



**HAL**  
open science

## Modèle de poutre enrichi soumis à des déformations imposées

Grégoire Corre, Arthur Lebée, Karam Sab, Mohammed Khalil Ferradi, Xavier Cespedes

► **To cite this version:**

Grégoire Corre, Arthur Lebée, Karam Sab, Mohammed Khalil Ferradi, Xavier Cespedes. Modèle de poutre enrichi soumis à des déformations imposées. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899335

**HAL Id: hal-01899335**

**<https://hal.science/hal-01899335v1>**

Submitted on 19 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Modèle enrichi de poutre soumise à des déformations imposées

G. Corre<sup>1,2</sup>, A. Lebé<sup>1</sup>, K. Sab<sup>1</sup>,  
K. Ferradi<sup>2</sup>, X. Céspedes<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire Navier, UMR 8205, ENPC {gregoire.corre,arthur.lebee,karam.sab}@enpc.fr

<sup>2</sup> STRAINS {mohammed-khalil.ferradi,xavier.cespedes}@strains.fr

---

**Résumé** — Afin de pouvoir modéliser des structures telles que les tabliers de ponts ou les treillis métalliques avec des éléments de poutre capables de traduire précisément le comportement de ces structures, de nombreux modèles de poutre enrichis ont été développés. S'appuyant sur le modèle de poutre enrichi par la méthode des développements asymptotiques développé par Ferradi et al. [1], on présente ici un modèle de poutre enrichi soumis à des déformations imposées.

**Mots clés** — poutre, développement asymptotique, déformations imposées.

---

## 1 Modèles de poutre et enrichissements cinématiques

### 1.1 Modèles de poutre classiques

De nombreux modèles de poutre élastiques ont été formulés, chacun postulant une cinématique particulière. Le modèle d'Euler-Bernoulli fut le premier modèle de poutre formulé. Il repose sur deux hypothèses : toute section de la poutre reste rigide dans son plan et reste orthogonale à la fibre neutre de la poutre. Ces deux hypothèses négligent de fait les déformations dues à l'effort tranchant. Le modèle de Timoshenko formulé par la suite intègre ces déformations en autorisant une rotation entre la section et la fibre neutre. Vlasov enrichit ensuite la cinématique de Timoshenko en y ajoutant les effets de la torsion, reposant sur les travaux effectués par Saint-Venant au milieu du 19<sup>ème</sup>. Dans ce modèle d'ordre supérieur, le degré de liberté associé au gauchissement de torsion est la dérivée du degré de liberté associé à la rotation dans le plan de la section. Bescoter suggéra de rendre indépendants l'un de l'autre ces deux degrés de liberté, proposant ainsi un nouveau modèle. La contribution de Bescoter au modèle de Vlasov peut être comparé à la contribution de Timoshenko au modèle de Bernoulli : le modèle de Timoshenko libère le degré de liberté de flexion par rapport au degré de liberté de translation dans le plan, alors que Bescoter libère le degré de liberté de gauchissement de torsion du degré de rotation dans le plan de la section.

### 1.2 La méthode des développements asymptotiques

Afin d'améliorer les modèles précédents, des cinématiques de plus en plus riches ont été proposées. Grâce à la méthode des développements asymptotiques, il est possible de définir une méthode systématique permettant d'obtenir des cinématiques d'ordre supérieur [2]. L'éclatement de la poutre est supposé grand et utilisé comme coefficient de mise à l'échelle pour le problème 3D. La méthode repose ensuite sur l'écriture des variables en série de puissances de ce paramètre. L'expression des équations d'équilibre donne un problème auxiliaire pour chaque ordre du développement. Il en résulte une systématisation de la résolution. Dans le cadre des développements asymptotiques, la séparation des variables longitudinales par rapport à la variable longitudinale semble évidente. Grâce à cette décomposition, les équations d'équilibre local sont résolues sur des sections 2D, et le problème de poutre 1D peut ensuite être formulé. La résolution des équations d'équilibre donne une base de modes de déplacements. Cette base est ensuite utilisée pour la résolution de l'élément de poutre. De plus, cette décomposition rend cette méthode valable pour n'importe quelle géométrie de la section transversale. Ce modèle, développé dans [1], peut résoudre des problèmes élastiques sur des poutres cylindriques avec une grande précision, et

des performances de temps de calcul importantes.

### 1.3 Introduction des déformations imposées

Le modèle élastique présenté par Ferradi et al.[1], basé sur la méthode des développements asymptotiques et sur une séparation des variables, traite des poutres soumises à des forces extérieures. Afin de pouvoir traiter des situations telles qu'un chargement thermique ou un chargement de précontrainte, le modèle est ici étendu au cas des déformations imposées. L'introduction des déformations imposées dans les équations d'équilibre génère de nouveaux modes de déplacement. Ces nouveaux modes de déplacement spécifiques aux déformations imposées viennent enrichir la cinématique obtenue par la modèle de Ferradi et al.

## 2 Enrichissement cinématique avec modes de déplacements associés à des déformations imposées

### 2.1 Le développement asymptotique

On considère une poutre de longueur  $L$  et dont la section a pour dimension caractéristique  $h$ . Le domaine de la poutre est noté  $\Omega$ , et ses bords  $\partial\Omega$ . La poutre est soumise à des forces volumiques  $\mathbf{f}$  et des forces surfaciques  $\mathbf{t}$  sur  $\partial\Omega_t$ . Les contraintes sont notées  $\boldsymbol{\sigma}$  et les déformations  $\boldsymbol{\varepsilon}$ . Les équations d'équilibres sont :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{f} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} & \text{sur } \partial\Omega_t \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_d \end{cases} \quad (1)$$

où  $\mathbf{n}$  est le vecteur normal à la surface. De nouvelles variables  $(y_1, y_2, y_3)$  sont définies à partir des variables globales  $(x_1, x_2, x_3)$  :

$$(x_1, x_2, x_3) = (hy_1, hy_2, Ly_3) \quad (2)$$

Les développements asymptotiques des variables du problème sont exprimés comme des séries de puissance du facteur d'échelle :

$$\mathbf{u} = L \left( \frac{1}{\eta} \mathbf{u}^{-1} + \mathbf{u}^0 + \eta \mathbf{u}^1 + \eta^2 \mathbf{u}^2 + \dots \right) \quad (3)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^0 + \eta \boldsymbol{\varepsilon}^1 + \eta^2 \boldsymbol{\varepsilon}^2 + \dots \quad (4)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^0 + \eta \boldsymbol{\sigma}^1 + \eta^2 \boldsymbol{\sigma}^2 + \dots \quad (5)$$

où  $\eta = \frac{h}{L}$  est le facteur d'échelle. On suppose également une décomposition des forces : la variable longitudinale est séparée des variables transversales. Ensuite, la réécriture des équations d'équilibre utilisant les développements asymptotiques, l'expression des forces et les nouveaux opérateurs gradient et divergence donne, par identification des puissances de  $\eta$ , un ensemble de nouvelles équations à résoudre. La résolution de chaque nouveau système d'équations  $P^p$  appelé problème auxiliaire,  $p$  étant la puissance de  $\eta$  associée au problème, donne un ou plusieurs modes de déplacements de la section. Les douze premiers modes de déplacement de la section ne dépendent pas des forces appliquées sur la poutre, c'est pourquoi on les appelle "modes de poutre". La participation des forces dans la réponse globale du système est exprimée dans la somme infinie. Une fois la cinématique de l'élément de poutre définie et enrichie avec ces modes, l'ordre d'introduction de chaque variable, et l'expression des fonctions longitudinales associées à chaque mode ne sont plus utiles. Ainsi, l'expression du déplacement peut être réécrite :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1} \tilde{\mathbf{u}}^i(x_\alpha) X_i(x_3) \quad (6)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}^i$  est le mode  $i$ , et  $X_i$  la variable cinématique qui lui est associée.

## 2.2 Introduction des déformations imposées

La méthode des développements asymptotiques telle qu'utilisée dans [1] a été exposée. Afin de pouvoir traiter de plus nombreuses situations telles que des chargements thermiques ou des chargements de précontrainte, on étend ici la méthode des développements asymptotiques au cas des déformations imposées. La méthode précédemment décrite doit donc donner de nouveaux modes de déplacement associés aux déformations imposées à la poutre. L'introduction de déformations imposées modifie la loi de comportement  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i)$ . Une autre façon de traiter les déformations imposées serait de les considérer comme des forces extérieures en introduisant dans les équations d'équilibre une force volumique  $\mathbf{f} = -\text{div}(\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^i)$  et une force surfacique  $\mathbf{t} = (\mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}^i) \cdot \mathbf{n}$ . Le système est alors résolu comme précédemment. Mais ceci implique un calcul de divergence préliminaire, et l'introduction des conditions aux limites comme donnée d'entrée. Par conséquent, on suggère ici de considérer le système d'équation suivant :

$$\begin{cases} \text{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^i) & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \nabla^s \mathbf{u} & \text{dans } \Omega \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_t \\ \mathbf{u} = 0 & \text{sur } \partial\Omega_d \end{cases} \quad (7)$$

Comme pour les forces, une séparation des variables est effectuée sur les déformations imposées.

Utilisant la même méthode que celle décrite dans la première partie, les problèmes auxiliaires liés à notre nouveau système d'équations d'équilibres sont exprimés. La résolution s'effectue ordre par ordre. Le problème  $P^0$  est d'abord résolu. Les sorties de  $P^0$  sont ensuite les entrées de  $P^1$ . La récurrence est immédiate et les problèmes auxiliaires sont résolus en cascade jusqu'à l'ordre choisi  $n$  du développement asymptotique. Un ou plusieurs modes sont solutions de chaque problème auxiliaire. La base de modes est ainsi enrichie à chaque ordre. Après la résolution de chaque problème auxiliaire, l'expression formelle du déplacement total est enrichie avec de nouveaux modes :

$$\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{m(p)} \tilde{\mathbf{u}}^k X_k \quad (8)$$

où  $m(p)$  est la taille de la base de modes pour l'ordre du développement  $p$ . Cette base contient plusieurs familles de modes. Les modes de poutre sont uniquement liés à la géométrie et au matériau considéré. Ils représentent les modes de corps rigide de la section et leurs modes associés d'ordres supérieurs. Cette base contient ensuite des modes spécifiques aux chargements extérieurs appliqués à la poutre et désormais des modes spécifiques aux déformations imposées à la poutre.

## 2.3 Résolution de l'élément de poutre

Enrichi par la cinématique formée par la base de mode calculée, le problème longitudinal à une dimension est formulé puis résolu. Les variables longitudinales sont exprimées grâce à des fonctions d'interpolations :

$$X_i(y_3) = \sum_{k=1}^m N_k(y_3) \tilde{U}^{i,k} \quad (9)$$

où  $m$  est le nombre de fonctions d'interpolation.  $\tilde{U}^{i,k}$  est le déplacement généralisé associé au mode  $i$  et à la fonction d'interpolation  $k$ . On choisit pour fonctions d'interpolation des NURBS (Non-Uniform Rational Basis Spline). Une NURBS est l'assemblage de plusieurs fonctions polynômiales. Ces fonctions présentent une grande régularité, avec un support très réduit, ce qui est efficace pour décrire des variations rapides sur un maillage fin. De plus, les NURBS ne sont pas victimes du phénomène de Runge qui concerne par exemple l'interpolation de Lagrange : l'interpolation polynomiale entre des points très rapprochés peut parfois entraîner une augmentation des oscillations des fonctions d'interpolation, et donc une divergence du résultat. Le déplacement total s'exprime donc :

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \tilde{\mathbf{u}}^i(\mathbf{y}) \sum_{k=1}^m N_k(y_3) \tilde{U}^{i,k} \quad (10)$$

En injectant l'approximation du champ de déplacement dans le principe du minimum de l'énergie potentielle et en demandant sa stationnarité, l'équation à résoudre est :

$$K\tilde{U} = F \quad (11)$$

où  $\tilde{U} = \{\tilde{U}^i\}$  avec  $1 \leq i \leq n \times m$ .

### 3 Résultats

#### 3.1 Chargement thermique sur poutre biencastée

Afin d'illustrer la méthode, on considère une poutre bi-encastée, et soumise à un chargement thermique. La section est représentée sur la Figure 1. La poutre mesure  $40m$  dans sa direction longitudinale.

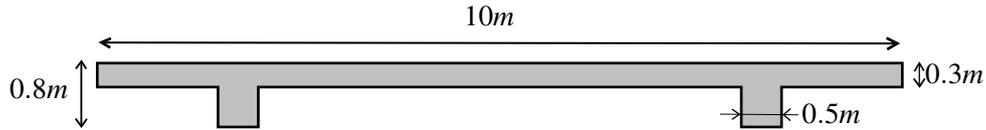


FIGURE 1 – Section of the beam

Le volume de la poutre est noté  $\Omega$ . Un chargement thermique est appliqué sur le volume  $V_T$  décrit sur les figures 2 et 3. Le chargement thermique entraîne une déformation isotrope sur  $V_T$  :

$$\epsilon^{th} = \alpha (T - T^{ref}) \mathbb{1} \quad (12)$$

où  $\alpha$  est le coefficient de dilatation, ici fixé à  $12 \cdot 10^{-6}$ , et  $T^{ref}$  est la température de référence.

$$T = \begin{cases} 60^\circ C & \text{sur } V_T \\ 20^\circ C & \text{sur } \Omega \setminus V_T \end{cases}, \quad T^{ref} = 20^\circ \text{ sur } \Omega \quad (13)$$

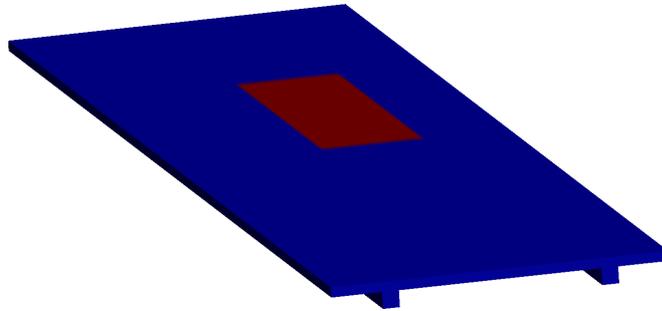


FIGURE 2 – Position of the thermal load area  $V_T$

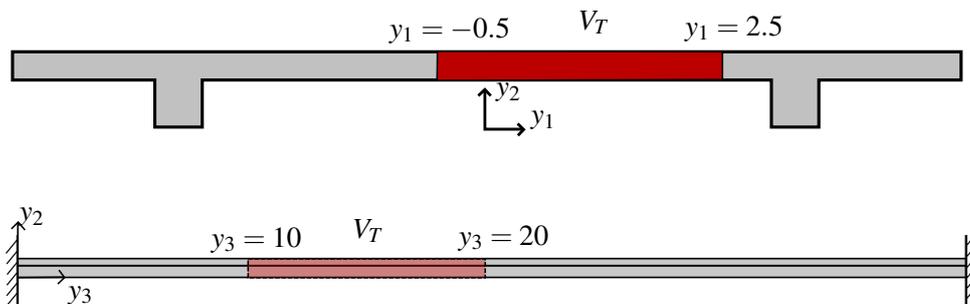


FIGURE 3 – Geometric description of  $V_T$

### 3.2 Comparaison avec modèle 3D

Le calcul est effectué au préalable sur un modèle 3D grâce au logiciel *Code\_aster*. Le modèle 3D est considéré comme étant le modèle de référence. Le calcul est ensuite effectué avec la méthode des développements asymptotiques telle que décrit précédemment. Les caractéristiques des deux modèles sont décrites dans le tableau :

	modèle de référence	modèle poutre
type d'élément	hexaèdre 20 nœuds	triangle 6 nœuds + poutre 42 nœuds
nombre d'éléments	140000	712 + 1
temps CPU	840 s	75 s

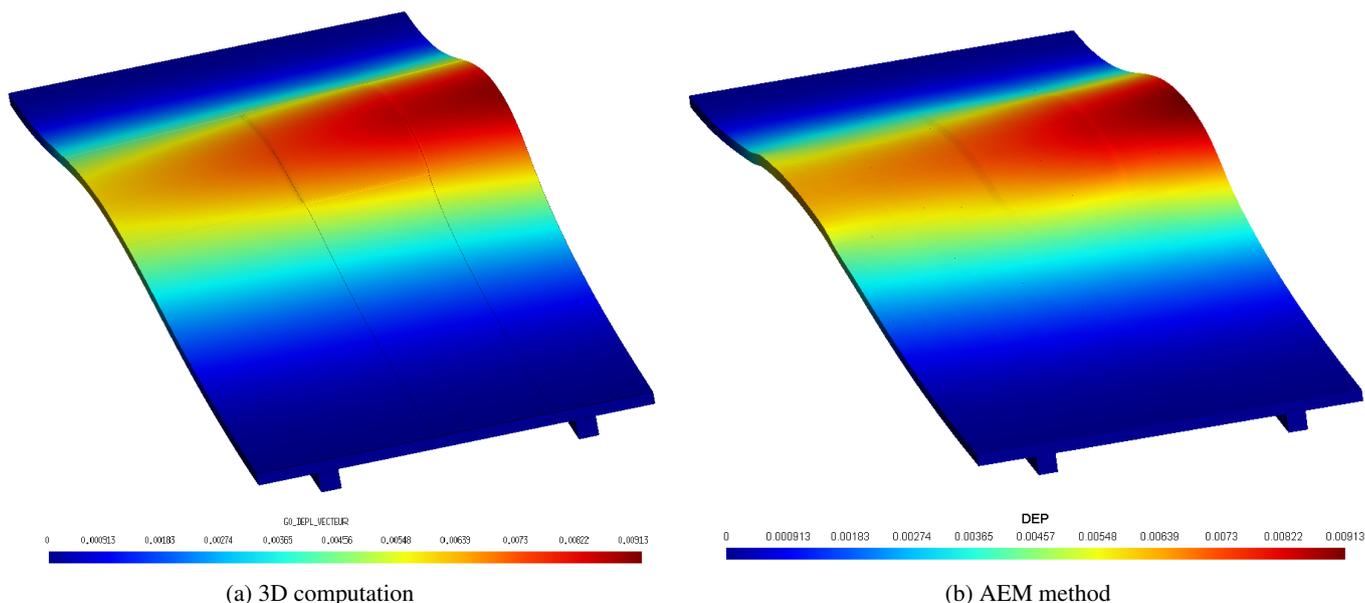


FIGURE 4 – Déformée de la structure sous chargement thermique (facteur d'amplification = 200)

La structure déformée obtenue avec le calcul 3D et avec le modèle de poutre est présentée sur la Figure 4. La Figure 4 montre la valeur absolue des déplacements 3D, les échelles des deux figures étant identiques. Cela souligne la capacité de la méthode des développements asymptotiques à capturer les déplacements transversaux. Cette méthode permet également de capturer de manière satisfaisante les discontinuités de chargement : la zone d'application des déformations imposées est aisément identifiable sur la Figure 4.

La Figure 5 compare le déplacement horizontal à mi-épaisseur de la table, à l'abscisse longitudinale  $y_3 = 15$ . La courbe bleue représente le résultat du calcul 3D, la courbe orange celui du modèle du poutre avec un développement asymptotique à l'ordre 2, et la courbe grise celui du modèle de poutre sans aucun mode spécifique aux déformations imposées. Le résultat obtenu avec le modèle de poutre converge efficacement vers le modèle 3D : la moyenne des écarts au modèle 3D en chaque abscisse est de 0.53%. La discontinuité de la déformation thermique appliquée à la poutre apparaît clairement. De plus, la comparaison avec la courbe sans modes de déformations imposées souligne le fait que les seuls modes de poutre tels qu'introduits précédemment ne sont pas suffisants pour décrire précisément la réponse de la structure soumise à ce chargement particulier.

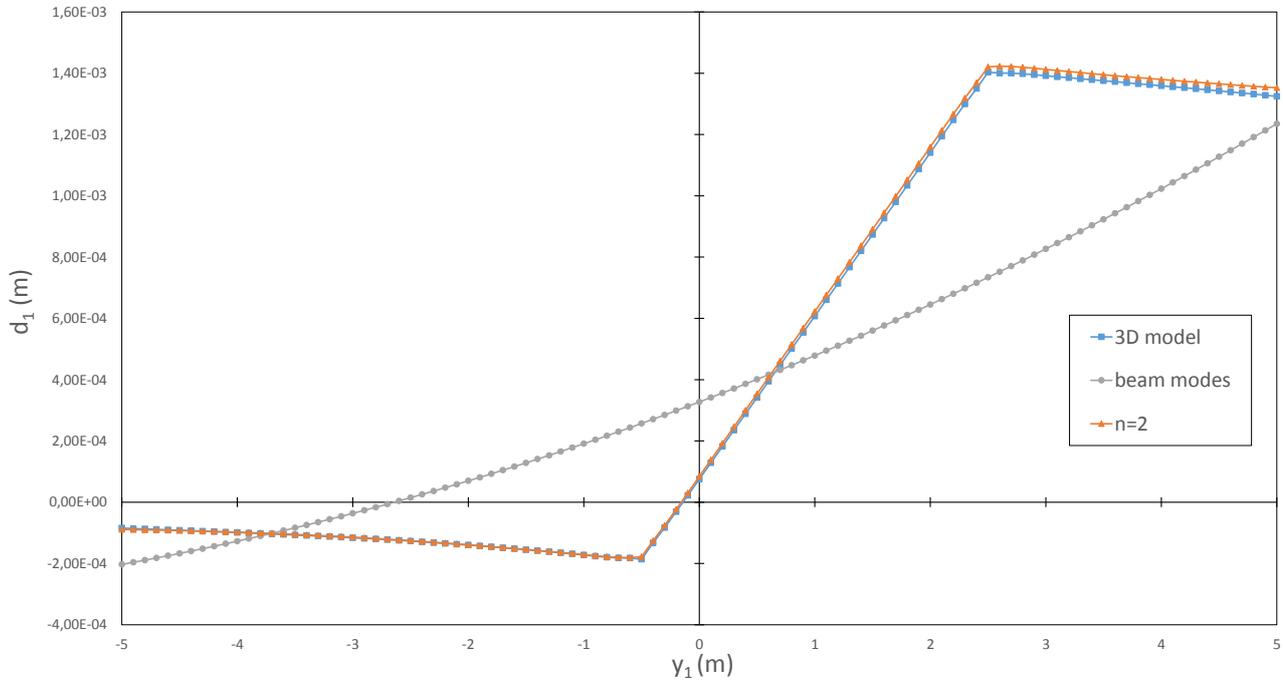


FIGURE 5 – Déplacement horizontal pour  $y_3 = 15$

## 4 Conclusion

Le modèle de poutre présenté par Ferradi et al. [1] offre un élément de calcul numérique combinant la simplicité d'un élément de poutre et une précision proche d'un calcul 3D pour un temps de calcul très largement réduit. Il est ici proposé d'élargir les possibilités d'un tel élément en adaptant son utilisation au cas des déformations imposées. L'étude d'une poutre sous chargement thermique, fluage ou précontrainte peut alors être menée grâce à cet élément et bénéficier de ses avantages. Le modèle est basé sur l'utilisation des développements asymptotiques et sur une séparation de variables entre les variables transversales et la variable longitudinale. La cinématique de la poutre est enrichie par des modes de déplacements calculés sur la section de poutre. L'introduction de déformations imposées entraîne l'apparition de modes de déplacements additionnels qui viennent compléter la cinématique déjà calculée. Les résultats obtenus confirment la puissance du modèle offert par la réduction de modèle et par la méthode des développements asymptotiques : les calculs sont rapides et les résultats comparables aux résultats 3D.

## Références

- [1] M.K. Ferradi, A. Lebé, A. Fliscounakis, X. Céspedes, K. Sab, *A model reduction technique for beam analysis with the asymptotic expansion method*, Comput. Struct. 172(2016) 11-28.
- [2] N. Buannic, P. Cartraud, *Higher-order effective modeling of periodic heterogeneous beams. I. Asymptotic expansion method*, Int. J. Solids Struct. 38(2001) 7139-7161.