



**HAL**  
open science

# Un intégrateur hétérogène asynchrone pour les problèmes d'impact et de contact: Application à un pont roulant sous séisme

Fatima-Ezzahra Fekak, Michael Brun, Anthony Gravouil, Bruno Depale

## ► To cite this version:

Fatima-Ezzahra Fekak, Michael Brun, Anthony Gravouil, Bruno Depale. Un intégrateur hétérogène asynchrone pour les problèmes d'impact et de contact: Application à un pont roulant sous séisme. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899326

**HAL Id: hal-01899326**

**<https://hal.science/hal-01899326v1>**

Submitted on 19 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Un intégrateur hétérogène asynchrone pour les problèmes d'impact et de contact: Application à un pont roulant sous séisme

F. Fekak<sup>1,3</sup>, M. Brun<sup>2</sup>, A. Gravouil<sup>1</sup>, B. Depale<sup>3</sup>

<sup>1</sup> LaMCoS, Université de Lyon, INSA de Lyon, {fatima-ezzahra.fekak, anthony.gravouil}@insa-lyon.fr

<sup>2</sup> LGCIE, Université de Lyon, INSA de Lyon, michael.brun@insa-lyon.fr

<sup>3</sup> CETIM, bruno.depale@cetim.fr

**Résumé** — Pendant un séisme, un pont roulant est exposé à des chocs multiples. Afin de modéliser ces phénomènes, une analyse dynamique temporelle avec une approche multi-échelle est adoptée. Pour prendre en compte l'aspect haute fréquence des chocs, un intégrateur temporel variationnel explicite, basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange et dédié au contact/impact, est développé. Ensuite, un schéma hétérogène asynchrone est appliqué au problème du pont roulant afin de coupler le schéma explicite dans les zones de contact et un schéma implicite adopté sur le reste de la structure.

**Mots clés** — contact/impact, schéma hétérogène asynchrone, séisme, pont roulant.

## 1 Contexte industriel et scientifique

Les systèmes de levage tels que les ponts roulants constituent des systèmes mobiles vibrants, de masses importantes et qui sont positionnés en hauteur dans les bâtiments qu'ils équipent.

Actuellement, les méthodes classiques de dimensionnement de ces équipements sous séismes s'appuient sur une représentation modale des structures, associée à l'utilisation des spectres de réponse. Cette méthode, qui suppose la linéarité des comportements qu'ils soient géométriques (petites déformations et petits déplacements), matériels (matériau élastique) ou à l'interface (pas de chocs), peut conduire à des efforts sismiques excessifs pour le dimensionnement du pont roulant. Il devient alors nécessaire d'avoir recours à des approches de modélisations plus riches, notamment avec l'introduction des chocs verticaux entre les différents galets du pont roulant et les rails, et des chocs horizontaux dûs aux dispositifs de guidage. Par conséquent, l'utilisation des techniques de calculs temporels non linéaires des engins de levage, en considérant des accélérogrammes représentatifs de l'aléa sismique, est devenue systématique.

L'objectif est donc d'établir un modèle de pont roulant réaliste, en intégrant les amortissements internes du système ainsi que les chocs verticaux et horizontaux survenant lors des décollements des galets du pont roulant pendant le séisme. Pour cela, une analyse numérique non linéaire est nécessaire.

Dans la première partie des travaux, nous avons développé un intégrateur temporel explicite, basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange, pour les problèmes de contact et d'impact. Après, nous avons appliqué une stratégie multi-échelle en temps au problème du pont roulant. Cette méthode permet de choisir le schéma temporel le mieux adapté à la physique du sous-domaine considéré. Le couplage entre les sous-domaines est assuré par un schéma hétérogène asynchrone. Parmi ces méthodes de couplage, on trouve la méthode de décomposition en sous-domaines proposée par Gravouil et Combescure [5, 6].

## 2 Un intégrateur temporelle explicite pour la dynamique du contact/impact

### 2.1 Formulation forte

Ici, nous allons traiter le cas d'un contact unilatéral sans frottement. On considère le problème, décrit dans la Figure 1, d'un contact unilatéral entre deux corps déformables  $\Omega_1$  et  $\Omega_2$ .

Dans la Figure 1,  $\Gamma_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2$ ) est le bord de  $\Omega_\alpha$ . Il est décomposé en trois bords distincts :  $\Gamma_{u_\alpha}$ ,  $\Gamma_{F_\alpha}$  qui représentent, respectivement, les bords où les conditions de Dirichlet et de Neumann sont imposées,  $\Gamma_{C_\alpha}$  est l'interface contenant les points potentiellement en contact. Au moment du contact,  $\Gamma_C = \Gamma_{C_1} =$

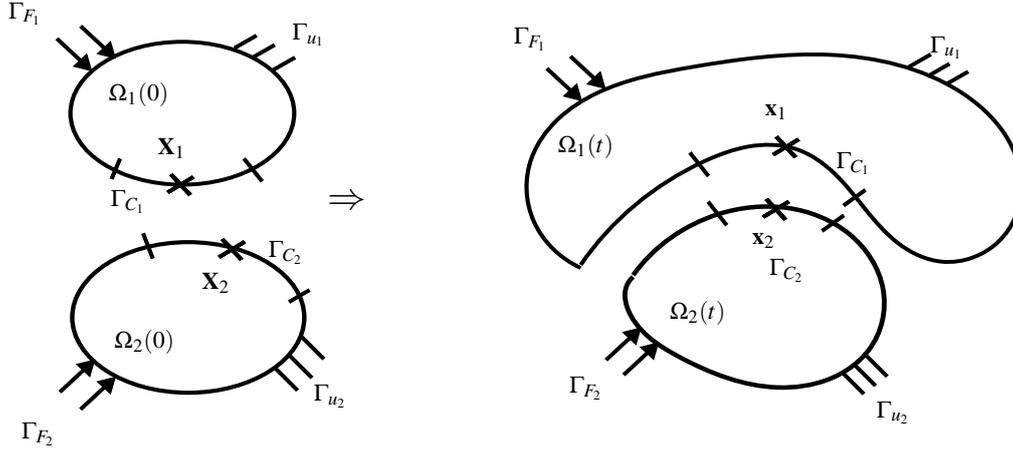


FIGURE 1 – Configuration de deux corps déformables en contact

$\Gamma_{C_2}$ .

Les conditions de contact sont habituellement exprimées en terme de déplacement et de force de contact. Elles sont appelées les conditions de Signorini. En dynamique, grâce au lemme de viabilité de Moreau [8], ces conditions peuvent être réécrites en terme de vitesse et d'impulsion de contact. Les deux formulations en déplacement et en vitesse sont équivalentes et peuvent être résumées comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} g_N = [(\underline{X}_2 + \underline{u}_2) - (\underline{X}_1 + \underline{u}_1)] \cdot \underline{n}_1 \geq 0 \\ t_N = \underline{\underline{\sigma}}_\alpha \cdot \underline{n}_\alpha \cdot \underline{n}_\alpha \leq 0 \\ g_N \cdot t_N = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{ll} \text{si } g_N > 0 & \text{alors } i_N = 0 \\ \text{si } g_N = 0 & \text{alors } \begin{cases} \dot{g}_N \geq 0 \\ i_N \leq 0 \\ \dot{g}_N \cdot i_N = 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

où  $\underline{n}_\alpha$  désigne la normale extérieure à la surface de contact  $\Gamma_\alpha$ ,  $\underline{\underline{\sigma}}_\alpha$  est le tenseur de contrainte de Cauchy existant dans le domaine  $\Omega_\alpha$ ,  $\underline{u}_\alpha$  est le vecteur de déplacement du point  $\mathbf{x}_\alpha \in \Gamma_{C_\alpha}$ ,  $i_N$  est l'impulsion de contact et  $\dot{g}_N$  est la composante normale de la vitesse relative entre les deux corps en contact, tel que :

$$\dot{g}_N = [\underline{\dot{u}}_2 - \underline{\dot{u}}_1] \cdot \underline{n}_1 = [\underline{v}_2 - \underline{v}_1] \cdot \underline{n}_1$$

La formulation forte du problème de contact unilatéral sans frottement se résume comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \underline{\underline{div}}(\underline{\underline{\sigma}}) + \underline{f}_d & = & \rho \underline{\dot{u}} & \text{dans } \Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} & = & \underline{F}_d & \text{sur } \Gamma_F = \Gamma_{F_1} \cup \Gamma_{F_2} \\ \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} & = & \underline{t}_N & \text{sur } \Gamma_C \\ \underline{u} & = & \underline{u}_d & \text{sur } \Gamma_u = \Gamma_{u_1} \cup \Gamma_{u_2} \\ \underline{\underline{\varepsilon}} & = & \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}(\underline{u}) + (\underline{\underline{grad}}(\underline{u}))^T) & \text{dans } \Omega \\ \underline{u}(0) = \underline{u}_0 & ; & \underline{v}(0) = \underline{v}_0 & \text{dans } \Omega \\ \text{Loi de comportement matériau} & & & \text{dans } \Omega \\ \text{Conditions de contact} & & & \text{sur } \Gamma_C \end{array} \right.$$

où  $\rho$  est la densité volumique et  $\underline{f}_d$  le vecteur de force volumique. Dans la suite, nous considérons un comportement élastique linéaire.

## 2.2 Formulation variationnelle espace-temps

Soit  $L$  le lagrangien discrétisé en espace par la méthode des éléments finis :

$$L(U(t), \dot{U}(t)) = \frac{1}{2} \dot{U}(t)^T M \dot{U}(t) - (V_{int}(U(t)) - V_{ext}(U(t)))$$

où  $M$  est la matrice de masse,  $U(t)$  est le champ de déplacement discrétisé en espace à l'instant  $t$ ,  $V_{int}$  est l'énergie potentielle des forces internes et  $V_{ext}$  est l'énergie potentielle des forces externes.

Ensuite, on introduit la formulation variationnelle en temps basée sur l'intégrale d'action suivant :

$$A(U(t), \dot{U}(t), t_c) = \int_{t_0}^{t_c} L(U(t), \dot{U}(t)) dt + \int_{t_c}^{t_f} L(U(t), \dot{U}(t)) dt$$

où  $t_c$  est l'instant inconnu du contact/impact.

Afin de prendre en compte les conditions de contact, on considère l'intégrale d'action suivant :

$$\tilde{A}(U(t), \dot{U}(t), t_c) = A + \Lambda^T(t_c) G_N(t_c)$$

où  $\Lambda$  et  $G_N$  sont, respectivement, les vecteurs semi-discrétisés des multiplicateurs de Lagrange et de  $g_N$ . A l'équilibre :

$$\delta \tilde{A} = 0$$

Après calcul, on obtient les équations suivantes :

$$M\dot{U}(t) + F_{int}(t) = F_{ext}(t) \quad \forall t \in [t_0, t_c^-] \cup [t_c^+, t_f] \quad (1a)$$

$$\left[ M\dot{U}(t) \right]_{t_c^-}^{t_c^+} = (\nabla(G_N(t_c)))^T \Lambda(t_c) \quad (1b)$$

$$\left[ (M\dot{U}(t))^T M^{-1} (M\dot{U}(t)) \right]_{t_c^-}^{t_c^+} = 0 \quad (1c)$$

où  $F_{int}(t)$  et  $F_{ext}(t)$  sont, respectivement, les vecteurs des forces internes et le vecteur des forces externes à l'instant  $t$ . L'équation (1a) représente la dynamique régulière (sans contact/impact) du problème, les équations (1b) et (1c) sont les équations d'impact représentant, respectivement, le saut de vitesse et la conservation de l'énergie cinétique durant l'impact. Le vecteur des multiplicateurs de Lagrange  $\Lambda$  représente le vecteur des impulsions d'impact.

Dans la suite nous nous sommes inspirés des travaux introduits par Moreau [7] pour le milieu granulaire et largement développés dans [2, 4] pour écrire les deux équations (1a) et (1b) en une seule équation appelée équation de la dynamique non-régulière. Pour cela, la mesure différentielle de la vitesse est décomposée en une partie régulière (sans contact/impact) et une partie non-régulière :

$$d\dot{U} = d\dot{U}_s + d\dot{U}_{ns} \quad (2)$$

où les indices  $s$  et  $ns$  désignent, respectivement, les termes réguliers et non-réguliers. Avec :

$$d\dot{U}_s = \ddot{U} dt \quad (3)$$

et :

$$d\dot{U}_{ns} = \dot{U}(t_c^+) - \dot{U}(t_c^-) \quad (4)$$

En remplaçant (3) et (4) dans (2), et en utilisant les équations (1a) et (1b), on obtient l'équation de la dynamique non-régulière suivante :

$$Md\dot{U}(t) + F_{int}(t)dt = F_{ext}(t)dt + dI(t) \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad (5)$$

où :

$$dI(t) = \begin{cases} 0 & \forall t \in [t_0, t_c^-] \cup [t_c^+, t_f] \\ (\nabla(G_N(t_c)))^T \Lambda(t_c) & \end{cases}$$

La formulation faible semi-discrétisée d'un problème de contact/impact peut être résumée ainsi :

$$\begin{cases} Md\dot{U} + F_{int}dt = F_{ext}dt + dI \\ dI = L^T d\Lambda \quad (L = \nabla G_N) \\ v = L\dot{U} \\ \begin{cases} \text{si } G_N^l > 0 \text{ alors } \Lambda^l = 0 \\ \text{si } G_N^l = 0 \text{ alors } \begin{cases} v^l \geq 0 \\ \Lambda^l \geq 0 \\ v^l \Lambda^l = 0 \end{cases} \end{cases} \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{cases} \quad (6)$$

où  $L^T$  et  $L$  sont, respectivement, les opérateurs de prolongation de  $\Gamma_C$  vers  $\Omega$  et de restriction de  $\Omega$  vers  $\Gamma_C$ ,  $v$  est le vecteur des vitesses relatives associées aux points de contact, et  $p$  est le nombre de points potentiellement en contact.

### 2.3 Équation de la dynamique non-régulière discrétisée

Pour discrétiser en temps le problème (6), nous avons utilisé un cas particulier du schéma de la différence centrée explicite en déplacement mais également en vitesse [3]. Pour cela, on intègre l'équation d'équilibre (5) entre  $t_{n+\frac{1}{2}}$  et  $t_{n+\frac{3}{2}}$  :

$$\int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} Md\dot{U} + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} F_{int} dt = \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} F_{ext} dt + \int_{n+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} dI$$

Après calcul, on obtient l'intégrateur temporel variationnel explicite, basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange, pour les problèmes de contact/impact :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{n+1} = U_n + \Delta t \dot{U}_n + \frac{\Delta t}{2} W_n \\ G_{N,n+1} = L_{n+1} U_{n+1} \\ W_{n+1} = M_{lump}^{-1} [\Delta t (F_{ext,n+1} - F_{int,n+1}) + I_{n+1}] \\ \dot{U}_{n+\frac{3}{2}} = \dot{U}_{n+\frac{1}{2}} + W_{n+1} \\ v_{n+\frac{3}{2}} = L_{n+1} \dot{U}_{n+\frac{3}{2}} \\ I_{n+1} = L_{n+1}^T \Lambda_{n+\frac{3}{2}} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } G_{N,n+1}^l > 0 \text{ alors } \Lambda_{n+\frac{3}{2}}^l = 0 \\ \text{si } G_{N,n+1}^l \leq 0 \text{ alors } \left\{ \begin{array}{l} v_{n+\frac{3}{2}}^l \geq 0 \\ \Lambda_{n+\frac{3}{2}}^l \geq 0 \\ v_{n+\frac{3}{2}}^l \Lambda_{n+\frac{3}{2}}^l = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right.$$

Ce schéma a été testé et validé sur des cas tests académiques. L'intégrateur temporel a montré un bon comportement énergétique ainsi qu'un ordre de convergence généralement meilleur en comparaison au schéma de Moreau utilisant la  $\theta$ -méthode [1].

## 3 Un intégrateur hétérogène asynchrone pour les problèmes d'impact et du contact

A cause des chocs auxquels est exposé le pont roulant pendant le séisme, plusieurs échelles de temps coexistent au sein de ce problème. Une stratégie multi-échelle en temps est donc adoptée. Cette méthode permet de choisir le schéma temporel le mieux adapté à la physique du sous-domaine considéré. Par conséquent, pour prendre en compte l'aspect haute fréquence des chocs, le schéma temporel explicite dédié au contact, présenté ci-dessus, est utilisé dans les zones de contact. Un schéma temporel implicite associé à des pas de temps importants est adopté sur le reste de la structure compte tenu de la durée des excitations sismiques. Le couplage est assuré par un schéma hétérogène asynchrone. Parmi ces méthodes de couplage, on trouve la méthode de décomposition en sous-domaines proposée par Gravouil et Combescure [5].

### 3.1 Équations principales

La méthode de couplage proposée par Gravouil et Combescure [5] consiste à subdiviser le domaine  $\Omega$  en plusieurs sous-domaines. Ici, on considère deux sous-domaines  $\Omega_E$  et  $\Omega_I$ , respectivement, explicite et implicite.

Dans la Figure 2,  $\Gamma_D^E$  and  $\Gamma_D^I$  sont les bords où les conditions de Dirichlet sont imposées,  $\Gamma_C^E$  est l'interface contenant les points potentiellement en contact,  $\Gamma_G$  est l'interface de couplage entre les deux sous-domaines. l'indice  $j$  et  $m$  représentent, respectivement, le micro-pas de temps du schéma explicite et le macro-pas de temps du schéma implicite. Les exposants  $E$  et  $I$  désignent, respectivement, les valeurs liées au sous-domaine explicite  $\Omega_E$  et au sous-domaine implicite  $\Omega_I$ .

Soit  $\Delta T$  le macro-pas de temps associé au sous-domaine implicite  $\Omega_I$  et  $\Delta t$  le micro-pas de temps associé au sous-domaine explicite  $\Omega_E$ . Ici, on considère que  $\Delta T = m\Delta t$ . Les équations principales du problème couplé peuvent être résumées comme suit :

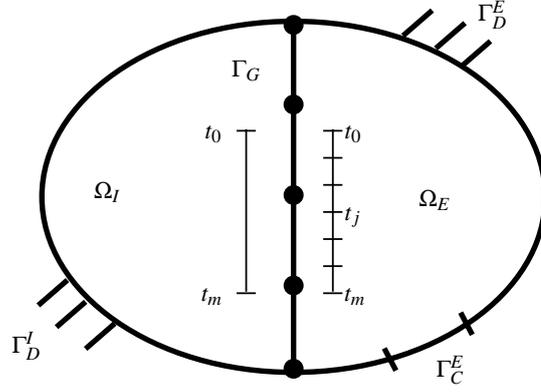


FIGURE 2 – Configuration des sous-domaines implicite et explicite

- Les équations d'équilibre de chaque sous-domaine :

$$M^I \dot{U}_{n+m}^I + C^I \dot{U}_{n+m}^I + F_{int,n+m}^I = F_{ext,n+m}^I + F_{D,n+m}^I + F_{link,n+m}^I$$

$$M_{lump}^E \dot{U}_{n+j+\frac{1}{2}}^E = M_{lump}^E \dot{U}_{n+j-\frac{1}{2}}^E - \Delta t (F_{int,n+j}^E + C^E \dot{U}_{n+j-\frac{1}{2}}^E) \dots$$

$$+ \Delta t (F_{ext,n+j}^E + F_{D,n+j}^E + F_{link,n+j}^E) + I_{n+j}^E$$

où  $F_{link}^k = (L_G^k)^T \Lambda_G$ ;  $k = I, E$  sont les forces de liaison à l'interface  $\Gamma_G$ .  $F_D^k = (L_D^k)^T \Lambda_D^k$  sont les forces dues aux conditions de Dirichlet.  $L_G^k$  et  $L_D^k$  sont les matrices booléennes traduisant, respectivement, les relations à l'interface  $\Gamma_G$  et  $\Gamma_D^k$ .  $\Lambda$  sont les vecteurs des multiplicateurs de Lagrange.  $M^k$  et  $C^k$  sont, respectivement, les matrices de masse et d'amortissement.

- Les conditions de contact/impact sur  $\Gamma_C^E$  à l'instant  $t_{n+j}$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{n+j+\frac{1}{2}}^E = L_{n+j}^E \dot{U}_{n+j+\frac{1}{2}}^E \\ I_{n+j}^E = (L_{n+j}^E)^T \Lambda_{n+j+\frac{1}{2}}^E \\ G_{N,n+j} = L_{n+j}^E U_{n+j}^E \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } G_{N,n+j}^I > 0 \text{ alors } \Lambda_{l,n+j+\frac{1}{2}}^E = 0 \\ \text{si } G_{N,n+j}^I \leq 0 \text{ alors} \\ \left\{ \begin{array}{l} v_{l,n+j+\frac{1}{2}}^E \geq 0 \\ \Lambda_{l,n+j+\frac{1}{2}}^E \geq 0 \\ v_{l,n+j+\frac{1}{2}}^E \Lambda_{l,n+j+\frac{1}{2}}^E = 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \quad \forall l \in \{1, \dots, p\} \end{array} \right.$$

- L'équation traduisant la continuité des vitesses à l'interface  $\Gamma_G$  à l'instant  $t_{n+j}$  [5] :

$$L_G^E \dot{U}_{n+j}^E + L_G^I \dot{U}_{n+j}^I = 0$$

où  $\dot{U}_{n+j}^I$  est une interpolation linéaire de  $\dot{U}_{n+m}^I$  à l'instant  $t_{n+j}$ .

### 3.2 Application à un pont roulant sous séisme

Afin de valider la stratégie multi-échelle décrite ci-dessus, un cas test industriel a été étudié. Les résultats de la simulation multi-échelle implicite-explicite sont comparés aux résultats d'un calcul entièrement explicite utilisant l'intégrateur développé dans la première partie. Le cas test consiste en un pont roulant soumis à un chargement sismique.

La Figure 3 présente un pont roulant dit bi-poutre. La structure principale du pont roulant se constitue de deux poutres principales, deux sommiers et d'un chariot. Un pont roulant est régi par trois mouvements principaux : le mouvement du chariot (direction) sur les poutres principales, la translation du pont roulant entier sur les rails du bâtiment et le mouvement de levage de la charge grâce au treuil embarqué sur le chariot.

Le pont roulant est modélisé par des éléments finis de type barre. Les sommiers sont encastrés à leurs extrémités. On considère les quatre contacts entre les galets du chariot et les poutres principales.

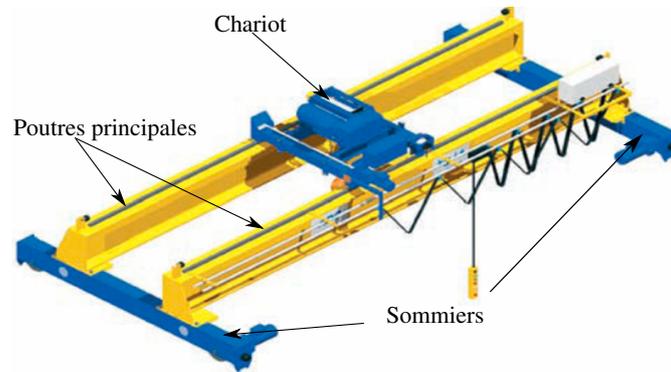


FIGURE 3 – Pont roulant bi-poutre

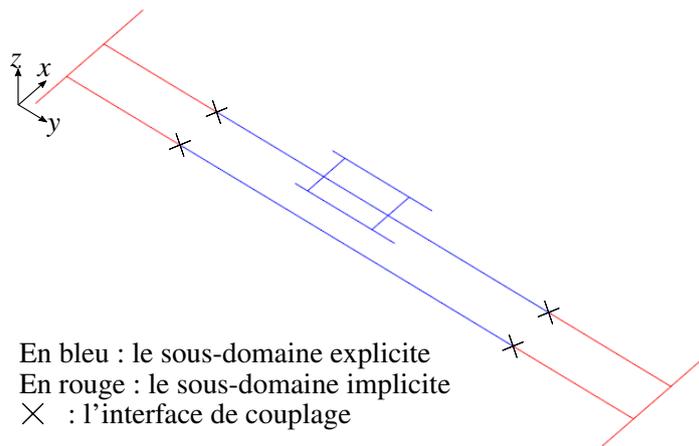


FIGURE 4 – Décomposition des sous-domaines implicite et explicite

Le pont roulant est soumis à son poids propre. Les sommiers et les poutres principales sont soumises à un chargement sismique, tracé sur la Figure 4, dans la direction Z.

La décomposition des sous-domaines implicite et explicite est décrite dans la Figure 4. On considère ici un rapport de 100 entre les micro et macro pas de temps ( $\Delta T = 100\Delta t$ ).

Les Figures 5 et 6 tracent, respectivement, le déplacement et la vitesse d'une paire de nœuds en contact.

La simulation multi-échelle implicite-explicite et la simulation entièrement explicite donne des résultats cinématiques similaires. Les vitesses présentent des oscillations qui sont dues aux sauts de vitesse pendant les impacts.

La Figure 7 trace le bilan énergétique dans le cas de la simulation multi-échelle. On remarque que l'énergie dissipée à l'interface de couplage reste négligeable (voir la Figure 8).

## 4 Conclusion

La première partie de ce travail a consisté au développement d'un intégrateur temporel explicite basé sur la méthode des multiplicateurs de Lagrange pour résoudre les problèmes d'impact et de contact. Les principaux avantages de ce schéma sont : aucune détection précise de l'instant de contact, pas d'itération pour résoudre l'équation d'équilibre et aucun paramètre numérique supplémentaire. Dans la deuxième partie, une méthode multi-échelle implicite-explicite a été appliquée à un modèle industriel de pont roulant avec quatre contacts. Les résultats sont similaires à un calcul de référence entièrement explicite, et l'énergie dissipée à l'interface de couplage est négligeable. Des travaux sont en cours pour calculer un modèle 3D d'une maquette de pont-roulant en utilisant la co-simulation entre Europlexus pour la partie explicite et CAST3M pour la partie implicite.

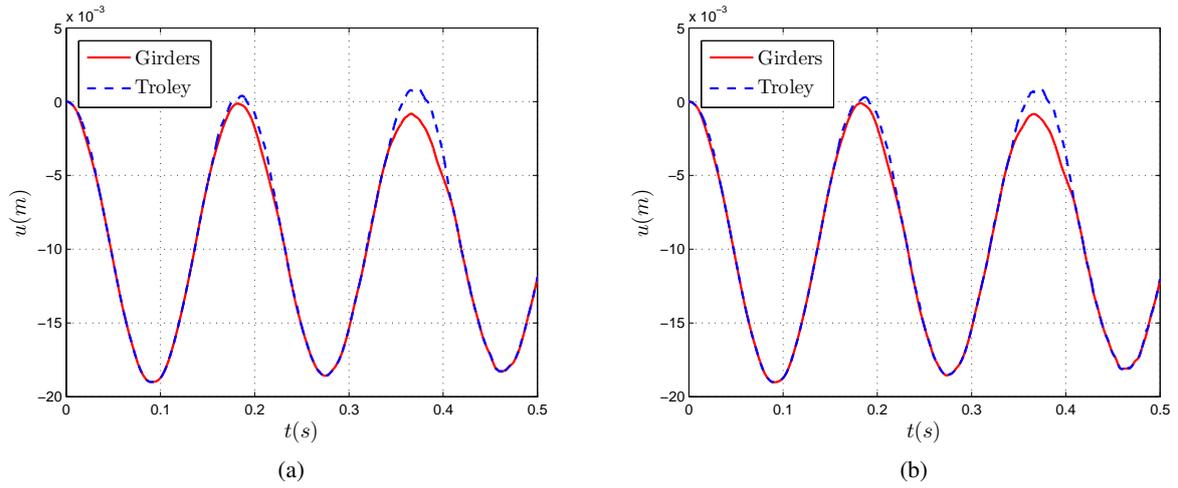


FIGURE 5 – Déplacement du chariot et des poutres principales au niveau du contact (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite

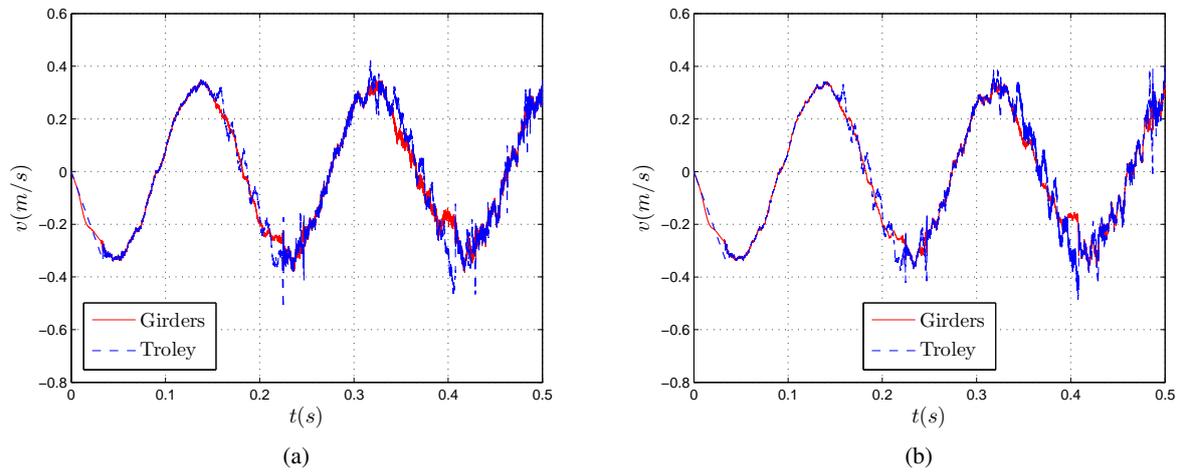


FIGURE 6 – Vitesse du chariot et des poutres principales au niveau du contact (a) simulation entièrement explicite, (b) simulation implicite-explicite

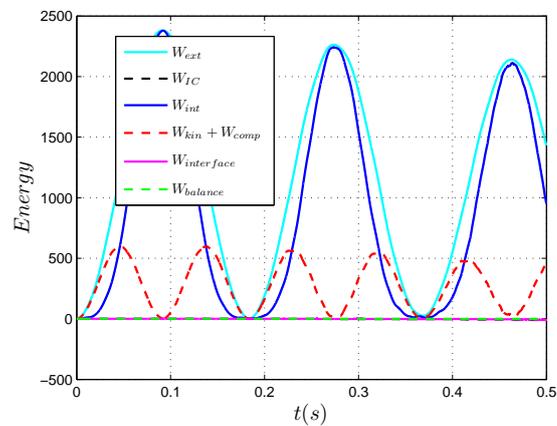


FIGURE 7 – Bilan énergétique dans le cas de la simulation multi-échelle

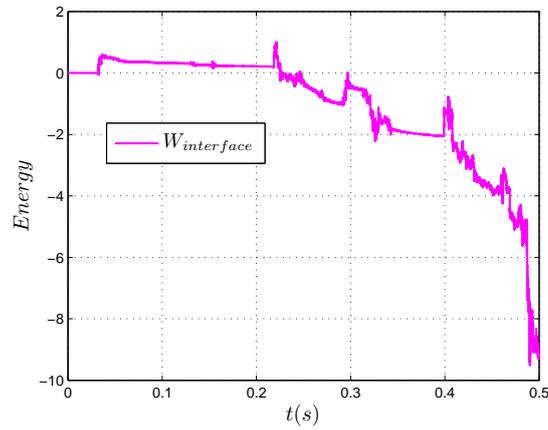


FIGURE 8 – Énergie dissipée à l'interface de couplage

## Références

- [1] V. Acary, *Higher order event capturing time-stepping schemes for nonsmooth multibody systems with unilateral constraints and impacts*, Applied Numerical Mathematics, 62(10) :1259-1275, 2012.
- [2] V. Acary, *Energy conservation and dissipation properties of time-integration methods for nonsmooth elastodynamics with contact*, ZAMM-Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 96 :585-603, 2016.
- [3] T. Belytschko, M.O. Neal. *Contact-Impact by the Pinball Algorithm with Penalty and Lagrangian Methods*, IJNME, 31 :547-572, 1991.
- [4] Q.-z. Chen, V. Acary, G. Virlez, O. Bruls, *A nonsmooth generalized scheme for flexible multibody systems with unilateral constraints*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 96(8) :487-511, 2013.
- [5] A. Gravouil, A. Combescure. *A multi-time-step explicit-implicit method for non-linear structural dynamics*, IJNME, 50 :199-225, 2001.
- [6] A. Gravouil, A. Combescure, M. Brun. *Heterogeneous asynchronous time integrators for computational structural dynamics*, IJNME, 102(3-4) :202-232, 2015.
- [7] J. J. Moreau, *Unilateral contact and dry friction in finite freedom dynamics*, Nonsmooth Mechanics and Applications, Springer Wien, 1-82, 1988.
- [8] J. J. Moreau, *Numerical aspects of the sweeping process*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 177(3) :329-349, 1999.