HAL
open science

Contact de surfaces rugueuses et instabilités en présence d'adhésion

Valentine Rey, Jeremy Bleyer, Jean-François Molinari

To cite this version:

Valentine Rey, Jeremy Bleyer, Jean-François Molinari. Contact de surfaces rugueuses et instabilités en présence d'adhésion. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899328

HAL Id: hal-01899328

https://hal.science/hal-01899328v1

Submitted on 19 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

CSMA 2017
13ème Colloque National en Calcul des Structures
15-19 Mai 2017, Presqu'île de Giens (Var)

Contact de surfaces rugueuses et instabilités en présence d'adhésion

V. Rey[1], J. Bleyer[1,2], J-F. Molinari[1]

[1] *LSMS, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, {valentine.rey,jeremy.bleyer,jean-francois.molinari}@epfl.ch*
[2] *Laboratoire Navier, Ecole des Ponts ParisTech, Université Paris-Est, jeremy.bleyer@enpc.fr*

Résumé — Nous considérons la problématique du contact normal entre un solide élastique et un solide rigide présentant une surface rugueuse en prenant en compte l'effet de forces d'adhésion. Nous cherchons à étudier la stabilité des positions d'équilibre calculées pour ce système. Nous proposons pour cela un algorithme de type proximal pour la résolution du problème aux valeurs propres sous contraintes apparaissant dans l'analyse de stabilité d'un système en présence de contact. Les résultats obtenus sont illustrés dans le cas simple d'un contact Hertzien avec adhésion.
Mots clés — contact normal, adhésion, analyse de stabilité.

1 Introduction

Les surfaces sont en général rugueuses et composées de multiples aspérités sur une large échelle de longueurs. La mécanique du contact pour les surfaces rugueuses se propose de décrire les interactions complexes entre ces aspérités. La compréhension des micro contacts est nécessaire pour de nombreuses applications telles que la friction, l'usure, ou la conductivité thermique ou électrique aux interfaces. À petite échelle, les forces de Van der Waals ne peuvent plus être considérées comme négligeables si bien que l'adhésion devient primordiale pour la robustesse des systèmes micro-électromécaniques (MEMS) ou nano-électromécaniques (NEMS). Par conséquent, les forces d'adhésion doivent être introduites dans les méthodes de résolution numériques. Une conséquence de l'ajout de l'adhésion est de rendre possible l'existence de solutions d'équilibre instables. Cette question est généralement ignorée dans les publications qui se concentrent sur l'obtention, déjà difficile, d'une solution d'équilibre vérifiant les contraintes de contact.

L'objectif de cette communication est d'étudier la stabilité des solutions d'équilibre dans le cas de contact normal avec adhésion. L'étude de stabilité implique généralement l'étude d'une perturbation autour d'une solution d'équilibre. Dans le cas du contact, la difficulté réside dans le fait que toutes les perturbations ne sont pas admissibles puisque la contrainte de non-interpénétration doit être respectée. Cette étude peut se reformuler en un calcul de valeurs propres sous contraintes. Nous proposons une méthode pour calculer la plus petite valeur propre sous ces contraintes et exhibons ainsi les modes d'instabilité.

La formulation du problème de contact normal sur des surfaces périodiques ainsi que le principe de la méthode de résolution numérique par formulation intégrale sont présentés en section 2. La section 3 traite de l'analyse de stabilité en présence de contact et propose un algorithme permettant de calculer la plus petite valeur propre du système sous contraintes. Enfin, quelques exemples sont présentés en section 4 sur des surfaces simples afin d'illustrer l'approche proposée.

2 Contact normal par BEM avec adhésion

Considérons le contact normal sans frottement sous l'hypothèse des petites déformations entre deux solides semi-infinis et homogènes : un solide déformable dont la surface est plane et un solide infiniment rigide dont la surface est définie par la fonction :

$$(x,y) \to z = h(x,y) \tag{1}$$

Le solide déformable a un comportement élastique linéaire isotrope.

2.1 Problème continu

Nous utilisons une formulation intégrale [1] permettant de reformuler le problème de contact uniquement en fonction de quantités mécaniques définies sur la surface S du solide élastique semi-infini. Le problème est donc résolu uniquement sur S ce qui représente une réduction de dimension et donc de coût de calcul. Une fois le problème résolu, les formules de représentation intégrale permettent d'obtenir le champ de déplacement ou de contrainte à l'intérieur du solide à partir des informations sur S. Le comportement élastique est décrit par un produit de convolution avec un noyau représentant la solution fondamentale de Westergaard [7]. Plus précisément, la relation entre le déplacement normal de la surface $u(\underline{x})$ et la pression normale $p(\underline{x})$ à la surface est :

$$u(\underline{x}) = \int_S W(\underline{x}-\underline{x}')p(\underline{x})d\underline{x}' \tag{2}$$

où le noyau $W(\underline{x})$ est la déflection au point de coordonnées $\underline{x}$ produite par un effort ponctuel unitaire normal appliqué à l'origine.

Notons g la distance entre les deux solides définie par :

$$g(\underline{x}) = u(\underline{x}) - h(\underline{x}) \tag{3}$$

La condition de non-interpénétration impose :

$$\forall \underline{x},\, g(\underline{x}) \geq 0 \tag{4}$$

Le chargement est défini en imposant la valeur moyenne u_0 du déplacement de la surface :

$$\int_S u(\underline{x})dS = u_0 \tag{5}$$

Le champ de déplacement u est solution du problème de minimisation sous contraintes suivant :

$$u = \underset{u\in\mathcal{A}}{\operatorname{argmin}}\, E_p(u) \tag{6}$$

où $\mathcal{A}$ est l'espace des champs admissibles caractérisé par

$$u \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall x,\, u(\underline{x}) - h(\underline{x}) \geq 0 \text{ et } \int_S u(\underline{x})dS = u_0 \tag{7}$$

L'énergie potentielle est égale à la somme de l'énergie élastique et de l'énergie d'adhésion :

$$E_p = E_{elas} + E_{adh} = \int_S \frac{1}{2}p(\underline{x})u(\underline{x})dS + \int_S f(g(\underline{x}))dS \tag{8}$$

où la densité d'énergie d'adhésion $f(g)$ est généralement une fonction à valeurs négatives de la distance entre les deux surfaces. On la supposera ici deux fois continûment dérivable.

Définissons à présent le Lagrangien du système :

$$\mathcal{L}_\lambda(u) = E_p(u) - \int_S \lambda(u-h)dS \tag{9}$$

où λ est le multiplicateur de Lagrange positif associée à la contrainte de contact : $\lambda \geq 0$. La stationarité du Lagrangien s'écrit :

$$\frac{\partial \mathcal{L}_\lambda(u)}{\partial u} = p + \frac{\partial f}{\partial u} - \lambda = 0 \tag{10}$$

Par conséquent, le multiplicateur de Lagrange est égal à la somme des forces élastiques et d'adhésion.

La condition d'orthogonalité pour le contact avec adhésion est alors :

$$\forall \underline{x}, \qquad \begin{cases} \left(p(\underline{x}) + \frac{\partial f}{\partial u}\right) g(\underline{x}) = 0 \\ p(\underline{x}) + \frac{\partial f}{\partial u} \geq 0 \\ g(\underline{x}) \geq 0 \end{cases} \tag{11}$$

Quand la contrainte n'est pas saturée ($g > 0$), le multiplicateur de Lagrange est nul ($\lambda = 0$) et quand le multiplicateur est strictement positif $\lambda > 0$, la contrainte est saturée ($g = 0$). D'un point de vue mécanique, aux points où les deux surfaces ne sont pas en contact ($g > 0$), la somme des forces est nulle (les forces élastique et d'adhésion s'équilibrent) tandis qu'aux points où les deux surfaces sont en contact ($g = 0$), la somme des deux forces doit être positive (compression).

2.2 Problème discrétisé

Considérons une surface carrée de côté L discrétisée à l'aide d'une grille uniforme, dont la longueur de discrétisation est notée l. Nous allons résoudre le problème continu sur les $N = L^2/l^2$ points de la grille (collocation). Nous notons en gras le vecteur $\mathbf{u}$ collectant les N valeurs nodales du déplacement et $\mathbf{p}$ le vecteur collectant les N valeurs nodales de la pression élastique. Le scalaire u_i est la valeur du déplacement au noeud i.

Le produit de convolution (2) est calculé dans l'espace de Fourier si bien que la relation entre $\mathbf{u}$ et $\mathbf{p}$ est :

$$\mathbf{u} = \mathrm{FFT}^{-1}(\mathbf{W}\,\mathrm{FFT}(\mathbf{p})) \tag{12}$$

où FFT est la 2D Fast Fourier Transform, FFT^{-1} est la Backward 2D Fast Fourier Transform, et $\mathbf{W}$ est une matrice diagonale de taille $N \times N$ contenant les fonctions d'influence pour la solution de Westergaard [7]. Ces cœfficients sont constants et dépendent uniquement des propriétés élastiques et des fréquences du profil de pression (voir [6] pour leur expression). L'utilisation de la FFT assure automatiquement les conditions périodiques aux bords. Dans $\mathbf{W}$, le cœfficient associé à la fréquence nulle est nul : le déplacement à la surface n'est connu qu'à un mouvement de corps rigide près.

Nous pouvons également calculer une pression à valeur moyenne nulle à partir d'un déplacement grâce à la relation :

$$\mathbf{p} = \mathrm{FFT}^{-1}(\mathbf{W}^{-1}\,\mathrm{FFT}(\mathbf{u})) \tag{13}$$

Nous définissons le vecteur $\mathbf{g} = \mathbf{u} - \mathbf{h}$ et l'espace admissible

$$\mathbf{u} \in \mathcal{A} \Leftrightarrow \forall i \in [1;N],\, g_i \geq 0 \text{ et } \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i = u_0 \tag{14}$$

Le problème discrétisé s'écrit :

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \in \mathcal{A} \text{ minimisant } E_p(\mathbf{u}) \tag{15}$$

A l'aide d'un algorithme de gradient conjugué avec projections [5], nous pouvons calculer une solution d'équilibre solution du problème précédent.

3 Analyse de stabilité

3.1 Analyse de stabilité en présence de contact normal

En règle générale, l'analyse de stabilité d'un système conservatif autour d'une position d'équilibre passe par l'étude du signe de la dérivée seconde de l'énergie totale E_p (critère de Lejeune-Dirichlet) pour un ensemble de perturbations cinématiquement admissibles soit :

$$\delta v \cdot \frac{\partial^2 E_p}{\partial u^2}(u_{eq}, \lambda) \cdot \delta v > 0 \quad \forall \delta v \in V_0 \Rightarrow \text{ équilibre stable} \tag{16}$$

où u_{eq} correspond à la configuration d'équilibre étudiée, λ au paramètre de chargement qui est fixé et V_0 l'espace des champs cinématiquement admissibles à zéro.

En présence de contact, l'étude de stabilité devient plus complexe dans la mesure où l'on doit tenir compte de contraintes supplémentaires. Dans le cas de contact non-frottant et pour un obstacle fixe, les réactions de contact ne produisent pas de travail mécanique de sorte que l'on dispose d'un critère de stabilité similaire où seul l'espace des perturbations admissibles est modifié par la présence du contact [2] :

$$\delta v \cdot \frac{\partial^2 E_p}{\partial u^2}(u_{eq}, \lambda) \cdot \delta v > 0 \quad \forall \delta v \in V_0^+ \Rightarrow \text{ équilibre stable} \tag{17}$$

avec l'espace des perturbations admissibles défini comme l'ensemble des perturbations cinématiquement admissibles à zéro et positives sur la zone de contact I_c de la configuration d'équilibre :

$$V_0^+ = \{\delta v \in V_0 \text{ et tels que } \delta v(x) \geq 0 \ \forall x \in I_c\} \tag{18}$$

Afin de déterminer si la position d'équilibre obtenue par l'algorithme de résolution du contact en présence d'adhésion est stable, nous souhaiterions pouvoir calculer la plus petite valeur propre de la dérivée seconde de l'énergie potentielle autour de la position d'équilibre. Si le vecteur propre correspondant satisfait les contraintes unilatérales imposées par V_0^+ on peut directement conclure quant à la stabilité de la configuration.
Dans le cas contraire, nous avons besoin de calculer la solution du problème de minimisation suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_{min} = \min_{\delta v} \quad & \tfrac{1}{2}\delta v \cdot \frac{\partial^2 E_p}{\partial u^2}(u_{eq}, \lambda) \cdot \delta v \\ \text{t.q.} \quad & \|\delta v\| = 1 \\ & \delta v \in V_0^+ \end{aligned} \tag{19}$$

Dans le cas du contact avec conditions aux limites périodiques, l'admissibilité cinématique à zero se traduit par le fait que la perturbation doit être périodique et de moyenne nulle : $\int_S \delta v(\underline{x}) dS = 0$. Notons qu'en absence d'adhésion, $\partial^2 E_p / \partial u^2 = \partial^2 E_{elas} / \partial u^2$ qui est définie positive de sorte que la position d'équilibre sera toujours stable. La dérivée seconde de l'énergie en présence d'adhésion est donnée par la somme de l'opérateur de rigidité élastique K et de la dérivée seconde du potentiel d'adhésion D qui est potentiellement négatif : $A = \partial^2 E_p / \partial u^2 = \partial^2 E_{elas} / \partial u^2 + \partial^2 E_{adh} / \partial u^2 = K + D$. Notons que si K ne dépend pas de la position d'équilibre, l'opérateur D en dépend.

3.2 Algorithme proximal pour le calcul de valeurs propres sous contraintes

L'analyse de stabilité en présence de contact conduit donc à un calcul de valeurs propres d'un opérateur $\mathbf{A} = \mathbf{K} + \mathbf{D}$ sous contraintes unilatérales de type $x_i \geq 0$ pour $i \in I_c$ où I_c représente la zone de contact de la position d'équilibre. On note $C = \{\mathbf{x} \text{ tels que } x_i \geq 0 \text{ pour } i \in I_c\}$ le cône des contraintes unilatérales. On souhaite alors résoudre le problème aux valeurs propres suivant :

$$\begin{aligned} \lambda_{min} = \min_{\mathbf{x}} \quad & \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ \text{t.q.} \quad & \|\mathbf{x}\| = 1 \\ & \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0 \\ & \mathbf{x} \in C \end{aligned} \tag{20}$$

où la contrainte $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} = 0$ impose une valeur moyenne nulle pour le vecteur propre. La difficulté principale provient ici de la contrainte conique $\mathbf{x} \in C$ qui conduit à un problème aux valeurs propres non-régulier. Il semble qu'il n'existe pas, à l'heure actuelle, d'algorithme permettant de résoudre le problème (20). Nous proposons ici une approche faisant partie de la classe des méthodes d'éclatement d'opérateur (*operator-splitting*) généralement utilisées dans le cadre de l'optimisation de somme de fonctions convexes. On trouvera dans [4] une approche similaire, de type *Lagrangien Augmenté*, appliquée au calcul de valeurs propres d'opérateur non-réguliers tels que ceux apparaissant en plasticité. Notre approche se distingue des exemples traités dans [4] par la présence du cône C comme source de non-régularité et par le fait de ne pas nécessiter d'inverser l'opérateur $\mathbf{A}$ à chaque itération, ce qui est très coûteux dans notre cas car la matrice $\mathbf{A}$ est dense.

Le problème (20) est transformé en un problème sans contrainte consistant à minimiser la somme de 4 fonctions $F+G_1+G_2+H$ où $F=\mathbf{1}_{\{\|\mathbf{x}\|=1\}}$ est la fonction indicatrice de la sphère unité, $G_1=\mathbf{1}_C$ et $G_2=\mathbf{1}_{\{\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=0\}}$ celles du cône C et de l'hyperplan $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=0$ et enfin $H(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x}$. Notons que G_1, G_2 sont convexes et H convexe et différentiable. L'algorithme proximal suivant, développé par L. Condat [3], permet de minimiser efficacement la somme de ces 4 fonctions dans le cas où F est convexe en tirant parti du caractère régulier de H :

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_{n+1} &= \mathrm{prox}_{\tau F}\left(\mathbf{x}_n-\tau\nabla H(\mathbf{x}_n)-\tau\sigma(\mathbf{y}_n^1+\mathbf{y}_n^2)\right) && (21)\\
\mathbf{y}_{n+1}^i &= \mathbf{y}_n^i+2\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n-\mathrm{prox}_{G_i/\sigma}(\mathbf{y}_n^i+2\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n) \quad i=1,2 && (22)
\end{aligned}$$

où l'opérateur proximal d'une fonction f est défini par $\mathrm{prox}_f(x)=\arg\min_y f(y)+\frac{1}{2}\|x-y\|^2$. L'algorithme précédent converge vers un minimiseur global de $F+G_1+G_2+H$ si $\frac{1}{\tau}-\sigma\geq\beta/2$ où β est la constante de Lipschitz de ∇H. Nous proposons alors d'utiliser cet algorithme dans le cas non convexe où $F=\mathbf{1}_{\{\|\mathbf{x}\|=1\}}$ (les opérateurs proximaux se réduisant ici à des opérateurs de projection) conduisant aux itérations suivantes :

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} &= \mathbf{x}_n-\tau\mathbf{A}\mathbf{x}_n-\tau\sigma(\mathbf{y}_n^1+\mathbf{y}_n^2) && (23)\\
\mathbf{x}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}/\|\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\| && (24)\\
\mathbf{y}_{n+1}^1 &= \mathbf{y}_n^1+2\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n-\mathrm{Proj}_C(\mathbf{y}_n^1+2\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n) && (25)\\
\mathbf{y}_{n+1}^2 &= \mathbf{y}_n^2+2\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n-\mathrm{Proj}_{\{\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=0\}}(\mathbf{y}_n^2+2\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n) && (26)
\end{aligned}$$

soit encore en explicitant les opérateurs de projection et en posant $\mathbf{y}_n=\mathbf{y}_n^1$ et z_n tel que $\mathbf{y}_n^2=z_n\mathbf{e}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_{n+1} &= \mathbf{x}_n-\tau\mathbf{A}\mathbf{x}_n-\tau\sigma(\mathbf{y}_n+z_n\mathbf{e}) && (27)\\
\mathbf{x}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{x}}_{n+1}/\|\tilde{\mathbf{x}}_{n+1}\| && (28)\\
\mathbf{y}_{n+1} &= \langle\mathbf{y}_n+2\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n\rangle_-^{I_c} && (29)\\
z_{n+1} &= z_n+\frac{1}{N}\mathbf{e}^{\mathrm{T}}(2\mathbf{x}_{n+1}-\mathbf{x}_n) && (30)
\end{aligned}$$

où l'on a défini $\langle\mathbf{x}\rangle_-^{I_c}=\begin{cases} x_i & \text{pour } x_i\leq 0 \text{ et } i\in I_c \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$.

Bien qu'il n'existe aucune preuve de convergence dans le cadre non-convexe, les tests numériques menés semblent indiquer que, pour des paramètres τ, σ vérifiant $\frac{1}{\tau}-\sigma\geq\beta/2$, l'algorithme converge bien vers la plus petite valeur propre de $\mathbf{A}$ dans le cas où $I_c=\emptyset$ et vers une solution admissible $\mathbf{x}\in C$ dans le cas $I_c\neq\emptyset$.

4 Exemples : contact de Hertz avec adhésion

La surface rigide rugueuse est composée d'une aspérité (l'indenteur) :

$$h(r)=-\frac{r^2}{2R} \tag{31}$$

avec $R=10L$. Nous considérons une énergie d'adhésion de la forme :

$$E_{ad}=-\gamma\int_S \exp\left(\frac{-g}{\rho}\right)dS \tag{32}$$

où γ est l'énergie de surface et ρ la longueur caractéristique d'interaction des effets d'adhésion. La force due à l'adhésion et l'opérateur D prennent donc la forme :

$$\frac{\partial E_{ad}}{\partial u}=\frac{\gamma}{\rho}\exp\left(\frac{-g(\underline{x})}{\rho}\right) \quad D=\frac{\partial^2 E_{ad}}{\partial u^2}=-\frac{\gamma}{\rho^2}\exp\left(\frac{-g(\underline{x})}{\rho}\right) \tag{33}$$

Nous choisissons comme valeurs numériques : $E=10^5$, $\gamma=10^{-5}$ et $\rho=10^{-3}L$. Nous effectuons les simulations sur une grille grossière de taille 32×32.

4.1 Sans contact

Considérons la solution d'équilibre obtenue pour une valeur moyenne imposée $u_0 = 10^{-3}L$. La solution d'équilibre obtenue ne présente pas de zone de contact, comme le montre la figure 1-gauche.

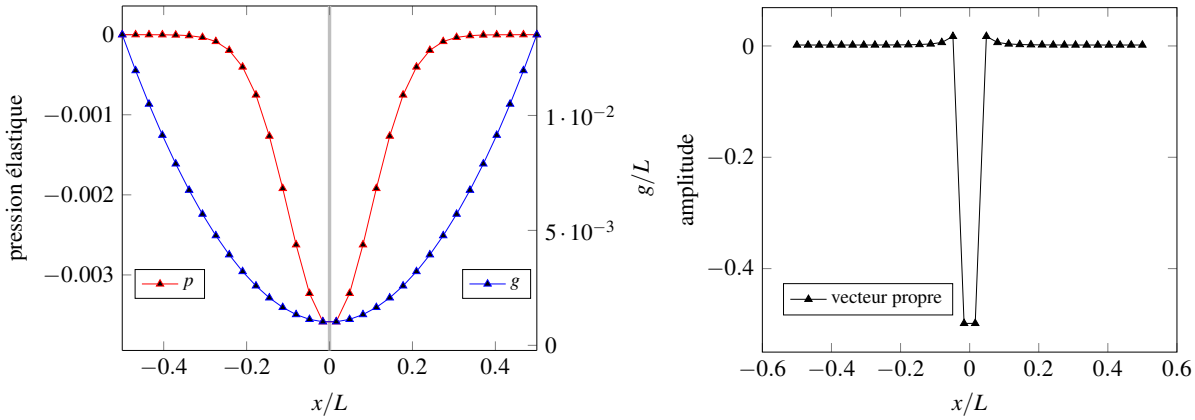

FIGURE 1 – Gauche : solution d'équilibre obtenue en $y = \frac{L}{2}$: distance g entre les surfaces et pression élastique p (pas de contact entre les deux surfaces). Droite : vecteur propre associé au mode d'instabilité.

Ainsi, l'analyse de stabilité de cette solution ne fait pas intervenir la contrainte de non-interpénétration. Nous pouvons directement calculer la plus petite valeur propre de l'opérateur A. Nous obtenons $\lambda_{min} \approx -3.6$ et le vecteur propre associé illustré sur figure 1-droite. Nous observons que l'adhésion tend à faire coller la surface élastique vers l'indenteur.

4.2 Avec contact

Considérons à présent la solution d'équilibre obtenue pour une valeur moyenne imposée $u_0 = -10^{-3}L$. La solution d'équilibre obtenue présente une zone de contact, comme le montre la figure 2.

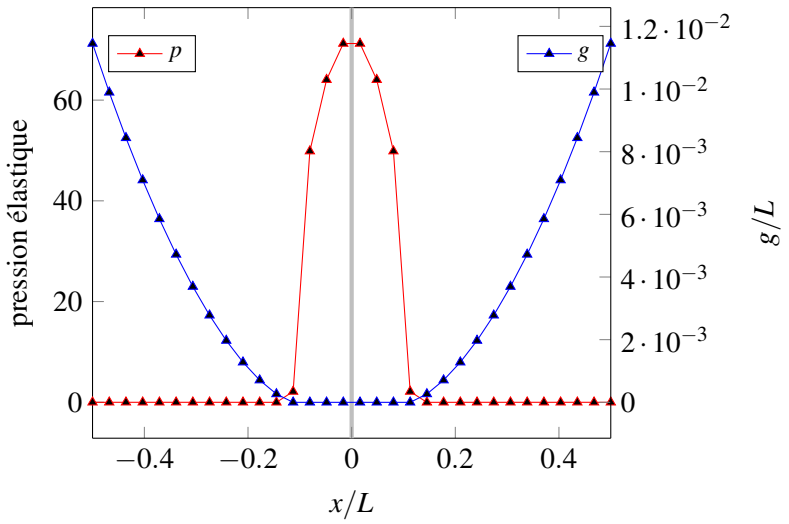

FIGURE 2 – Solution d'équilibre obtenue en $y = \frac{L}{2}$: distance g entre les surfaces et pression élastique p (présence de contact entre les deux surfaces)

Le calcul des valeurs propres et vecteurs propres associés sans la prise en compte des conditions de contact $\mathbf{x} \in C$ conduit à une valeur propre multiple $\lambda_{min} = -9.99999$ associée à des vecteurs propres non nuls uniquement sur la zone de contact. Tous ces vecteurs propres étant à valeur moyenne nulle, aucun d'entre eux n'est admissible car $\delta v(\underline{x}) \ngeq 0$ sur la zone de contact. La seconde plus petite valeur propre vaut $\lambda_2 = -9.9923$ et le vecteur propre associé, illustré en figure 4.2, est de signe constant sur la zone de contact si bien qu'il est admissible. Il correspond à la mise en contact des zones proches du contact et attirées par la surface à cause de l'adhésion. Néanmoins, rien n'assure qu'il s'agisse de la

solution du problème (19). Nous pouvons juste conclure que λ_{min} solution de (19) sera plus petite que λ_2.

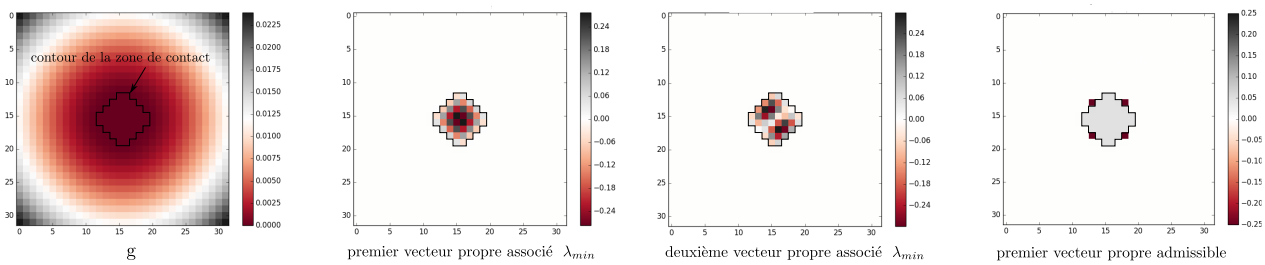

FIGURE 3 – Champ $g = u_{eq} - h$ et trois vecteurs propres de l'opérateur A : les deux premiers vecteurs propres sont non admissibles car violant l'inégalité $\delta v \geq 0$. Le troisième vecteur propre est admissible.

Nous avons mis en œuvre l'algorithme proximal précédent afin de calculer la solution du problème aux valeurs propres sous contraintes. Nous avons choisi $\tau = 1/\widehat{\beta}$, $\sigma = \widehat{\beta}/2$ et $\widehat{\beta} = \sqrt{\|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{A}\|_\infty} \geq \|\mathbf{A}\|_2 = \beta$ de sorte à vérifier le critère de convergence du cas convexe. L'algorithme converge vers $\lambda_{min} \approx -9.9946 \leq \lambda_2$ qui semble être une valeur propre multiple. Un des vecteurs propres associé est représenté sur la figure 4, on vérifie bien qu'il est admissible ($\delta v(\underline{x}) \geq 0$ sur I_c). On constate que le vecteur propre est associé à des instabilités de collement-décollement de points situés au bord de la zone de contact.

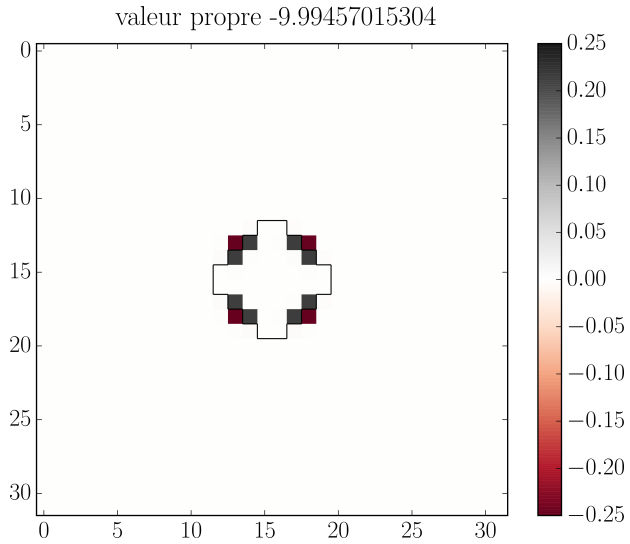

FIGURE 4 – Un vecteur propre solution du problème aux valeurs propres sous contraintes.

Nous terminons cette série d'exemple en considérant le cas d'un indenteur relativement plat avec $R = 10^3 L$ et un niveau de chargement correspondant à $u_0 = -10^{-5} L$, les autres paramètres restant identiques. Dans cette situation, la zone de contact de la position d'équilibre est quasiment identique, en revanche, les deux surfaces étant beaucoup plus proche en dehors de la zone de contact, les effets de l'adhésion y sont plus importants ($\rho/h \approx \rho R/L^2 = 1$) que dans le cas précédent ($\rho/h \approx 10^{-2}$) . Cette remarque se traduit directement dans la forme du mode d'instabilité correspondant représenté figure 5. On constate en effet que les zones déstabilisées s'étendent bien au-delà de la frontière de la zone de contact contrairement au cas précédent (figure 4).

5 Conclusion

Le développement de l'algorithme proximal présenté en section 3 nous permet à présent de pouvoir étudier de manière systématique la stabilité de surfaces en contact en présence d'adhésion. En particulier, nous chercherons à effectuer cette analyse dans le cas de surfaces rugueuses représentatives et d'étudier l'effet de la rugosité. Une autre perspective consiste à étudier d'autres modèles d'adhésion que celui

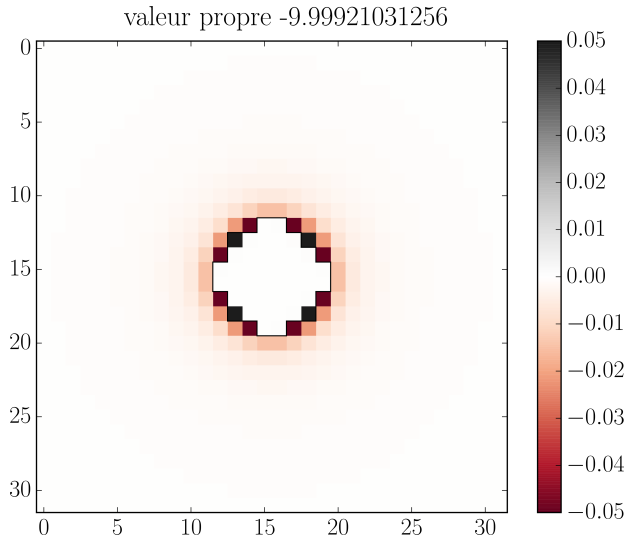

FIGURE 5 – Un vecteur propre solution du problème aux valeurs propres sous contraintes pour le cas d'un indenteur presque plat.

considéré dans ce travail ainsi que l'influence de la longueur d'interaction des forces d'adhésion sur les différents types de mode d'instabilité.

Références

[1] C. Putignano, L. Afferrante, G. Carbone, and G. Demelio. *A new efficient numerical method for contact mechanics of rough surfaces.* International Journal of Solids and Structures, 42 :338–343, 2012.

[2] X. Chateau, and Q.S. Nguyen. *Buckling of elastic structures in unilateral contact with or without friction*, European Journal of Mechanics-A/Solids, 10, 71-89, 1991.

[3] L. Condat. *A Primal–Dual Splitting Method for Convex Optimization Involving Lipschitzian, Proximable and Linear Composite Terms*, Journal of Optimization Theory and Applications, Springer, 158 :460–479, 2013.

[4] R. Glowinski. *Variational Methods for the Numerical Solution of Nonlinear Elliptic Problem*, Chapitre 7, SIAM, 2015.

[5] V. Rey, G. Anciaux, J.F. Molinari. *Normal adhesive contact on rough surfaces : efficient algorithm for FFT-based BEM resolution*, Computational Mechanics, Springer, soumis, 2016.

[6] H.M. Stanley and T. Kato. *An FFT-based method for rough surface contact*. Journal of Tribology, 119 :481–485, 1997.

[7] H.M. Westergaard. *Bearing pressures and cracks.* Journal of Applied Mechanics, 6 :49–53, 1937.