



HAL
open science

Méthodes de décomposition de domaine robustes appliquées au calcul en régime linéaire et non linéaire de structures industrielles de grande taille

Augustin Parret-Fréaud, Basile Marchand, Christophe Bovet, Pierre Gosselet,
Nicole Spillane, Christian Rey, Frédéric Feyel

► To cite this version:

Augustin Parret-Fréaud, Basile Marchand, Christophe Bovet, Pierre Gosselet, Nicole Spillane, et al.. Méthodes de décomposition de domaine robustes appliquées au calcul en régime linéaire et non linéaire de structures industrielles de grande taille. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899286

HAL Id: hal-01899286

<https://hal.science/hal-01899286>

Submitted on 19 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Méthodes de décomposition de domaine robustes appliquées au calcul en régime linéaire et non linéaire de structures industrielles de grande taille

A. Parret-Fréaud¹, B. Marchand¹, C. Bovet², P. Gosselet³, N. Spillane⁴, C. Rey¹, F. Feyel¹

¹ Safran Tech, Safran SA, {augustin.parret-freaud,christian.rey, frederic.feyel}@safrangroup.com, basile.marchand@lmt.ens-cachan.fr

² ONERA – The French Aerospace Lab, christophe.bovet@onera.fr

³ LMT, ENS Cachan, CNRS, Université Paris-Saclay, pierre.gosselet@lmt.ens-cachan.fr

⁴ CMAP UMR 7641 École Polytechnique CNRS, nicole.spillane@cmap.polytechnique.fr

Résumé — Nous présentons de nouveaux développements destinés à améliorer la robustesse des approches de décomposition de domaine de type FETI en vue de permettre leur utilisation dans le contexte de problèmes industriels de grande taille. Ces méthodes, appelées AMPFETI, reposent sur l'usage d'une stratégie de multi-préconditionnement adaptatif au niveau du solveur itératif du problème d'interface. Leurs performances sont illustrées sur une étude d'extensibilité faible sur un problème hétérogène pathologique. Un cas d'application au calcul non linéaire d'une aube oligocristalline est présenté.

Mots clés — HPC, décomposition de domaine, FETI, solveurs itératifs, multi-préconditionnement, problèmes hétérogènes, matériaux polycristallins.

1 Introduction

L'augmentation toujours régulière de la puissance des infrastructures de calcul, qui passe par le développement d'architectures de plus en plus hétérogènes depuis la fin de la loi de Moore classique, offre des perspectives toujours plus intéressantes en matière de simulation numérique. Cependant, le domaine de la mécanique du solide s'est souvent tenu en retrait de l'utilisation des calculateurs massivement parallèles par rapport à d'autres disciplines. Pourtant, les besoins en simulations coûteuses vont en s'accroissant : la complexité croissante des matériaux et la non-vérification des hypothèses de séparation d'échelle imposent de pouvoir simuler à l'échelle d'une pièce ou dans des zones confinées de celles-ci des modèles de comportement développés à des échelles plus fines, le tout générant des problèmes à plusieurs centaines de millions, voire plusieurs milliards d'inconnues.

Dans ce contexte, les approches par décomposition de domaine sans recouvrement [1] – citons *a minima* BDD (*Balancing Domain Decomposition*) [2] et FETI (*Finite Element Tearing and Interconnecting*) [3] – regroupent un ensemble de méthodes dédiées à la résolution de problèmes linéaires et non linéaires particulièrement bien adaptées à l'architecture des supercalculateurs et clusters. Elles associent solveurs itératifs de type Krylov et solveurs directs, permettant la maîtrise des flux de données aux différentes échelles d'un calculateur (cœurs, processeurs, nœuds de calcul). Elles ont atteint un niveau de maturité raisonnable et montré des performances intéressantes sur de nombreux cas.

Cependant, malgré l'existence de préconditionneurs efficaces [4, 5], ces approches souffrent d'un manque de robustesse sur certains problèmes pathologiques, notamment en présence d'interfaces anguleuses traversant des zones à fort gradient de propriétés matériau, les rendant difficile à utiliser dans le contexte de calculs sur cas métiers industriels.

Dans le cadre de la méthode FETI, de récents développements [7, 8] paraissent particulièrement prometteurs en vue de lever les difficultés précédemment mentionnées. En particulier, la méthode FETI Simultanée repose sur l'utilisation d'un algorithme de gradient conjugué multi-préconditionné afin d'améliorer la robustesse de l'approche FETI. Les méthodes AMPFETI présentées dans ce papier se placent dans la continuité de l'approche FETI Simultanée.

Après des rappels sur les bases de l'approche FETI, on présente les approches FETI multi-préconditionnées adaptatives AMPFETI. Les performances de celles-ci sont ensuite illustrées par une étude d'extensibilité faible sur un problème fortement hétérogène jusqu'à une taille de problème de près de 100

millions de degrés de liberté (DDL). Enfin, on présente un cas d'application des approches présentées à la simulation HPC d'une aube de turbine oligocristalline modélisée par un comportement viscoplastique de type plasticité cristalline dans chaque grain.

2 Rappels sur la méthode FETI

On considère un problème mécanique linéaire formulé sur un domaine Ω , dont la discrétisation à l'aide de la méthode des éléments finis conduit au système classique $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$, avec \mathbf{K} une matrice supposée symétrique définie positive, \mathbf{u} et \mathbf{f} des vecteurs désignant, respectivement, les déplacements aux nœuds et les réactions nodales généralisées. Le point de départ des méthodes de décomposition de domaine consiste à partitionner le domaine Ω en N sous-domaines non recouvrants Ω^s , $s = 1, \dots, N$, puis à reformuler le problème de départ sur chaque sous-domaine. Pour ce faire, la méthode FETI [3] introduit un champ de multiplicateurs de Lagrange $\boldsymbol{\lambda}$ pouvant s'interpréter physiquement comme un champ d'inter-effort entre chaque sous-domaine. On aboutit alors au système suivant, exprimant l'équilibre local sur chaque sous-domaine Ω^s ainsi que la continuité des déplacements à l'interface :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^s \mathbf{u}^s &= \mathbf{f}^s + \mathbf{t}^{s\top} \mathbf{B}^{s\top} \boldsymbol{\lambda}, & \text{pour } s = 1, \dots, N, \\ \sum_s \mathbf{B}^s \mathbf{t}^s \mathbf{u}^s &= \mathbf{0}, \end{aligned}$$

où $\mathbf{t}^s : \Omega^s \rightarrow \partial\Omega^s$ et $\mathbf{B}^s : \partial\Omega^s \rightarrow \bigoplus_{1 \leq i \neq j \leq N} (\partial\Omega^i \cap \partial\Omega^j)$ désignent, respectivement, un opérateur de trace (restriction d'un champ sur l'interface d'un sous-domaine) et un opérateur d'assemblage booléen signé. L'étape suivante consiste à reformuler l'équilibre des sous-structures en termes d'inconnues d'interface, à l'aide des compléments de Schur locaux :

$$\mathbf{S}^s = \mathbf{K}_{I\Gamma}^s - \mathbf{K}_{I\Gamma}^s \mathbf{K}_{II}^s{}^{-1} \mathbf{K}_{I\Gamma}^s,$$

où I et Γ désignent les DDL internes et d'interface, respectivement. Par la suite, l'utilisation de la condition de continuité des déplacements permet d'aboutir au système FETI classique :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{F} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^\top & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \boldsymbol{\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

avec $\mathbf{F} = \sum_s \mathbf{B}^s \mathbf{S}^{s\dagger} \mathbf{B}^{s\top}$ ($\mathbf{S}^{s\dagger}$ désignant la pseudo-inverse de \mathbf{S}^s) et $\mathbf{G} = (\mathbf{B}^1 \mathbf{t}^1 \mathbf{R}^1 | \dots | \mathbf{B}^N \mathbf{t}^N \mathbf{R}^N)$ (\mathbf{R}^s formant une base de $\text{Ker}(\mathbf{K}^s)$). L'emploi de la pseudo-inverse est associé à la contrainte $\mathbf{G}^\top \boldsymbol{\lambda} = \mathbf{e}$ qui assure l'équilibre global des efforts d'interface appliqués sur chaque sous-domaine flottant (i.e. présentant des modes de solides rigides du fait de la décomposition). En pratique, \mathbf{F} , en raison de son caractère majoritairement creux, n'est pas assemblé explicitement et le produit par cet opérateur est distribué à travers la résolution d'un problème de Neumann aux interfaces de chaque sous-domaine, ces derniers étant alors vus comme des «boîtes noires» du point de vue du problème d'interface. La résolution du système (1) ainsi obtenu est abordée à l'aide d'une stratégie d'initialisation-projection ($\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + \boldsymbol{\Pi} \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$), conduisant à la recherche du champ $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ solution de :

$$\boldsymbol{\Pi}^\top \mathbf{F} \boldsymbol{\Pi} \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{\Pi}^\top (\mathbf{d} - \mathbf{F} \boldsymbol{\lambda}_0), \quad (2)$$

où l'utilisation du projecteur $\boldsymbol{\Pi} = \mathbf{I} - \mathbf{A} \mathbf{G} (\mathbf{G}^\top \mathbf{A} \mathbf{G})^{-1} \mathbf{G}^\top$ permet de satisfaire la contrainte $\mathbf{G}^\top \boldsymbol{\Pi} \tilde{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{0}$ au cours des itérations, $\boldsymbol{\lambda}_0$ vérifiant $\mathbf{G}^\top \boldsymbol{\lambda}_0 = \mathbf{e}$ par construction. Enfin, le système (2) est résolu par un algorithme de type gradient conjugué projeté, dont les stratégies classiques de préconditionnement consistent à utiliser un assemblage pondéré d'approximation des compléments de Schur locaux :

$$\tilde{\mathbf{S}} = \sum_s \tilde{\mathbf{B}}^s \tilde{\mathbf{S}}^s \tilde{\mathbf{B}}^{s\top}$$

où les choix \mathbf{S}^s , $\mathbf{K}_{I\Gamma}^s$ et $\text{diag}(\mathbf{K}_{I\Gamma}^s)$ pour l'opérateur $\tilde{\mathbf{S}}^s$ conduisent, respectivement, aux préconditionneurs de Dirichlet (*full*), *lumped* ou *superlumped*. De même, l'opérateur \mathbf{A} intervenant dans le projecteur $\boldsymbol{\Pi}$ est généralement choisi comme l'opérateur identité \mathbf{I} ou bien l'un des préconditionneurs précédemment exposés. Pour plus de détails sur la méthode et les différents choix de préconditionneurs et projecteurs, nous renvoyons le lecteur à la littérature associée, en particulier [1].

3 Présentation de la méthode AMPFETI

Malgré l'existence de stratégies de préconditionnement efficaces et à fort contenu mécanique, il a été régulièrement observé des difficultés (voire une absence) de convergence de la méthode FETI dans certains cas pathologiques, en particulier sur des problèmes à interfaces irrégulières et traversant des zones à fort gradient d'hétérogénéité.

La méthode FETI Simultané [8], qui s'appuie sur un algorithme de type gradient conjugué multi-préconditionné (MPCG, *Multipreconditioned Conjugate Gradient Algorithm*) [6], a récemment été proposée afin d'en améliorer la robustesse sur de tels cas. Cette approche part du constat selon lequel la construction d'une nouvelle direction de recherche à chaque itération du gradient conjugué par assemblage pondéré des contributions locales de chaque sous-domaine conduit à une perte d'information numérique locale pénalisant la bonne convergence de l'algorithme (non captation d'une partie du spectre de l'opérateur F). De façon alternative, elle propose de conserver les N directions de recherche générées par l'étape de préconditionnement sur chaque sous-domaine et d'y effectuer simultanément la minimisation du résidu. Tout en conservant les propriétés de minimisation du gradient conjugué, elle permet d'en améliorer grandement la convergence grâce l'utilisation d'un espace de recherche plus grand. Cependant, une telle amélioration s'effectue au prix d'un accroissement du coût de calcul par itération puisque les opérations s'effectuent alors sur des blocs de N vecteurs. Par ailleurs, le coût de stockage en mémoire de l'ensemble des directions de recherche peut devenir significatif, voire limitant sur des problèmes de grande taille.

En réponse à cette problématique, l'algorithme AMPCG (*Adaptive Multipreconditioned Conjugate Gradient Algorithm*) a récemment été proposé [9] afin d'associer à l'algorithme MPCG un critère de sélection des directions de recherche les plus pertinentes à chaque itération. Ce critère est associé à un seuil $\tau > 0$ relié au taux de convergence de l'algorithme, à choisir comme un compromis entre rapidité de convergence et nombre de directions de recherche conservées.

La méthode AMPFETI résulte de l'application de l'algorithme AMPCG à l'approche FETI. L'algorithme décrit les différentes approches précédemment mentionnées en fonction du type de critère de sélection des directions de recherche utilisé (τ -test) :

- aucun τ -test : toutes les directions de recherche sont conservées, conduisant à la méthode FETI Simultanée ;
- τ -test global / méthode AMPFETIG : les directions de recherche sont, soit intégralement conservées, soit assemblées en une seule direction globale de manière similaire à FETI ;
- τ -test local / méthode AMPFETIL : la sélection des directions de recherche pertinentes est effectuée domaine par domaine, les directions restantes étant assemblées en une seule direction globale ; ce test conduit à la méthode AMPFETIL.

Pour un système linéaire de taille n , les tailles des quantités intervenant dans l'algorithme sont détaillées ci-dessous :

$$\begin{aligned} r_i, \lambda_i, \lambda_{00} \in \mathbb{R}^n; \quad Z_i, W_i, Q_i \in \mathbb{R}^{n \times m_i}; \quad \Delta_i \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}; \\ \alpha_i, \gamma_i \in \mathbb{R}^{m_i}; \quad \Phi_{i,j} \in \mathbb{R}^{m_j \times m_i}; \quad t_i, t_i^s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Algorithm 1: AMPFETI : FETI avec multi-préconditionnement adaptatif.

```
1  $\lambda_0 = \mathbf{A}\mathbf{G}(\mathbf{G}^\top \mathbf{A}\mathbf{G})^{-1} \mathbf{e} + \mathbf{\Pi}\lambda_{00}$ 
2  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{\Pi}^\top(\mathbf{d} - \mathbf{F}\lambda_0)$ 
3  $\mathbf{Z}_0 = (\tilde{\mathbf{S}}^1 \mathbf{r}_0 | \dots | \tilde{\mathbf{S}}^N \mathbf{r}_0)$ 
4  $\mathbf{W}_0 = \mathbf{\Pi}\mathbf{Z}_0$ 
5  $i = 0$ 
6 while  $\sqrt{\mathbf{r}_i^\top \mathbf{Z}_i \mathbf{1}} > \varepsilon$  do
7    $\mathbf{Q}_i = \mathbf{F}\mathbf{W}_i$ 
8    $\mathbf{\Delta}_i = \mathbf{Q}_i^\top \mathbf{W}_i$ 
9    $\gamma_i = \mathbf{Z}_i^\top \mathbf{r}_i$ 
10   $\alpha_i = \mathbf{\Delta}_i^\dagger \gamma_i$ 
11   $\lambda_{i+1} = \lambda_i + \mathbf{W}_i \alpha_i$ 
12   $\mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \mathbf{\Pi}^\top \mathbf{Q}_i \alpha_i$ 
13  if Aucun  $\tau$ -test then
14     $\mathbf{Z}_{i+1} = (\tilde{\mathbf{S}}^1 \mathbf{r}_{i+1} | \dots | \tilde{\mathbf{S}}^N \mathbf{r}_{i+1})$  /* Multi-préconditionnement */
15  else if  $\tau$ -test global then
16     $\mathbf{Z}_{i+1} = \begin{cases} (\tilde{\mathbf{S}}^1 \mathbf{r}_{i+1} | \dots | \tilde{\mathbf{S}}^N \mathbf{r}_{i+1}) & \text{if } t_i := \frac{\gamma_i^\top \alpha_i}{\mathbf{r}_{i+1}^\top \mathbf{z}_{i+1}} < \tau, \\ \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{r}_{i+1} & \text{otherwise.} \end{cases}$ 
17  else if  $\tau$ -test local then
18     $t_i^s = \frac{(\mathbf{W}_i \alpha_i)^\top \mathbf{F}^s (\mathbf{W}_i \alpha_i)}{\mathbf{r}_{i+1}^\top \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{r}_{i+1}}$ 
19     $\mathbf{Z}_{i+1} = \text{concatenate}(\{\tilde{\mathbf{S}}^s \mathbf{r}_{i+1}; t_i^s < \tau\}, \sum_{t_i^s > \tau} \tilde{\mathbf{S}}^s \mathbf{r}_{i+1})$ 
20   $\mathbf{W}_{i+1} = \mathbf{\Pi}\mathbf{Z}_{i+1}$ 
21  for  $0 \leq j \leq i$  do  $\begin{cases} \Phi_{i,j} = \mathbf{Q}_j^\top \mathbf{W}_{i+1} \\ \mathbf{W}_{i+1} \leftarrow \mathbf{W}_{i+1} - \mathbf{W}_j \mathbf{\Delta}_j^\dagger \Phi_{i,j} \end{cases}$ 
22   $i \leftarrow i + 1$ 
23 Return  $\lambda_i$ 
```

4 Résultats numériques

Les méthodes FETI, AMPFETIL et AMPFETIG précédemment exposées ont été implantées dans le code de calcul éléments finis quasi-industriel Z-Set [13]. L'objectif de cette section est d'en comparer les performances à travers une étude d'extensibilité faible (*weak extensibility*) sur un problème hétérogène connu pour mettre à mal la convergence de l'algorithme FETI. Pour ce faire, on génère un ensemble de cubes composés de N sous-domaines cubiques identiques, de discrétisation fixée à $2 \cdot 10^5$ DDL, avec $N = \{8, 27, 64, 125, 216, 343, 512\}$, conduisant à des problèmes de tailles comprises entre $1,6 \times 10^6$ et $99,2 \times 10^6$ DDL. Chaque structure ainsi générée est encastrée sur l'une de ses faces et soumise à une sollicitation de type traction-cisaillement sur la face opposée. Chaque sous-domaine constitutif est muni d'un comportement linéaire élastique isotrope, avec un module d'élasticité E alternativement fixé à $E_1 = 10^6$ Pa ou $E_2 = 1$ Pa entre deux sous-domaines voisins, afin d'obtenir une structure de type «damier» hétérogène de rapport $E_1/E_2 = 10^6$ comme illustré en figure 1. Enfin, pour chaque valeur de N , chaque cube est découpé en N sous-domaines à l'aide du partitionneur automatique METIS. Pour chaque configuration considérée (N fixé), on obtient alors N sous-domaines à interfaces irrégulières et traversant des zones à fort gradient d'hétérogénéités.

L'ensemble des problèmes générés est résolu à l'aide des méthodes FETI, AMPFETIL et AMPFETIG muni des meilleurs préconditionneurs et projecteurs de l'état de l'art pour des problèmes très hétérogènes [4] (opérateur locaux de type Schur et *scaling* de type *stiffness*). Par ailleurs, le critère de convergence de l'algorithme itératif est fixé à $\varepsilon = 10^{-6}$ et celui de sélection des directions de recherche est fixé à $\tau = 0.01$ afin d'obtenir un bon compromis entre vitesse de convergence et occupation mémoire.

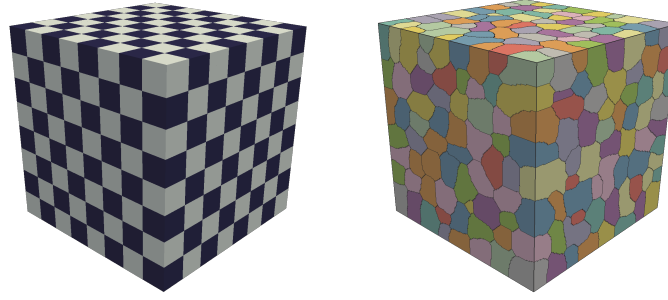


FIGURE 1 – Exemple de cube damier hétérogène et décomposition associée pour $N = 512$ sous-domaines

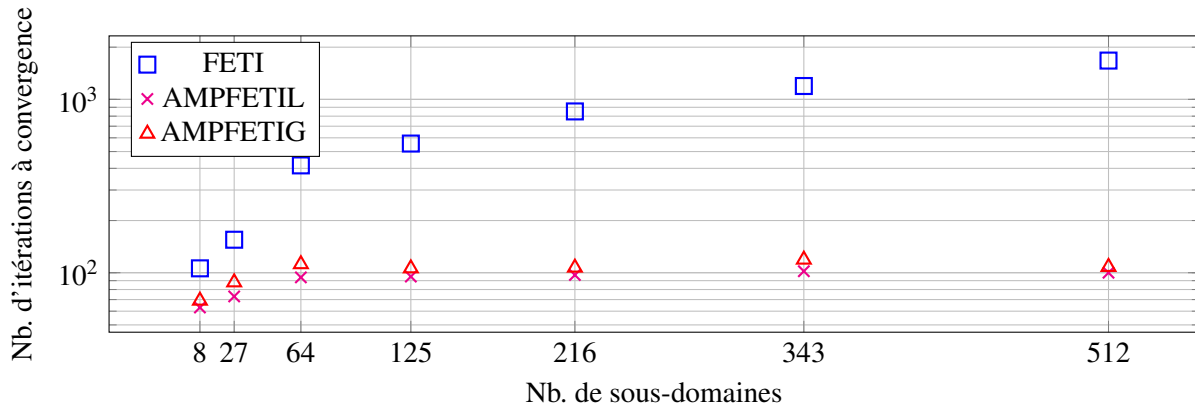


FIGURE 2 – Extensibilité faible : convergence

L'étude a été réalisée sur le calculateur *Cobalt* du CCRT/TGCC, constitué de 1422 nœuds de calcul équipés de processeurs Intel Broadwell (2.4 GHz, 28 cœurs), 128 GO de SDRAM et reliés par un réseau infiniband Mellanox. Sept cœurs ont été affectés à chaque sous-domaine et la résolution des problèmes locaux est effectuée à l'aide du solveur direct creux MUMPS.

Pour chaque méthode, l'ensemble des configurations et des résultats associés, en termes de nombre d'itérations à convergence (#iter.), nombre total de directions de recherche conservées (#dir.rech.) et temps apparent est synthétisé dans le tableau 1.

La figure 2 représente le nombre d'itérations à convergence des trois méthodes en fonction du nombre N de sous-domaines (et donc de la taille totale du problème associé). On constate clairement que si ce nombre ne cesse de croître pour la méthode FETI, jusqu'à atteindre 1674 itérations à 512 sous-domaines, celui des approches AMPFETIL et AMPFETIG devient rapidement indépendant du nombre de sous-domaines et se stabilise autour d'environ 100 itérations, montrant ainsi une bonne extensibilité faible des méthodes AMPFETI sur ce type de problèmes très hétérogènes. En outre, la méthode AMPFETIL nécessite un nombre d'itérations à convergence légèrement inférieur à celui d'AMPFETIG, confirmant ainsi la pertinence du critère de sélection local.

La figure 3, représentant le temps apparent de chaque solveur en fonction de N , confirme les performances des méthodes AMPFETI qui, malgré un coût de calcul par itérations supérieur à celui de FETI, présentent systématiquement des temps apparents inférieurs. En particulier, dans la configuration à 512 sous-domaines, le gain en temps de calcul entre AMPFETIG (376 s) et FETI (2707 s) est supérieur à 7. On constate par ailleurs que le temps de résolution d'AMPFETIL est légèrement supérieur à celui d'AMPFETIG, ce qui s'explique par un coût d'évaluation du critère local légèrement supérieur à celui du critère global. Signalons cependant que l'apport de la méthode AMPFETIL est particulièrement intéressant sur des problèmes où les zones d'hétérogénéités sont localisées, en permettant plus de finesse dans la sélection des directions de recherches pertinentes [10].

Enfin, la figure 4 représente, pour les trois méthodes, le nombre de directions de recherche utilisées normalisé par le nombre de sous-domaines N . On constate que ce nombre est très proche pour les méthodes AMPFETIL et AMPFETIG, montrant un comportement similaire des deux critères de sélection, et qu'il devient rapidement indépendant du nombre de sous-domaines, se stabilisant autour de la valeur

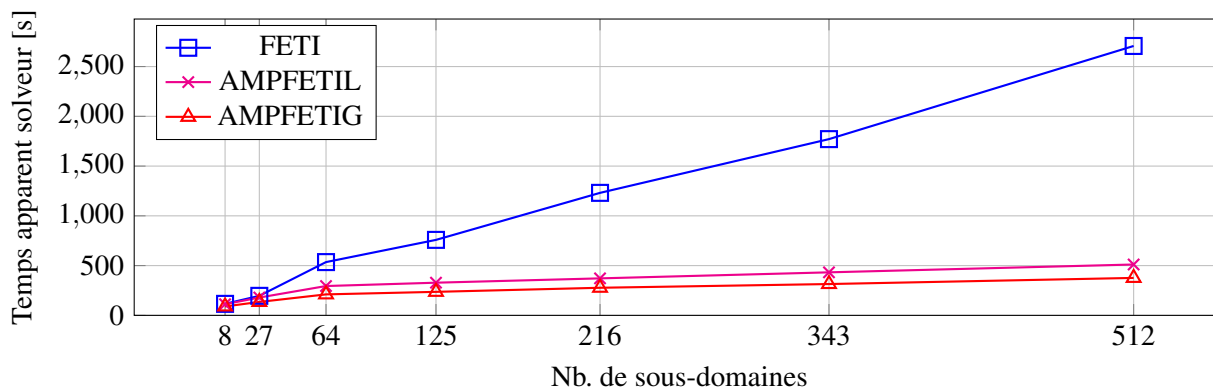


FIGURE 3 – Extensibilité faible : temps apparent

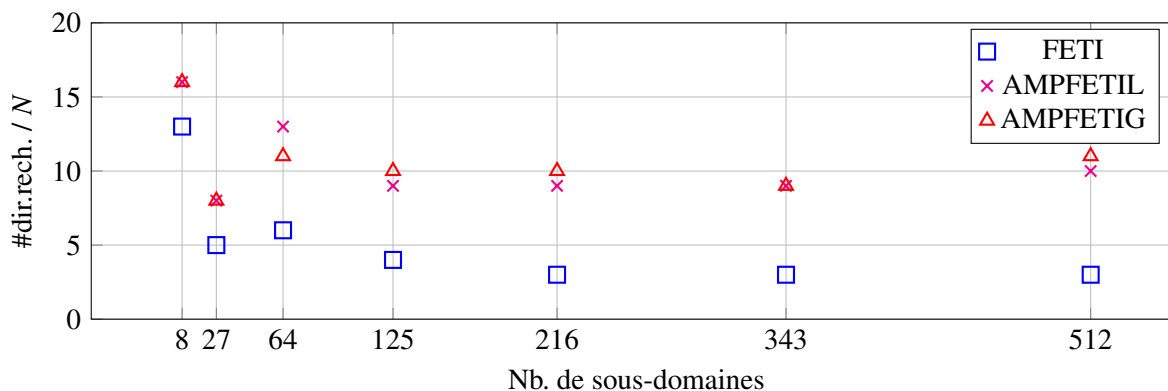


FIGURE 4 – Extensibilité faible : nombre de directions de recherche normalisé

10. Par ailleurs, la comparaison avec la méthode FETI montre que les performances d'AMPFETI sont également associées à l'utilisation d'un espace de minimisation quatre fois supérieur à celui de FETI, ce qui présente inévitablement des conséquences sur l'occupation mémoire en présence de problèmes de grande taille.

5 Application à un cas métier industriel : aube de turbine oligocristalline

On s'intéresse ici aux pièces fabriquées par solidification dirigée (DS), un procédé au cours duquel on fait croître les grains selon l'axe de l'aube depuis l'une de ses extrémités. Ce type de matériau constitue dans certain cas le meilleur compromis performance/coût, lorsque les matériaux polycristallins à grains équiaxiaux souffrent d'un manque de performances pour les applications cibles et que l'on peut se passer des monocristaux, difficiles à fabriquer et à mettre en œuvre, et bien plus onéreux,

Chaque grain a une symétrie cubique, avec trois directions préférentielles, $\langle 100 \rangle$, $\langle 010 \rangle$ et $\langle 001 \rangle$. Tous les grains ont leur direction de croissance – par exemple $\langle 001 \rangle$ – dirigée selon l'axe de l'aube, alors que les directions secondaires sont orientées de façon aléatoire. On peut donc développer un modèle représentant le comportement d'un alliage DS «parfait», qui comporterait un nombre de grains suffisant pour aboutir à un comportement orthotrope transverse. Une approche de ce type fait l'objet d'une présentation spécifique [12]. Le modèle a été mis au point en considérant un élément de volume constitué d'une microstructure synthétique représentant les différents grains, générée à l'aide d'un pavage de *Voronoi* à deux dimensions extrudé. Le comportement de chaque grain est régi par un modèle de plasticité cristalline classiquement employé par Safran pour les monocristaux à base Nickel [11]. La transition d'échelle fait appel à un modèle autocohérent.

L'utilisation d'un tel modèle en éléments finis signifie qu'on place en chaque point de Gauss du maillage de l'aube quelques dizaines de grains. L'estimation obtenue permet alors d'obtenir des champs de contraintes et de déformation macroscopiques, et également des champs moyens par type d'orientation à l'échelle des grains. Cette estimation par grain donne une première idée de la variabilité de la

N	#DOFs ($\times 10^6$)	#cœurs	# iter.	# dir. rech.	Temps apparent (s)
FETI					
8	1.6	56	106	106	115.60
27	5.3	189	155	155	196.10
64	12.5	448	416	416	535.30
125	24.4	875	556	556	758.50
216	42.0	1512	852	852	1231.00
343	66.6	2401	1194	1194	1771.00
512	99.2	3584	1674	1674	2707.00
AMPFETIL					
8	1.6	56	63	132	111.90
27	5.3	189	73	228	179.10
64	12.5	448	94	838	294.70
125	24.4	875	95	1240	328.30
216	42.0	1512	97	2125	371.70
343	66.6	2401	102	3319	432.30
512	99.2	3584	100	5134	511.10
AMPFETIG					
8	1.6	56	69	132	89.58
27	5.3	189	88	218	134.80
64	12.5	448	112	742	210.80
125	24.4	875	106	1346	236.30
216	42.0	1512	107	2257	277.30
343	66.6	2401	119	3197	314.70
512	99.2	3584	108	5729	376.30

TABLE 1 – Extensibilité faible ($E_1/E_2 = 10^6$) : bilan des résultats

réponse lorsqu'on passe d'une aube à l'autre, mais, le cadre autocohérent introduisant une opération de moyenne et faisant disparaître la notion de voisinage, on n'atteint pas la dispersion réelle qui provient de la présence en un point de Gauss donné d'une seule orientation cristalline et non pas d'une moyenne.

En effet l'autre particularité du procédé est qu'il génère des grains dont la taille n'est pas négligeable devant celle de la pièce, si bien que celle-ci ne comporte qu'un nombre réduit de grains, et que l'hypothèse de séparabilité des échelles nécessaire à l'utilisation des modèles d'homogénéisation n'est pas valide. Afin de pouvoir étalonner des extrapolations qui pourraient permettre de quantifier la dispersion réelle à partir de l'estimation du modèle autocohérent, il faut pouvoir utiliser la force brute, et créer une large base de données qui, pour une géométrie d'aube fixée, et pour des sollicitations extérieures bien définies, introduise différentes géométries de grains – typiquement, une centaine – et différents jeux d'orientations – une dizaine par géométrie de grains –. Dans la mesure où il est établi que les valeurs critiques des contraintes et des déformations se retrouvent aux joints de grains, il faut prévoir des maillages suffisamment fins. On aboutit ainsi à environ un millier de calculs non linéaires, introduisant le modèle de monocristal, avec des modèles éléments finis proches de 100 millions de DDL. Plusieurs configurations ont été générées. Les résultats les plus récents seront montrés lors de la conférence.

6 Conclusion

Cet article a présenté des développements récents autour des approches FETI afin d'améliorer leur robustesse en vue de rendre leur utilisation envisageable sur une large classe de problèmes de grande taille. Une étude d'extensibilité faible sur un problème très hétérogène a permis de montrer la performance de ces nouvelles approches, tant en termes de convergence que de temps de calcul. Elles semblent donc prometteuses pour une utilisation intensive, et plusieurs applications à des problèmes industriels de grande taille seront montrés lors de la conférence. En outre, la sélection optimale des directions de recherche est un compromis entre plusieurs facteurs (vitesse de convergence, temps de calcul par itération, occupation mémoire) qui offre des perspectives d'amélioration et fait notamment l'objet de travaux en cours.

Remerciements

B. Marchand a contribué à ce travail durant une mission doctorale à Safran Tech. Les auteurs tiennent à remercier S. Gourdin (SafranTech), F. Coudon et G. Cailletaud (Mines ParisTech, PSL Research University, Centre des Matériaux, UMR CNRS 7633) pour leur contribution au cas métier présenté.

Références

- [1] P. Gosselet, C. Rey. *Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics*, Archives of Computational Methods in Engineering 13, 515-572, 2006.
- [2] J. Mandel. *Balancing domain decomposition*, Communications in Numerical Methods in Engineering 9, 233, 1993.
- [3] C. Farhat, F.X. Roux. *Implicit parallel processing in structural mechanics*, Computational Mechanics Advances 2, 1-124, 1994.
- [4] D. J. Rixen, C. Farhat. *A simple and efficient extension of a class of substructure based preconditioners to heterogeneous structural mechanics problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 44, Wiley, 489-516, 1999.
- [5] A. Klawonn, O. Widlund. *FETI and Neumann-Neumann iterative substructuring methods : Connections and new results*, Communications on Pure and Applied Mathematics 54, 57-90, 2001.
- [6] R. Bridson, C. Greif. *A multipreconditioned conjugate gradient algorithm*, SIAM J. Matrix Anal. Appl. 27, 1056-1068, 2006.
- [7] N. Spillane, D. J. Rixen. *Automatic spectral coarse spaces for robust FETI and BDD algorithms*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 95, Wiley, 953-990, 2013.
- [8] P. Gosselet, D. Rixen, F.-X. Roux, N. Spillane. *Simultaneous FETI and block FETI : Robust domain decomposition with multiple search directions*, International Journal for Numerical Methods in Engineering 104, Wiley, 905-927, 2015.
- [9] N. Spillane. *An Adaptive Multipreconditioned Conjugate Gradient Algorithm*, SIAM J. Sci. Comput. 38, A1896-A1918, 2016.
- [10] C. Bovet, A. Parret-Fréaud, N. Spillane, P. Gosselet. *Adaptive multipreconditioned FETI : scalability results and robustness assessment*, submitted.
- [11] L. Méric, G. Cailletaud. *Single Crystal Modeling for Structural Calculations, Part I et II*, J. of Engng. Mat. Technol. 113, 162-182, 1991.
- [12] F. Coudon, S. Gourdin, L. Marcin, G. Cailletaud. *Modélisation viscoplastique du comportement de structures oligogranulaires en alliages à solidification dirigée*, CSMA 2017, Giens, 2017.
- [13] <http://www.zset-software.com>.