



HAL
open science

Formulation adaptative variationnelle et calcul massivement parallèle pour l'aérothermique industrielle avec Safran Aircraft Engines.

Alban Bazile, Youssef Mesri, Juan-Carlos Larroya-Huguet, Elie Hachem

► To cite this version:

Alban Bazile, Youssef Mesri, Juan-Carlos Larroya-Huguet, Elie Hachem. Formulation adaptative variationnelle et calcul massivement parallèle pour l'aérothermique industrielle avec Safran Aircraft Engines.. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899294

HAL Id: hal-01899294

<https://hal.science/hal-01899294>

Submitted on 19 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Formulation adaptative variationnelle et calcul massivement parallèle pour l'aérothermique industrielle avec Safran Aircraft Engines.

A. Bazile¹, Y. Mesri¹, J.C. Larroya-Huguet², E. Hachem¹,

¹ MINES ParisTech, PSL - Research University, CEMEF - Centre for material forming, CNRS UMR 7635, CS 10207 rue Claude Daunesse, 06904 Sophia-Antipolis Cedex, France, {alban.bazile,youssef.mesri,elie.hachem}@mines-paristech.fr

² Safran Aircraft Engines, Site de Villaroche Rond-Point René Ravaud-Réau, 77550 Moissy Cramayel, France, juan-carlos.larroya-huguet@safrangroup.com

Résumé — L'étude présentée s'inscrit dans le contexte *Exascale* envisagé, entre autre, par le contrôle hiérarchique des erreurs de discrétisations et de modélisations. On propose ici de réaliser une adaptation anisotrope de maillage sur les petites échelles dans le cadre d'une formulation éléments finis multi-échelle stabilisée. Diminuant de manière drastique les coûts de calcul, cela permettra la résolution implicite directe, non-moyennée et instationnaire des équations de Navier-Stokes incompressibles pour étudier l'aérothermique du refroidissement des aubes de turbines par impact de jets.

Mots clés — Exascale, CFD, Variational Multi Scale (VMS), Adaptation anisotrope de maillage, Estimateurs d'erreurs, Refroidissement par impact de jets, Calculs hautes performances.

Introduction :

Le secteur aéronautique est en plein essor. Ses principaux acteurs continuent à investir dans la Recherche et Développement pour répondre aux critères de la demande qui deviennent de plus en plus exigeants. En effet, face à une concurrence mondiale sans précédent, la qualité des pièces aéronautiques d'un côté, et l'efficacité de leur production de l'autre, sont deux enjeux majeurs, en particulier pour un grand groupe comme Safran. Dans un futur proche, la simulation numérique permettra de répondre à ces deux challenges. En effet, la fidélité des résultats numériques rendra possible la certification des nouveaux moteurs et accélèrera la prise de décision des ingénieurs. Cependant, la complexité des phénomènes physiques à modéliser reste un défi pour les équipes de recherche en calcul numérique. L'objectif est, à terme, de réaliser la simulation aérothermique instationnaire d'un moteur complet prenant en compte (i) la rotation des parties tournantes, (ii) les écoulements réactifs dans la chambre de combustion et (iii) les échanges thermiques dans les systèmes de refroidissement [1]. Le but est de pouvoir prédire, par la simulation numérique aérothermique et de manière suffisamment précise, les performances de ces systèmes de refroidissement [2] [3], et notamment ceux dédiés aux aubes de turbines (voir Figure 1).

On rappelle que le refroidissement d'une aube de turbine est réalisé grâce à l'injection d'air à l'intérieur de l'aube. Comme le montre la Figure 1, une chemise est creusée à l'intérieur de l'aube et est percée de plusieurs orifices qui envoient de l'air sur la paroi interne de l'aube pour la refroidir. Cela génère des écoulements fortement turbulents au passage de l'air dans les orifices (environ 40% de taux de turbulence à la sortie du trou d'injection [4]). Ces écoulements turbulents instationnaires induisent la création de points chauds situés généralement dans la zone centrale de la plaque d'impact. Pour freiner leur apparition, un écoulement secondaire cisailant vient perturber l'écoulement d'injection permettant ainsi d'évacuer l'air chaud par le bord de fuite. Ce descriptif rapide du procédé de refroidissement met clairement en évidence la complexité de l'écoulement à simuler. En particulier, une telle analyse aérothermique nécessite la prise en compte : (i) de l'histoire thermique des composants, (ii) de la nature turbulente et instationnaire de l'écoulement, (iii) de la géométrie très complexe du système et avant tout (iv) du caractère multi-échelle dominant de l'écoulement.

1 Présentation des outils numériques existants : Variational Multi Scale (VMS) et adaptation anisotrope de maillage.

On propose de répondre à ces besoins en utilisant plusieurs approches numériques développées au sein du CEMEF Mines-Paristech. Cette section s'attachera à les présenter. On propose, dans ces travaux, d'appliquer la résolution implicite directe, non-moyennée et instationnaire des équations de Navier-Stokes incompressibles grâce aux méthodes d'adaptation parallèles et anisotropes de maillage sur de larges domaines 3D et l'utilisation d'une formulation éléments finis multi-échelle et stabilisée dite Variational Multi Scale (VMS).

1.1 Formulation éléments finis : Variational Multi Scale (VMS).

La VMS est une approche variationnelle, multi-échelle. Cela veut dire que l'on résout une partie de la solution sur le maillage et que l'on modélise l'autre partie. Elle se met en place sur un seul et même maillage et ne nécessite pas d'utiliser un cadre multi-grille. Le principe de la formulation VMS est de diviser l'espace des solutions en deux sous-espaces : un sous-espace à l'échelle du maillage et un sous-espace à l'échelle de sous-maille. Cela permet de séparer la formulation de Galerkin standard en deux sous-problèmes dits : sous-problème aux grandes échelles et sous-problème aux petites échelles [5]. Dans un premier temps, la résolution du problème aux petites échelles et un travail analytique faisant intervenir les fonctions de Green [6] et une décomposition en séries de Fourier de la solution aux petites échelles permet de déterminer une expression analytique de cette dernière [7]. Cette expression analytique fait intervenir deux types de facteurs : les termes stabilisant (τ_K et τ_C) et les résidus de l'équation du mouvement (\mathcal{R}_M) et de l'équation de continuité (\mathcal{R}_C) du problème aux grandes échelles [8]. Dans notre cas particulier la solution des petites échelles peut s'écrire analytiquement sous la forme :

$$\mathbf{u}'|_K = \tau_K \mathcal{R}_M \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (1)$$

$$p' \approx \tau_C \mathcal{R}_C \quad (2)$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_M &= \mathbf{f} - \rho \partial_t \mathbf{u}_h - \rho (\mathbf{u}_h + \mathbf{u}') \cdot \nabla \mathbf{u}_h - \nabla p_h \\ \mathcal{R}_C &= -\nabla \cdot \mathbf{u}_h \end{aligned} \quad (3)$$

et,

$$\tau_K = \frac{b_k \int_K b_k^* d\Omega}{\rho (\mathbf{u}_h \cdot \nabla b_K, b_K)_K + (2\mu \boldsymbol{\epsilon}(b_K) : \boldsymbol{\epsilon}(b_K))_K} \quad \forall K \in \mathcal{T}_h \quad (4)$$

$$\tau_C = \left(\left(\frac{\mu}{\rho} \right)^2 + \left(\frac{c_2}{c_1} \frac{\|\mathbf{u}\|_K}{h} \right)^2 \right)^{1/2} \quad (5)$$

avec c_1 et c_2 deux constantes indépendantes de h , h étant la longueur caractéristique de l'élément. μ la viscosité cinématique, ρ la masse volumique et b_K la fonction bulle de l'élément. Nous invitons le lecteur à se référer à [8] pour le détail du calcul.

Comme on peut le voir ci-dessus, l'expression analytique de la partie fine de la solution ne fait intervenir que des variables du problème aux grandes échelles. Cela permet de la réinjecter dans le problème aux grandes échelles et de résoudre explicitement ce dernier. On obtient donc une nouvelle formulation éléments finis du problème aux grandes échelles dont on dit qu'elle est stabilisée. L'expression de cette

formulation est donnée ci-après [8] :

$$\begin{aligned}
& \rho(\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h, \mathbf{w}_h)_\Omega + (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{w}_h))_\Omega - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_\Omega + (\nabla \cdot \mathbf{u}_h, q_h)_\Omega - (\mathbf{f}, \mathbf{w}_h)_\Omega \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\rho(\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) + \nabla p_h - \mathbf{f}, \rho \mathbf{u}_h \nabla \mathbf{w}_h)_K \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \tau_K (\rho(\partial_t \mathbf{u}_h + \mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) + \nabla p_h - \mathbf{f}, \nabla q_h)_K \\
& + \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\tau_c \nabla \cdot \mathbf{u}_h, \nabla \cdot \mathbf{w}_h)_K = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \in V_{h,0}, \quad \forall q_h \in Q_h
\end{aligned} \tag{6}$$

La stabilisation est induite par les trois termes qui suivent la formulation de Galerkin standard. Le second et le troisième termes permettent d'éliminer les oscillations qui contaminent la solution dans le cadre d'une convection forcée dominante comme celle du refroidissement par impact. Le quatrième terme permet d'éliminer les instabilités de pression. Il est à noter que les termes stabilisant τ_K et τ_c sont complètement déterminés par le choix de la fonction de Green de l'élément (exemple : *fonctions bulles*) qui, dans notre cas, correspond à l'approximation de la fonction de Green représentant les petites échelles. Malgré le cadre général de la résolution des grandes échelles, la modélisation des petites échelles peut être amenée à varier d'une méthode à l'autre. Dans notre version, les taux de stabilisations sont indépendants du maillage.

1.2 Adaptation anisotrope de maillage et estimateurs d'erreur à posteriori.

Les maillages que nous utilisons sont dits anisotropes et non structurés. Cela implique qu'ils peuvent se déformer dans certaines directions selon différents critères. Le but de l'adaptation anisotrope de maillage est d'équilibrer l'erreur de discrétisation spatiale (ici l'erreur d'interpolation) dans tout le domaine et dans toutes les directions du domaine. Il faut donc [9] [10] :

1. Trouver un estimateur d'erreur d'interpolation anisotrope : en utilisant le développement de Taylor reste intégrale, on exprime cet estimateur en fonction du hessien de la solution.
2. Corréler cet estimateur d'erreur à posteriori à la géométrie du maillage : pour cela on utilise les arrêtes du maillage et l'on trouve que l'erreur d'interpolation est proportionnelle au carré de ces dernières.
3. Construire une métrique associée à cet estimateur d'erreur : on la construit à partir de la diagonalisation du hessien de la solution [11].
4. Générer un nouveau maillage unitaire dans l'espace métrique défini par la métrique construite au point précédent.
5. Interpoler la solution sur ce nouveau maillage : en repassant dans l'espace euclidien de calcul, les éléments vont être étirés dans certaines directions en fonction du hessien, donc des variations de la solution.

2 Contribution et nouveauté : Prise en compte de l'erreur de modélisation induite par la VMS dans l'adaptation anisotrope de maillage.

Nous avons donc deux méthodes numériques, la VMS et l'adaptation anisotrope de maillage, dont les résultats très prometteurs ont été mis en valeur dans de nombreux travaux [8] [12] [13]. Cependant, ces deux méthodes ont été développées indépendamment l'une de l'autre et il n'existe pas, pour le moment, de couplage implicite entre l'estimateur d'erreur de modélisation et l'estimateur d'erreur anisotrope de discrétisation spatiale. Jusqu'à aujourd'hui, ce couplage était réalisé de manière explicite, c'est-à-dire, en utilisant les champs primaires comme critères de l'adaptation anisotrope de maillage. Dans nos travaux, nous souhaitons proposer un couplage implicite prenant directement en compte les variations des petites échelles. La problématique de nos travaux peut donc être énoncée sous cette forme : *Comment peut-on prendre en compte l'erreur de modélisation des petites échelles dans l'adaptation anisotrope de maillage ?*

Pour réaliser cela, nous nous appuyons d'abord sur les travaux de Hauke et al. [14] développés notamment par D. Irisarri dans [15] et [16]. Dans ces travaux, on trouve une expression de l'estimateur d'erreur portant sur l'erreur de modélisation qui se décompose en deux contributions : u'_{bub} , un *residual-based* estimateur à l'intérieur strict de l'élément, et u'_{poll} associé aux erreurs induites sur les frontières des éléments aux conditions aux limites du problème. Sans entrer ici dans le détail, leurs expressions sont données ci-après dans le cadre de conditions aux limites de Dirichlet [15] :

$$u'_{bub}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{bub}} c_i^b b_i(\mathbf{x}) \quad (7)$$

avec c_i^b constantes à déterminer associées au résidu et b_i une série de fonction de type bulles.

$$u'_{poll}(\mathbf{x}) = - \int_{\bar{\Gamma}} g^F(\mathbf{x}, \mathbf{y}) ([[B\bar{u}]](\mathbf{y}) + [[Bu'_{bub}]](\mathbf{y})) d\Gamma_y + \sum_{j=1}^N g^F(\mathbf{x}, \mathbf{x}_{b,j}) \chi_{b,j} \text{ for all } \mathbf{x} \in \Omega \quad (8)$$

avec $g^F(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ la fonction de Green de l'élément, $[[B\bar{u}]](\mathbf{y})$ l'opérateur *jump* du flux associé à la discontinuité de la solution FEM, $[[Bu'_{bub}]](\mathbf{y})$ l'opérateur *jump* du flux associé à la discontinuité de u'_{bub} et les coefficients $\chi_{b,j}$ jouant le rôle d'une fonction de densité sur les bords du domaine et satisfaisant les conditions aux limites.

Nous essaierons dans un premier temps d'utiliser u'_{bub} pour mettre à l'échelle les différents critères de l'adaptation de maillage. u'_{bub} sera donc utilisé en tant que facteur multiplicatif dans le cadre d'une adaptation isotrope de maillage. Nous chercherons ensuite une expression anisotrope de ce dernier pour l'utiliser comme critère direct de l'adaptation de maillage. Cette recherche mathématique théorique se fera en lien avec les travaux sur l'erreur d'interpolation déjà présents dans la littérature. L'avancée de ces travaux sera présentée au congrès.

Le comportement asymptotique de cette nouvelle méthode d'adaptation de maillage pourra être comparé à une DNS (Direct Numerical Simulation) grâce au contrôle hiérarchique des erreurs. En effet, la convergence d'une méthode VMS et de l'adaptation anisotrope de maillage nous permettra de prendre en compte les deux principales sources d'erreurs (interpolation et modélisation) commises lors de la détermination de la solution. La combinaison pertinente de ces deux erreurs rendra possible l'établissement d'une *hiérarchie* dans l'adaptation. Notamment, cela nous permettra d'arrêter le raffinement bien avant les méthodes classiques grâce à la prise en compte des phénomènes intervenant à l'échelle de sous-maille dans l'adaptation anisotrope du maillage.

3 Cas d'étude industriel : Refroidissement d'une aube de turbine par impact de jets.

La validation de ces travaux numériques sera effectuée sur le cas du refroidissement par impact d'une aube de turbine présenté en introduction. L'objectif est de déterminer avec précision le coefficient d'échange convectif h_{conv} sur la paroi à refroidir pour évaluer les performances du refroidissement. C'est un cas extrêmement stratégique pour Safran Aircraft Engines qui mobilise plusieurs équipes scientifiques. La première équipe, au sein du département Méthodes et Outils de Développement de Safran Aircraft Engines, utilise le logiciel commercial Fluent (RANS - URANS) et test différents modèles de turbulence (k- ϵ réalizable, k- ω SST et v^2 f) pour la résolution de ce cas d'étude. Des études numériques sont également menées à l'ONERA [17]. Cette fois, les travaux de l'ONERA s'inscrivent dans le cadre du PRC AETHER et utilisent des stratégies de calcul hybrides (LES - ZDES/loi de paroi - DDES) utilisant le code CEDRE et le solveur Navier-Stokes CHARME.

Avant de tenter de résoudre ce cas 3D très complexe, nous testons notre approche numérique sur le cas de référence 2D du jet impactant initié par Baughn et Shimizu en 1989 [18]. La géométrie de ce cas est basée sur la configuration expérimentale décrite dans [19] et présentée sur la Figure 2. On pose $D = 26mm$ et la longueur du tube $L_{tube} = 2100mm$ est prise suffisamment longue pour que l'écoulement

soit développé au trou d'injection. Cela nous donne un ration Longueur/Diamètre de 80 :1. Ici, nous étudierons deux géométries correspondant au deux cas donnée dans Cooper et al. [19] et disponibles dans la base de données ERCOFTAC. Ces deux configurations correspondent à $H/D = 2$ et $H/D = 6$, H/D étant la distance non-dimensionnée entre le trou d'injection et la plaque à refroidir. La longueur de la plaque est choisie suffisamment longue pour que les conditions thermiques au bord ne modifie pas les échanges au niveau de la région du point de stagnation. Dans ces travaux, nous présenterons des résultats pour deux Reynolds d'injection : $Re_{inj} = 23000; 70000$.

Pour calculer h_{conv} , nous calculons d'abord le nombre de Nusselt sur la plaque à refroidir. On commence par normaliser la température.

$$\theta = \frac{T - T_{init}}{T_{plate} - T_{init}} \quad (9)$$

En supposant que la convection est largement majoritaire dans ce type d'échange, on peut écrire le flux de chaleur entre la plaque et le fluide de la manière suivante [20] :

$$\Phi_{conv} = h_{conv}(T_{plate} - T_{init}) = -\lambda_{air}[(T_{plate} - T_{init})\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)]_{y=0} \quad (10)$$

avec :

$$h_{conv} = -\lambda_{air}\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (11)$$

On a donc :

$$Nu = \frac{L_c h_{conv}}{\lambda_{air}} = -D\left(\frac{\partial\theta}{\partial y}\right)_{y=0} \quad (12)$$

Les résultats préliminaires des calculs pour le nombre de Nusselt sont donnés Figure 3. Il sont comparés aux résultats expérimentaux de Baughn et Shimizu, donnés dans la base ERCOFTAC et au modèle de corrélation théorique développé par Modak et al. dans [20].

Pour finir, nous avons également commencé à étudier l'aérothermique du jet impactant en 3D et les premiers résultats sont présentés sur la Figure 4. Ces résultats préliminaires illustrent parfaitement le caractère instationnaire et turbulent de l'impact du jet sur la plaque. Cela montre également la complexité des échanges thermiques convectifs qui vont donner naissance à une répartition hétérogène de la température sur la plaque avec une zone centrale très refroidie et la présence de "points chauds" dans la périphérie de l'impact.

Conclusion :

Pour conclure, le fil conducteur qui motive cette étude part d'un besoin des industriels de la propulsion aéronautique de réaliser des simulations à l'échelle *Exascale* pour permettre la certification de leurs moteurs uniquement grâce à la simulation numérique [1]. Cela concerne notamment les systèmes de refroidissement dont les enjeux sont de plus en plus importants aux vues des conditions aérothermiques toujours plus extrêmes que l'on peut rencontrer au sein des moteurs. Le calcul massivement parallèle à l'échelle *Exascale* amène un certain nombre de verrous scientifiques sur lesquels les numériciens doivent se pencher pour répondre aux exigences de ces nouveaux moyens de calcul. L'un d'eux, traité ici, concerne notamment le contrôle hiérarchique des erreurs grâce à une adaptation de maillage anisotrope et multi-échelle. Nous proposons donc ici une extension des techniques d'adaptation de maillage dans le cadre d'une formulation éléments finis multi-échelle qui sera testée et validée sur des cas industriels stratégiques pour Safran Aircraft Engines.

Figures :

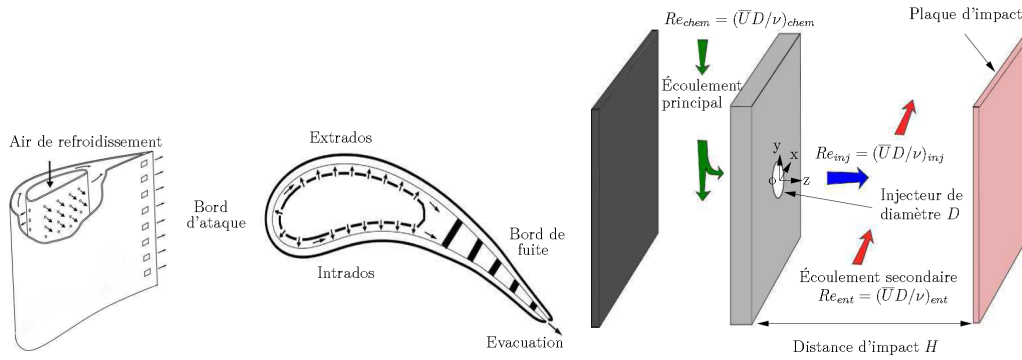


FIGURE 1 – Refroidissement par impact de jets (gauche), Montage expérimental du Jet Impactant (droite) [4]

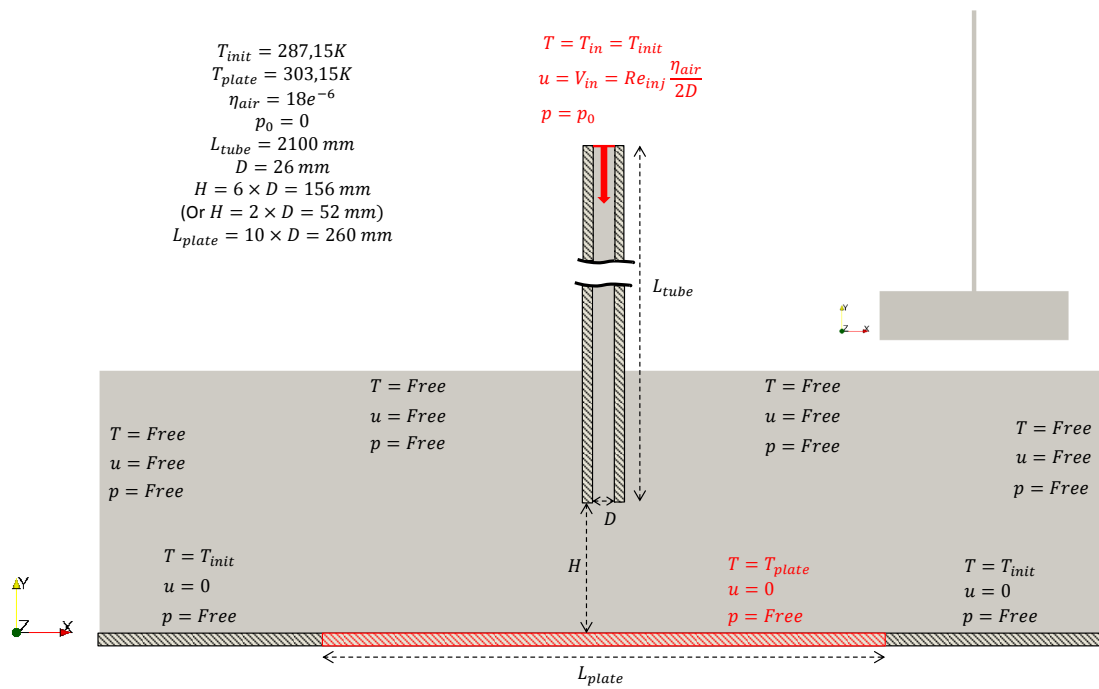


FIGURE 2 – Géométrie et conditions aux limites pour le cas benchmark 2D.

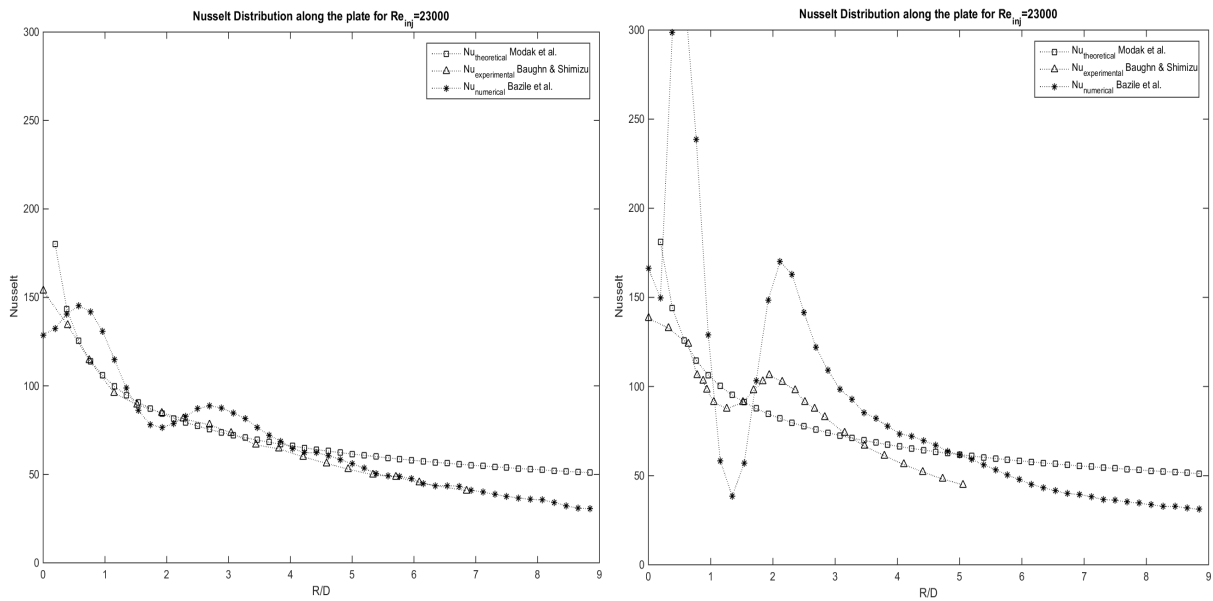


FIGURE 3 – Résultats préliminaires pour le nombre de Nusselt. (à gauche : $H/D = 6$, à droite : $H/D = 2$).

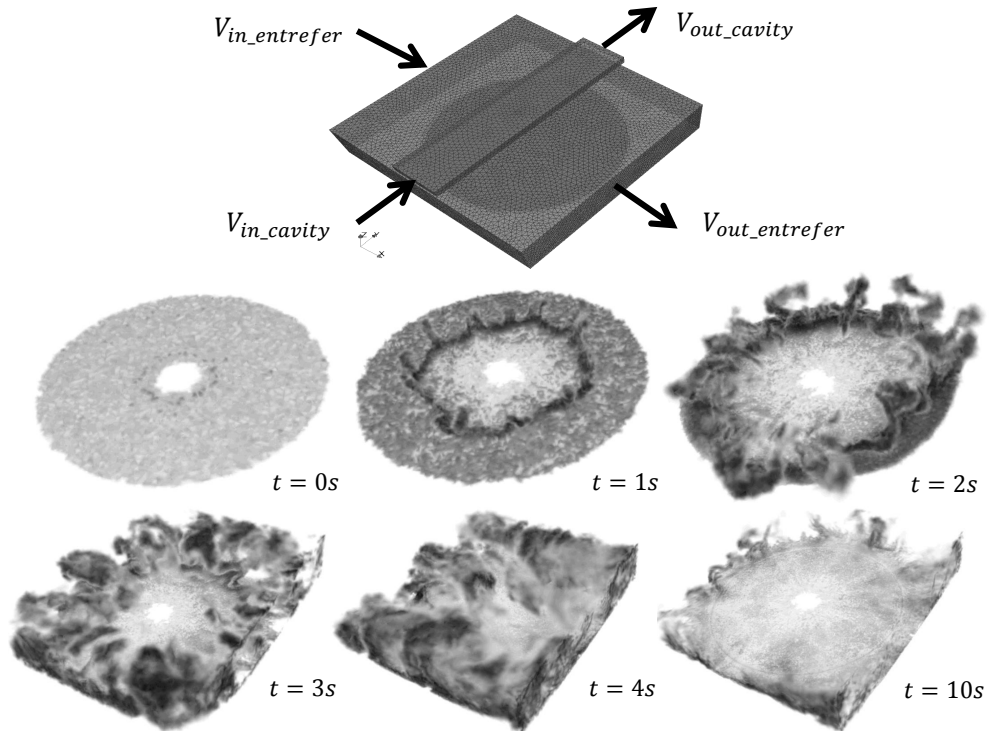


FIGURE 4 – Résultats préliminaires de l'aérothermique du jet impactant en 3D.

Références

- [1] Jeffrey Slotnick, Abdollah Khodadoust, Juan Alonso, David Darmofal, William Gropp, Elizabeth Lurie, and Dimitri Mavriplis. *CFD Vision 2030 Study : A Path to Revolutionary Computational Aerosciences*. Technical report, 2014.
- [2] Jean-Christophe Jouhaud. *Simulations Aérodynamiques et Aérothermiques Avancées pour la Conception et l'Amélioration des Avions*. CERFACS, Toulouse, April 2008.
- [3] Y. Sommerer, D. Couton, and F. Plourde. Dissipative Equipment Thermal Integration in Powerplant Compartment : Experimental and Numerical Evaluation of Heat Transfer Coefficient. In *ASME Turbo Expo 2014 : Turbine Technical Conference and Exposition*. American Society of Mechanical Engineers, 2014.
- [4] Daniel Thibault. *Etude du refroidissement par impact de jets à travers une paroi mince et avec un écoulement cisaillant amont : application aux aubes de turbines*. PhD thesis, ISAE-ENSMA Ecole Nationale Supérieure de Mécanique et d'Aérotechnique-Poitiers, 2009.
- [5] Thomas J. R. Hughes, Gonzalo R. Feijóo, Luca Mazzei, and Jean-Baptiste Quinicy. Advances in Stabilized Methods in Computational Mechanics The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166(1) :3–24, 1998.
- [6] Thomas J. R. Hughes. Multiscale phenomena : Green's functions, the Dirichlet-to-Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 127(1) :387–401, 1995.
- [7] Ramon Codina. Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(39–40) :4295–4321, 2002.
- [8] E. Hachem, B. Rivaux, T. Kloczko, H. Dignonnet, and T. Coupeuz. Stabilized finite element method for incompressible flows with high Reynolds number. *Journal of Computational Physics*, 229(23) :8643–8665, 2010.
- [9] Frédéric Alauzet. *Adaptation de maillage anisotrope en trois dimensions. Application aux simulations instationnaires en Mécaniques des Fluides*. PhD thesis, Université Montpellier II, 2003.
- [10] Youssef Mesri, Frédéric Alauzet, Adrien Loseille, Laurent Hascoët, Bruno Koobus, and Alain Dervieux. Continuous mesh adaptation models for CFD. *CFD Journal*, 16(4) :346–355, 2008.
- [11] Y. Mesri, M. Khalloufi, and E. Hachem. On optimal simplicial 3d meshes for minimizing the Hessian-based errors. *Applied Numerical Mathematics*, 2016.
- [12] T. Coupeuz and E. Hachem. Solution of high-Reynolds incompressible flow with stabilized finite element and adaptive anisotropic meshing. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 267 :65–85, 2013.
- [13] E. Hachem, M. Khalloufi, J. Bruchon, R. Valette, and Y. Mesri. Unified adaptive Variational MultiScale method for two phase compressible–incompressible flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 308 :238–255, 2016.
- [14] Guillermo Hauke, Daniel Fuster, and Fernando Lizarraga. Variational multiscale a posteriori error estimation for systems : The Euler and Navier–Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 283 :1493–1524, 2015.
- [15] Diego Irisarri and Guillermo Hauke. Pointwise Error Estimation for the One-Dimensional Transport Equation Based on the Variational Multiscale Method. *International Journal of Computational Methods*, page 1750040, October 2016.
- [16] Diego Irisarri and Guillermo Hauke. A posteriori pointwise error computation for 2-D transport equations based on the variational multiscale method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 311 :648–670, November 2016.
- [17] E. Laroche and F. Chedeveergne. Rapport d'Avancement AETHER C. Rapport Interne ONERA, ONERA, Toulouse, 2016.
- [18] J. W. Baughn and S. Shimizu. Heat Transfer Measurements From a Surface With Uniform Heat Flux and an Impinging Jet. *Journal of Heat Transfer*, 111(4) :1096–1098, November 1989.
- [19] D. Cooper, D. C. Jackson, B. E. Launder, and G. X. Liao. Impinging jet studies for turbulence model assessment—I. Flow-field experiments. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 36(10) :2675–2684, 1993.
- [20] Mayank Modak, Krati Garg, Srikanth Srinivasan, and Santosh K. Sahu. Theoretical and experimental study on heat transfer characteristics of normally impinging two dimensional jets on a hot surface. *International Journal of Thermal Sciences*, 112 :174–187, 2017.