



**HAL**  
open science

# Méthodes de Newton non-lisses pour les problèmes de contact frottant dans les systèmes de multi-corps flexibles

Vincent Acary, Maurice Brémond, Frédéric Dubois

► **To cite this version:**

Vincent Acary, Maurice Brémond, Frédéric Dubois. Méthodes de Newton non-lisses pour les problèmes de contact frottant dans les systèmes de multi-corps flexibles. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899306

**HAL Id: hal-01899306**

**<https://hal.science/hal-01899306>**

Submitted on 19 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Méthodes de Newton non-lisses pour les problèmes de contact frottant dans les systèmes de multi-corps flexibles.

V. Acary<sup>1</sup>, M. Brémond<sup>1</sup>, F. Dubois<sup>2</sup>

<sup>1</sup> INRIA, Grenoble, {vincent.acary,maurice.bremond}@inria.fr

<sup>2</sup> LMGC, Université de Montpellier, frederic.dubois@umontpellier.fr

**Résumé** — Dans cette contribution, on se propose d'évaluer la performance des méthodes de Newton non-lisses dans le contexte des systèmes multi-corps flexibles (mécanismes, milieux granulaires ou milieux divisés) avec contact et frottement. Les méthodes itératives de type projection (Jacobi ou Gauss-Seidel projeté) sont généralement utilisées pour leurs propriétés de robustesse et de régularisation des systèmes fortement hyper-statiques. On montre que dans le cas des systèmes déformables, les méthodes de Newton permettent d'atteindre de grandes précisions à un coût beaucoup plus faible.

**Mots clés** — contact unilatéral, frottement de Coulomb, méthodes Newton non-lisses.

## 1 Introduction

Dans le contexte des systèmes multi-corps avec contact et frottement de Coulomb, le problème de contact frottant discret que l'on obtient à chaque pas de temps après une discrétisation temporelle, ou à chaque pas de chargement en quasi-statique, est généralement résolu par des méthodes itératives de type projection (Jacobi ou Gauss-Seidel projeté). Pour les systèmes de corps rigides, qui sont pour la plupart fortement hyperstatiques du fait d'un grand nombre de contacts en regard du nombre de degrés de liberté, les méthodes itératives jouissent de bonnes propriétés de robustesse. Elles permettent de converger de façon sûre, mais lentement, vers une solution du problème même si les forces de réaction ne sont pas définies de manière unique. Par contre, il est connu que les méthodes de Newton non-lisses sont totalement inopérantes pour les systèmes rigides hyperstatiques [1].

Dans le cas de systèmes de corps flexibles, discrétisés par exemple par des éléments finis, il est possible de réduire le degré d'hyperstaticité en augmentant le nombre de degrés de liberté du système. Cette technique a pour effet d'augmenter le rang des matrices jacobiniennes des contraintes, et donc de diminuer la dépendance linéaire entre les contacts. Ceci peut par exemple se faire en raffinant les maillages dans les zones de contact tout en contrôlant le nombre de points de contacts générés. Dans cette contribution, on montre qu'il devient alors intéressant d'utiliser des méthodes de Newton non-lisses pour résoudre le problème discret, surtout si on veut atteindre des niveaux de précision relative supérieurs à  $10^{-3}$ . Alors que les méthodes itératives de type projection continuent à converger lentement, les méthodes de Newton retrouvent leurs convergences quadratiques locales pour des systèmes fortement réguliers. Cela permet d'atteindre des niveaux de précisions arbitraires pour un coût de calcul bien moindre.

Dans ce travail, on essaye aussi de montrer qu'il peut être intéressant d'introduire un modèle de comportement élastique dans un système initialement rigide afin de profiter de l'efficacité numérique des méthodes de Newton. Dans des travaux antérieurs, M. Jean [2, 3] avait montré que l'introduction de l'élasticité permettait de réduire le degré d'hyperstaticité et d'améliorer sensiblement la qualité des solutions en termes de forces de réactions. En préférant des méthodes de Newton non-lisses, on améliore ainsi fortement le coût de calcul.

**Formulation du problème.** Considérons un nombre  $n_c \in \mathbb{N}$  de points de contact tridimensionnel et un nombre  $n \in \mathbb{N}$  de degrés de liberté du système discret. Pour chaque contact  $\alpha$ , les vitesses relatives locales au contact notées  $u^\alpha \in \mathbb{R}^3$  et les réactions au contact notées  $r^\alpha \in \mathbb{R}^3$  (forces ou impulsions) sont décomposées dans un repère local au contact  $(N^\alpha, T_1^\alpha, T_2^\alpha)$  tel que  $u^\alpha = u_N^\alpha N^\alpha + u_{T_1}^\alpha T_1^\alpha + u_{T_2}^\alpha T_2^\alpha$ ,  $u_N^\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $u_T^\alpha = [u_{T_1}^\alpha, u_{T_2}^\alpha]^\top \in \mathbb{R}^2$  et  $r^\alpha = r_N^\alpha N^\alpha + r_{T_1}^\alpha T_1^\alpha + r_{T_2}^\alpha T_2^\alpha$ ,  $r_N^\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $r_T^\alpha = [r_{T_1}^\alpha, r_{T_2}^\alpha]^\top \in \mathbb{R}^2$ . L'interstice au contact est noté  $g_N^\alpha$  (voir la figure 1).

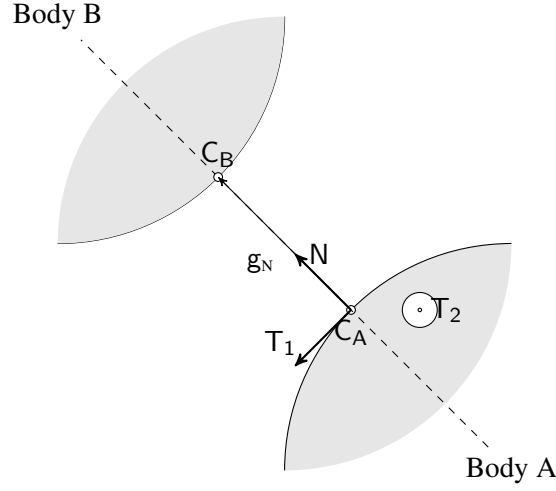


FIGURE 1 – Repère local au contact

Pour chaque contact, on définit le cône de Coulomb comme le cône du second ordre suivant :

$$K^\alpha = \{r^\alpha \in \mathbb{R}^3 \mid \|r_T^\alpha\| \leq \mu^\alpha r_N^\alpha\}. \quad (1)$$

où  $\mu^\alpha$  est le coefficient de frottement du contact  $\alpha$ . Sous forme disjonctive, le contact unilatéral avec du frottement de Coulomb peut s'écrire en vitesse

$$\begin{cases} r^\alpha = 0 & \text{si } g_N^\alpha > 0 \quad (\text{pas de contact}) \\ r^\alpha = 0, u_N^\alpha \geq 0 & \text{si } g_N^\alpha \leq 0 \quad (\text{décollage}) \\ r^\alpha \in K^\alpha, u^\alpha = 0 & \text{si } g_N^\alpha \leq 0 \quad (\text{adhérence}) \\ r^\alpha \in \partial K^\alpha, u_N^\alpha = 0, \exists \beta > 0, u_T^\alpha = -\beta r_T^\alpha & \text{si } g_N^\alpha \leq 0 \quad (\text{glissement}) \end{cases} \quad (2)$$

En introduisant la vitesse relative locale modifiée  $\hat{u}^\alpha = u^\alpha + \mu^\alpha \|u_T^\alpha\| N^\alpha$  due à [4], le problème peut être reformulé de manière équivalente comme un problème de complémentarité du second ordre [4, 5] :

$$\begin{cases} r^\alpha = 0 & \text{si } g_N^\alpha > 0 \\ K^{\alpha,*} \ni \hat{u}^\alpha \perp r^\alpha \in K^\alpha & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3)$$

Le cône  $K^{\alpha,*}$  est le cône dual de  $K^\alpha$ .

Suite à une discrétisation des équations du mouvement ou d'équilibre, et à une linéarisation si nécessaire, on peut relier les variables cinématiques  $v \in \mathbb{R}^n$  aux efforts de contact par une relation linéaire, ce qui nous conduit à un problème linéaire de complémentarité en cas de contact :

$$\begin{aligned} Mv &= Hr + f, & u &= H^\top v + w, & \hat{u} &= u + g(u), \\ & & & & K^* \ni \hat{u} \perp r \in K, \end{aligned} \quad (4)$$

où  $f \in \mathbb{R}^n$  est homogène à des efforts,  $K$  est le produit cartésien de cônes pour chaque contact,

$$K = \prod_{\alpha=1 \dots n_c} K^\alpha = \prod_{\alpha=1 \dots n_c} \{r^\alpha, \|r_T^\alpha\| \leq \mu^\alpha |r_N^\alpha|\} \quad (5)$$

et  $K^*$  son dual. La fonction  $g(u)$  est une fonction non-lisse définie par

$$g(u) = [[\mu^\alpha \|u_T^\alpha\| N^\alpha]^\top, \alpha = 1 \dots n_c]^\top. \quad (6)$$

La matrice  $M \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est le plus souvent définie positive. Nous nous placerons dans cet article dans les conditions d'existence de solutions au problème (4) comme elles sont données dans [6, 5].

**Rang de la matrice  $H$  et hyperstaticité.** Attardons nous un moment sur la matrice  $H \in \mathbb{R}^{n \times 3n_c}$  qui relie les efforts de contact  $r$  aux efforts généralisés  $R = Hr$  et de façon duale les vitesses relatives au contact aux vitesses généralisées  $u = H^\top v + w$ . Si le nombre de contacts est grand en rapport au nombre de degrés de liberté, disons  $3n_c > n$ , la matrice  $H$  ne peut pas être de rang plein par colonnes. Il en résulte une dépendance linéaire des efforts de contacts et une multiplicité de solutions pour les efforts. Dans le cas des systèmes de corps rigides, cette situation est liée à l'hyperstaticité du système. Elle est, de plus, la situation générique. Pensons par exemple à une table rigide à quatre pieds sur le sol. Naturellement, cette situation peut aussi arriver dans le cas  $3n_c \leq n$  si des contraintes linéairement dépendantes sont appliquées aux corps. La réduction de rang de cette matrice influence fortement le comportement des méthodes numériques de résolution.

Il en est de même si on cherche à résoudre le problème réduit aux variables locales au contact :

$$\begin{aligned} u &= Wr + q, \\ \hat{u} &= u + g(u) \\ K^* \ni \hat{u} \perp r &\in K, \end{aligned} \quad (7)$$

avec  $W := H^\top M^{-1}H \in \mathbb{R}^{3n_c \times 3n_c}$  la matrice de Delassus et  $q := w + H^\top M^{-1}f \in \mathbb{R}^{3n_c}$ . Dans ce cas, c'est la matrice  $W$  qui n'est plus de rang plein et les mêmes problèmes sont constatés.

## 2 Méthodes numériques de résolution

Rappelons brièvement les caractéristiques des méthodes utilisées dans cette étude. Pour plus de détails, on pourra consulter [7].

**Méthodes de Newton non-lisses.** Les méthodes de Newton non-lisses sont basées sur une réécriture du problème sous la forme d'une équation  $F(r) = 0$ , dont les racines sont les solutions du problème original. Parmi les exemples les plus connus de ces fonctions, on peut citer la fonction de P. Alart et A. Curnier [8] :

$$F_{\text{ac}}(r) := \begin{bmatrix} r_N - P_{\mathbb{R}_+^{n_c}}(r_N - \rho_N(Wr + q)_N), \\ r_T - P_{D(\mu, (r_N - \rho(Wr + q)_N)_+)}(r_T - \rho_T(Wr + q)_T) \end{bmatrix}, \quad \rho_N > 0, \rho_T > 0, \quad (8)$$

avec le disque de frottement  $D(\mu, (r_N)_+) = \prod_{\alpha=1 \dots n_c} \{r_T \in \mathbb{R}^2 \mid \|r_t\| \leq \mu(r_N)_+\}$ . La fonction  $P_X$  représente la projection euclidienne sur un convexe  $X$ . Une variante est la fonction proposée par M. Jean et J.J. Moreau [9] et utilisée dans une méthode de Newton dans [10]

$$F_{\text{mj}}(r) := \begin{bmatrix} r_N - P_{\mathbb{R}_+^{n_c}}(r_N - \rho_N(Wr + q)_N) \\ r_T - P_{D(\mu, (r_N)_+)}(r_T - \rho_T(Wr + q)_T) \end{bmatrix}, \quad \rho_N > 0, \rho_T > 0. \quad (9)$$

D'autres fonctions de complémentarité peuvent aussi être utilisées comme la fonction naturelle :

$$F_{\text{nat}}(r) := [ r - P_K(r - \rho(Wr + q + g(Wr + q))) ], \quad \rho > 0 \quad (10)$$

ou encore la fonction de Fisher-Burmeister. Partant de ces formulations, il convient ensuite de calculer (sélectionner) un élément régulier  $\Phi$  du sous-différentiel de  $F$  au point  $r$ ,  $\Phi(r) \in \partial F(r)$  et d'effectuer les itérations de Newton suivantes :

$$r_{k+1} = r_k - \Phi^{-1}(r_k)(F(r_k)). \quad (11)$$

Dans cet article, nous utilisons MUMPS [11, 12] pour la résolution des systèmes linéaires.

**Méthodes de projection de type Gauss-Seidel.** La méthode de Gauss-Seidel avec projection est décrite en détail dans [13, 14]. Elle consiste en une décomposition du problème contact par contact qui permet de calculer à l'itération  $k$  les inconnues du contact  $\alpha$  en résolvant le problème suivant

$$\begin{aligned} u_{k+1}^\alpha &= W^{\alpha\alpha} r_{k+1}^\alpha + \sum_{\beta < \alpha} W^{\alpha\beta} r_{k+1}^\beta + \sum_{\beta > \alpha} W^{\alpha\beta} r_k^\beta + q^\alpha, \\ \hat{u}_{k+1}^\alpha &= u_{k+1}^\alpha + g(u_{k+1}^\alpha), \\ K^{\alpha,*} \ni \hat{u}_{k+1}^\alpha \perp r_{k+1}^\alpha &\in K^\alpha. \end{aligned} \quad (12)$$

NSN-AC-NLS	Méthode de Newton non-lisse utilisant (8) sans recherche linéaire
NSN-JM-NLS	Méthode de Newton non-lisse utilisant (9) sans recherche linéaire
NSN-NM-NLS	Méthode de Newton non-lisse utilisant (10) sans recherche linéaire
NSN-AC-NLS-HYBRID	Méthode NSN-AC-NLS avec un pré-conditionnement par 100 itérations de NSGS-AC
NSGS-AC	Méthode de Gauss Seidel avec NSN-AC-NLS pour méthode locale
NSGS-FP-VI-UPK	Méthode de Gauss Seidel avec itérations locales de points fixe de $F_{\text{nat}}(r) - r$

TABLE 1 – Nomenclature des méthodes utilisées

La résolution du problème local au contact (12) peut se faire de manière analytique, ou en utilisant une autre méthode numérique. Dans cet article, on utilisera localement une méthode de Newton non-lisse comme décrite ci-dessus ou des itérations de points fixe de  $F_{\text{nat}}(r) - r$ .

**Nomenclature.** Dans la suite, les méthodes utilisées sont nommées comme dans la Table 1.

**Mesure d'erreur.** Afin de comparer la convergence des méthodes, nous utilisons un critère d'arrêt à une précision utilisateur  $\varepsilon$  basée sur la fonction naturelle pour les problèmes de complémentarité du second ordre :

$$\frac{\|F_{\text{nat}}(r)\|}{\|q\|} < \varepsilon, \quad (13)$$

en supposant que le problème n'est pas trivial ( $\|q\| \neq 0$ ). Cette mesure d'erreur est justifiée plus amplement dans [15]. Dans le cas des méthodes itératives de projection, le coût de calcul de  $F_{\text{nat}}(r)$  est élevé par rapport à une itération. Nous utilisons un critère d'arrêt du type

$$\frac{\|r_{k+1} - r_k\|}{\|r_{k+1}\|} < \tau, \quad (14)$$

où  $\tau$  est adapté en ligne pour atteindre le critère (13).

**Profil de performance.** Pour évaluer l'efficacité d'une méthode par rapport à une autre, nous utilisons les profils de performance comme ils sont proposés dans [16]. Considérons un ensemble  $\mathcal{P}$  de  $n_p$  problèmes et  $\mathcal{S}$  de  $n_s$  méthodes de résolutions. Pour chaque problème  $p \in \mathcal{P}$  et chaque méthode  $s \in \mathcal{S}$ , on définit un critère de performance  $t_{p,s}$ . Dans notre cas, il s'agira du nombre d'opérations flottantes pour atteindre une précision donnée. De plus, si la précision n'est pas atteinte au bout d'un temps de calcul maximum par problème (1000s), le critère est égal à  $+\infty$ . On définit le rapport de performance par :

$$r_{p,s} = \frac{t_{p,s}}{\min\{t_{p,s}, s \in \mathcal{S}\}}. \quad (15)$$

Enfin on définit la probabilité  $\rho_s(\tau)$  pour une méthode  $s \in \mathcal{S}$  que le rapport de performance  $r_{p,s}$  soit en dessous d'une valeur  $\tau \geq 1$  :

$$\rho_s(\tau) = \frac{1}{n_p} \text{size}\{p \in \mathcal{P}, r_{p,s} \leq \tau\}. \quad (16)$$

On peut remarquer que  $\rho_s(1)$  représente la probabilité que la méthode  $s$  soit la meilleure par rapport aux autres méthodes. La valeur  $\rho_s(\tau)$  pour  $\tau$  grand caractérise la capacité de la méthode à résoudre un grand nombre de problèmes en temps long, c'est à dire, la robustesse de la méthode. Les fonctions  $\tau \rightarrow \rho_s(\tau)$  sont des fonctions croissantes dont on tracera les graphes appelés profils de performance pour une plage donnée de  $\tau$ .

### 3 Comparaison sur des solides élastiques

**La murette.** L'exemple choisi pour illustrer le comportement des solveurs est la modélisation d'une maçonnerie en appareil régulier composée de 12 blocs et soumise à un chargement de cisaillement illustrée à la figure 2. Les blocs sont maillés par des éléments finis linéaires avec un comportement élastique

linéaire ( $\rho = 2000\text{kg m}^{-3}$ ,  $E = 2.2 \times 10^9\text{Pa}$ ,  $\nu = 0.2$ ). L'interface entre les blocs est modélisée par du frottement de Coulomb avec du contact unilatéral. Le coefficient de frottement entre les blocs est de 0.83 et entre les blocs et les supports de 0.53. Le support du bas est fixe. Sur le support du haut on applique un effort maximum de compression de 30000N et une vitesse tangente de cisaillement de  $1 \times 10^{-3}\text{m s}^{-1}$ . Le nombre de points de contact est 2064 et le nombre de degré de liberté est 7212. La matrice  $H$  est de rang plein.

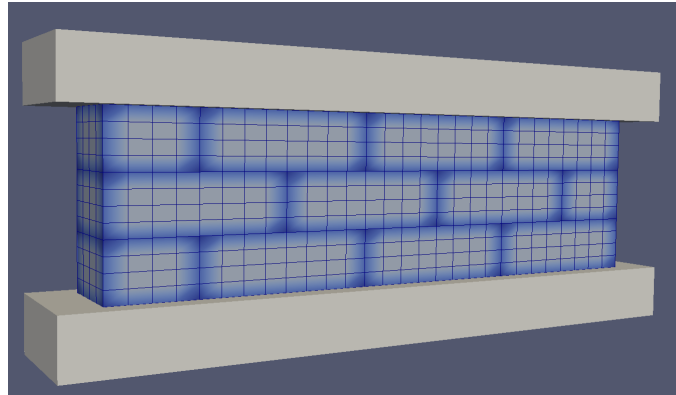


FIGURE 2 – Une murette

**Génération d'exemples par simulation et logiciels.** Le système est modélisé et simulé par le logiciel LMGC90. A chaque pas de temps, on résout le problème discret de frottement avec Siconos/numerics et on exporte le problème discret à résoudre dans un fichier au format FCLib. De cette série de problèmes à chaque pas de temps, on extrait 50 problèmes de difficulté graduée pour la méthode de Newton non-lisse.

LMGC90 [17] est une plateforme de développement dédiée à la modélisation des problèmes d'interaction. L'implantation des méthodes de résolution est faite dans Siconos [18] qui est un logiciel open-source de modélisation et de simulation des systèmes dynamiques non lisse. Enfin FCLib [19] est un format et une collection ouverte de problèmes de frottement qui permet de comparer des méthodes de résolution sur une large base d'exemples.

**Résultats.** Sur la figure 3, on représente les profils de performance des méthodes de résolution pour des précisions différentes.

Pour une précision relativement faible de  $10^{-2}$ , les performances des méthodes sont très proches. Les méthodes de Newton non lisses NSN-AC-NLS, NSN-JM-NLS et NSN-AC-NLS-HYBRID sont légèrement meilleures que NSGS-AC et NSGS-FP-VI-UPK. La méthode NSN-AC-NLS-HYBRID qui utilise un pré-conditionnement apparaît comme étant la plus performante ce qui est logique puisque les méthodes de projection permettent de trouver une solution grossière plus rapidement. La méthode NSN-NM-NLS est la moins performante.

Pour une précision de  $10^{-3}$ , toutes les méthodes de Newton non-lisses sont plus performantes. Elles sont les plus rapides et ne posent pas de problème de robustesse. La méthode NSN-NM-NLS est la moins performante des méthodes de Newton. On peut noter que la méthode NSN-AC-NLS-HYBRID est la plus performante et qu'elle est en moyenne 4 fois plus performante que la méthode NSGS-AC.

Pour une précision de  $10^{-4}$  et  $10^{-6}$ , cette tendance s'accroît avec des méthodes de Newton qui sont en moyenne 20 fois et respectivement 40 fois plus performantes que les méthodes itératives de projection. Un zoom sur les méthodes de Newton montre que leur performance relative reste inchangée. Par contre, la méthode de NSGS-FP-VI-UPK devient plus performante que la méthode de NSGS-AC pour une précision de  $10^{-6}$ .

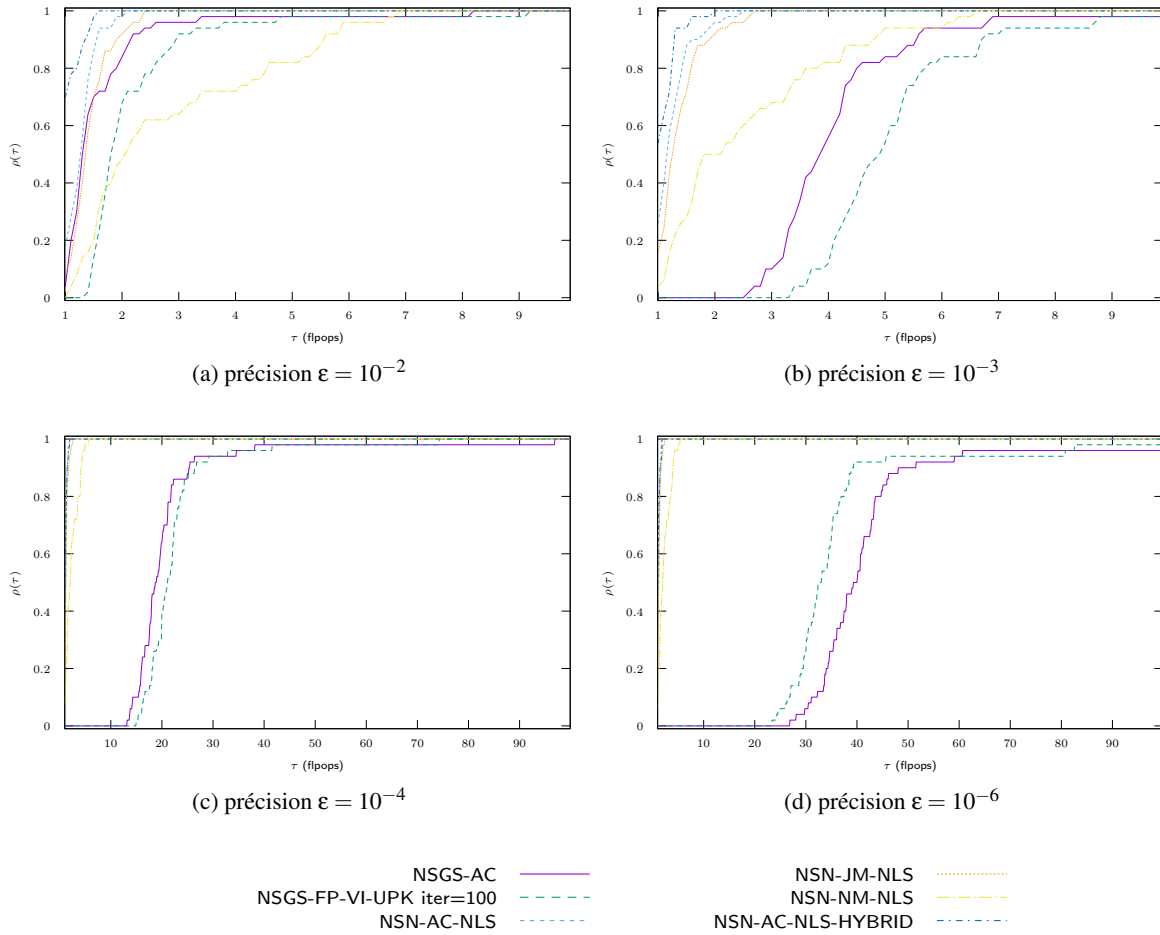


FIGURE 3 – Comparaison entre les méthodes itératives de type projection et les méthodes de Newton non-lisses pour différentes précisions.

## 4 Conclusion

En conclusion, on peut observer que

- Pour des précisions relativement élevées (au delà de  $10^{-4}$ ), les méthodes de Newton lisses sont beaucoup plus performantes pour des systèmes multi-corps flexibles.
- La méthode NSN-AC-NLS-HYBRID est la méthode la plus performante des méthodes de Newton. Le pré-conditionnement permet d'accélérer la convergence des premières itérations de Newton.
- Les méthodes itératives de projection restent intéressantes pour des précisions faibles, mais elles ne permettent pas d'atteindre une précision élevée pour un coût raisonnable.

Les perspectives à ce travail sont les suivantes :

- évaluer l'intérêt de passer à un modèle déformable pour accélérer les calculs de systèmes multi-corps rigides.
- intégrer le comportement non-linéaire de corps dans les méthodes de Newton non-lisse. Ceci permettrait d'éviter une boucle externe de Newton.
- utiliser les potentialités massivement parallèles des bibliothèques de calculs de grands systèmes linéaires comme MUMPS qui sont utilisées dans les méthodes de Newton. Cela pourrait fournir une alternative aux méthodes de Gauss-Seidel distribuées.

## Références

- [1] F. Bertails-Descoubes, F. Cadoux, G. Daviet, and V. Acary. A Nonsmooth Newton Solver for Capturing Exact Coulomb Friction in Fiber Assemblies. *ACM Transactions on Graphics*, January 2011.
- [2] M. Jean. The non smooth contact dynamics method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 177 :235–257, 1999. Special issue on computational modeling of contact and friction, J.A.C. Martins and A. Klarbring, editors.
- [3] V. Acary and M. Jean. Numerical simulation of monuments by the contacts dynamics method. In DGEMN-LNEC-JRC, editor, *Monument-98, Workshop on seismic performance of monuments*, pages 69–78. Laboratório Nacional de engenharia Civil (LNEC), November 12-14 1998.
- [4] G. De Saxcé. Une généralisation de l'inégalité de Fenchel et ses applications aux lois constitutives. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, t 314,série II :125–129, 1992.
- [5] V. Acary, F. Cadoux, C. Lemaréchal, and J. Malick. A formulation of the linear discrete coulomb friction problem via convex optimization. *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 91(2) :155–175, 2011.
- [6] Anders Klarbring and Jong-Shi Pang. Existence of solutions to discrete semicoercive frictional contact problems. *SIAM Journal on Optimization*, 8(2) :414–442, 1998.
- [7] V. Acary and B. Brogliato. *Numerical methods for nonsmooth dynamical systems. Applications in mechanics and electronics*. Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics 35. Berlin : Springer. xxi, 525 p. , 2008.
- [8] P. Alart and A. Curnier. A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton like solution method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 92(3) :353–375, 1991.
- [9] M. Jean and J.J. Moreau. Dynamics in the presence of unilateral contacts and dry friction : a numerical approach. In G. Del Pietro and F. Maceri, editors, *Unilateral problems in structural analysis. II*, pages 151–196. CISM 304, Spinger Verlag, 1987.
- [10] P. Christensen, A. Klarbring, J. Pang, and N. Stromberg. Formulation and comparison of algorithms for frictional contact problems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 42 :145–172, 1998.
- [11] Patrick R. Amestoy, Abdou Guermouche, Jean-Yves L'Excellent, and Stéphane Pralet. Hybrid scheduling for the parallel solution of linear systems. *Parallel Comput.*, 32(2) :136–156, 2006.
- [12] Patrick R. Amestoy, Iain S. Duff, Jean-Yves L'Excellent, and Jacko Koster. A fully asynchronous multifrontal solver using distributed dynamic scheduling. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 23(1) :15–41 (electronic), 2001.
- [13] E.N. Mitsopoulou and I.N. Doudoumis. A contribution to the analysis of unilateral contact problems with friction. *Solid Mechanics Archives*, 12(3) :165–186, 1987.
- [14] F. Jourdan, P. Alart, and M. Jean. A Gauss Seidel like algorithm to solve frictional contact problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 155(1) :31–47, 1998.



- [15] F. Facchinei and J. S. Pang. *Finite-dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems*, volume I & II of *Springer Series in Operations Research*. Springer Verlag NY. Inc., 2003.
- [16] E.D. Dolan and J.J. Moré. Benchmarking optimization software with performance profiles. *Mathematical Programming*, 91(2) :201–213, 2002.
- [17] F Dubois and M Jean. Lmgc90 une plateforme de développement dédiée à la modélisation des problèmes d’interaction. In *Actes du sixieme colloque national en calcul des structures*, volume 1, pages 111–118, 2003.
- [18] V. Acary, M. Brémond, O. Huber, and F. Péricnon. Siconos. a software for modeling and simulation of nonsmooth dynamical systems. <http://siconos.gforge.inria.fr>, <https://github.com/siconos/siconos>.
- [19] V. Acary, M. Brémond, T. Koziara, and F. Péricnon. FCLIB : a collection of discrete 3D Frictional Contact problems. Technical Report RT-0444, INRIA, February 2014.