



**HAL**  
open science

## Analyse isogéométrique : méthodes multipatchs et quadratures gaussiennes optimisées

Nicolas Adam, Malek Zarroug, Patrick Le Tallec

### ► To cite this version:

Nicolas Adam, Malek Zarroug, Patrick Le Tallec. Analyse isogéométrique : méthodes multipatchs et quadratures gaussiennes optimisées. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899301

**HAL Id: hal-01899301**

**<https://hal.science/hal-01899301>**

Submitted on 19 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Analyse isogéométrique : méthodes multipatchs et quadratures gaussiennes optimisées

N. Adam<sup>1,2</sup>, M. Zarroug<sup>2</sup>, P. Le Tallec<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LMS, École Polytechnique, {nicolas.adam,patrick.letallec}@polytechnique.edu

<sup>2</sup> Direction Scientifique et Technologies Futures, PSA Peugeot Citroën, malek.zarroug@mpsa.com

---

**Résumé** — Le concept d'analyse isogéométrique (IGA) permet de lier plus directement la conception assistée par ordinateur à l'étape d'analyse par l'utilisation de fonctions *B-splines* communes, plus riches que les fonctions de Lagrange utilisées en éléments finis. La régularité élevée de ces fonctions ne permet pas de se soustraire aux problèmes de verrouillages si une quadrature Gaussienne complète est envisagée. Ce résumé propose des règles d'intégrations optimisées et validées dans le cas d'un domaine unique. Une extension est proposée dans le cadre de patchs multiples pour différents types de discrétisation spatiale.

**Mots clés** — analyse isogéométrique, verrouillage numérique, domaines multiples.

---

## 1 Introduction

La méthode éléments finis (FEM) est actuellement la plus répandue dans le domaine de la mécanique. Néanmoins, les géométries générées par cette dernière sont facettisées et s'écartent de la géométrie initiale issue de l'étape de conception. Une alternative a été initialement proposée par [9] et consiste en l'utilisation de fonctions *B-Splines* ou plus généralement des fonctions *NURBS* permettant de décrire la géométrie exacte du problème par un contour lisse. Elles sont définies par des points de contrôles, un degré ou ordre polynomial ainsi qu'un nombre de patch. Les fonctions *splines* présentent une continuité  $C^{(p-1)}$  avec des polynômes d'ordre  $p$  plus élevées que les fonctions de forme de Lagrange ou Bézier  $C^0$  en FEM. Une intégration complète de Gauss-Legendre requiert  $[(p+1)/2]$  points pour intégrer des polynômes d'ordre  $p$  par patch  $C^0$  (où  $[x]$  désigne l'entier supérieur le plus proche de  $x$ ). En plus du coût en temps de calcul, des problèmes de verrouillage numérique apparaissent alors, notamment pour les problèmes de coque. Il faut donc développer des techniques d'intégration réduite qu'il faut ensuite étendre aux formulations multipatchs.

Ce papier est organisé de la manière suivante : dans la première partie, l'intégration Gaussienne optimisée est présentée avec validation sur un cas 2D. Ensuite, une synthèse des formulations multipatchs est faite et précède les applications numériques en cours de développement.

## 2 Intégration Gaussienne optimisée

### 2.1 Principe

Cette section présente les règles d'intégrations optimisées sur un modèle de coque type Reissner-Mindlin ([2] et [3]) par extension du cas unidimensionnel des poutres ([1]). L'étude s'inscrit dans un contexte de petites perturbations en élasticité linéaire.

Le phénomène de verrouillage numérique est présent en FEM comme en IGA. Son origine vient du fait que des contraintes, liant les degrés de liberté, sont présentes lors d'une intégration complète. Lorsque le nombre de ces contraintes excède le champ d'inconnues, un verrouillage apparaît : aucun champ de l'espace d'approximation choisi ne peut alors approcher correctement la solution tout en vérifiant les contraintes. La haute régularité en IGA ne supprime pas ce phénomène, des termes mixtes dérivatifs et non dérivatifs dans les déformations de membrane et en cisaillement constituent toujours un problème de champ dit inconsistant.

Afin de résoudre ce problème, des solutions d'intégrations réduites ou sélectives existent (voir [8]). Le principe est de réduire le nombre de points de Gauss afin de relâcher les contraintes. Une intégration réduite diminue le nombre de points de quadrature pour l'ensemble de la matrice de raideur alors qu'avec une approche sélective, seuls les termes de membrane et cisaillement sont sous intégrés. L'intégration réduite classique engendre une déficience de rang de la matrice de raideur et les modes à énergie nulle *Hourglass* apparaissent (système sous contraint dans ce cas). Il est alors nécessaire d'ajouter une matrice de raideur supplémentaire pour éviter ces modes non physiques. Une quadrature sélective traite séparément les deux termes explicités et peut s'avérer coûteuse en temps de calcul, particulièrement pour les coques. La haute régularité des *B-splines* empêche de supprimer le verrouillage avec ces méthodes adaptées au FEM. Une quadrature optimale pour l'IGA est proposée, en évitant une déficience de rang de la matrice de raideur tout en gardant la précision apportée par une continuité  $C^{(p-1)}$  et en ne dissociant pas les termes de membrane et de cisaillement. La quadrature en figure 1 est proposée pour un ordre  $p = 3$ .

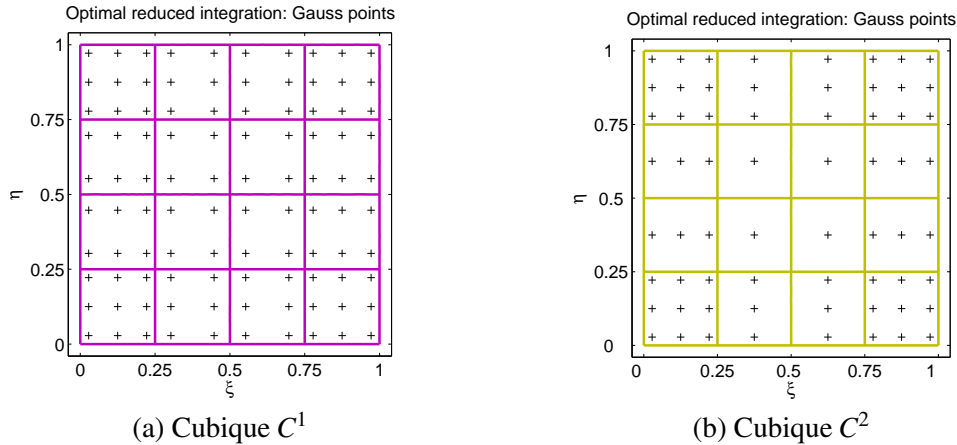


FIGURE 1 – Quadrature optimale proposée pour des modèles 2D sur un patch à 16 éléments

Le principe est de réduire le nombre de points de Gauss pour les éléments adjacents. Les éléments aux angles possèdent autant d'inconnues que d'équations obtenues par les points d'intégrations et les conditions limites. Les continuités  $C^1$  et  $C^2$  rajoutant respectivement deux et trois équations, le nombre de points de Gauss est réduit en conséquence dans les deux directions  $\xi$  et  $\eta$  du problème. Il est possible de noter que si la continuité augmente, la précision sur les résultats est accrue et le temps de calcul est réduit car le nombre de points d'intégration diminue d'autant plus. La table 1 synthétise les règles de quadrature réduite.

TABLE 1 – Règles d'intégrations optimales pour chaque direction - 2D

Cas considéré	Éléments aux bords	Éléments internes
$C^1$ quadratique	2 points	1 point
$C^1$ cubique	3 points	2 points
$C^2$ cubique	3 points	1 point

## 2.2 Validation sur une coque de Reissner-Mindlin

Le modèle de Reissner-Mindlin envisagé possède six degrés de liberté à chaque point de contrôle. L'hypothèse des contraintes planes est faite, en notant  $h$  l'épaisseur constante de la coque. Le cisaillement transverse ne peut être négligé sans détériorer la solution.

La définition de la normale est plus simple en IGA sachant que la surface est lissée. Le calcul de la normale exacte, obtenue par produit vectoriel des positions par rapport aux coordonnées paramétriques, n'est pas retenue car la méthode n'est pas compatible avec des intégrations réduites (grande précision exigée sur les dérivées première et seconde des positions). La normale  $\underline{n}_A$  sera définie à l'abscisse de

Gréville, c'est à dire aux points  $\bar{\xi}_k = \frac{\xi_{k+1} + \dots + \xi_{k+p}}{p}$  puis étendue aux points d'intégration choisis. Cette dernière approche cumule les avantages suivants : compatibilité avec l'intégration réduite, précision et temps de calcul faible (pas de projection) (voir [2]).

Une validation est faite sur le *Scordelis-Lo roof*, problème classique du *Shell obstacle course*. Il s'agit d'une surface cylindrique bloquée à ses deux extrémités tel que  $u = w = \theta_y = 0$  et soumise à la gravité (voir figure 2). Par symétrie, un quart de la structure est considéré. Sachant que  $R/h = 100$  et  $L/h = 200$ , il s'agit d'une coque mince. Ce problème met en évidence le verrouillage sur le terme de membrane sachant que le cisaillement transverse est négligeable.

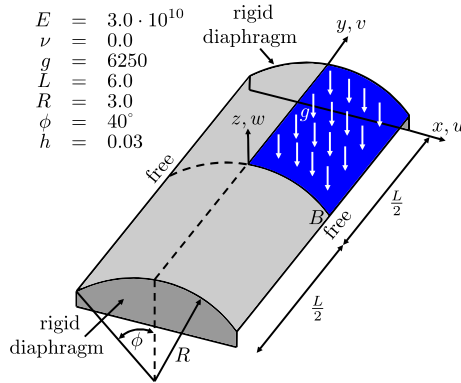


FIGURE 2 – Description et géométrie du *Scordelis-Lo roof* problème

La figure 3 résume les résultats obtenus en terme de précision et temps de calcul (déplacement relevé au point B) pour le cas d'une intégration complète ainsi que la quadrature optimisée proposée.

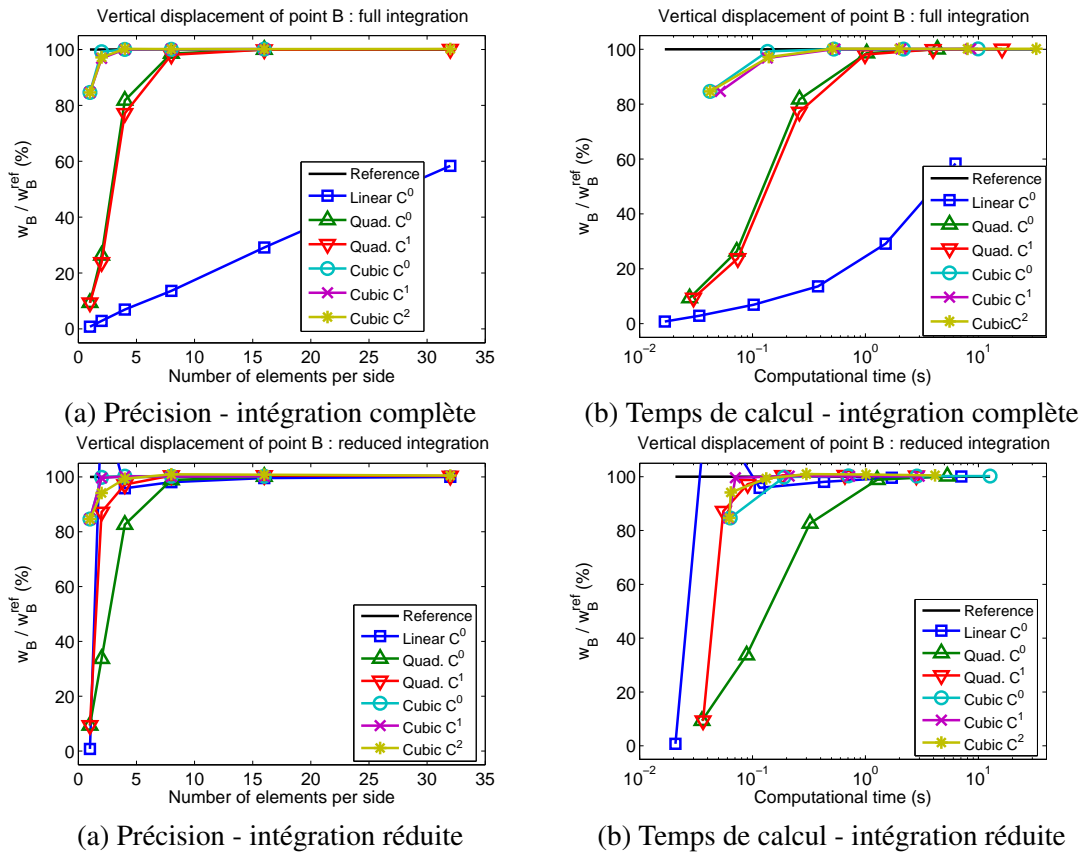


FIGURE 3 – Validation de la quadrature optimale sur le problème de *Scordelis-Lo*

La quadrature proposée se soustrait au verrouillage en membrane tout en réduisant le coût en temps de calcul. Dans tous les cas la convergence est améliorée.

### 3 Méthodes multipatches

#### 3.1 Introduction

L'objectif est de présenter les méthodes permettant de lier des calculs sur des domaines multiples en garantissant la continuité aux interfaces de la solution obtenue tout en restant compatible avec les règles d'intégration réduite choisies. Pour cela, des méthodes existent dans le contexte de l'IGA.

Une méthode assurant une continuité  $C^0/G^1$  est proposée dans [10]. Le principe est de transmettre le moment de flexion pour des coques type Kirchoff-Love. Pour cela, une bande de flexion fictive relie les points de contrôle à l'interface grâce à une rigidité selon la direction transverse de la bande. La condition de continuité en angle est ainsi vérifiée. Cette méthode est adaptée pour des maillages conformes uniquement.

La méthode statique condensée (voir [11]) permet également de vérifier ces relations de continuité. Cette dernière fonctionne en deux étapes. D'abord une re-localisation des points de contrôles à l'interface commune est réalisée de manière à obtenir un espace commun pour les traces des fonctions de base sur l'arrête commune. Ensuite, la résolution en déplacement est faite sur un espace de dimension réduit respectant les conditions de continuité d'interface. Elle concerne le cas de maillages conformes ou de type hiérarchique.

Ce type de méthode a aussi été développé pour des maillages non conformes. Elles sont présentées dans [4], concernant des degrés de liberté en déplacement, et comparées en terme de convergence. Pour rappel, l'ensemble des degrés de liberté (déplacement et rotation) seront pris en compte dans les formulations.

#### 3.2 Traitement de la non conformité

Cette section précise la méthode employée afin d'imposer la continuité des solutions à l'interface pour des maillages quelconques. Le principe, présenté dans [11], repose sur une re-localisation des points de contrôles aux interfaces communes afin de créer un espace commun des fonctions de base. Une continuité  $C^0$  est imposée au niveau des arrêtes communes. Afin d'obtenir une paramétrisation identique à l'interface, des projections orthogonales sont effectuées de manière symétrique (assimilable aux T-splines).

En notant  $p$  l'ordre atteint par les fonctions de base, le vecteur noeud du sous-domaine  $\Omega^{(1)}$  à l'interface est  $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{p+n+1}\}$  et l'ensemble des points de contrôles associés (poids homogène  $w$ ) est  $B^{w,1} = \{\underline{B}_1^{w,1}, \underline{B}_2^{w,1}, \dots, \underline{B}_n^{w,1}\}$ . De même pour le sous-domaine  $\Omega^{(2)}$  avec les notations

$\mathcal{H} = \{\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{p+m+1}\}$  et  $B^{w,2} = \{\underline{B}_1^{w,2}, \underline{B}_2^{w,2}, \dots, \underline{B}_m^{w,2}\}$ . Ainsi, sur l'espace commun à l'interface  $\mathcal{Z} = \Xi \cup \mathcal{H}$ , les nouveaux points de contrôles sont notés  $P^w = \{\underline{P}_1^w, \underline{P}_2^w, \dots, \underline{P}_r^w\}$ . L'algorithme d'Oslo (voir [5]) permet de construire des points de contrôle d'interface :

$$\begin{cases} \underline{P}_j^w = \sum_{i=0}^n a_{i,j}^p \underline{B}_i^{w,1}, \\ \underline{P}_j^w = \sum_{i=0}^m c_{i,j}^p \underline{B}_i^{w,2}, \end{cases} \quad \text{avec } a \text{ et } c \text{ définis de manière récursive.}$$

La figure 4 décrit les projections permettant la continuité  $C^0$  par égalité des degrés de liberté aux points de contrôles communs. Cela s'écrit, avec des points de contrôles  $\underline{P}$  confondus à l'interface sous la forme matricielle :

$$\underline{\underline{P}}^{w,1} = \underline{\underline{P}}^{w,2} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{2r \times 2n}^{1,1} & -\underline{\underline{C}}_{2r \times 2m}^{2,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{B}}_{2n \times 1}^{1,1} \\ \underline{\underline{B}}_{2m \times 1}^{2,1} \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad (1)$$

La condition (1) est l'écriture matricielle de la condition de continuité des inconnues à l'interface. Une attention particulière doit être portée à l'espace commun des fonctions de base. Le champ étant approximé par les fonctions de base liées à cet espace, plus il est étendu et meilleure est l'approximation. Si

le maillage est conforme ou en T, l'espace commun possède autant de fonctions de base que le plus petit nombre de fonctions des sous-domaines adjacents : raffiner le maillage assure une meilleure solution. Si le maillage est non conforme, cette affirmation n'est pas vérifiée et l'espace commun peut être très petit.

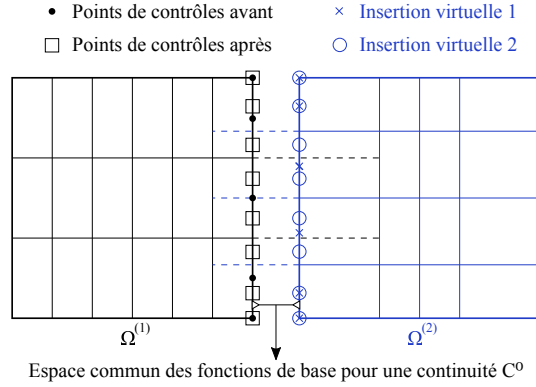


FIGURE 4 – Description du traitement de la non conformité à l'interface, continuité  $C^0$

### 3.3 Formulation

Les notations  $\Gamma_d$  et  $\Gamma_c$  désigneront respectivement les bords en condition de Dirichlet et les interfaces communes des sous-domaines. Soit  $L^2(\Omega) = H^0(\Omega)$  l'espace des fonctions de Lebesgue de carré intégrable, auquel nous associerons le produit scalaire classique  $\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_{\Omega} u(x)v(x)dx$ .

Les sous-domaines, notés  $\Omega^{(\alpha)}$  avec  $\alpha = \{1, 2\}$  dans cet exemple, vérifient les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned}\Omega^{(1)} \cap \Omega^{(2)} &= \emptyset \quad (\text{non recouvrement}), \\ \Omega &= \Omega^{(1)} \cup \Omega^{(2)}, \\ \Gamma_c &= \partial\Omega^{(1)} \cap \partial\Omega^{(2)}.\end{aligned}$$

Les espaces d'approximation construits par *NURBS* seront notés respectivement  $\mathcal{V}_{1,h}$ ,  $\mathcal{V}_{2,h}$  et  $\mathcal{V}_h = \{(\underline{v}_{1,h}, \underline{v}_{2,h}) \in \mathcal{V}_{1,h} \times \mathcal{V}_{2,h}, \underline{v}_{1,h} = \underline{v}_{2,h} \text{ sur } \Gamma_c\}$ . Cet espace peut également s'écrire à partir de l'espace continu  $\mathcal{V}$  en notant  $Q$  la quadrangulation réalisée et  $\mathcal{R}$  l'ensemble des polynômes rationnels  $\mathcal{V}_h = \{\underline{v} \in \mathcal{V}, \underline{v} \in (\mathcal{R}(Q_i))^2 \text{ pour chaque } Q_i \in Q_h\}$ . En notant  $\Phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_{3n})$  les fonctions de bases pour les déplacements, l'espace discret s'écrit  $\kappa = \{(\tilde{v}_i)_{i=1}^{3n} = \tilde{\underline{v}} \in \mathbb{R}^{3n}, \sum_{i=1}^{3n} \phi_i \tilde{v}_i \in \mathcal{V}_h\}$ , le tilde précise la nature non interpolante des *NURBS*. Chaque  $\underline{v}_h \in \mathcal{V}_h$  peut ainsi se décomposer tel que  $\underline{v}_h = \sum_{i=1}^{3n} \phi_i \tilde{v}_i$ .

En termes de degrés de liberté  $\underline{\underline{P}}$ , la condition de continuité prend la forme de l'équation matricielle (1). Le problème s'écrit :

$$a(\underline{u}, \underline{v}) = L(\underline{v}), \quad \forall \underline{v} \in \mathcal{V}_h$$

où  $a(\underline{u}, \underline{v}) = a_1(\underline{u}, \underline{v}) + a_2(\underline{u}, \underline{v})$  sont les formes bilinéaires caractérisant la raideur élastique des domaines 1 et 2 respectivement.

## 4 Calcul de solutions multipatches

### 4.1 Approche par pénalité pour l'application de la contrainte d'interface

Cette méthode consiste à rajouter un terme de raideur à la structure globale, le problème résolu n'étant pas rigoureusement identique au problème initial. L'écriture de la formulation variationnelle est modifiée pour prendre en compte les conditions d'interface en déplacement et rotation. Le problème peut s'exprimer sous la forme : trouver  $\{\underline{u}, \underline{u}_n\} \in \mathcal{V}_{1,h} \times \mathcal{V}_{2,h}$  avec  $\underline{\chi} = \underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(2)}$  et  $\underline{\zeta} = \underline{u}_n^{(1)} - \underline{u}_n^{(2)}$  sur  $\Gamma_c$  tel que :

$$a_p(\underline{u}, \underline{v}) = a(\underline{u}, \underline{v}) + \underbrace{\beta_1 \langle \underline{\chi}, \underline{\Psi} \rangle_{L^2, \Gamma_c}}_{\text{déplacement}} + \underbrace{\beta_2 \langle \underline{\zeta}, \underline{\mu} \rangle_{L^2, \Gamma_c}}_{\text{rotation}} = L(\underline{v}), \quad \forall \{\underline{v}, \underline{v}_n\} \in \mathcal{V}_{1,h} \times \mathcal{V}_{2,h}, \quad (2)$$

avec  $\underline{\Psi} = \underline{v}^{(1)} - \underline{v}^{(2)}$  et  $\underline{\mu} = \underline{v}_n^{(1)} - \underline{v}_n^{(2)}$  sur  $\Gamma_c$  (de normale continue et bornée). Le second terme représente la condition d'interface sur les degrés de liberté en déplacement et le troisième terme correspond à la rotation. Les valeurs de  $\beta_1$  et  $\beta_2$  sont indépendantes de la discrétisation spatiale tel que :

$$\beta_1 = r_1 \frac{ES}{L^2} \quad \text{et} \quad \beta_2 = r_2 \frac{EI}{L^2},$$

avec  $r_1$  et  $r_2$  les facteurs adimensionnés de pénalité, respectivement pour le déplacement et la rotation. Après ré-écriture de l'équation (2), les matrices de raideur et de couplage pour des structures minces sont :

$$\begin{aligned} K_{p,i,j}^{(\alpha)} &= \beta_1 \langle \underline{\phi}_i^{(\alpha)}, \underline{\phi}_j^{(\alpha)} \rangle_{L^2, \Gamma_c} + \beta_2 \langle \underline{\phi}_{i,n}^{(\alpha)}, \underline{\phi}_{j,n}^{(\alpha)} \rangle_{L^2, \Gamma_c}, \\ C_{p,i,j}^{(1)} &= -\beta_1 \langle \underline{\phi}_i^{(1)}, \underline{\phi}_j^{(2)} \rangle_{L^2, \Gamma_c} - \beta_2 \langle \underline{\phi}_{i,n}^{(1)}, \underline{\phi}_{j,n}^{(2)} \rangle_{L^2, \Gamma_c}, \\ C_{p,i,j}^{(2)} &= -\beta_1 \langle \underline{\phi}_i^{(2)}, \underline{\phi}_j^{(1)} \rangle_{L^2, \Gamma_c} - \beta_2 \langle \underline{\phi}_{i,n}^{(2)}, \underline{\phi}_{j,n}^{(1)} \rangle_{L^2, \Gamma_c}. \end{aligned}$$

Le vecteur des déplacements sur les degrés de liberté étant  $[\underline{\tilde{u}}^{(1)} \quad \underline{\tilde{u}}^{(2)}]^T = \underline{\tilde{u}} \in \kappa$ , le système à résoudre est de la forme :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}^{(1)} + \underline{\underline{K}}_p^{(1)} & \underline{\underline{C}}_p^{(1)} \\ \underline{\underline{C}}_p^{(2)} & \underline{\underline{K}}^{(2)} + \underline{\underline{K}}_p^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{u}}^{(1)} \\ \underline{\tilde{u}}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{F}}^{(1)} \\ \underline{\tilde{F}}^{(2)} \end{bmatrix}$$

D'une manière analogue, pour des structures épaisses, les degrés de liberté en rotation apparaissent explicitement dans le système à résoudre. En notant  $\Phi^\theta = (\phi_1^\theta, \phi_2^\theta, \dots, \phi_{3n}^\theta)$  les fonctions de base pour les rotations, la matrice de raideur ajoutée par pénalité se décompose en deux parties :

$$\underline{\underline{K}}_p^{(\alpha)} = \left[ \beta_1 \langle \underline{\phi}_i^{(\alpha)}, \underline{\phi}_j^{(\alpha)} \rangle_{L^2, \Gamma_c}, \beta_2 \langle \underline{\phi}_i^{\theta, (\alpha)}, \underline{\phi}_j^{\theta, (\alpha)} \rangle_{L^2, \Gamma_c} \right],$$

avec le vecteur sur les degrés de liberté en déplacement et rotation  $\underline{\tilde{u}} = [\underline{\tilde{u}}^{(1)} \quad \underline{\tilde{\theta}}^{(1)} \quad \underline{\tilde{u}}^{(2)} \quad \underline{\tilde{\theta}}^{(2)}]^T$ . Le même raisonnement est applicable aux matrices de couplage.

Il s'agit d'une méthode classique dont le choix du facteur de pénalité est décisif : s'il est trop petit, la contrainte ne sera pas appliquée et trop grand, la matrice  $\underline{\underline{K}}$  sera mal conditionnée. Elle est également appelée forme variationnelle inconsistante car la forme faible présentée ne retrouve pas rigoureusement les conditions d'interface présentées par la forme forte. Néanmoins, l'unicité de la solution est assurée sachant que la forme bilinéaire  $a_p(\underline{u}, \underline{v})$  est elliptique, cette dernière propriété est essentielle.

## 4.2 Approche duale pour l'application de la contrainte d'interface

Il s'agira d'appliquer la contrainte par l'ajout d'inconnues proportionnelles aux efforts à l'interface. L'introduction de ce champ supplémentaire amène le problème classique de point-selle. L'écriture de la formulation faible est : trouver  $\{\underline{u}, \underline{u}_n\} \in \mathcal{V}_{1,h} \times \mathcal{V}_{2,h}$  avec  $\underline{\chi} = \underline{u}^{(1)} - \underline{u}^{(2)}$  et  $\underline{\Sigma} = \underline{u}_n^{(1)} - \underline{u}_n^{(2)}$  sur  $\Gamma_c$  et  $\{\underline{\lambda}, \underline{\lambda}^*\} \in \mathcal{V}_h^\lambda$  tel que :

$$\begin{cases} a_L[(\underline{u}, \underline{\lambda}); (\underline{v}, \underline{\mu})] = a(\underline{u}, \underline{v}) + \underbrace{\langle \underline{\lambda}, \underline{\Psi} \rangle_{L^2, \Gamma_c}}_{\text{déplacement}} + \underbrace{\langle \underline{\chi}, \underline{\mu} \rangle_{L^2, \Gamma_c}}_{\text{rotation}} + \underbrace{\langle \underline{\lambda}^*, \underline{\zeta} \rangle_{L^2, \Gamma_c}}_{\text{rotation}} + \langle \underline{\Sigma}, \underline{\Pi} \rangle_{L^2, \Gamma_c} = L(\underline{v}), \\ \forall \{\underline{v}, \underline{v}_n\} \in \mathcal{V}_{1,h} \times \mathcal{V}_{2,h} \text{ et } \forall \{\underline{\mu}, \underline{\Pi}\} \in \mathcal{V}_h^\lambda \end{cases}$$

avec  $\underline{\Psi} = \underline{v}^{(1)} - \underline{v}^{(2)}$  et  $\underline{\zeta} = \underline{v}_n^{(1)} - \underline{v}_n^{(2)}$ . La séparation de traitement pour les termes de déplacement et rotation est analogue à l'approche précédente ( $\underline{\lambda}^*$  est l'inconnue de Lagrange, duale des rotations). L'espace lié à la discrétisation spatiale des Lagrange est noté  $\mathcal{V}_h^\lambda \subset [H^{-1/2}(\Gamma_c)]^2$  tel que

$\mathcal{V}_h^\lambda = \left\{ \underline{\lambda} \in [H^{-1/2}(\Gamma_c)]^2, \underline{\lambda} \in (\mathcal{R}(Q_\#^\lambda))^2 \text{ pour chaque } Q_\#^\lambda \in Q_h^\lambda \right\}$ . En notant  $\Phi^\lambda = (\underline{\phi}_1^\lambda, \underline{\phi}_2^\lambda, \dots, \underline{\phi}_{3n_\lambda}^\lambda)$  les fonctions de bases pour les grandeurs duales des déplacements, l'espace discret s'écrit  $\kappa_\lambda = \left\{ (\tilde{\lambda}_i)_{i=1}^{3n_\lambda} = \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}^{3n_\lambda}, \sum_{i=1}^{3n_\lambda} \underline{\phi}_i^\lambda \tilde{\lambda}_i \in \mathcal{V}_h^\lambda \right\}$ . Nous utiliserons la discrétisation spatiale  $\sum_{i=1}^{3n_\lambda} \underline{\phi}_i^\lambda \tilde{\lambda}_i = \underline{\lambda}_h \in \mathcal{V}_h^\lambda$ . Les matrices de couplage pour des structures minces s'écrivent :

$$\underline{C}_{\lambda,i,j}^{(\alpha)} = (-1)^{\alpha+1} \left[ \left\langle \underline{\phi}_i^{(\alpha)}, \underline{\phi}_j^\lambda \right\rangle_{L^2, \Gamma_c} + \left\langle \underline{\phi}_{i,n}^{(\alpha)}, \underline{\phi}_{j,n}^\lambda \right\rangle_{L^2, \Gamma_c} \right].$$

Finalement, le système à résoudre par l'approche duale est :

$$\begin{bmatrix} \underline{K}^{(1)} & \underline{0} & \underline{C}_\lambda^{(1)} \\ \underline{0} & \underline{K}^{(2)} & \underline{C}_\lambda^{(2)} \\ \left(\underline{C}_\lambda^{(1)}\right)^T & \left(\underline{C}_\lambda^{(2)}\right)^T & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\tilde{u}}^{(1)} \\ \underline{\tilde{u}}^{(2)} \\ \underline{\tilde{\lambda}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\tilde{F}}^{(1)} \\ \underline{\tilde{F}}^{(2)} \\ \underline{0} \end{bmatrix}$$

Par un procédé analogue à l'approche par pénalité, le cas des structures épaisses peut être traité en ajoutant des degrés de liberté indépendant en rotation et en dissociant les matrices de couplage associées.

La formulation permet une application plus précise des conditions à l'interface (voir [4]), mais le choix de l'espace  $\mathcal{V}_h^\lambda$  reste délicat : il doit vérifier les conditions inf-sup (ou L.B.B) sinon l'unicité de la solution n'est pas assurée.

Un premier choix à tester sera de prendre  $\mathcal{V}_h^\lambda = (\mathcal{V}_{1,h} \oplus \mathcal{V}_{2,h})|_{\Gamma_c}$  garantissant ainsi que la solution du problème mixte satisfait exactement la condition de continuité (1).

## 5 Conclusion

Ce travail a permis de mettre en évidence la qualité des résultats obtenus lors d'une intégration réduite en IGA et sur un domaine unique. La méthode de quadrature proposée permet de s'affranchir du verrouillage numérique tout en diminuant le temps de calcul par rapport à une intégration complète ou sélective classique. Aucun mode à énergie nulle n'est observé dans ce cas.

Des méthodes de décomposition de domaine ont été présentées afin d'étendre les bénéfices d'une telle quadrature au cas du multi-domaines et ce en particulier aux interfaces. L'intégration optimisée devra permettre de s'affranchir du verrouillage numérique en conservant une continuité  $C^0$  entre les différents patches. Différents tests, soit en pénalité, soit en dualité, seront présentés à la conférence.

## 6 Références bibliographiques

### Références

- [1] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam. *Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part I : Beams*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 278, pages 1-28, 2014.
- [2] C. Adam. *A contribution to static and dynamic isogeometric analysis of structures*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, 2015.
- [3] C. Adam, S. Bouabdallah, M. Zarroug, H. Maitournam. *Improved numerical integration for locking treatment in isogeometric structural elements, Part II : Plates and shells*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 284, pages 106-137, 2015
- [4] A. Apostolatos, R. Schmidt, R. Wüchner, K.-U. Bletzinger. *A Nitsche-type formulation and comparison of the most common domain decomposition methods in isogeometric analysis*. Int. J. Numer. Meth. Engng, vol. 97, pages 473-504, 2014.
- [5] E. Cohen, T. Lyche, R. Riesenfeld. *Discrete B-splines and subdivision techniques in computer-aided geometric design and computer graphics*. Computer Graphics and Image Processing, vol. 14, pages 87-111, 1980.
- [6] J.A. Cottrell, T.J.R. Hughes, Y. Bazilevs. *Isogeometric Analysis : Toward Integration of CAD and FEA*, Wiley, 2009.



- [7] M. Griebel, M.A. Schweitzer. *A particle-Partition of Unity Method-Part V : Boundary Conditions*. Springer : Berlin Heidelberg, 2002.
- [8] T.J.R. Hughes, M. Cohen, M. Haroun. *Reduced and selective integration techniques in the finite element analysis of plates*. Nuclear Engineering and Design, vol. 46, pages 203-222, 1978.
- [9] T.J.R. Hugues, J.A. Cottrell, Y. Bazilevs. *Isogeometric analysis : CAD, finite elements, NURBS, exact geometry and mesh refinement*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 194, pages 4135-4195, 2005.
- [10] J. Kiendl, Y. Bazilevs, M.-C. Hsu, R. Wüchner, K.-U. Bletzinger. *The Bending Strip Method for Isogeometric Analysis of Kirchoff-Love Shell Structures Comprised of Multiple Patches*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., vol. 199, pages 2403-2416, 2010.
- [11] Z. Lei, F. Gillot, L. Jezequel. *A  $C^0/G^1$  multiple patches connection method in isogeometric analysis*. Applied Mathematical Modelling, vol. 39, pages 4405-4420, 2015.