	1e-6

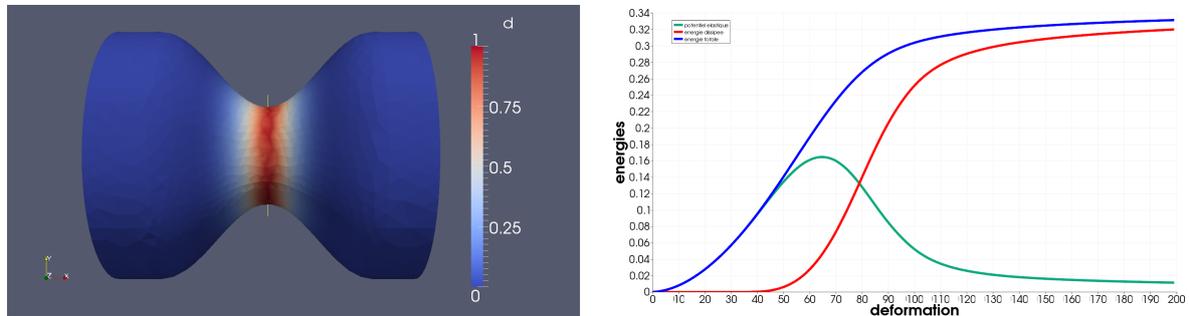


(a) Localisation de l'endommagement sur la barre. (b) Energies élastique (bleu) et dissipée (rouge) au cours du temps.

FIGURE 2 – Barre 1D soumise à un essai quasi-statique à déplacement imposé. Simulation réalisée avec FEniCS

3 Conclusion

L'étude des modèles d'endommagement à gradient en grandes déformations en dimension 1 a montré qu'ils sont adaptables à un tel cadre, à condition d'être prudents sur les paramètres utilisés, notamment numériques. Il s'agit désormais d'étendre cette étude à des dimensions supérieures. Pour cela, le code à éléments finis MEF++ [3] est utilisé, développé par l'université Laval au Québec. Les premières simulations numériques ont été effectuées avec un potentiel hyperélastique compressible, variante du modèle Néo-Hookéen.



(a) Localisation de l'endommagement dans la partie étranglée de l'éprouvette. (b) Energies élastique (vert), dissipée (rouge) et totale (bleu) en fonction de la déformation.

FIGURE 3 – Rupture d'une éprouvette diabolos soumise à un essai de traction. Simulation 3D réalisée avec le code éléments finis MEF++

Un exemple est donné en Figure 3 : une éprouvette de forme diabolos, encadrée à une extrémité, et soumise à un déplacement croissant imposé à l'autre, s'endommage progressivement au cours de l'essai de traction, jusqu'à ce qu'elle rompe lorsque l'endommagement atteint la valeur 1. L'endommagement se localise sur la zone la plus étroite de l'éprouvette (voir Figure 3a). La Figure 3b montre l'évolution des énergies en fonction de la déformation : dans ce cas, l'évolution de l'énergie totale est régulière en temps, et tandis que le potentiel élastique tend vers 0, l'énergie dissipée tend vers une énergie de rupture. Ces simulations montrent que la sensibilité aux paramètres (à la fois géométriques, matériaux et numériques) est accrue. En effet, la localisation de l'endommagement sur une zone restreinte entraîne une localisation des déformations sur une maille, ce qui provoque une dégénérescence du maillage. Il est possible d'obtenir des résultats dans le cas où la structure casse pour des niveaux de déformation peu élevés (inférieurs à 200%). La suite des recherches va consister à trouver des solutions pour que l'endommagement puisse se localiser dans une structure à des taux de déformation élevés sans que cela ne pose de problèmes de convergence.

Références

- [1] P. G. Ciarlet, G. Geymonat. *Sur les lois de comportement en élasticité non linéaire compressible*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 295 :423–426, 1982.
- [2] G. A. Francfort, J.-J. Marigo. *Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem*, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 46(8) :1319–1342, 1998.
- [3] GIREF. *Projet MEF++*, <http://giref.ulaval.ca/mef.html>, 2016.
- [4] K. Pham, J.-J. Marigo. *Approche variationnelle de l'endommagement : II. Les modèles à gradient*, Comptes Rendus Mécanique, 338(4) :199–206, 2010.