



HAL
open science

Un modèle de substitution Gaussien pour les contraintes résiduelles induites par soudage TIG multi-passe axisymétrique

Jean-Christophe Roux, Vincent Robin, Eric Feulvarch

► To cite this version:

Jean-Christophe Roux, Vincent Robin, Eric Feulvarch. Un modèle de substitution Gaussien pour les contraintes résiduelles induites par soudage TIG multi-passe axisymétrique. 13e colloque national en calcul des structures, Université Paris-Saclay, May 2017, Giens, Var, France. hal-01899263

HAL Id: hal-01899263

<https://hal.science/hal-01899263>

Submitted on 19 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Un modèle de substitution Gaussien pour les contraintes résiduelles induites par soudage TIG multi-passe axisymétrique

J.-C. Roux¹, V. Robin², E. Feulvarch¹

¹ Univ Lyon, ENISE, LTDS, UMR 5513 CNRS, 58 rue Jean Parot, 42023 Saint-Etienne cedex 02, France, {jean-christophe.roux, eric.feulvarch}@enise.fr

² AREVA Engineering & Projects Organization, 10 rue Juliette Récamier, 69456 Lyon cedex 06, France, vincent.robin@areva.com

Résumé — Un modèle de substitution est développé pour l'analyse mécanique du soudage de tuyaux d'acier. L'objectif est de construire un modèle simple et rapide pour calculer les contraintes résiduelles en fonctions des dimensions et des paramètres de soudage. Ce modèle est basé sur des expériences numériques faites de simulations multi-physiques par éléments finis. Une régression par processus Gaussien permet de calculer les contraintes résiduelles orthoradiales. L'expérience montre que le processus Gaussien s'avère très efficace pour des applications de soudage multi-physiques non linéaires.

Mots clés — soudage, simulation, modèle de substitution, processus Gaussien, contraintes résiduelles.

1 Introduction

La simulation du soudage multi-passes de tuyaux métalliques est rendue difficile par le fait qu'elle nécessite a priori une approche 3D pour prendre en compte avec précision des phénomènes complexes dans la zone affectée thermiquement notamment. Dans l'industrie nucléaire (entre autres), la maîtrise de l'état résiduel de fabrication des composants des réacteurs est nécessaire pour évaluer plus finement l'impact sur la tenue en service et la maîtrise des distorsions permet une réduction des opérations correctives post soudage. Le développement de méthodes robustes d'analyse des soudures par simulation numérique répond ainsi principalement à deux besoins : contribuer à l'analyse thermo-mécanique de dimensionnement vis-à-vis des dommages en service (fatigue/corrosion et rupture brutale) et répondre à des problématiques de fabrication. Cependant, la simulation numérique requiert des ressources importantes qu'il faut rationaliser pour ne pas avoir à simuler des configurations de soudage souvent très proches. Une réponse est la construction d'un modèle qui se substitue à la simulation avancée pour la prédiction des contraintes résiduelles et des retraits en fonction de paramètres géométriques et procédé. Le principe du travail présenté ici est donc d'établir des abaques à faible coût (peu d'expériences, paramètres métier) dont la robustesse peut être contrôlée par des outils de traitement statistique.

Des méthodes variées pour l'optimisation du soudage ont été développées, utilisant des techniques telles que les réseaux neuronaux, les algorithmes génétiques, les plans d'expériences, la méthode des surfaces de réponse [1, 2, 3] ou encore les processus Gaussiens [4] en dynamique des structures linéaire.

Nous proposons un modèle de substitution entièrement numérique développé pour l'étude paramétrique du soudage TIG multi-passe de tubulures en acier 304L. L'objectif est de construire un modèle mathématique simple et rapide destiné à l'ingénierie afin de prédire l'évolution des distorsions et des contraintes résiduelles en fonction des dimensions et de la vitesse de soudage. Il est construit à partir d'un plan d'expériences numérique basé sur des simulations thermo-métallo-mécaniques [5]. Dans un premier temps, l'analyse de la variance (ANOVA) [6] montre l'influence significative de certains des paramètres de dimension et de vitesse sur les résultats. Ces paramètres d'entrée sont ensuite choisis pour construire le modèle de substitution au moyen d'un processus Gaussien [7]. Le principal intérêt de ce modèle réside dans le fait qu' :

- il est entièrement numérique,
- il possède la capacité de calculer la répartition des contraintes résiduelles dans un joint de soudure multi-passe dans un contexte multi-physique,
- il est basé sur un processus Gaussien utilisé comme outil de regression en mécanique des struc-

tures non linéaire.

2 Expériences numériques pour le soudage

2.1 Configuration de soudage et paramètres

La géométrie 3D de la soudure est représentée sur la figure 1(a). Le procédé de soudage se compose d'une première étape de mise en contact des tubes à souder au rayon intérieur correspondant à la base du chanfrein, comme le montre la figure 1(b). Ensuite, les cordons de soudure sont déposés l'un sur l'autre jusqu'au rayon extérieur. Chaque cordon de soudure remplit la largeur de la rainure. Ainsi, le nombre de cordons de soudure dépend directement de l'épaisseur du tube.

Comme défini à la figure 1(b), nous considérons trois paramètres pour le plan d'expériences :

- le rayon interne des tuyaux noté R_i , pris entre 164 mm et 396 mm ,
- l'épaisseur des tuyaux notée t , prise entre 35 mm et 80 mm ,
- la vitesse de soudage pendant la phase de remplissage du chanfrein notée S_w , prise entre $0.8\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ et $1\text{ mm}\cdot\text{s}^{-1}$ pour une puissance nette égale à 1850 W .

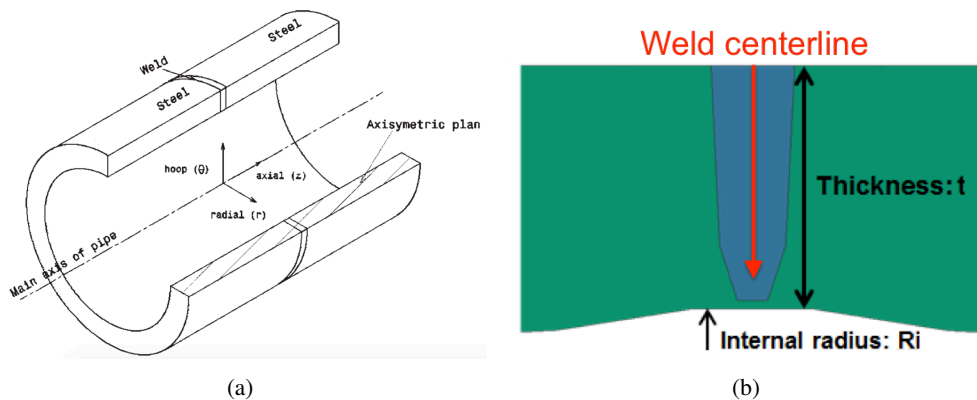


FIGURE 1 – Géométrie 3D de la soudure et géométrie du chanfrein (bleu) entre les tuyaux (verts).

2.2 Stratégie de calcul

Concernant la simulation, la chaleur interne due à la dissipation plastique est négligée, compte tenu des faibles taux de déformation générés par l'opération de soudage [8]. Par conséquent, le calcul peut être réalisé par une méthode échelonnée qui consiste à scinder l'analyse en deux étapes. Tout d'abord, les variations de température et de phase métallurgique sont déterminées sur un maillage 3D en fonction du temps en incluant trois types d'interactions [9] :

- Les transformations métallurgiques dépendant de l'historique thermique,
- les transformations métallurgiques accompagnées d'effets de chaleur latente qui modifient les distributions de température,
- les propriétés thermiques dépendant de la phase.

L'apport de chaleur est représenté par une source de chaleur doublement ellipsoïdale proposée par Goldak *et al.* [10] pour modéliser des procédés de soudage à énergie moyenne avec apport de matériau. La description précise des phénomènes impliqués dans l'apport de chaleur tels que l'arc n'est pas prise en compte dans le modèle ainsi que l'analyse de la dynamique des fluides dans le bain de soudage. Une procédure d'activation d'éléments permet de modéliser le matériau ajouté lorsque cela est nécessaire.

Les résultats 3D thermo-métallurgiques sont ensuite projetés sur un maillage 2D pour le calcul mécanique qui utilise les résultats précédents pour obtenir des déplacements, des contraintes et des distorsions.

Cette approche 2D proposée par Feulvarch *et al.* [9] réduit drastiquement la taille des modèles d'éléments finis car le calcul est effectué dans une option axisymétrique. Le transfert de chaleur et la métallurgie sont impliqués dans l'analyse mécanique à travers quatre effets :

- l'influence de la température et des phases sur la loi de comportement,
- la plasticité induite par la transformation,

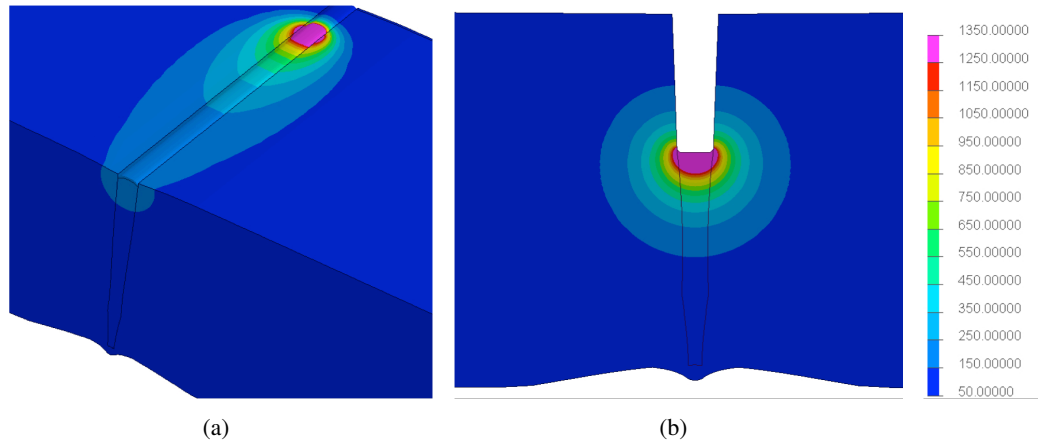


FIGURE 2 – Distributions des températures ($^{\circ}C$) obtenues lors du calcul 3D de la dernière passe et après projection 2D obtenue lors d'une passe située au milieu de la rainure ($R_i = 396mm$, $t = 80mm$ et $S_w = 0.8mm.s^{-1}$).

- les contraintes thermiques,
- le changements de volume dus aux transformations (dilatation et contraction pendant le chauffage et le refroidissement).

Les changements de volume sont causés par des modifications de la structure cristalline du matériau pendant la transformation et sont identifiés par des tests de dilatométrie libre. Ces changements s'ajoutent aux contraintes thermiques classiques et contribuent largement à la génération de contraintes et de contraintes résiduelles.

2.3 Résultats de simulation

Toutes les simulations ont été effectuées en utilisant Sysweld[®] [11] et elles ont été réalisées en combinant les valeurs extrêmes de R_i , t et S_w . Le temps de calcul pour chaque simulation est d'environ quelques minutes. La figure 3(a) montre la distribution de la contrainte résiduelle orthoradiale le long de la ligne centrale de soudure, de la surface extérieure à la surface interne. Les comparaisons des différentes configurations de soudage sont effectuées sur 35 points équidistants et la distance radiale le long de la ligne centrale de soudure est normalisée comme montré sur la figure 3(b) selon l'épaisseur des tuyaux étudiés.

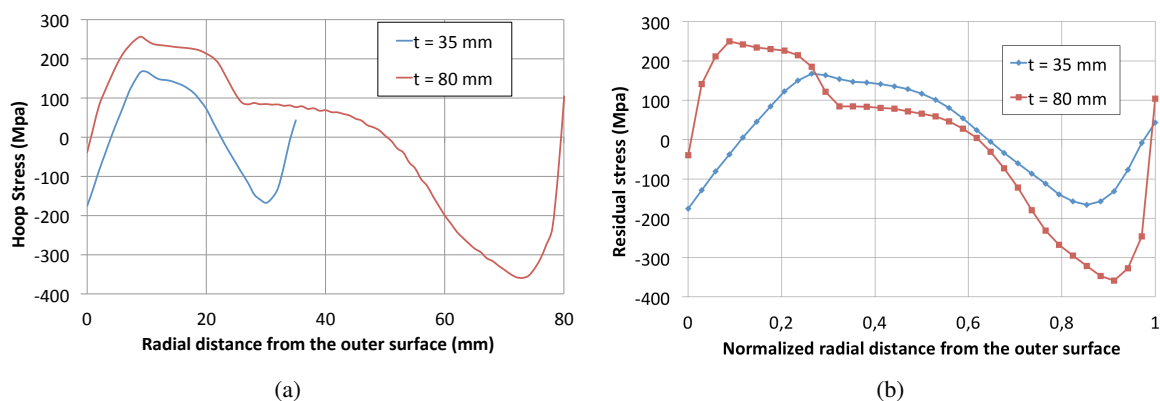


FIGURE 3 – Distribution de la contrainte résiduelle orthoradiale le long de la ligne centrale de soudure et le long de la ligne centrale normalisée ($R_i = 164mm$ et $S_w = 0.8mm.s^{-1}$).

3 Stratégies de modélisation du plan d'expériences numérique et application au soudage TIG multi-passe

Dans ce paragraphe, l'objectif est de comparer le modèle polynomial au processus Gaussien pour la régression. Les influences des paramètres d'entrée R_i , t et Sw et leurs interactions sont évaluées au moyen de l'ANOVA [6, 12]. Cette étape de modélisation contribue à optimiser le plan d'expérience en évitant des expériences numériques inutiles pour les facteurs d'entrée et leurs interactions non influents.

3.1 Analyse de la variance (ANOVA)

L'ANOVA est généralement détaillée dans la littérature pour des problèmes avec deux paramètres d'entrée. Il y a ici trois paramètres d'intérêt, et l'ANOVA est donc étendue à trois facteurs, bien que cela conduise à des expressions plus complexes pour les calculs et que cela nécessite un plus grand nombre d'expériences pour obtenir un plan d'expérience complet. Pour le détail des expressions et des calculs, on pourra se référer à [13].

Le plan d'expérience initial est complet, et comporte donc 8 expériences numériques après avoir choisi les deux valeurs extrêmes pour les trois paramètres. Les résultats obtenus (table d'ANOVA) sont détaillés dans la table 1, l'influence étant retenue si la valeur de probabilité est inférieure à 0.05.

Paramètres	Sommes carrés	Ddl.	F	Probabilité	Conclusion
R_i	1128.1	1	9025	0.0067	Influent
t	11325.1	1	90601	0.0021	Influent
Sw	4005.1	1	32041	0.0036	Influent
$R_i \cdot t$	1.1	1	9	0.2048	Non influent
$R_i \cdot Sw$	136.1	1	1089	0.0193	Influent
$Sw \cdot t$	21.1	1	169	0.0489	Influent
Erreur	0.1	1			
Total	16616.9	7			

TABLE 1 – Table d'ANOVA pour la contrainte résiduelle orthoradiale maximale.

3.2 Régression polynomiale

Dans cette étude, nous considérons un modèle polynomial qui contient des termes linéaires, des interactions entre deux paramètres d'entrée, et des termes quadratique selon un « modèle de surface de réponse » classique. Le modèle polynomial quadratique [14] conduit à une fonction qui décrit la réponse Y (i.e. les valeurs de sortie du plan) à partir du vecteur d'entrée $X = (R_i, t, Sw)$. Les valeurs de réponse Y sont considérées comme bruitées suite aux mesures :

$$Y = f(X) + \varepsilon$$

où ε représente le bruit et f est une fonction polynomiale de la forme :

$$f(X) = \varphi(X) \Gamma(p, q)$$

$\Gamma(p, q)$ est le vecteur des coefficients obtenus au moyen de la méthode des moindres carrés et $\varphi(X)$ correspond au vecteur d'entrée :

$$\begin{aligned} \Gamma(p, q) &= (p_0, p_1, p_2, p_3, q_{12}, q_{13}, q_{23}, q_{11}, q_{22}, q_{33}) \\ \varphi(X) &= (1, R_i, t, Sw, R_i \cdot t, R_i \cdot Sw, t \cdot Sw, R_i^2, t^2, Sw^2) \end{aligned}$$

D'après les résultats de l'ANOVA (table 1), le vecteur des coefficients du modèle polynomial est ainsi considéré sous la forme :

$$\Gamma(p, q) = (p_0, p_1, p_2, p_3, 0, q_{13}, q_{23}, q_{11}, q_{22}, q_{33})$$

3.3 Régression par processus Gaussien

Un processus Gaussien est une généralisation d'une distribution gaussienne multivariée finie à une infinité de variables. Plus formellement, il s'agit d'une collection de variables aléatoires pour lesquelles tout nombre fini d'entre elles possède une distribution Gaussienne conjointe [7] : c'est ainsi un processus stochastique tel que toute sous-collection finie de variables aléatoires possède une distribution gaussienne multivariée.

Alors qu'une distribution gaussienne multivariée est entièrement spécifiée par un vecteur moyen μ et une matrice de covariance Σ : $f = (f_1, \dots, f_n)^t \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, un processus gaussien est entièrement spécifié par une fonction moyenne $\eta(x)$ et une fonction de covariance $\kappa(x, x')$:

$$f(x) \sim \mathcal{GP}(\eta(x), \kappa(x, x'))$$

On dit que l'ensemble des variables aléatoires $\{f(x), x \in X\}$ est extrait de $\mathcal{GP}(\eta(x), \kappa(x, x'))$ si pour tout sous-ensemble fini $\{x_1, \dots, x_n \in X\}$ (correspondant au plan d'expériences) l'ensemble fini associé de variables aléatoires $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ possède la distribution suivante :

$$\begin{bmatrix} f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_n) \end{bmatrix} \sim \mathcal{N} \left(\begin{bmatrix} \eta(x_1) \\ \vdots \\ \eta(x_n) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \kappa(x_1, x_1) & \cdots & \kappa(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(x_n, x_1) & \cdots & \kappa(x_n, x_n) \end{bmatrix} \right)$$

Il est généralement considéré que \mathcal{GP} est de moyenne nulle, et que la fonction de covariance κ relie une observation à une autre. On suppose d'autre part que la réponse Y est distribuée suivant une loi normale :

$$Y \sim \mathcal{N}(\bar{Y}, \sigma_f)$$

Si les valeurs de réponse connues sont bruitées (suivant un loi normale centrée), le problème s'écrit finalement comme :

$$Y = f(X) + \mathcal{N}(0, \sigma_n) \quad (1)$$

Pour résoudre le problème de régression, nous avons à estimer une nouvelle valeur Y^* de la réponse Y correspondant à une nouvelle valeur d'entrée X^* . Le principe est alors de prédire Y^* connaissant n observations Y : autrement dit, « *connaissant les données Y , quelle est la prédiction la plus vraisemblable pour la valeur de Y^* ?* ». Nous sommes ainsi amenés à calculer la probabilité conditionnelle $p(Y^* | Y)$ qui suit une distribution Gaussienne ([15]).

Il est alors considéré que les données sont liées les unes aux autres et que deux points proches doivent avoir une influence mutuelle plus importante que deux points distants. Ceci conduit à un choix classique pour la fonction de covariance κ [16] :

$$\kappa(x, x') = \sigma_f^2 e^{-\left(\theta_{Ri}^2 (Ri - Ri')^2 + \theta_t^2 (t - t')^2 + \theta_{Sw}^2 (Sw - Sw')^2\right)} \quad (2)$$

Dans l'expression (2), les valeurs θ_j^2 associées à chaque facteur d'entrée X_j sont les « longueurs » qui définissent l'importance de l'influence mutuelle entre deux points x et x' .

En prenant en compte le bruit comme dans l'expression (1), la fonction de covariance devient :

$$\kappa(x, x') = \sigma_f^2 e^{-\left(\theta_{Ri}^2 (Ri - Ri')^2 + \theta_t^2 (t - t')^2 + \theta_{Sw}^2 (Sw - Sw')^2\right)} + \sigma_n^2 \delta(x, x') \quad (3)$$

où δ est la fonction de Kronecker : $\delta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{if } x=y \\ 0 & \text{if } x \neq y \end{cases}$

Pour évaluer $p(Y^* | Y)$, nous avons maintenant à calculer la fonction de covariance sur toutes les combinaisons possibles des points $\{x_1, \dots, x_n, x^*\}$. Ceci conduit aux matrices suivantes, qui expriment les influences entre les valeurs connues et inconnues :

$$K = \begin{bmatrix} \kappa(x_1, x_1) & \cdots & \kappa(x_1, x_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \kappa(x_n, x_1) & \cdots & \kappa(x_n, x_n) \end{bmatrix}, \quad K^* = [\kappa(x_1, x^*) \cdots \kappa(x_n, x^*)] \quad \text{et} \quad K^{**} = \kappa(x^*, x^*)$$

Comme dans l'hypothèse d'un processus Gaussien les données peuvent être représentées comme un échantillon d'une distribution Gaussienne multivariée, nous obtenons la distribution conjointe :

$$\begin{pmatrix} Y \\ Y^* \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} K & K^{*t} \\ K^* & K^{**} \end{pmatrix}\right)$$

et on peut alors démontrer que ([7]) :

$$Y^* | Y \sim \mathcal{N}(K^* K^{-1} Y, K^{**} - K^* K^{-1} K^{*t}) \quad (4)$$

et il est alors possible de calculer $p(Y^* | Y)$ d'après (4). Finalement, et selon un modèle classique de régression linéaire Bayésienne [17], l'estimation de maximum de vraisemblance pour Y^* est donnée d'après (4) par le calcul direct suivant :

$$Y^* = K^* K^{-1} Y$$

avec l'incertitude évaluée par :

$$\text{var}(Y^*) = K^{**} - K^* K^{-1} K^{*t}$$

Enfin, l'expérience montre que les valeurs calculées peuvent être très différentes si l'ensemble de paramètres $a = (\sigma_f, \theta_j^2, \sigma_n)$ varie. L'ensemble optimal a_{opt} peut être déterminé en maximisant $\log p(Y|X, a)$:

$$\log p(Y|X, a) = -\frac{1}{2} Y^t K^{-1} Y - \frac{1}{2} \log \det(K) - \frac{n}{2} \log 2\pi$$

3.4 Comparaison modèle polynomial / processus Gaussien et résultats

Nous comparons ici l'efficacité de l'approche polynomiale et du processus Gaussien pour calculer la distribution de la contrainte résiduelle orthoradiale $\sigma_{\theta\theta}$. Du point de vue temps de calcul, les deux approches sont très rapides (quelques secondes). L'analyse se concentre sur toute la ligne centrale normalisée de soudure (cf. figure 3(b)). L'erreur d'approximation est définie comme l'écart moyen entre l'approximation et la simulation numérique multi-physique sur les 35 points équidistants :

$$\varepsilon_{max} = \frac{1}{35} \sum |\sigma_{\theta\theta}^{approx} - \sigma_{\theta\theta}^{FEM}|$$

Nous proposons de considérer cette erreur comme une variable aléatoire suivant un loi normale $\mathcal{N}(m_\varepsilon, \sigma_\varepsilon)$. De cette manière, l'approximation sera considérée comme satisfaisante si la probabilité d'obtenir une erreur inférieure à 20 MPa est supérieure à 95%.

Sur le plan d'expérience initial (cf. paragraphe 3.1) enrichit d'un point milieu, ces probabilités sont respectivement de 20% et 37% pour l'approche polynomiale et le processus Gaussien. Ces résultats insatisfaisants en ne considérant que des points extrêmes et un point milieu peuvent s'expliquer par le fait que l'évolution de la contrainte résiduelle orthoradiale maximale en fonction de l'épaisseur t des tuyaux est non-linéaire, comme l'illustre par exemple la figure 4 obtenue au moyen du processus Gaussien.

Pour améliorer l'approximation, l'ajout de 4 expériences par l'enrichissement de t avec sa valeur milieu produit induit un plan à 13 expériences qui produit une probabilité d'erreur inférieure à 20 MPa égale à 72% pour le processus Gaussien, alors que cette probabilité n'est pas meilleure pour l'approche polynomiale. L'évolution complexe et non-monotone de la contrainte résiduelle implique que le modèle polynomial nécessite plus d'informations (d'expériences) pour donner des résultats satisfaisants.

Des tests sont effectués pour des « configurations d'intérêt » correspondant à différents triplets de valeurs pour les trois paramètres Ri , t et Sw . Les figures 5 et 6 montrent les comparaisons entre les distributions de contrainte résiduelle orthoradiale obtenues par le processus Gaussien et par les simulations par éléments finis. On peut noter la très bonne adéquation entre les deux profils.

Enfin, en insérant la valeur milieu du rayon Ri dans le plan d'expérience, il a été établi [13] que ce dernier, composé alors de 17 expériences, permet d'obtenir pour la régression par processus Gaussien une probabilité égale à 96% d'obtenir une erreur inférieure à 20 MPa.

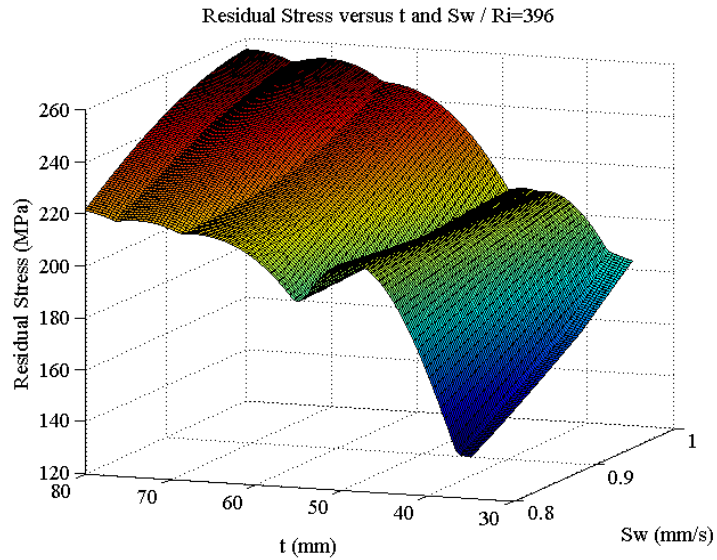


FIGURE 4 – Contrainte résiduelle orthoradiale maximale en fonction de t et Sw pour $Ri = 396\text{ mm}$.

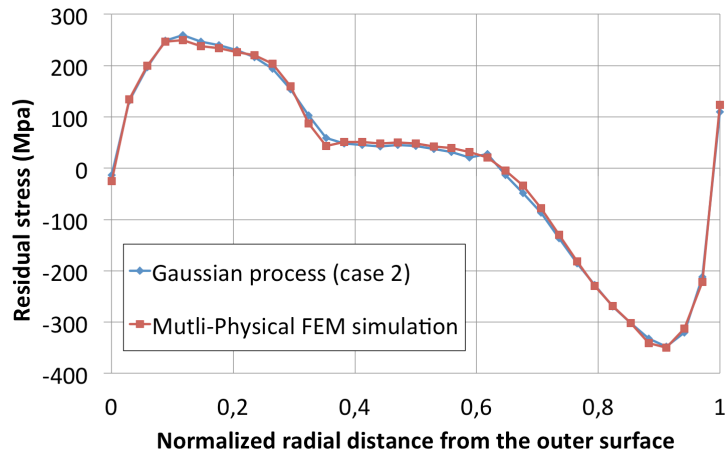


FIGURE 5 – Configuration d'intérêt $(Ri, t, Sw) = (200, 70, 0.9)$

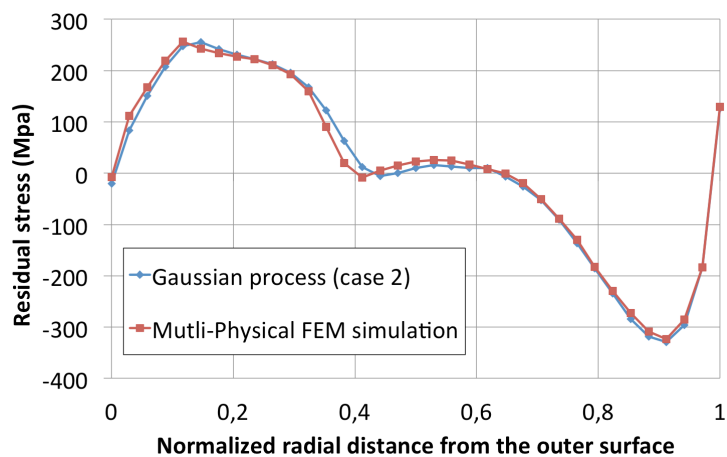


FIGURE 6 – Configuration d'intérêt $(Ri, t, Sw) = (265, 60, 1)$

4 Conclusion

Deux techniques de régression sont comparées pour calculer la distribution des contraintes résiduelles : la méthode polynomiale et le processus Gaussien. L'ANOVA est utile pour attester de l'in-

fluence des facteurs d'entrée tels que les dimensions des tuyaux et la vitesse de soudage. Elle permet également de déterminer quels termes ont besoin d'être inclus dans le modèle polynomial. Le nombre d'expériences numériques pour le plan d'expériences peut ainsi être optimisé.

L'approche polynomiale présente l'avantage de donner une équation analytique avec un petit nombre de coefficients. Malheureusement, pour la configuration de soudage étudiée, la qualité de l'approximation est médiocre par rapport au processus Gaussien avec le même nombre d'expériences numériques. Pour un plan composé de 9 expériences, la probabilité d'obtenir une distribution des contraintes résiduelles de soudage avec une erreur inférieure à 20 MPa est égale à 20% et cette probabilité est du même ordre de grandeur pour un plan composé de 13 expériences. Cela peut s'expliquer par l'évolution complexe non linéaire et non monotone des contraintes résiduelles orthoradiales, qui varient considérablement avec les facteurs d'entrée. Par conséquent, le modèle polynomial nécessite plus d'informations ou plus d'expériences pour donner des résultats satisfaisants.

Le processus Gaussien est basé sur les influences entre chaque expérience modélisée par la fonction de covariance. Le choix de cette fonction n'a pas été discuté dans ce travail mais fait l'objet des travaux suivants. Cependant, le procédé Gaussien s'avère très efficace avec un petit nombre d'expériences pour modéliser un profil de contrainte entier. En effet, 17 expériences sont suffisantes pour avoir une probabilité de 96 % d'obtenir une distribution de contraintes résiduelles à l'intérieur d'un joint de soudure multi-passe avec une erreur inférieure à 20 MPa. Dans de futurs travaux, l'efficacité du procédé Gaussien sera étudiée pour d'autres procédés de fabrication tels que l'usinage ou la trempe.

Références

- [1] K.Y. Benyounis, A.G. Olabi, *Optimization of different welding processes using statistical and numerical approaches - A reference guide*, Advances in Engineering Software, **39**, 483-496, 2008.
- [2] V. Singh, V. Patel, *Experimental investigation of GATW for austenitic stainless steel using DOE*, International Journal for Technological Research in Engineering, **1**, 991-995, 2014.
- [3] A. Kumar, S. Sundarrajan, *Optimization of pulsed TIG welding process parameters on mechanical properties of a 5456 aluminum alloy weldments*, Materials and Design, **30**, 1288-1297, 2009.
- [4] S.-S. Jin, H.-J. Jung, *Sequential surrogate modeling for efficient finite element model updating*, Computers and Structures, **168**, 30-45, 2016.
- [5] Feulvarch E., Robin V., Bergheau J.-M., *Thermometallurgical and mechanical modelling of welding application to multipass dissimilar metal girth welds*, Science and Technology of Welding and Joining, **16**, 221-231, 2011.
- [6] Walpole R. E., Myers R. H., Myers S. L., Ye K., *Probability & Statistics for Engineers & Scientists*, eight edition, Pearson Prentice Hall, 2007.
- [7] Rasmussen C. E., Williams C. K. I., *Gaussian Processes for Machine Learning*, MIT Press, 2006.
- [8] Feulvarch E., Bergheau J.-M., *Modeling and Numerical Simulation of Resistance Spot Welding Process*, Encyclopedia of Thermal Stresses, ISBN 978-94-007-2738-0, 3112-3123, 2014.
- [9] Feulvarch E., Robin V., Bergheau J. M., *Thermometallurgical and mechanical modelling of welding application to multipass dissimilar metal girth welds*, Science and Technology of Welding and Joining, **16**, 221-231, 2011.
- [10] Goldak J. A., Chakravarti A., Bibby J., Metall. Trans. B, **15B**, 299-305, 1984.
- [11] *SYSWELD User's manual*, ESI Group, 2014.
- [12] Hill T., Lewicki P., *Statistics : Methods and Applications*, StatSoft Inc., 2005
- [13] Portelette L., Roux J.-C., Robin V., Feulvarch E., *A Gaussian surrogate model for residual stresses induced by orbital multi-pass TIG welding*, Computers and Structures, en cours de publication, 2016.
- [14] Hastie T., Tibshirani R., Friedman J., *The elements of statistical learning : data mining, inference, and prediction*, Springer, 2008.
- [15] von Mises R., *Mathematical Theory of Probability and Statistics* (1964), Academic Press.
- [16] Abrahamsen P., *A Review of Gaussian Random Fields and Correlation Functions* (1997), Technical Report 917, Norwegian Computing Center, Oslo, Norway.
- [17] Rowe D.B., *Multivariate Bayesian Statistics* (2003), Chapman & Hall/CRC.