



**HAL**  
open science

## Méthode de tir adaptée pour le calcul des vibrations auto-entretenues d'un modèle éléments finis de frein.

Lucien Charroyer, Olivier Chiello, Jean-Jacques Sinou

### ► To cite this version:

Lucien Charroyer, Olivier Chiello, Jean-Jacques Sinou. Méthode de tir adaptée pour le calcul des vibrations auto-entretenues d'un modèle éléments finis de frein.. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899331

**HAL Id: hal-01899331**

**<https://hal.science/hal-01899331>**

Submitted on 19 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthode de tir adaptée pour le calcul des vibrations auto-entretenues d'un modèle éléments finis de frein.

L. Charroyer<sup>1,2,3</sup>, O. Chiello<sup>1,3</sup>, J.-J. Sinou<sup>1,2,4</sup>.

<sup>1</sup> CeLyA, Université de Lyon, France, [lucien.charroyer@doctorant.ec-lyon.fr](mailto:lucien.charroyer@doctorant.ec-lyon.fr)

<sup>2</sup> LTDS UMR CNRS 5513, École Centrale de Lyon, France,

<sup>3</sup> IFSTTAR, AME, LAE, Bron, France,

<sup>4</sup> Institut Universitaire de France, Paris, France.

**Résumé** — Ce papier propose d'étudier les vibrations auto-entretenues d'un modèle éléments finis de frein ferroviaire soumis à des lois de contact unilatéral et de frottement de Coulomb à coefficient de frottement constant. En premier lieu la stabilité du système est étudiée en fonction du coefficient de frottement afin de déterminer les zones instables pour lesquelles des vibrations auto-entretenues peuvent apparaître. Une solution périodique non-linéaire est ensuite recherchée à l'aide d'une méthode itérative de tir combinée à une approche énergétique simplifiée pour l'estimation initiale.

**Mots clefs** — Dynamique non-linéaire, Vibrations auto-entretenues, Méthode de tir, Contact frottant.

## 1. Introduction

La compréhension et la modélisation des mécanismes à l'origine des bruits de crissement constituent un enjeu important pour les ingénieurs et la communauté scientifique vibro-acoustique. De nombreuses recherches impliquant différentes hypothèses et développements ont été proposées pour étudier le problème des vibrations induites par frottement. Des résumés de ces travaux peuvent par exemple être trouvés dans [1, 2, 3]. En considérant que le bruit de crissement est dû à des instabilités de couplages de modes, deux types d'études sont classiquement réalisées : la première est basée sur l'analyse de stabilité du système. Elle permet de déterminer l'occurrence et les caractéristiques des instabilités vibratoires conduisant à des vibrations auto-entretenues c'est-à-dire d'événements potentiellement crissants. La seconde correspond à l'analyse non-linéaire de l'évolution temporelle du système et permet de calculer les vibrations auto-entretenues elles-mêmes, en particulier les niveaux vibratoires auxquels elles se stabilisent. En effet, partant d'un état proche de l'équilibre, un système soumis à des instabilités voit généralement l'amplitude des vibrations augmenter jusqu'à apparition de non-linéarités et saturation. L'évolution temporelle de ce type de système est donc composée d'un régime transitoire et d'un régime stationnaire lorsque les amplitudes se sont stabilisées (cycle limite). Les techniques numériques actuelles ne permettent pas de déterminer avec efficacité et en conservant des temps de calcul raisonnables le régime stationnaire des vibrations auto-entretenues, quantité généralement recherchée d'un point de vue industriel. En effet, d'un côté l'intégration numérique directe [4, 5] permet de déterminer le régime stationnaire, mais nécessite également le calcul du régime transitoire. D'un autre côté, la méthode de balance harmonique sous contraintes [6] permet de déterminer directement le régime stationnaire. Néanmoins cette dernière peut s'avérer délicate d'utilisation pour des modèles éléments finis de grandes tailles et nécessite une connaissance a priori de l'approximation de la solution stationnaire du système.

Cette étude propose de tester une méthode de tir pour déterminer le régime stationnaire de systèmes déstabilisés par le frottement, sous la forme d'une solution périodique. La méthode permet en effet de calculer directement une telle solution par une série de courtes intégrations temporelles en itérant sur

les conditions initiales et la période. Son principal inconvénient est l'estimation des conditions initiales correspondant à la première itération. Pour pallier à ce problème une méthode d'estimation énergétique simplifiée est proposée. Dans ce papier, la méthode est appliquée à un modèle éléments finis simplifié (FEM) de frein de TGV.

## 2. Formulation du problème

Le système étudié est représenté par la Figure 1. Il s'agit d'un modèle simplifié de frein de TGV. Le moyeu est représenté par des éléments de coques et le disque et les plots des garnitures par des éléments volumiques. Les faces externes des plots sont solidaires et fixées à deux solides rigides modélisant de manière très simplifiée les armatures des garnitures et les porte-garnitures. Les porte-garnitures sont ici directement fixés au bâti par de simples raideurs au niveau des liaisons avec les étriers et les bielles de reprise d'effort. Les raideurs choisies dans cette étude permettent uniquement le déplacement normal des porte-garnitures. Une force extérieure de serrage de 500 N est imposée à chaque liaison porte-garnitures/étrier.

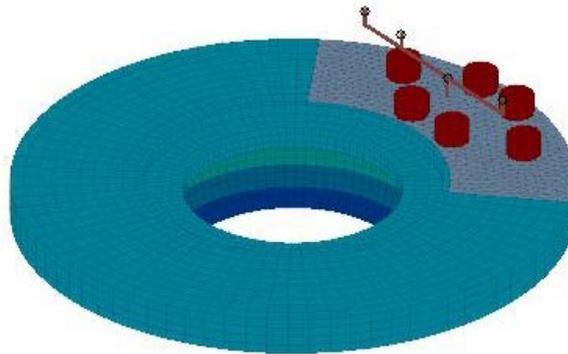


Figure 1 – Modèle FEM simplifié de frein de TGV

L'évolution du système discrétisé par éléments finis est régie par l'équation du mouvement (1)

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} + \mathbf{F} \quad (1)$$

où  $\mathbf{U}$ ,  $\dot{\mathbf{U}}$  et  $\ddot{\mathbf{U}}$  sont respectivement les vecteurs de déplacement, de vitesse et d'accélération. Le vecteur  $\mathbf{F}$  représente les forces extérieures de serrage. Le vecteur  $\mathbf{R}$  inclut les réactions de contact normal et les forces de frottement appliquées sur le disque et les plots au niveau des interfaces.  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$  et  $\mathbf{K}$  sont respectivement les matrices de masse, d'amortissement et de raideur. Un amortissement de type Rayleigh est utilisé.

Dans cette étude le contact entre le disque et les plots est supposé unilatéral (sans interpénétration). Il est modélisé selon une loi de Signorini. Le frottement est gouverné par une loi de Coulomb à coefficient de frottement  $\mu$  constant. Ces lois sont exprimées nœud à nœud sous forme de projections augmentées comme indiqué par les équations (2) et (3). Les projections s'effectuent sur l'espace des réels négatifs pour les réactions normales  $\mathbf{r}_n$  et sur le cône de Coulomb associé au coefficient de frottement  $\mu$  pour les forces de frottement  $\mathbf{r}_t$ . Le vecteur  $\mathbf{g}$  est le déplacement relatif entre les garnitures et le disque,  $g_0$  est le jeu initial normal et  $\dot{\mathbf{g}}_t$  est le vecteur de vitesse tangentielle relatif entre ces structures. La vitesse de glissement, représentant la vitesse d'entraînement du disque, est notée  $\mathbf{v}$ . Le vecteur  $\mathbf{R}$  des réactions de contact normal et des forces de frottement appliquées sur le

disque et les plots au niveau des interfaces, est alors défini selon l'équation (4), où  $\mathbf{P}_n$  et  $\mathbf{P}_t$  sont des matrices permettant de passer des efforts dans le repère local aux efforts dans le repère global. Enfin,  $\rho_n$  et  $\rho_t$  sont des paramètres d'augmentation strictement positifs dont le choix impacte uniquement la convergence de l'algorithme de point fixe permettant la résolution numérique (cf. section 4).

$$\mathbf{r}_n = \text{proj}_{\mathbb{R}^-}(\mathbf{r}_n - \rho_n(\mathbf{g}_n - \mathbf{g}_0)) \quad \forall \rho_n > 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{r}_t = \text{proj}_{K_\mu}(\mathbf{r}_t - \rho_t(\dot{\mathbf{g}}_t - \mathbf{v})) \quad \forall \rho_t > 0 \quad (3)$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_n^T \mathbf{r}_n + \mathbf{P}_t^T \mathbf{r}_t \quad (4)$$

### 3. Analyse de stabilité

La stabilité du système est d'abord étudiée. Le comportement de petites perturbations autour de l'équilibre glissant quasi-statique est analysé afin de déterminer l'occurrence des instabilités. L'équilibre est calculé avec un algorithme des statuts permettant de déterminer la présence de contact pour chaque couple de nœud à l'interface. Les nœuds en contact à l'équilibre sont supposés en contact pour l'étude de stabilité (contact bilatéral imposé par des contraintes). Les forces de frottement sont ensuite linéarisées en glissement autour de la position d'équilibre statique et les valeurs propres complexes du problème sont calculées en utilisant un système du type :

$$(\lambda^2 \widetilde{\mathbf{M}}_c + \lambda \widetilde{\mathbf{C}}_c + \widetilde{\mathbf{K}}_c) \Phi_c = \mathbf{0} \quad (5)$$

où  $\widetilde{\mathbf{M}}_c$ ,  $\widetilde{\mathbf{C}}_c$  et  $\widetilde{\mathbf{K}}_c$  sont les projections sur un espace satisfaisant naturellement les contraintes bilatérales des matrices de masse, d'amortissement et de raideur du système auxquelles sont ajoutées les contributions non symétriques des forces de frottement linéarisées. Les valeurs propres complexes sont notées  $\lambda$  et les vecteurs propres associés  $\Phi_c$ .

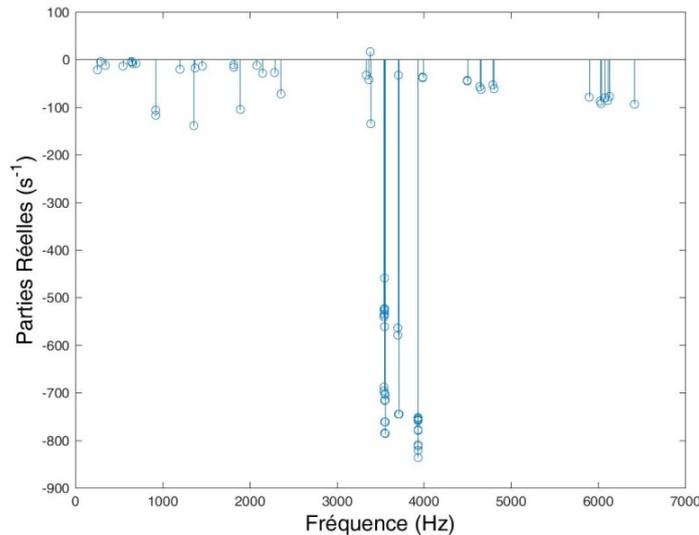


Figure 2 – Résultat de stabilité pour  $\mu = 0.20$

Ce calcul est effectué par itération sur le résidu à partir de la base des 100 premiers modes propres réels du système, calculés sans prise en compte du frottement ni de l'amortissement. Si les parties

réelles de toutes les valeurs propres sont négatives, le système est stable. À contrario, si l'une d'entre elles a une partie réelle positive alors le système est instable, soumis à un couplage de mode : des vibrations auto-entretenues et du bruit de crissement peuvent alors survenir. Tous les détails d'une telle analyse peuvent être retrouvés dans [7]. La Figure 2 présente un résultat d'analyse de stabilité pour un coefficient de frottement égal à 0.2. Pour cette configuration, un seul mode instable apparaît à une fréquence 3382 Hz.

#### 4. Analyse non-linéaire

Les vibrations auto-entretenues sont ensuite calculées lorsque le système présente un mode instable. Un cas de référence comportant un seul mode instable est choisi dans notre étude pour valider la méthode de tir (comme indiqué dans la Figure 2). La  $\theta$ -méthode modifiée, un schéma conservatif et stable lorsque  $\theta = 0.5$  et permettant de vérifier une loi de choc inélastique, est utilisée pour l'intégration temporelle numérique (voir [4] et [8] pour plus de détails). À chaque itération, un algorithme itératif de point fixe combiné à une condensation de l'équation d'équilibre dynamique (1) sur les degrés de liberté de contact permet de résoudre les équations de contact frottant (2) et (3). La Figure 3 représente le spectrogramme énergétique d'un calcul par intégration numérique directe. Seul le mode instable est initialement excité avec une faible amplitude – pas de non-linéarités fortes de type décollement ou adhérence – et l'apparition des harmoniques correspond à l'apparition des non-linéarités.

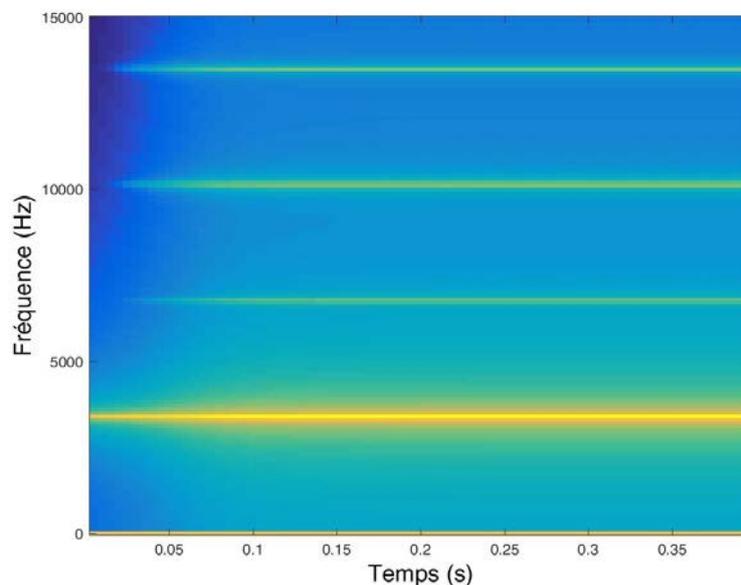


Figure 3 – Spectrogramme énergétique du cas de référence

Afin de réduire les coûts de calcul de la solution stationnaire vers laquelle converge l'intégration temporelle directe, une adaptation de la méthode de tir aux systèmes déstabilisés par le frottement est réalisée. Cette méthode permet de déterminer des solutions périodiques en résolvant un problème d'état en deux points (voir [9] pour plus d'information). Trois points spécifiques sont à souligner ici.

D'une part, le système est soumis à des vibrations auto-entretenues et la période de ces vibrations est une des inconnues du problème. On va donc faire itérer la méthode de tir sur la période en complément des conditions initiales comme expliqué dans [9].

D'autre part, le système étudié possède environ 32000 degrés de liberté. Le vecteur de conditions initiales est donc associé à 64000 inconnues, ce qui implique que la méthode de tir classique itérerait sur 64001 inconnues. Le but étant de réduire le temps de calcul, une réduction de l'espace dans lequel les conditions initiales sont recherchées est proposée. Dans un premier temps, et pour tester la méthode, on propose d'utiliser une base très simple comprenant la partie réelle et imaginaire du vecteur propre du mode instable et la déformée statique comme indiqué par les équations (6) et (7). Dans ces équations,  $\mathbf{U}_0$  et  $\mathbf{V}_0$  sont les vecteurs de conditions initiales en déplacement et vitesse,  $\Phi_r$ ,  $\Phi_i$  et  $\Phi_e$  sont respectivement la partie réelle du vecteur propre du mode instable, la partie imaginaire et la déformée statique ;  $q_r$ ,  $q_i$  et  $q_e$  leur amplitude en déplacement et  $p_r$ ,  $p_i$  et  $p_e$  leur amplitude en vitesse. Ces amplitudes modales en déplacement et vitesse (regroupées dans le vecteur  $\mathbf{Q}_0^{(0)}$ ) deviennent alors les inconnues des conditions initiales et la méthode de tir itère sur 7 inconnues. Il faut bien souligner que seules les conditions initiales de chaque itération sont réduites. Lors des intégrations temporelles, les champs de déplacements et vitesses physiques sont utilisés.

$$\mathbf{U}_0 = q_r \Phi_r + q_i \Phi_i + q_e \Phi_e \quad (6)$$

$$\mathbf{V}_0 = p_r \Phi_r + p_i \Phi_i + p_e \Phi_e \quad (7)$$

$$\mathbf{Q}_0^{(0)} = [q_r \quad q_i \quad q_e \quad p_r \quad p_i \quad p_e]^T \quad (8)$$

Enfin, le problème majeur de la méthode de tir est son initialisation. En effet, les corrections sur les conditions initiales et la période sont calculées par un algorithme de Newton-Raphson qui est un algorithme local. Si la méthode de tir est initialisée trop loin de l'état stationnaire recherché, elle peut ne pas converger. Dans cette étude, une méthode énergétique simplifiée est proposée pour estimer une solution initiale. Elle est basée sur l'observation du comportement des systèmes soumis à des instabilités, pour lesquels l'amplitude des vibrations augmente jusqu'à saturation. Cette saturation implique une diminution de la puissance injectée par le contact alors que la puissance dissipée par amortissement reste approximativement constante.

On recherche un cycle périodique  $\mathbf{U}(t)$  basé sur la déformée et la fréquence du mode complexe instable issu de l'étude de stabilité.

$$\mathbf{U}(t) = q \Re(\Phi e^{i\Im(\lambda)t}) \quad (9)$$

$$\dot{\mathbf{U}}(t) = q \Re(i\Im(\lambda) \Phi e^{i\Im(\lambda)t}) \quad (10)$$

avec  $\Phi$  le vecteur propre associé au mode instable,  $\lambda$  la valeur propre du mode instable et  $q$  son amplitude.

Pour estimer cette amplitude, le principe est donc d'équilibrer le bilan de puissance moyen sur le cycle lorsque le système est stationnaire. Le bilan de puissance instantané s'écrit :

$$\frac{\partial E}{\partial t} + P_C = P_R + P_F \quad (11)$$

avec  $\frac{\partial E}{\partial t}$  la variation d'énergie mécanique,  $P_C$  la puissance dissipée par amortissement,  $P_R$  la puissance des réactions de contact frottant et  $P_F$  la puissance injectée par les efforts imposés. En régime stationnaire, sur un cycle périodique de période  $T = \frac{2\pi}{\Im(\lambda)}$ , la variation d'énergie mécanique et

la puissance injectée par les efforts statiques sont nulles en moyenne. Le bilan de puissance moyen sur le cycle, ramené à l'énergie mécanique moyenne, devient :

$$\bar{\tau}_C = \bar{\tau}_R(q) \quad (12)$$

avec

$$\bar{\tau}_C = \frac{\bar{P}_C}{\bar{E}} \quad (13)$$

$$\bar{\tau}_R = \frac{\bar{P}_R}{\bar{E}} \quad (14)$$

$$\bar{P}_C = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}} dt \quad (15)$$

$$\bar{P}_R = \frac{1}{T} \int_0^T \dot{\mathbf{U}}_c^T (\mathbf{R} - \mathbf{R}_0) dt \quad (16)$$

$$\bar{E} = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} \right) dt \quad (17)$$

avec  $\dot{\mathbf{U}}_c$  la projection du vecteur vitesse sur les nœuds à l'interface,  $\mathbf{R}_0$  le vecteur des réactions statiques et  $\mathbf{R}$  le vecteur des réactions liées au contact frottant. Ces dernières sont exprimées de façon à pouvoir être saturées. En développant les calculs on remarque que  $\bar{\tau}_C$  est indépendant de l'amplitude modale  $q$  contrairement à  $\bar{\tau}_R$ .

On recherche alors l'amplitude  $q = q_0$  permettant de vérifier le bilan moyen (12) et la méthode de tir est initialisée de la manière suivante :

$$\mathbf{Q}_0^{(0)} = [q_0 \quad 0 \quad 1 \quad \Re(\lambda)q_0 \quad -\Im(\lambda)q_0 \quad 0]^T \quad (18)$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\Im(\lambda)} \quad (19)$$

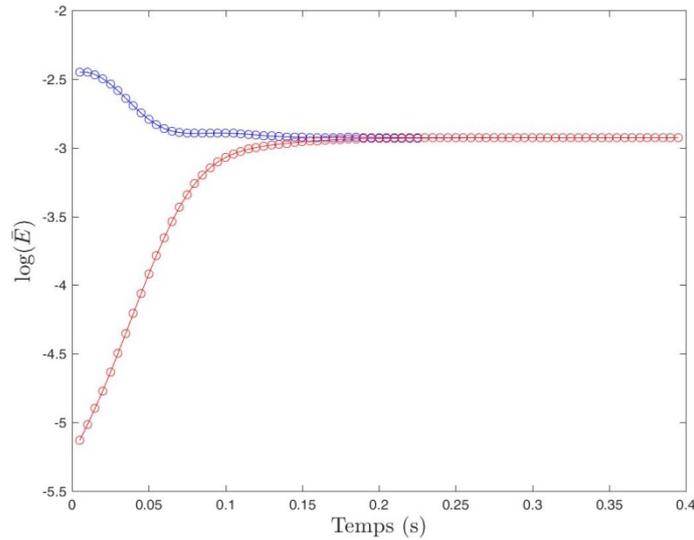


Figure 4 – Comparaison des évolutions des énergies mécaniques moyennes pour deux conditions initiales (rouge : proche de l'équilibre, bleu : estimation énergétique simplifiée)

La Figure 4 permet de valider la pertinence de cette estimation et représente l'évolution de l'énergie mécanique moyenne dans deux cas d'intégration temporelle directe : le premier correspond à une initialisation au premier décollement c'est-à-dire proche de l'équilibre (en rouge), le second correspond à une initialisation sur l'estimation énergétique (en bleu). En comparant l'énergie mécanique moyenne initiale et celle du régime stationnaire, on constate que l'estimation énergétique permet d'obtenir une estimation initiale assez proche de la solution stationnaire recherchée, ceci permettant de réduire les temps de calcul, même dans le cadre de l'intégration temporelle complète du système.

Le calcul des vibrations auto-entretenues en régime stationnaire, en utilisant la méthode de tir et l'estimation énergétique, est résumé dans la Figure 5.

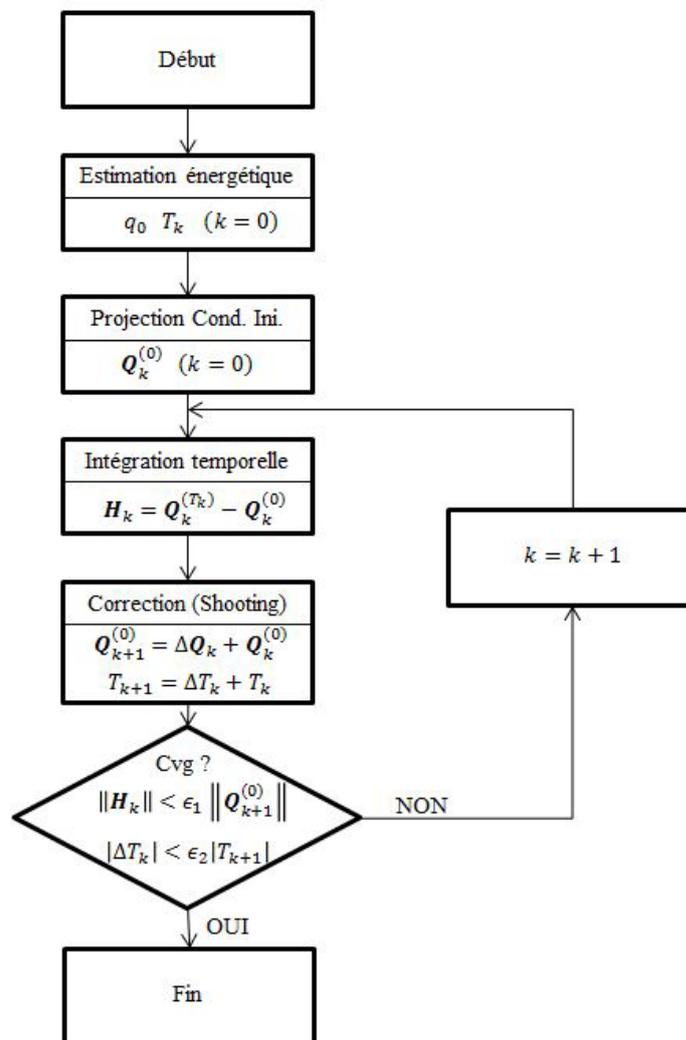


Figure 5 – Algorithme de calcul des vibrations auto-entretenues en régime stationnaire

## 5. Conclusion

Ce papier présente une étude d'un problème de vibrations auto-entretenues induites par frottement. L'étude de stabilité du modèle numérique est d'abord effectuée afin de déterminer le phénomène de couplage de mode. Ensuite l'analyse non-linéaire est menée et permet de calculer les vibrations auto-entretenues du système. Une méthode de tir combinée à une estimation énergétique simplifiée est proposée afin de réduire les coûts de calcul.

## Références

- [1] N.M. Kindkaid, O.M. O'Reilly, P. Papadopoulos. Automotive disc brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 267, 105-166, 2003.
- [2] H. Ouyang, W. Nack, Y. Yuan, F. Chen. Numerical analysis of automotive disc brake squeal: a review, *International Journal of Vehicle Noise and Vibration* 1, 207-231, 2005.
- [3] R. Spurr. A theory of brake squeal, *Proc. Auto. Div. Inst. Mech. Eng.* 1, 33-40, 1961.
- [4] X. Lorang. Instabilité vibratoire des structures en contact frottant : Application au crissement des freins de TGV, PhD thesis, École Polytechnique, 2004.
- [5] F. Massi, L. Baillet, O. Giannini, A. Sestieri. Brake squeal: Linear and nonlinear numerical approaches, *Mechanical Systems and Signal Processing* 21, 2374-2393, 2007.
- [6] N. Coudeyras, S. Nacivet, J-J. Sinou. Periodic and quasi-periodic solutions for multi-instabilities involved in brake squeal, *Journal of Sound and Vibration* 328, 520-540, 2009.
- [7] D. Brizard, O. Chiello, J-J. Sinou, X. Lorang. Performances of some reduced bases for the stability analysis of a disc/pads system in sliding contact, *Journal of Sound and Vibration* 330, 703-720, 2011.
- [8] D. Vola, E.Pratt, M. Jean, M. Raous. Consistent time discretization for a dynamical frictional contact problem and complementarity techniques, *Revue européenne des éléments finis* 7, 149-162, 1998.
- [9] A. H. Nayfeh, B. Balachandran. *Applied Nonlinear Dynamics: Analytical, Computational, and Experimental Methods*, Wiley-VCH, 2004.