



**HAL**  
open science

# Approche par séparation de variables pour la régularisation en temps de la corrélation d'images numériques

Jean-Charles Passieux, Jean-Noël Périé, Robin Bouclier

► **To cite this version:**

Jean-Charles Passieux, Jean-Noël Périé, Robin Bouclier. Approche par séparation de variables pour la régularisation en temps de la corrélation d'images numériques. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899353

**HAL Id: hal-01899353**

**<https://hal.science/hal-01899353>**

Submitted on 19 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Approche par séparation de variables pour la régularisation en temps de la corrélation d'images numériques

J.C. Passieux<sup>1</sup>, J.N. Périé<sup>1</sup>, R. Bouclier<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Institut Clément Ader (ICA), Université de Toulouse, CNRS UMR 5312-INSA-ISAE-Mines Albi-UPS, Toulouse, Fr.

<sup>2</sup> Institut de Mathématiques de Toulouse (IMT), Université de Toulouse, CNRS-INSA-UPS, Toulouse, Fr.

**Résumé** — On présente une méthode de mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques (CIN) imposant une certaine régularité en temps comme vecteur de régularisation en espace. La méthode est basée sur une approche de type séparation de variables appliquée à une formulation espace-temps de la CIN. La méthode est illustrée ici sur un essai de vibration linéaire sous sollicitation harmonique.

**Mots clés** — corrélation d'images numériques, éléments finis, analyse modale, vibration.

## 1 Introduction

Les essais de vibration sont souvent instrumentés par des accéléromètres ou des vibromètres laser en vertu de leur excellente résolution de mesure. Cependant, dans un contexte de validation et de dialogue avec des simulations, ces outils fournissent un nombre d'informations ponctuelles relativement réduit au regard de la richesse des champs issus des codes de calculs éléments finis. En effet, le nombre d'accéléromètres que l'on peut disposer sur une structure est très limité, d'une part, à cause du coût (tant en matériel qu'en main d'œuvre pour l'installation) et d'autre part à cause de l'ajout intempestif de masse (mass loading effect) et/ou d'amortissement qui peut modifier significativement la dynamique des structures légères. Bien que sans contact (donc sans ajout de masse), les vibromètres laser à effet Doppler ne peuvent pas faire l'acquisition sur tous les points de mesure simultanément. Outre l'hypothèse de stationnarité (effets thermiques, fatigue, switching de modes...) que cela suppose, ceci limite en pratique le nombre de points de mesure afin de conserver des temps d'acquisition raisonnables.

Dans ce contexte, l'instrumentation d'un essai de vibration par corrélation d'images numériques (CIN) semble donc être une voie de plus en plus crédible, puisque (a) elle est **sans contact** (pas de modification de la dynamique de la structure analysée) et (2) elle mesure **simultanément un champ de déplacement 3D** sur toute la partie visible de l'éprouvette. L'inconvénient est évidemment que la résolution de mesure n'est, en général, pas comparable avec celle des outils cités précédemment [6, 1, 9]. Une attention particulière doit donc être allouée à la réduction des incertitudes de mesure lorsque l'on cherche à développer une méthode de CIN dans ce contexte.

La littérature florissante [6, 1, 9, 12] sur l'utilisation de la CIN comme moyen de mesure dans le domaine vibratoire consiste essentiellement à post-traiter des données issues d'une mesure CIN classique. L'inconvénient est que les incertitudes de mesures de la CIN se propagent dans le post-traitement. De plus, les étapes de projection supplémentaires, nécessaires pour comparer une solution EF calculée et une solution mesurée par CIN classique (sous forme d'un nuage de points), sont autant de sources d'incertitudes supplémentaires.

Les développements récents dans le domaine de la CIN Eléments Finis (EF)[10, 2] ou de la stéréo CIN EF[8] permettent un lien direct avec les outils de simulation. Il est ainsi possible de partager le même maillage EF lors du calcul et, par suite, de la mesure et de limiter les incertitudes liées aux reprojection. En outre, une approche de type CIN-EF permet d'évaluer les incertitudes de mesure *a priori*. Pour réduire encore d'avantage ces incertitudes de mesure, nous nous proposons de démontrer, dans ce travail, l'apport de la régularisation en temps d'une mesure de CIN-EF dans le contexte des essais en vibration.

## 2 Dispositif expérimental

On étudie un essai de vibration d'une poutre encastree/libre de longueur  $L = 273\text{mm}$  de section rectangulaire  $20 \times 40\text{mm}$  en aluminium. La poutre est placée sur une table vibrante. Une caméra Photron Fastcam SA3 est utilisée pour faire l'acquisition d'images de  $1024 \times 128$  pixels à une fréquence d'acquisition de  $2000\text{Hz}$ . La poutre est recouverte d'un mouchetis réalisé à la bombe de peinture blanche, puis

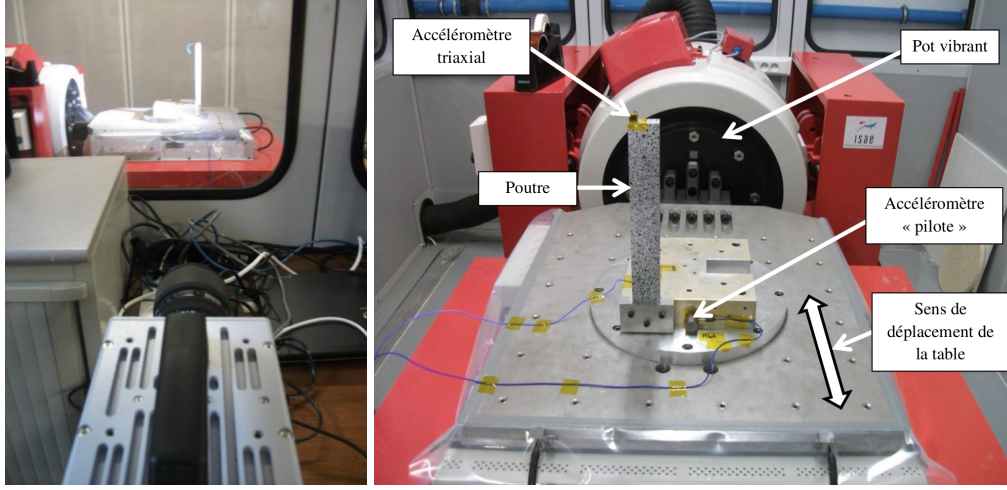


FIGURE 1 – Dispositif expérimental.

noire. Compte tenu de la vitesse d'ouverture modérément élevée ( $1/2000\text{s}$ ), on utilise un spot Desisti lighting (Rembrandt mod. 2490,  $200\text{W}$  max). La poutre est équipée d'un accéléromètre pour piloter la table vibrante.

## 3 Mesure CIN-EF incrémentale

### 3.1 CIN-EF classique

On considère un domaine d'intérêt  $\Omega \subset \mathbf{R}^2$  et un intervalle de mesure  $I = [t_0, t_f]$ , l'équation local de conservation des niveaux de gris s'écrit sur le domaine d'espace-temps  $\Omega \times I$  : Trouver  $\underline{u}(\underline{x}, t)$  tel que :

$$f(\underline{x}, t_0) = f(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t), t), \quad \forall \underline{x} \in \Omega, \quad \forall t \in I. \quad (1)$$

Dans cette section, chaque image est analysée indépendamment. En effet, le déplacement au  $k^{\text{me}}$  pas de temps est recherché pour apparier l'image  $f_k(\underline{x}) = f(\underline{x}, t_k)$  à l'image de référence  $f_0(\underline{x}) = f(\underline{x}, t_0)$ . Un ensemble de problèmes de corrélation d'images spatiales classiques doit donc être résolu à chaque incrément de temps. On note  $n_I + 1$  le nombre d'images (référence comprise), le problème (1) à résoudre à l'incrément  $k$  est : Trouver  $\underline{u}(\underline{x}, t_k) = \underline{u}_k(\underline{x})$  tel que :

$$f_0(\underline{x}) = f_k(\underline{x} + \underline{u}_k(\underline{x})), \quad \forall \underline{x} \in \Omega \quad (2)$$

Ce problème est classiquement résolu au sens des moindres carrés sur le domaine spatial :

$$\underline{u}_k(\underline{x}) = \arg \min_{\underline{u}_k^*(\underline{x}) \in \mathbf{L}^2(\Omega)} \int_{\Omega} (f_k(\underline{x} + \underline{u}_k^*(\underline{x})) - f_0(\underline{x}))^2 dx \quad (3)$$

Le champ de déplacement inconnu  $\underline{u}_k$  est directement recherché dans un sous-espace d'approximation éléments finis en utilisant le même maillage que celui utilisé pour la simulation [10, 2] :

$$\underline{u}_k(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n_{\Omega}} q_i^k \underline{\Psi}_i(\underline{x}), \quad (4)$$

Ce problème de moindres carrés étant non-linéaire, et supposant que  $f_k$  (et donc  $f_0$ ) est différentiable, il est résolu à l'aide d'un algorithme de Gauss-Newton. On recherche donc de façon itérative une

correction  $\delta \underline{u}_k$  du champ de déplacement, solution du système linéaire suivant :

$$\mathbf{M} \delta \mathbf{q}^k = \mathbf{b}(\underline{u}_k^0, t_k) \quad (5)$$

ou,  $\forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n_\Omega\}^2$  :

$$\delta \mathbf{q}_i^k = \delta q_i^k, \quad (6)$$

$$\mathbf{M}_{ij} = \int_{\Omega} \underline{\Psi}_i(\underline{x})^T \nabla f_0(\underline{x}) \nabla f_0^T(\underline{x}) \underline{\Psi}_j(\underline{x}) dx, \quad (7)$$

$$\mathbf{b}_i(\underline{u}_k^0, t_k) = \int_{\Omega} \underline{\Psi}_i(\underline{x})^T \nabla f_0(\underline{x}) (f_0(\underline{x}) - f_k(\underline{x} + \underline{u}_k^0)) dx. \quad (8)$$

On peut remarquer que l'opérateur  $\mathbf{M}$  ne dépend que de l'image de référence  $f_0$ , il peut donc être assemblé et factorisé une fois pour toutes.

### 3.2 Mesure incrémentale

La méthode décrite ci-avant est utilisée pour analyser une séquence de 86 images observant l'éprouvette excitée sur son mode I de flexion à 195.23 Hz (mesure de l'accéléromètre). Sur la figure 2, sont représentés les champs de déplacement de 9 intervalles de temps équi-répartis sur une période. On peut

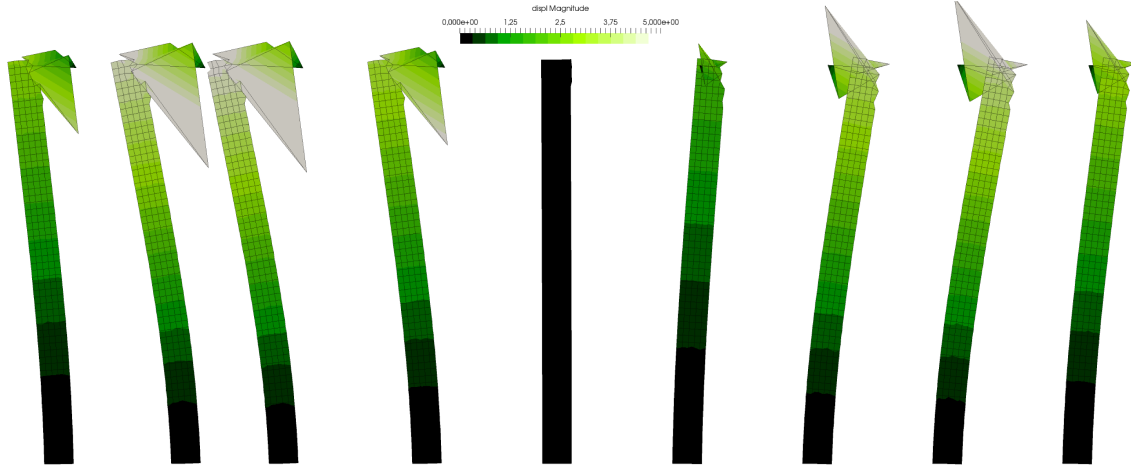


FIGURE 2 – Amplitude du champ de déplacement (en pixels) mesuré par CIN-EF incrémentale au cours d'une période

observer que le maillage utilisé n'est pas adapté à la mesure. En effet, des éléments sont trop petits et la mesure fait apparaître une divergence locale de la solution. On peut constater que ces oscillations sont assimilables à du bruit de mesure dans le sens où elles ne semblent pas suivre une évolution temporelle régulière (ni même harmonique). Ce bruit est probablement dû à l'erreur ultime de corrélation d'image [5].

### 3.3 Mesure du mode *a posteriori*

On dispose donc d'un champ de déplacement mesuré  $\mathbf{u}^m(\underline{x}, t)$  défini dans tout le domaine et sur tout l'intervalle de temps qui est équivalent à une dizaine de périodes. L'idée consiste donc maintenant à déterminer le mode à partir de cette information.

S'agissant de mode linéaire, on recherche le champ de déplacement sous forme séparée au premier ordre  $\underline{u}(x, t) = \mathbf{U}(x) \sin(\omega t + \phi)$  solution du problème de moindres carrés suivant :

$$\mathbf{U}, \omega, \phi = \arg \min_{\mathbb{R}^{n_\Omega+2}} \int_{\Omega} \int_I [\mathbf{u}^m(\underline{x}, t) - \mathbf{U}(\underline{x}) \sin(\omega t + \phi)]^2 dt d\underline{x} \quad (9)$$

Le produit des inconnues rend ce problème non linéaire. On peut donc par exemple le résoudre par une méthode de type point fixe alternant la minimisation par rapport aux inconnues spatiales  $\mathbf{U}$  et temporelles  $\omega, \phi$ . Cet algorithme peut être initialisé en calculant une décomposition en valeurs singulières de la solution spatio-temporelle mesurée  $\mathbf{u}^m$ .

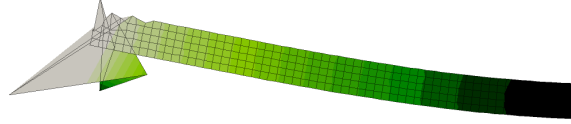


FIGURE 3 – Mode calculé *a posteriori* à partir d'une CIN incrémentale.

Le mode ainsi calculé est présenté sur la figure 5. On peut remarquer que le bruit observé sur le bout de la poutre s'est propagé sur la mesure du mode. Le problème est en partie du au fait que l'on enchaîne deux problèmes d'optimisation et les incertitudes du premier se propagent (dans le meilleur des cas) ou se cumulent (dans le pire des cas) avec les erreurs du deuxième.

## 4 Mesure CIN-EF régularisée en temps

Pour éviter le problème cité précédemment, nous proposons de résoudre ces deux problèmes en une seule fois, en se basant sur une formulation espace temps du problème de corrélation.

### 4.1 CIN-EF spatio-temporelle

L'équation forte de conservation des niveaux de gris (2) est cette fois-ci écrit sous forme d'un problème de moindre carrés sur le domaines d'espace temps [3, 4] :

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \arg \min_{\underline{u}^* \in \mathbf{L}^2(\Omega) \otimes \mathbf{L}^2(I)} \int_{\Omega} \int_I (f(\underline{x} + \underline{u}^*(\underline{x}), t) - f_0(\underline{x}))^2 dt d\underline{x} \quad (10)$$

Écrit ainsi, le champs solution peut donc être recherché sous la forme séparée  $\underline{u}(\underline{x}, t) = \mathbf{U}(\underline{x}) \sin(\omega t + \phi)$ . Ici encore, à cause du produit d'inconnues, ce problème est résolu de façon itérative, en minimisant alternativement par rapport aux variables spatiales et temporelles [7].

- **Problème spatial** : Les paramètres  $\mathbf{p} = (\omega, \phi)$  de la fonction temporelle  $\lambda(t) = \sin(\omega t + \phi)$  étant supposés fixés, le problème spatial s'obtient en minimisant (10) par rapport à  $\mathbf{U}$  seulement :

$$\mathbf{U}(\underline{x}) = \arg \min_{\mathbf{U}^* \in \mathbf{L}^2(\Omega)} \int_{\Omega} \int_I (f(\underline{x} + \mathbf{U}^*(\underline{x}) \sin(\omega t + \phi), t) - f_0(\underline{x}))^2 dt d\underline{x} \quad (11)$$

Les intégrales en temps peuvent être calculées car toutes les fonctions de  $t$  sont fixées. Ce problème ressemble à un incrément d'un problème de CIN-EF standard. Il est résolu à l'aide d'un Gauss Newton.

- **Problème temporel** : Le mode spatial étant supposé fixé, le problème temporel s'obtient en minimisant (10) par rapport à  $\mathbf{p} = (\omega, \phi)$  seulement.

$$\mathbf{p} = \arg \min_{\mathbf{p}^* \in \mathbb{R}^2} \int_I \int_{\Omega} (f(\underline{x} + \mathbf{U} \sin(\omega^* t + \phi^*), t) - f_0(\underline{x}))^2 d\underline{x} dt \quad (12)$$

Les intégrales en espace peuvent être calculées car toutes les fonctions de  $\underline{x}$  sont fixées. Ce problème de moindres carrés non linéaire est également résolu à l'aide d'un Gauss Newton.

### 4.2 Mesure du mode *a priori*

La méthode spatio-temporelle par séparation de variables est utilisée pour analyser la séquence décrite plus haut. Sur la figure 4, sont représentés les champs de déplacement de 9 intervalles de temps équi-répartis sur une période. On peut remarquer que le champ de déplacement ne présente plus les grandes oscillations. **La régularité imposée au niveau temporel induit une régularisation du champ spatial.**

Le mode spatial est quant à lui obtenu directement :

Le mode ainsi mesuré est comparé à une simulation EF en contraintes planes. L'intérêt majeur de faire une mesure CIN à base d'éléments finis, en utilisant le même maillage que la simulation est que le

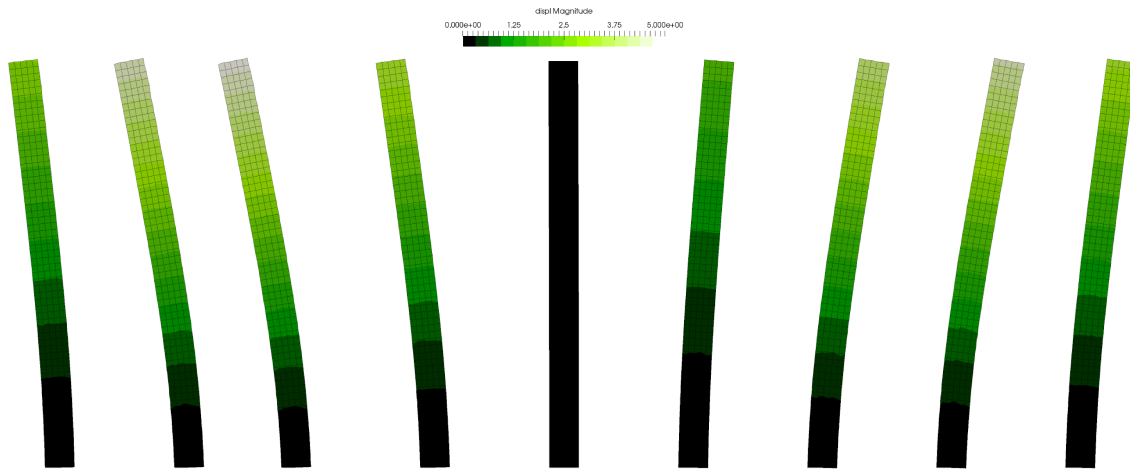


FIGURE 4 – Amplitude du champ de déplacement (en pixels) mesuré par CIN-EF régularisée en temps au cours d’une période

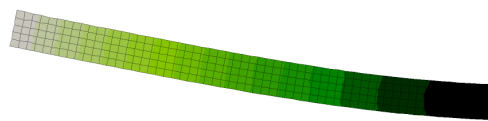


FIGURE 5 – Mode calculé *a priori* à partir d’une CIN régularisée en temps.

dialogue est directe. Par exemple, il est possible de calculer le produit scalaire du mode mesuré avec le mode simulé (modal assurance criterion). Dans ce cas, ce dernier vaut 0.9992 ce qui confirme la bonne corrélation entre mesure et simulation.

L’intérêt de cette approche est qu’elle donne également accès de manière directe à la fréquence propre à travers le paramètre  $\omega$ . On trouve les fréquences propres suivantes :

mesure accéléromètre	mesure CIN-EF	modèle EF	modèle poutre
195.23Hz	194.72Hz	221.15Hz	219.2Hz

La mesure CIN-EF de la fréquence semble en adéquation avec la mesure de l’accéléromètre. En revanche, les modèles EF ou poutres surestiment la fréquence propre. Ces modèles manquent de caractère prédictif. Sans doute les paramètres matériaux utilisés dans les modèles ne sont pas les bons. On pourrait tout à fait développer une stratégie d’identification des paramètres à partir d’une mesure CIN d’un mode supplémentaire, soit *a posteriori*, soit par une méthode intégrée.

## 5 Conclusion

Nous présentons une méthode de mesure de champs de déplacement par corrélation d’images utilisant une hypothèse de régularité en temps comme vecteur de régularisation en espace. La méthode est présentée en CIN-2D pour l’analyse de phénomènes vibratoires plans sous excitation harmonique. Cette méthode présente l’avantage de mesurer directement des quantités d’intérêt (mode propre, fréquence propre...) ce qui permet d’éviter la propagation du bruit de mesure. Ces quantités sont, de plus, interpolées dans un formalisme élément finis avec le maillage de la simulation, ce qui permet de faire des validations directes (MAC...). Lors de la présentation, nous exposerons des cas d’application plus complexes tels que la mesure de mode de vibration 3D par stéréo corrélation d’images EF [8] ou la mesure de phénomènes non harmoniques (vibration non-linéaires, par ex.)

Une telle méthode pourrait également être appliquée à l’analyse de problème de fatigue [11] ou à la mesure à partir de caméras plus classiques (non rapide) [12].

## Références

- [1] Bebernis, T., Eason, T., Spottswood, S. : High-speed 3D digital image correlation measurement of long-duration random vibration ; recent advancements and noted limitations. *In : International Conference on Noise and Vibration Engineering (ISMA)*, Katholieke Universiteit Leuven, Belgium (2012)
- [2] Besnard, G., Hild, F., Roux, S. : “Finite-Element” displacement fields analysis from digital images : Application to Portevin-le Châtelier bands. *Experimental Mechanics* **46**(6), 789–803 (2006)
- [3] Besnard, G., Guerard, S., Roux, S., Hild, F. : A space-time approach in digital image correlation : Movie-dic. *Opt. Lasers Eng.* **49**, 71–81 (2011)
- [4] Besnard, G., Leclerc, H., Roux, S., Hild, F. : Analysis of image series through digital image correlation. *Journal of Strain Analysis for Engineering Design* **47**(4), 214–228 (2012)
- [5] Bornert, M., Brémand, F., Doumalin, P., Dupré, J.C., Fazzini, M., Grédiac, M., Hild, F., Mistou, S., Moli-mard, J., Orteu, J.J., Robert, L., Surrel, Y., Vacher, P., Wattrisse, B. : Assessment of digital image correlation measurement errors : methodology and results. *Experimental Mechanics* **49**(3), 353–370 (2009)
- [6] Helfrick, M.N., Niezrecki, C., Avitabile, P., Schmidt, T. : 3D digital image correlation methods for full-field vibration measurement. *Mechanical Systems and Signal Processing* **25**(3), 917–927 (2011)
- [7] Passieux, J.C., Périé, J.N. : High resolution digital image correlation using Proper Generalized Decomposition : PGD-DIC. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **92**(6), 531–550 (2012)
- [8] J.E. Pierré, J.C. Passieux, J.N. Périé *Finite Element Stereo Digital Image Correlation : framework and mechanical regularisation*. Submitted to *Experimental Mechanics* 06/2016.
- [9] Reu, P.L., Rohe, D.P., Jacobs, L.D. : Comparison of {DIC} and {LDV} for practical vibration and modal measurements. *Mechanical Systems and Signal Processing* pp. – (2016)
- [10] Sun, Y., Pang, J., Wong, C.K., Su, F. : Finite element formulation for a digital image correlation method. *Applied Optics* **44**(34), 7357–7363 (2005)
- [11] Vanlanduit, S., Vanherzeele, J., Longo, R., Guillaume, P. : A digital image correlation method for fatigue test experiments. *Optics and Lasers in Engineering* **47**(3–4), 371 – 378 (2009)
- [12] Warburton, J.R., Lu, G., Buss, T.M., Docx, H., Matveev, M.Y., Jones, I.A. : Digital image correlation vibrometry with low speed equipment. *Experimental Mechanics* **56**(7), 1219–1230 (2016)