



HAL
open science

Morphismes procycliques

Francis Wlazinski

► **To cite this version:**

| Francis Wlazinski. Morphismes procycliques. 2024. hal-01896212v3

HAL Id: hal-01896212

<https://hal.science/hal-01896212v3>

Preprint submitted on 3 Apr 2024

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Morphismes procycliques

Francis Wlazinski

3 avril 2024

Résumé

Le but de cet article est de généraliser la notion de morphisme cyclique. De plus, on donnera quelques propriétés des morphismes procycliques en ce qui concerne la préservation de l'absence de puissance.

1 Mots

Etant donné un alphabet A , c'est-à-dire un ensemble fini non vide de symboles, un mot sur A est la juxtaposition d'un nombre fini de ces symboles. La longueur du mot w , notée $|w|$, est le nombre de symboles utilisés pour écrire le mot.

Si $A = \{a, b, c, e, l\}$, $w = clebaba$ est un mot sur A de longueur $|w| = 7$. Si $B = \{0, 1\}$, $w = 011010011001011010010110011010011001$ est un mot sur B que bon nombre de lecteurs auront reconnu comme étant un préfixe du mot de Thue-Morse.

Muni de la juxtaposition des mots et du mot vide ε ne contenant aucune lettre, l'ensemble des mots sur A , noté A^* , est un monoïde libre. On note A^+ l'ensemble des mots non vides sur A c'est-à-dire $A^+ = A^* \setminus \{\varepsilon\}$.

Dans tout le reste de cet article, A et B sont deux alphabets quelconques tels que $\text{Card}(A) \geq 2$ et $\text{Card}(B) \geq 2$ et tous les mots seront considérés sur l'un de ces deux alphabets.

Si on peut écrire un mot w sous la forme $pw's$ alors on dit que p, w' et s sont des facteurs de w , que p est un préfixe de w et que s est un suffixe de w . En outre, si l'un des deux mots p ou s est non vide, alors w' est dit propre. Si les deux mots p et s sont non vides, alors w' est dit interne. On note $\text{Fcts}(w)$ l'ensemble de tous les facteurs d'un mot w .

Soit w un mot non vide, pour tout couple $(i, j) \in \mathbb{N}^2$ tel que $1 \leq i \leq j \leq |w|$, on note $w[i..j]$ le facteur de w tel que $w = pw[i..j]s$ pour deux mots p et s où $|p| = i - 1$. Autrement dit, $w[i..j]$ est le facteur de w qui commence à la $i^{\text{ème}}$ lettre et finit à la $j^{\text{ème}}$ lettre de w . Lorsque $i = j$, on note $w[i]$ le facteur $w[i..i]$ qui est simplement la $i^{\text{ème}}$ lettre de w . En particulier, $w[1]$ et $w[|w|]$ sont respectivement la première et la dernière lettre de w .

Pour toute lettre a d'un mot w , on note $|w|_a$ le nombre d'occurrences de la lettre a dans w .

Les puissances d'un mot u sont définies de façon récursive par $u^0 = \varepsilon$ et $u^n = uu^{n-1}$, pour tout entier $n \geq 1$. Etant donné un entier $k \geq 2$, on appelle puissance k tout mot u^k avec $u \neq \varepsilon$: on exclut le cas ε^k qui n'offre que peu d'intérêt.

En particulier, un carré et un cube correspondent respectivement aux cas $k = 2$ et $k = 3$.

Un chevauchement est un mot de la forme $aXaXa$ où a est une lettre et X est un mot qui peut éventuellement être vide. On considèrera aussi un motif particulier que nous appellerons un carré cadré qui est un mot de la forme $aXXa$ où a est une lettre et X est un mot qui peut éventuellement être vide.

Etant donné un entier $k \geq 2$, un mot est *sans puissance* k (resp. sans chevauchement ou sans carré cadré) s'il ne contient aucun facteur qui soit une puissance k (resp. un chevauchement ou un carré cadré) .

Remarquons que, pour un mot w de longueur inférieure ou égale à trois, w est sans carré si et seulement si w est sans carré cadré.

Un mot *primitif* est un mot qui n'est pas une puissance $k \geq 2$ d'un autre.

Une puissance k , v^k , est dite *pure* si tout facteur propre de v^k est sans puissance k .

Rappelons en premier lieu, le résultat de Fine et Wilf [5, 6].

Theorem 1.1 *Soient x et y deux mots. Si une puissance de x et une puissance de y ont un préfixe commun de longueur au moins égale à $|x| + |y| - \text{pgcd}(|x|, |y|)$, alors x et y sont des puissances d'un même mot t .*

Son corollaire qui suit est souvent utilisé dans les preuves sur les morphismes sans puissance k :

Corollary 1.2 [2] *Soient x et y deux mots. Si une puissance de x et une puissance de y ont un facteur commun de longueur au moins égale à $|x| + |y| - \text{pgcd}(|x|, |y|)$, alors il existe deux mots t_1 et t_2 tels que x soit une puissance de t_1t_2 et y soit une puissance de t_2t_1 avec t_1t_2 et t_2t_1 des mots primitifs. De plus, si $|x| > |y|$ alors x n'est pas primitif.*

On déduit du théorème 1.1 que :

Lemma 1.3 *Pour tout mot w non vide, il existe un unique mot primitif z tel que $w = z^n$ pour un entier $n \geq 1$. Le mot z est appelé la racine primitive de w .*

On dit que deux mots u et v sont conjugués si l'on a $u = t_1t_2$ et $v = t_2t_1$ pour des mots t_1 et t_2 . Par contraposée, on obtient trivialement que :

Lemma 1.4 *Tout conjugué d'un mot primitif est primitif.*

Nous utiliserons régulièrement la proposition suivante (voir [5]) qui donne les solutions de trois équations élémentaires sur les mots :

Proposition 1.5 *Soient u, v, w trois mots sur A et soient x, y deux lettres dans A .*

1. *Si $vu = uw$ et $v \neq \varepsilon$, alors il existe deux mots r and s sur A , et un entier p tels que $u = (rs)^p$, $v = rs$ et $w = sr$.*
2. *Si $vu = uv$, alors il existe un mot w sur A , et deux entiers p et q tels que $u = w^p$ et $v = w^q$.*

3. Si $xu = uy$, alors $x = y$ et il existe un entier q tel que $u = x^q$.

Comme conséquence immédiate de la proposition 1.5(2), on obtient :

Lemma 1.6 [2, 4] *Si un mot non vide v est facteur interne de vv c'est-à-dire s'il existe deux mot non vides x et y tel que $vv = xvy$, alors il existe un mot non vide t et deux entiers $i, j \geq 1$ tel que $x = t^i$, $y = t^j$, et $v = t^{i+j}$.*

On obtient aussi :

Corollaire 1.7 *Soient u, v, w trois mots non vides de A^+ . Si $uvw = wvu$ alors il existe deux mots r et s et trois entiers i, j et k tels que $u = (rs)^i r$, $v = (sr)^j s$ et $w = (rs)^k r$.*

On peut résoudre d'autres équations du même type :

Lemme 1.8 *Soient u, w deux mots de A^* et soient x, y deux lettres de A . Si $uxw = wyu$ alors $x = y$ ou il existe deux mots u', w' de A^* tels que $u'xw' = w'yu'$ et $|u'| + |w'| < |u| + |w|$.*

Preuve.

Si $u = \varepsilon$ ou si $w = \varepsilon$, d'après le cas 3 de la Proposition 1.5, on a $x = y$.

Si $|u| = |w|$ alors $u = w$ et $x = y$.

On continue donc avec $|u| \neq |w|$ et, par symétrie du problème, on peut supposer, sans perte de généralité, que $|u| > |w| > 0$.

D'après le cas 2 de la Proposition 1.5, l'équation $u(xw) = (wy)u$ implique l'existence de deux mots r et s et d'un entier naturel p tel que $wy = rs$, $xw = sr$ et $u = (rs)^p r$.

Si $|s| = 0$ alors $wy = r = xw$. d'après le cas 3 de la Proposition 1.5, on obtient $x = y$.

Si $|s| \geq 1$ alors, des deux égalités $wy = rs$ et $xw = sr$, on tire que s commence par x et finit par y . Si $|s| = 1$ alors $s = y = x$. Si $|s| \geq 2$ alors il existe alors un mot s' tel que $s = xs'y$. On a donc $wy = rxs'y$ et $xw = xs'yr$ c'est-à-dire $rxs' = w = s'yr$ avec $|rs'| < |w| < |u| + |w|$.

Il suffit donc de prendre $\{u', w'\} = \{r, s'\}$ pour obtenir le résultat. \square

Corollaire 1.9 *Soient u, w deux mots de A^* et soient x, y deux lettres de A . Si $uxw = wyu$ alors $x = y$.*

Le lemme 1.9 est une simple conséquence du lemme 1.8. En effet, il n'existe pas de suite (infinie) strictement décroissante d'entiers naturels.

Corollaire 1.10 *Soient u, w deux mots de A^* et soient x, y deux lettres de A . Si $xuw = wuy$ alors $x = y$.*

Preuve.

Le corollaire est vrai si $u = \varepsilon$ ou si $w = \varepsilon$ (c'est-à-dire $|w| = 0$) d'après le cas 3 de la Proposition 1.5, on obtient bien que $x = y$.

On suppose donc $|w| \geq 1$ et $u \neq \varepsilon$. De l'égalité $xuw = wuy$, on tire que w commence par x et finit par y . Si $|w| = 1$, on obtient $w = x = y$. Si $|w| \geq 2$, il existe alors un mot w' tel que $w = xw'y$. L'équation $xuw = wuy$ devient $xuxw'y = xw'yuy$ c'est-à-dire $uxw' = w'yu$. Et, d'après le corollaire 1.9, on a $x = y$. \square

Corollaire 1.11 Soient u, w deux mots de A^* et soient x, y deux lettres de A . Si $xuw = wyu$ alors $x = y$.

Preuve.

Si $u = \varepsilon$ ou si $w = \varepsilon$ (c'est-à-dire $|w| = 0$), on obtient $x = y$ d'après le cas 3 de la Proposition 1.5.

Si $|u| = |w|$, on obtient $u = w$ et, toujours d'après le cas 3 de la Proposition 1.5, il s'en suit que $x = y$.

D'après le cas 1 de la Proposition 1.5, l'équation $(xu)w = w(yu)$ implique l'existence de deux mots r et s et d'un entier naturel p tel que $xu = rs$, $yu = sr$ et $w = (rs)^p r$.

Si $|r| = 0$ ou si $|s| = 0$ alors $xu = yu$ et on obtient $x = y$.

Si $|s| \geq 1$ et $|r| \geq 1$ alors, des deux égalités $xu = rs$ et $yu = sr$, on tire que r commence par x et s commence par y . Il existe alors deux mots r' et s' tels que $r = xr'$ et $s = ys'$.

On a donc $xu = xr'ys'$, $yu = ys'xr'$ et $u = r'ys' = s'xr'$. Et, d'après le corollaire 1.9, cela implique que $x = y$. \square

Proposition 1.12 Soit t un mot primitif. S'il existe un entier $\alpha \geq 2$ et deux mots v et ℓ tels que $|v| \geq |t|$ et $v\ell v$ soit un facteur de t^α alors $v\ell$ est une puissance d'un conjugué de t .
En particulier, $|v\ell| \equiv 0 \pmod{|t|}$ et si $\ell \neq \varepsilon$, alors $v\ell$ n'est pas primitif.

Preuve.

Le mot $v\ell v$ est un facteur commun de $(v\ell)^2$ et de t^α . De plus, puisque $|v| \geq |t|$ on a $|v\ell v| \geq |v\ell| + |t|$. D'après le corollaire 1.2, il existe deux mots t_1 et t_2 et deux entiers β et γ tels que $t = (t_1 t_2)^\beta$ et $v\ell = (t_2 t_1)^\gamma$ avec $t_1 t_2$ et $t_2 t_1$ des mots primitifs. Puisque t est un mot primitif, on a $\beta = 1$. Si $\ell \neq \varepsilon$, on a $|v\ell| > |t|$ et donc $v\ell$ n'est pas primitif c'est-à-dire $\gamma \geq 2$. \square

2 Canevas d'un mot

Définition 2.1 Soit $1 \leq n \leq 9$ un entier et soit l'application δ_n de $\llbracket 0; n \rrbracket^+$ dans $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ définie pour tout mot $|w| \geq 2$ par $\delta_n(w) = \underline{w}$ où, pour tout i de 1 à $|w| - 1$, $\underline{w}[i]$ est le reste de la division euclidienne de $w[i+1] - w[i]$ par $n+1$. Autrement dit, on a $\underline{w}[i] = w[i+1] - w[i] \pmod{n+1}$.

Si $w = 0112102$ alors $\underline{w} = \delta_2(w) = 101222$.

Si $\mu = 01101001100101101001011010011001011010011001$ alors
 $\underline{\mu} = \delta_1(\mu) = 1011101 \mathbf{0} 1011101 \mathbf{1} 1011101 \mathbf{0} 1011101 \mathbf{0} 1011101 \mathbf{0} 1011101 \mathbf{1} 1011101$.

Si $f = 010010100100101001010$ alors $\underline{f} = \delta_1(f) = 11 \mathbf{0} 1111 \mathbf{0} 11 \mathbf{0} 1111 \mathbf{0} 1111$.

On étend cette définition aux lettres : pour tout x de A , $\delta_n(x) = \varepsilon$.

On peut aussi étendre, de façon naturelle, cette définition aux mots infinis.

On remarque trivialement que $|\underline{w}| = |w| - 1$ et que, si w ne possède pas de carré de lettres alors \underline{w} ne contient pas de 0. De plus, cette application δ_n n'est pas un morphisme. Plus exactement, si $u, v \in \llbracket 0; n \rrbracket^*$ avec $u = u_1 u_2 \dots u_p$ et $v = v_1 v_2 \dots v_q$, on a $\delta_n(uv) = \delta_n(u) \delta_n(u_p v_1) \delta_n(v)$ c'est-à-dire $\delta_n(uv) = \delta_n(u) \delta_n(u[|u|] v[1]) \delta_n(v)$.

Un mot w est entièrement déterminé par un seul des $w[i]$ et \underline{w} . Et donc en particulier, si $u[1] = v[1]$ et si $\underline{u} = \underline{v}$ alors $u = v$. On dira que \underline{w} est le canevas du mot de w . Et, à partir de ce canevas, on peut construire d'autres mots en changeant une des lettres de w .

$w_2 = 1220210$ est le mot de $\llbracket 0; 2 \rrbracket^*$ obtenu à partir de $\underline{w} = 101222$ en commençant par la lettre 1.

$w_3 = 1223131$ est le mot de $\llbracket 0; 3 \rrbracket^*$ obtenu à partir de $\underline{w} = 101222$ en commençant par la lettre 1.

$f_2 = 012201200122012001201$ est le mot de $\llbracket 0; 2 \rrbracket^*$ obtenu à partir de $\underline{f} = \delta_1(f) = 11011110110111101111$ en commençant par la lettre 0.

$\mu_1 = 0010011101110010011100100$ est le mot de $\llbracket 0; 1 \rrbracket^*$ obtenu à partir de $\mu = 011010011001011010010110$ en commençant par la lettre 0.

Pour toute lettre $a \in \llbracket 0; n \rrbracket$ et tout mot $C \in \llbracket 0; p \rrbracket^*$ où $p \leq n$, nous noterons $(a, C)_n$ le mot de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ qui a pour canevas C qui commence par a . En particulier, si $w \in \llbracket 0; n \rrbracket^*$, on peut écrire $w = (w[1], \underline{w})_n$.

On remarquera que, si deux mots u et v ont même canevas, alors, pour tout entier i de 1 à $|u|$, la différence $u[i] - v[i]$ est une constante (égale à $u[1] - v[1]$) modulo $n + 1$.

La relation "avoir le même canevas" est une relation d'équivalence dont l'ensemble quotient mériterait d'être étudié. Mais ce n'est pas le but ici.

L'étude des words dont the canevas aurait une forme particulière (voir the mot de Thue-Morse, le mot de Fibonacci ou plus généralement les mots sturmiens) pourrait être intéressante. Une autre idée pourrait consister à étudier les différents canevas d'un mot dans un alphabet plus grand que celui du mot lui-même. Mais les voies à explorer sont trop nombreuses pour les énoncer ou, encore moins, pour tenter une approche de l'une d'elles dans cet article. Nous nous focaliserons sur les morphisms and les puissances.

On étend naturellement the definition 2.1 à a alphabet ordonné quelconque :

Definition 2.2 Soit $A = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$ un alphabet ordonné à $n + 1$ lettres et soit l'application δ_n de A^* dans A^* définie par $\delta_n(w) = \underline{w}$ où, pour tout i de 1 à $|w| - 1$, si $w[i] = a_r$ et $w[i + 1] = a_s$ alors on a $\underline{w}[i] = a_t$ où $t \equiv s - r \pmod{n + 1}$.

Si $A = \{a, b, c\}$ et $w = abacca$ alors $\underline{w} = bccab$.

Pour tout entier n , on pourrait aussi travailler en base n (ou $n + 1$ en l'occurrence lorsque l'on considère $\llbracket 0; n \rrbracket$). Il faut donc garder en mémoire que les propriétés de la suite de cet article ne se limitent pas aux chiffres de 0 à 9. Même si on peut s'y référer en exemple car ils sont plus simples d'utilisation.

Pour nous, il y a $n + 1$ lettres différentes dans l'alphabet $\llbracket 0; n \rrbracket$ et nous ne parlerons pas de nombre et encore moins de chiffre de $\llbracket 0; n \rrbracket$. Grossièrement, on travaille dans les ensembles $\mathbb{Z}/(n + 1)\mathbb{Z}$ mais en excluant en grande partie ses propriétés structurelles.

Dans la suite de cet article, N , n et p sont trois entiers strictement positifs.

Pour tout mot w de $\llbracket 0; N \rrbracket^*$, on notera $\text{Somme}(w)_{N+1}$ le reste de la division euclidienne de $\sum_{i=1}^{|w|} w[i]$ par $N + 1$.

Les preuves des lemmes suivants sont laissées au lecteur.

Lemme 2.3 *Pour tout mot w de $\llbracket 0; N \rrbracket^*$, on a $\text{Somme}(\underline{w})_{N+1} = w[|w|] - w[1] \pmod{N + 1}$. En particulier, w commence et finit par la même lettre si et seulement si $\text{Somme}(\underline{w})_{N+1} = 0$.*

Lemme 2.4 *Soit $k \geq 2$ un entier.*

Un mot w de $\llbracket 0; N \rrbracket^$ contient une puissance k si et seulement si \underline{w} contient un facteur de la forme $(Xy)^{k-1}X$ avec X un mot et y une lettre tels que $\text{Somme}(Xy)_{N+1} = 0$.*

Corollaire 2.5 *Soit $k \geq 2$ un entier et soit w un mot de $\llbracket 0; N \rrbracket^*$.*

Si \underline{w} contient une puissance $(N + 1) \times k$ alors w contient une puissance k .

Preuve.

Cela découle directement des lemmes 2.3 et 2.4 et du fait que, pour tout mot non vide v , on a $\text{Somme}(v^{N+1})_{N+1} = 0$. \square

3 Morphismes

Soient A et B deux alphabets. Un *morphisme* f de A^* vers B^* est une application de A^* vers B^* telle que $f(uv) = f(u)f(v)$ pour tous les mots u, v sur A . Si B n'a pas d'importance, nous dirons simplement que f est défini sur A .

Soit $k \geq 2$ un entier. Un morphisme f est *sans puissance k* si l'image de tout mot sans puissance k est aussi sans puissance k . On dit que le morphisme f préserve l'absence de puissance k . Lorsque $k = 2$ (resp. $k = 3$), on parlera de morphisme sans carré (resp. sans cube).

De même, un morphisme f sur A est *sans carré cadré* (resp. *sans chevauchement*) si l'image de tout mot sans carré cadré (resp. sans chevauchement) est aussi sans carré cadré (resp. sans chevauchement).

Un morphisme f sur A est appelé *préfixe* (resp. *suffixe*) si, pour toutes les lettres a et b dans A , le mot $f(a)$ n'est pas un préfixe (resp. pas un suffixe) de $f(b)$. Un morphisme f est non-effaçant si $f(a) \neq \varepsilon$ pour toutes les lettres a . Un morphisme est *bifixe* s'il est préfixe et suffixe.

Notons, qu'un morphisme préfixe (resp. suffixe) est injectif et est non-effaçant.

Un morphisme f de A^* vers B^* est un *ps-morphisme* si les égalités $f(a) = ps$, $f(b) = ps'$, et $f(c) = p's$ avec $a, b, c \in A$ (éventuellement $c = b$) et p, s, p' , et $s' \in B^*$ impliquent que $b = a$ ou $c = a$.

Notons qu'un *ps-morphisme* est bifixe.

Rappelons quelques définitions et propriétés qui seront utilisées dans la suite.

Le lemme 3.1 découle directement de la définition d'un morphisme préfixe ou suffixe.

Lemma 3.1 *Soit f un morphisme bifixe sur un alphabet A et soient u, v, w , et t des mots sur A .*

L'égalité $f(u) = f(v)p$ où p est un préfixe de $f(w)$ implique $u = vw'$ pour un préfixe w' de w tel que $f(w') = p$.

De façon symétrique, l'égalité $f(u) = sf(v)$ où s est suffixe de $f(t)$ implique $u = t'v$ pour un suffixe t' de t tel que $f(t') = s$.

Lemme 3.2 [2, 4] *Si f n'est pas un ps-morphisme alors f n'est pas un morphisme sans puissance k pour tout entier $k \geq 2$.*

Supposons que $f(\bar{w}) = pu^k s$ pour un facteur \bar{w} d'un mot w et pour un mot non vide u , et supposons que \bar{w} contient un facteur w_0 tel que $|f(w_0)| = |u|$, si f est un ps-morphisme, le lemme 3.4 établit que \bar{w} contient nécessairement une puissance k de la forme w'^k avec $f(w')$ un conjugué de u . Nous dirons que $f(w)$ contient une puissance k synchronisée u^k . Plus précisément :

Definition 3.3 *Soit $k \geq 2$ un entier. Soit f un morphisme de A^* vers B^* , w un mot sur A , et u un mot non vide sur B tel que $f(w)$ contient la puissance k u^k . Soit \bar{w} un plus court facteur de w dont l'image par f contient u^k , c'est-à-dire $f(\bar{w}) = pu^k s$ avec $|p| < |f(\bar{w}[1])|$ et $|s| < |f(\bar{w}[\bar{w}])|$.*

Nous dirons que $f(w)$ et u^k sont synchronisés s'il existe trois mots w_0, w_1 , et w_2 tels que $|f(w_0)| = |u|$ et $\bar{w} = w_1 w_0 w_2$ avec $p = \varepsilon$ si $w_1 = \varepsilon$, et $s = \varepsilon$ si $w_2 = \varepsilon$.

Soit f le morphisme de $\{a, b, c\}^*$ vers $\{a, b, c, d\}^*$ défini par $f(a) = abcd$, $f(b) = ac$ et $f(c) = d$.

Si w est le mot $abc bcb a a$, alors nous avons $f(w) = ab(cda)^3 c abcd abcd$. En prenant $u = cda$, $\bar{w} = abc bcb$ et $w_0 = bc$, nous obtenons que $f(w)$ et u^3 sont synchronisés.

On remarquera que f n'est pas un morphisme suffixe et il n'est donc pas sans puissance $k(\geq 2)$.

Lemme 3.4 [8] *Soit $k \geq 2$ un entier, soit f un ps-morphisme, et soit w un mot tel que $f(w) = pu^k s$ avec $|p| < |f(w[1])|$ et $|s| < |f(w[\bar{w}])|$. Si $f(w)$ et u^k sont synchronisés alors w commence ou finit avec une puissance k de la forme w_0^k avec $f(w_0)$ et u conjugués.*

En ce qui concerne les morphismes sans puissance c'est-à-dire sans puissance k pour tous les entiers $k \geq 2$, les résultats que nous allons utiliser ont été donnés par Leconte.

Théorème 3.5 [3] *Un morphisme de A^* vers B^* sans carré jusqu'à trois est sans puissance $k \geq 4$.*

Théorème 3.6 [3] *Un morphisme de A^* vers B^* sans carré jusqu'à trois et tel que, pour toute lettre a dans A , le mot $f(a^2)$ ne contient pas de cube, est sans puissance $k \geq 3$.*

Definition 3.7 *On dit que deux morphismes f et g de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ sont équivalents s'il existe une permutation σ_1 de $\llbracket 0; n \rrbracket$ et une permutation σ_2 de $\llbracket 0; p \rrbracket$ telles que $f \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ g$.*

Les morphismes f, g de $\{0, 1, 2\}^*$ dans $\{0, 1\}^*$ définis par $f(0) = 011$, $f(1) = 101$, $f(2) = 110$, $g(0) = 010$, $g(1) = 001$ et $g(2) = 100$ sont équivalents.

Remarque 3.8 On vérifie aisément que "être équivalents" est une relation d'équivalence sur les morphismes.

Lemme 3.9 Soient f et g deux morphismes équivalents. Alors, pour tout entier $k \geq 2$, f est sans puissance k si et seulement si g est sans puissance k .

Preuve.

Par symétrie, il suffit de montrer que f n'est pas sans puissance k implique que g n'est pas sans puissance k .

On suppose que $f \circ \sigma_1 = \sigma_2 \circ g$ et que $f(w) = pu^k s$ avec $u \neq \varepsilon$ et w sans puissance k . Le mot $\sigma_1^{-1}(w)$ est sans puissance k et $g(\sigma_1^{-1}(w)) = \sigma_2^{-1}(\sigma_2(g(\sigma_1^{-1}(w)))) = \sigma_2^{-1}(f(w)) = \sigma_2^{-1}(p)(\sigma_2^{-1}(u))^k \sigma_2^{-1}(s)$ avec $\sigma_2^{-1}(u) \neq \varepsilon$. \square

Lemme 3.10 Soit f un morphisme de A^* vers B^* et soient a, b deux lettres différentes de A . Si f est sans carré ou sans carré cadré et si $f(a)$ finit (respectivement commence) par x (lettre ou mot non vide) alors $f(b)$ ne commence pas (respectivement ne finit pas) par x .
Si f est sans chevauchement et si $f(a)$ finit (respectivement commence) par x (lettre ou mot non vide) alors $f(b)$ ne finit pas (respectivement ne commence pas) par x .

Preuve.

Il suffit de considérer $f(ab)$, $f(ba)$, $f(baa)$ ou $f(aab)$. \square

Definition 3.11 [1, 9] Un endomorphisme f de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ est dit cyclique si f commute avec la permutation $\sigma = (0\ 1\ 2\ \dots\ n)$.

L'application f de $\{0, 1, 2\}^*$ dans $\{0, 1, 2\}^*$ définie par $f(0) = 2102$, $f(1) = 0210$ et $f(2) = 1021$ est un morphisme cyclique.

Nous étendons ici cette définition.

Definition 3.12 On dit qu'un morphisme de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ vers $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ est procyclique si $\delta_p(f(a)) = \delta_p(f(b))$ pour toutes les lettres a et b de A . Cette valeur commune sera appelée le canevas du morphisme.

Autrement dit un morphisme est procyclique si toutes les images des lettres ont le même canevas. Puisque $f(a) = ((f(a))[1], C)_p$, un morphisme procyclique f de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ vers $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ est donc défini par son canevas C et l'ensemble des premières lettres des images des lettres c'est-à-dire $\{(f(\ell))[1] \mid \ell \in \llbracket 0; n \rrbracket\}$.

Une fois le morphisme f défini, on utilisera plutôt la notation $\underline{f(a)} = \underline{f(b)}$ pour exprimer le fait que f est procyclique.

Le morphisme f de $\{0, 1, 2\}^*$ dans $\{0, 1, 2, 3\}^*$ défini par $f(0) = 0123$, $f(1) = 3012$ et $f(2) = 1230$ est un morphisme procyclique de canevas 111.

Remarque 3.13 Le morphisme de Thue-Morse ($\bar{\mu} : \{0; 1\}^* \rightarrow \{0; 1\}^*; 0 \mapsto 01$ et $1 \mapsto 10$) est un morphisme procyclique de canevas 1. C'est aussi un endomorphisme cyclique.

Exemple 3.14 On s'intéresse plus précisément au mot de Thue-Morse μ qui est obtenu en itérant le morphisme de Thue-Morse à partir de 0. Autrement dit, $\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{\mu}^n(0)$.

Remarquons que, pour tout entier $n \geq 0$, $\bar{\mu}^n(0)$ finit par 0 si n est pair et finit par 1 si n est impair. De plus, $\bar{\mu}^n(1)$ commence toujours par 1.

Soit $\underline{\mu}_n$ le canevas du morphisme $\bar{\mu}^n$, i.e., $\underline{\mu}_n = \bar{\mu}^n(0) = \bar{\mu}^n(1)$ et soit t la suite définie par $t_n = 0$ si n est pair et $t_n = 1$ si n est impair.

Pour tout entier $n \geq 2$, on a donc $\underline{\mu}_n = \bar{\mu}^{n-1}(0)\bar{\mu}^{n-1}(1) = \underline{\mu}_{n-1}t_n\underline{\mu}_{n-1}$. Il s'agit donc d'une suite bi-idéale.

Remarque 3.15 Un morphisme procyclique de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket$ est défini par son canevas et une application σ de $\llbracket 0; n \rrbracket$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket$ correspondant à la première lettre (ou une autre fixée) de l'image des lettres de $\llbracket 0; n \rrbracket$.

Remarque 3.16 Remarquons qu'un morphisme procyclique n'est pas nécessairement un endomorphisme et qu'il est par définition uniforme.

Remarquons aussi qu'un endomorphisme cyclique est un morphisme procyclique.

Remarque 3.17 Comme dans l'exemple 3.14, l'étude du canevas d'un mot engendré par un endomorphisme procyclique prolongeable en une lettre nous amènera sûrement à des sesqui-puissances.

4 Morphismes procycliques et puissance k

Lemme 4.1 Soit $k \geq 2$ un entier. Un endomorphisme procyclique sans puissance k de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans lui-même est équivalent à un endomorphisme cyclique.

Preuve.

On pose $A = \llbracket 0; n \rrbracket$. Soit f un endomorphisme procyclique sans puissance k de A^* dans lui-même de canevas C et soient a, b deux lettres de A .

Puisque f est procyclique, si $f(a)$ et $f(b)$ commencent par la même lettre alors $f(a) = f(b)$. Si $a \neq b$, on obtient donc que $f(a^{k-1}b)$ contient une puissance k . Cela signifierait que f n'est pas un morphisme sans puissance k : une contradiction avec les hypothèses.

Donc, on a $a \neq b \Rightarrow (f(a))[1] \neq (f(b))[1]$. Autrement dit, $\{(f(\ell))[1] \mid \ell \in A\} = A$. Ce qui signifie qu'il existe une permutation τ de $\llbracket 0; n \rrbracket$ telle que, pour tout a de $\llbracket 0; n \rrbracket$, on ait que $(f \circ \tau)(a)$ commence par a .

L'endomorphisme $g = f \circ \tau$ est aussi procyclique de canevas C .

Si on pose $\sigma = (012 \dots n)$, on a $(\sigma \circ g)(a) = \sigma((f \circ \tau)(a)) = \sigma((a, C)_n) = (\sigma(a), C)_n = (f \circ \tau)(\sigma(a)) = (g \circ \sigma)(a)$. \square

Lemme 4.2 Soit f de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ un endomorphisme procyclique sans carré. Alors, pour tout a dans $\llbracket 0; n \rrbracket^*$, $f(a)$ commence et finit par la même lettre.

Preuve.

On pose $A = \llbracket 0; n \rrbracket$. On suppose que f est L -uniforme avec $L \geq 1$ et soient a, b deux lettres de A .

Comme dans la preuve du lemme 4.1, si $f(a)$ et $f(b)$ commencent ou finissent par la même lettre alors $f(a) = f(b)$ et $f(ab)$ est un carré. Puisque f est sans carré, cette situation ne peut se réaliser que si $a = b$.

Donc $\{(f(\ell))[1] \mid \ell \in A\} = A = \{(f(\ell))[L] \mid \ell \in A\}$.

On suppose maintenant que $f(a)$ finisse par la lettre x . Pour toute lettre $b \neq a$, si $f(b)$ commençait par x alors $f(ab)$ contiendrait le carré xx : ce qui est contraire aux hypothèses. Puisque $\{(f(\ell))[L] \mid \ell \in A\} = A$, cela signifie que $f(a)$ commence par x . \square

Remarque 4.3 *Le lemme 4.2 ne s'applique pas aux endomorphismes procycliques sans carré cadré. Par exemple, le morphisme de $\llbracket 0; 1 \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; 1 \rrbracket^*$ défini par $f(0) = 01 = f(1)$ est un morphisme procyclique qui n'est pas sans carré puisque $f(01) = (01)^2$ ni même sans puissance k en général. Mais il est sans carré cadré puisque l'image de tout mot est de la forme $(01)^i$ qui ne peut pas s'écrire comme un carré cadré. Et pourtant, $f(0)$ commence et finit par des lettres différentes.*

Lemme 4.4 *Soit f de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ un morphisme procyclique de canevas C . Soient X , Y et Z des images de lettres par f .*

Si on a $XYb = SZP$ où b est une lettre, S est le suffixe non vide de l'image d'une lettre par f et P est le préfixe de l'image d'une lettre par f avec $|P| \geq 2$, alors $\underline{X[\underline{X}]Y[1]} = \underline{Y[\underline{Y}]b} = \underline{S[\underline{S}]Z[1]} = \underline{Z[\underline{Z}]P[1]}$

Dans la suite, la condition $|P| \geq 2$ proviendra naturellement du fait que nous serons en présence d'une désynchronisation.

Preuve.

Si on note $\alpha = \underline{X[\underline{X}]Y[1]}$, $\beta = \underline{Y[\underline{Y}]b}$, $\gamma = \underline{S[\underline{S}]Z[1]}$ et $\delta = \underline{Z[\underline{Z}]P[1]}$, on tire de $XYb = SZP$ que $C\alpha C\beta = \underline{XYb} = \underline{SZP} = C_2\gamma C\delta C_1$ où C_1 est un préfixe de C et C_2 est un suffixe de C .

En outre, puisque $|C\alpha C\beta| = |C_2\gamma C\delta C_1|$, on a $|C| = |C_2 C_1|$. Autrement dit, $C = C_1 C_2$ et l'équation devient $C_1 C_2 \alpha C_1 C_2 \beta = C_2 \gamma C_1 C_2 \delta C_1$.

Cela signifie que $C_1 (\neq \varepsilon)$ finit par β . Et, puisque $|C_1 C_2 \alpha| = |C_2 \gamma C_1|$, du préfixe de l'équation, on tire $C_1 C_2 \alpha = C_2 \gamma C_1$, c'est-à-dire C_1 finit par α . Autrement dit, on a $\alpha = \beta$.

Il existe un mot C'_1 tel que $C_1 = C'_1 \alpha$ et donc $C'_1 \alpha C_2 \alpha C'_1 \alpha C_2 \alpha = C_2 \gamma C'_1 \alpha C_2 \delta C'_1 \alpha$

Par des critères de longueur, on obtient les égalités $C'_1 \alpha C_2 = C_2 \gamma C'_1$ et $C'_1 \alpha C_2 = C_2 \delta C'_1$. On conclut avec le lemme 1.9 : $\alpha = \gamma$ et $\alpha = \delta$. \square

On démontre de façon identique que :

Lemme 4.5 *Soit f de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ un morphisme procyclique de canevas C . Soient X , Y et Z des images de lettres par f .*

Si on a $bXY = SZP$ où b est une lettre, S est le suffixe de l'image d'une lettre par f avec $|S| \geq 2$ et P est le préfixe non vide de l'image d'une lettre par f , alors $\underline{bX[1]} = \underline{X[\underline{X}]Y[1]} = \underline{S[\underline{S}]Z[1]} = \underline{Z[\underline{Z}]P[1]}$

Corollaire 4.6 Soient $\ell \geq 2$ et $L \geq 2$ deux entiers et soit f de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ un morphisme L -uniforme procyclique de canevas C . Soient $x_0, x_1 \dots x_{\ell+1}, x'_0, x'_1, \dots x'_\ell$ des lettres de $\llbracket 0; n \rrbracket$.

Si on a l'égalité $s_0 f(x_1) \dots f(x_\ell) p_{\ell+1} = s'_0 f(x'_1) \dots f(x'_{\ell-1}) p'_\ell$ avec $f(x_0) = p_0 s_0$, $f(x'_0) = p'_0 s'_0$, $f(x_{\ell+1}) = p_{\ell+1} s_{\ell+1}$ et $f(x'_\ell) = p'_\ell s'_\ell$ avec $p'_0, p_{\ell+1}, p'_\ell$ des mots non vides alors les lettres $(f(x_i)[L]f(x_{i+1})[1])_{i=1..l}$ et $(f(x'_i)[L]f(x'_{i+1})[1])_{i=0..l-1}$ sont toutes une même lettre α .

Si, de plus, $|s_0| \neq 0$ alors $\underline{f(x_0)[L]f(x_1)[1]} = \alpha$.

Preuve.

Puisque $|s_0 f(x_\ell) p_{\ell+1}| = |s'_0 p'_\ell|$ et $|f(x_\ell) p_{\ell+1}| > |p'_\ell|$, on a $|s_0| < |s'_0|$. Soit s''_0 le suffixe de s'_0 tel que $s'_0 = s_0 s''_0$. Cela signifie que s''_0 est aussi un suffixe de $f(x'_0)$.

L'équation devient : $f(x_1) \dots f(x_\ell) p_{\ell+1} = s''_0 f(x'_1) \dots f(x'_{\ell-1}) p'_\ell$ (1)

On a donc $f(x_1) f(x_2) x = s''_0 f(x'_1) p$ où x est la première lettre de $f(x_3)$ et p est un préfixe de $f(x'_2)$. Puisque $|s_0| < |s'_0|$, on a $|s''_0| \leq |s'_0| < L$ et donc $|p| \geq 2$.

D'après le lemme 4.4, on obtient que $\underline{f(x_1)[L]f(x_2)[1]} = \underline{f(x_2)[L]f(x_3)[1]} = \underline{f(x'_0)[L]f(x'_1)[1]} = \underline{f(x'_1)[L]f(x'_2)[1]} = \alpha$.

Si $|s_0| \neq 0$ alors, en utilisant la dernière lettre de s_0 , d'après le lemme 4.5 on a, de plus, $\underline{f(x_0)[L]f(x_1)[1]} = \alpha$.

Si $\ell \geq 3$, il suffit de considérer les mots de l'équation (1) auxquels on a retiré les $L \times (\ell - 2)$ premières lettres pour obtenir le résultat de façon récursive. \square

En considérant un préfixe non vide de $f(x_\ell)$ dans le corollaire 4.6, on obtient directement :

Corollaire 4.7 Soient $\ell \geq 2$ et $L \geq 2$ deux entiers et soit f de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ un morphisme L -uniforme procyclique de canevas C . Soient $x_0, x_1 \dots x_\ell, x'_0, x'_1, \dots x'_\ell$ des lettres de $\llbracket 0; n \rrbracket$.

Si on a l'égalité $s_0 f(x_1) \dots f(x_{\ell-1}) p_\ell = s'_0 f(x'_1) \dots f(x'_{\ell-1}) p'_\ell$ avec $|s_0| < |s'_0|$, $f(x_0) = p_0 s_0$, $f(x'_0) = p'_0 s'_0$, $f(x_\ell) = p_\ell s_\ell$, $f(x'_\ell) = p'_\ell s'_\ell$ et p'_0, p_ℓ, p'_ℓ des mots non vides alors les lettres $(f(x_i)[L]f(x_{i+1})[1])_{i=1..l-1}$ et $(f(x'_i)[L]f(x'_{i+1})[1])_{i=0..l-1}$ sont toutes une même lettre α .

Si, de plus, $|s_0| \neq 0$ alors $\underline{f(x_0)[L]f(x_1)[1]} = \alpha$.

Lemme 4.8 Soit $k \geq 2$ un entier et soit f de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ un morphisme procyclique de canevas C .

S'il existe deux mots π et σ , un mot non vide u et un mot w de longueur supérieure ou égale à $2k + 2$ tels que $f(w) = \pi u^k \sigma$ avec $|\pi| < |f(w[1])|$ et $|\sigma| < |f(w[|w|])|$ et si $f(w)$ et u^k ne sont pas synchronisés alors il existe une lettre α , deux entiers $2 \leq i < j$ et deux mots t_1 et t_2 tels que $f(w) = (C\alpha)^{|w|-1} C$, $C\alpha = (t_1 t_2)^i$ et $\underline{u u [1]} = (t_2 t_1)^j$ avec $t_1 t_2$ et $t_2 t_1$ primitifs et j n'est pas un multiple de i .

Preuve.

Pour tout entier j compris entre 0 et k , soit i_j le plus petit entier tel que $|f(w[1..i_j])| \geq |\pi u^j|$. Puisque f est L -uniforme pour un entier L et puisque $|w| \geq 2k + 2$, nous avons $|u^k| \geq |f(w[2..|w| - 1])| \geq 2k \times L$. Puisque $f(w)$ et u^k ne sont pas synchronisés, nous avons $|u| > 2L$

et $1 = i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_k = |w|$. Pour tout entier q avec $0 \leq q \leq k$, il existe des mots p_q et s_q tels que $f(w[i_q]) = p_q s_q$ et, pour tous les entiers q tels que $1 \leq q \leq k$, $u = s_{q-1} f(w[i_{q-1} + 1..i_q - 1]) p_q$ avec $p_q \neq \varepsilon$ (par définition de i_q). En outre, $s_0 \neq \varepsilon$, $p_0 = \pi$ et $s_k = \sigma$.

La situation précédente peut être résumée par la figure 1.

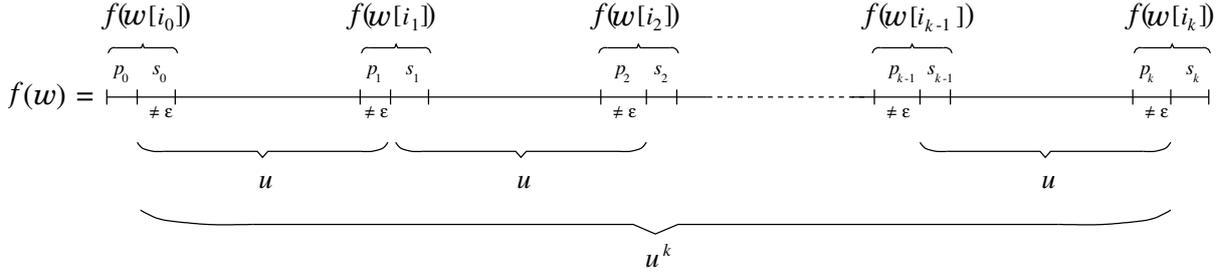


FIGURE 1 – Décomposition d'une puissance k

Si, pour tout entier $1 \leq q \leq k$, on avait $i_q \leq i_{q-1} + 2$ alors on aurait $|w| = i_k \leq 1 + 2k$ ce qui est contraire aux hypothèses. Ce qui signifie donc que $|w[i_q + 1..i_{q+1} - 1]| \geq 2$.

Puisque $f(w)$ et u^k ne sont pas synchronisés, on a $s_i \neq s_j$ si $i \neq j$. Soit ℓ l'entier tel que $|s_\ell| = \min_{0 \leq i \leq k-1} |s_i|$. Puisque, pour tout entier $1 \leq q \leq k$, on a $|u| = |s_{q-1} f(w[i_{q-1} + 1..i_q - 1]) p_q|$, cela implique que $|w[i_\ell + 1..i_{\ell+1} - 1]| \geq |w[i_q + 1..i_{q+1} - 1]| \geq 2$.

Si $\ell \neq k - 1$, alors $u = s_\ell f(w[i_\ell + 1..i_{\ell+1} - 1]) p_{\ell+1} = s_{\ell+1} f(w[i_{\ell+1} + 1..i_{\ell+2} - 1]) p_{\ell+2}$. Par un critère de longueur les entiers $i_{\ell+2} - i_{\ell+1}$ et $i_{\ell+1} - i_\ell$ ne peuvent varier que de 1. D'après les corollaires 4.6 et 4.7, les lettres $(f(w[q])[L]f(w[q+1])[1])_{q=i_\ell..i_{\ell+2}-1}$ sont identiques et notées α . Les mots $\underline{uu} = \underline{uu[1]} \underline{u} = \underline{u} \underline{u[u]u[1]} \underline{u}$ et $C\alpha$ ont donc un facteur commun de longueur $|\underline{uu}| \geq |\underline{uu[1]}| + |C\alpha|$.

D'après le corollaire 1.2, il existe deux mots t_1 et t_2 et deux entiers i et j tels que $C\alpha = (t_1 t_2)^i$ et $\underline{uu[1]} = (t_2 t_1)^j$ avec $t_1 t_2$ et $t_2 t_1$ des mots primitifs.

Si j est un multiple de i (c'est en particulier le cas si $i = 1$), puisque $L = |C\alpha|$ et $|u| = |\underline{uu[1]}|$, on obtient que $|u|$ est un multiple de L et donc que $f(w)$ et u^k sont synchronisés : ce qui est contraire aux hypothèses. De plus, puisque $|u| > L$, on a $j > i$.

Le cas $\ell = k - 1$ se résout de la même façon, en considérant $u = s_{\ell-1} f(w[i_{\ell-1} + 1..i_\ell - 1]) p_\ell = s_\ell f(w[i_{\ell+1} + 1..i_{\ell+2} - 1]) p_{\ell+2}$. \square

On connaît déjà une borne sur les mots à tester pour savoir si un morphisme uniforme est sans puissance k .

Proposition 4.9 [7] *Un morphisme uniforme défini sur A est sans puissance k s'il est sans puissance k jusqu'à $k \times \text{Card}(A) + k + 1$.*

Cette borne est inférieure dans le cas des morphismes procycliques.

Proposition 4.10 *Un morphisme procyclique de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ est sans puissance k s'il est sans puissance k jusqu'à $\ell_k = \max \left\{ 2k + 2; \left\lceil \frac{1 + (n + 1) \times k}{2} \right\rceil \right\}$.*

Preuve.

On suppose que f est de $\llbracket 0; n \rrbracket^*$ dans $\llbracket 0; p \rrbracket^*$ de canevas C .

Par l'absurde, on suppose que f est sans puissance k jusqu'à ℓ_k mais qu'il existe un mot w sans puissance k de longueur supérieure ou égale à $\ell_k + 1$ tel que $f(w)$ contienne une puissance k . Plus précisément, on suppose que w est le plus petit mot dont $f(w)$ contient une puissance k et que $f(w) = pu^ks$ avec $|p| < |f(w[1])|$ et $|s| < |f(w[\lceil w \rceil])|$.

Puisque w ne contient pas de puissance k , d'après le lemme 3.4, $f(w)$ et u^k ne sont pas synchronisés. Et, puisque $|w| \geq 2k + 2$, d'après le lemme 4.8, il existe une lettre α , deux entiers $2 \leq i < j$ et deux mots t_1 et t_2 tels que $\underline{f(w)} = (C\alpha)^{|w|-1}C$, $C\alpha = (t_1t_2)^i$ et $\underline{uu[1]} = (t_2t_1)^j$ avec t_1t_2 et t_2t_1 primitifs.

Puisque $i \geq 2$, cela signifie que $\underline{f(w)}$ contient $(t_1t_2)^{2|w|-2}(t_1t_2) = (t_1t_2)^{2|w|-1}$.

Puisque $|w| \geq \left\lceil \frac{1 + (n + 1) \times k}{2} \right\rceil$, on a $2|w| - 1 \geq (n + 1) \times k$. D'après le corollaire 2.5, cela signifie que w contient une puissance k : une contradiction finale. \square

5 Morphismes sans carré et sans carré cadré

La non-synchronisation et la définition d'un ps-morphisme adaptées aux morphismes sans carré nous donne le lemme suivant :

Lemme 5.1 *Soit f un morphisme de A^* dans B^* .*

S'il existe trois lettres x, y et z de A tels que $f(x) = sp$ avec s un suffixe non vide de $f(y)$ et p un préfixe non vide de $f(z)$ avec $x \neq y$ ou $x \neq z$ alors f n'est pas sans carré.

Preuve.

Il suffit de calculer $f(yx)$ ou $f(xz)$. \square

Proposition 5.2 *Un morphisme uniforme sans carré est sans carré cadré.*

Remarque 5.3 *La réciproque est fausse comme le montre l'exemple de la remarque 4.3.*

Preuve.

Soit f un morphisme de A^* vers B^* L -uniforme (avec $L \geq 1$).

Par contraposée, on suppose que f n'est pas sans carré cadré. On cherche à montrer que f n'est pas sans carré c'est-à-dire qu'il existe un mot sans carré dont l'image contient un carré.

Autrement dit, on suppose qu'il existe un mot w de A^* sans carré cadré tel que $f(w) = pbUUbs$ avec $b \in B$ et $U \in B^*$.

On suppose que la longueur de w est minimale (l'image d'un mot de longueur strictement inférieure à w ne contient pas de carré cadré). Ce qui implique que $|p| < |f(w[1])|$ et $|s| < |f(w[\lceil w \rceil])|$.

Rappelons que, si $|w| \leq 3$, alors w sans carré est équivalent w sans carré cadré. Ce qui termine la preuve dans ce cas puisque l'image de w contient un carré.

Remarquons que, si $L = 1$, alors $f(w) = pbUUbs$ implique que w contient un carré cadré (en n'oubliant pas le cas particulier des carrés de lettres). Ce qui est contraire aux hypothèses. On travaille donc avec $L \geq 2$.

D'après le lemme 3.2, on peut aussi supposer que f est un ps -morphisme.

Remarquons aussi que, si $f(w)$ contient un carré de lettres, alors ce carré est facteur de l'image d'un mot w_0 d'une lettre ou de deux lettres qui serait facteur de w . Donc w_0 (sans carré bordé) est sans carré et $f(w_0)$ contient un carré (de lettres) : on obtient que f n'est pas sans carré. Ce qui termine la preuve dans ce cas.

On suppose donc que $|w| \geq 4$, que $U \neq \varepsilon$ et que, comme w , $f(w)$ ne contient pas de carré de lettres.

De $|w| \geq 4$, on tire que soit $|pbU| \leq |f(w[1..2])|$ soit $|Ubs| \leq |f(w[|w| - 1..|w|])|$. Puisque $|pb| \leq |f(w[1])|$ et $|Us| \leq |f(w[|w|])|$, on obtient que l'une des occurrences de U contient obligatoirement au moins l'image d'une lettre par f .

Si $f(w)$ et U^2 ne sont pas synchronisés, d'après le lemme 5.1, f n'est pas sans carré : cela termine la preuve dans ce cas.

Puisque $f(w)$ et U^2 sont synchronisés et, d'après le lemme 3.4, w commence ou finit par un mot w_0^2 tel que $f(w_0)$ soit un conjugué de U .

Si w commence par w_0^2 , puisque $|w_0| \geq 2$, il existe deux mots U_1 et U_2 tels que $U = U_1U_2$ et $f(w_0) = pbU_1 = U_2U_1$. D'où $U_2 = pb$ et $f(w)$ finit par $Ubs = U_1U_2bs = U_1pbbs$ ce qui contredit le fait que $f(w)$ ne contient pas de carré de lettres.

De même, on obtient une contradiction si w finit par w_0^2 . \square

Remarque 5.4 *Un autre exemple montrant que la réciproque est fausse est donné par Zolotov (Théorème 2 dans [9]). Il semblerait que l'endomorphisme procyclique suivant soit sans carré cadré : $\phi : \{0, 1, 2\}^* \rightarrow \{0, 1, 2\}^*$; $\phi(0) = 01210$ $\phi(1) = 12021$ et $\phi(2) = 20102$.*

Mais il n'est pas sans carré puisque $\phi(101) = 120210121012021 = 120(2101)^22021$. On remarquera aussi que puisque $\phi(101)$ contient un chevauchement, l'endomorphisme ϕ n'est pas sans chevauchement.

6 Morphismes sans puissance

Proposition 6.1 *Si f est un morphisme de A^* vers B^* et si, pour tout $a \in A$, $f(a)$ est sans carré et $f(a)$ commence et finit par la même lettre alors $f(a^2)$ ne peut pas contenir de cube.*

Preuve.

Par l'absurde, supposons que $f(aa) = \alpha_1 u^3 \alpha_2$ avec $u \neq 0$.

Si $|\alpha_1 u^2| \leq |f(a)|$ alors $\alpha_1 u^2$ est un préfixe de $f(a)$. C'est contraire aux hypothèses.

Si $|\alpha_1 u| \geq |f(a)|$ alors $u^2 \alpha_2$ est un suffixe de $f(a)$. C'est à nouveau contraire aux hypothèses.

Donc $|\alpha_1 u| < |f(a)| < |\alpha_1 u^2|$. Mais $f(a)$ commence et finit par la même lettre x . Donc xx est un facteur de u qui est lui-même facteur de $f(a)$. Une dernière contradiction avec les hypothèses. \square

Grâce au lemme 4.2, on en déduit que :

Corollaire 6.2 *Si f est un endomorphisme procyclique sans carré alors $f(a^2)$ ne peut pas contenir de cube.*

Et, en utilisant les théorèmes 3.5 et 3.6, on obtient directement que :

Corollaire 6.3 *Un morphisme procyclique sans carré est sans puissance $k \geq 4$.*

Corollaire 6.4 *Un endomorphisme procyclique sans carré est sans puissance $k \geq 3$.*

Remarque 6.5 *Attention, dans le cas où l'on ne travaille pas avec des endomorphismes, le corollaire 6.3 ne peut pas être amélioré. Par exemple, si on prend le morphisme procyclique $g : \{0, 1, 2\}^* \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}^*$ tel que $g(0) = 0304303$, $g(1) = 1415414$ et $g(2) = 2526525$, on a que g est sans carré (et donc sans puissance $k \geq 4$). Mais $g(00)$ contient $(30)^3$ et donc g n'est pas sans cube.*

Références

- [1] James D. Currie and Ali Aberkane. A cyclic binary morphism avoiding abelian fourth powers. *Theor. Comput. Sci.*, 410(1) :44–52, January 2009.
- [2] V. Keränen. On the k -freeness of morphisms on free monoids. *Annales Academiae Scientiarum Fennicae* 61, Series A, 1986.
- [3] M. Leconte. A characterization of power-free morphisms. *Theoretical Computer Science*, 38 :117–122, 1985.
- [4] M. Leconte. *Codes sans répétition*. PhD thesis, LITP Université Paris 6, october 1985.
- [5] M. Lothaire. *Combinatorics on words*, volume 17 of *Encyclopedia of Mathematics*. Addison-Wesley, 1983. Reprinted in 1997 by Cambridge University Press in the Cambridge Mathematical Library, Cambridge, UK, 1997.
- [6] M. Lothaire. *Algebraic Combinatorics on words*, volume 90 of *Encyclopedia of Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2002.
- [7] Gwénaél Richomme and Francis Wlazinski. Existence of finite test-sets for k -power-freeness of uniform morphisms. *Discrete Applied Mathematics*, 155(15) :2001–2016, 2007.
- [8] F. Wlazinski. Reduction in non- $(k + 1)$ -power-free morphisms. *RAIRO Theor. Inform. Appl.*, Volume 50, Number 1, January-March 2016, Special issue dedicated to the 15th "Journées montoises d'informatique théorique" :3–20, 2016.
- [9] Boris Zolotov. Another solution to the thue problem of non-repeating words. 04 2015.