



HAL
open science

Mesure des propriétés viscoélastiques des matériaux précontraints par propagation d'onde acoustique.

Pierre Lemerle

► **To cite this version:**

Pierre Lemerle. Mesure des propriétés viscoélastiques des matériaux précontraints par propagation d'onde acoustique.. [Rapport de recherche] Notes scientifiques et techniques NS 359, Institut National de Recherche et de Sécurité (INRS). 2018, 65 p. hal-01895740

HAL Id: hal-01895740

<https://hal.science/hal-01895740>

Submitted on 15 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

scientifique & technique
note
note scientifique
& technique
scientifique
technique

**Mesure des propriétés viscoélastiques
des matériaux précontraints
par propagation d'onde acoustique**

Measuring viscoelastic properties of strained
materials with a novel wave propagation method

Mesure des propriétés viscoélastiques des matériaux précontraints par propagation d'onde acoustique

Measuring viscoelastic properties of strained
materials with a novel wave propagation method

Pierre Lemerle

Département Homme au travail

NS 359
juin 2018

Table des matières

Mesure des propriétés viscoélastiques des matériaux précontraints par propagation d'onde acoustique

1. INTRODUCTION.....	3
2. METHODE	6
2.1. equations de Propagation dans les milieux dispersifs.....	6
2.2. conditions de Reflexion et de transmission a l'interface	7
2.3. Identification des propriétés viscoélastiques	11
3. VERIFICATION	12
3.1. Developpement d'une loi hyper-viscoélastique.....	13
3.2. Modèle éléments finis du barreau composite.....	17
3.3. Analyse Mecanique Dynamique numérique	19
4. RESULTATS ET DISCUSSION	21
5. CONCLUSION	32
Remerciements.....	33

Measuring viscoelastic properties of strained materials with a novel wave propagation method

1. INTRODUCTION.....	34
2. METHOD.....	37
2.1. Propagation equations in dispersive media.....	37
2.2. Reflection and transmission conditions at the interface.....	38
2.3. Identification of viscoelastic properties.....	41
3. VERIFICATION	43
3.1. Development of a hyper-viscoelastic law	43
3.2. Finite Element model of the composite bar	47
3.3. Digital DMA test	49
4. RESULTS and DISCUSSION	51
5. CONCLUSION	62
Acknowledgement	63
6. REFERENCES.....	63

Mesure des propriétés viscoélastiques des matériaux précontraints par propagation d'onde acoustique

Pierre Lemerle

Institut National de Recherche et de Sécurité, 1 rue du Morvan – CS 60027 – 54519 Vandœuvre cedex, France

Les matériaux viscoélastiques sont utilisés couramment dans des applications vibro-acoustiques pour atténuer les vibrations et le bruit grâce à leurs facultés de dissipation de l'énergie mécanique. Les méthodes de propagation d'ondes font partie d'une famille grandissante de méthodes de caractérisation. Elles se fondent sur la mesure d'un profil d'onde engendrée par une impulsion dans une structure allongée et unidimensionnelle. L'évolution temporelle du front d'onde peut être utilisée pour en déduire les caractéristiques élastiques et dissipatives du matériau. Les méthodes de propagation les plus populaires, nommées méthodes d'Hopkinson supposent l'absence de dispersion, c.à.d. aucune dépendance fréquentielle du module d'élasticité complexe, ce qui n'est pas représentatif des matériaux résilients comme les élastomères. Des techniques plus récentes ont été déclinées de ces méthodes pour permettre la mesure des propriétés viscoélastiques dépendant de la fréquence à partir d'une impulsion se propageant dans un barreau de matériau fin et élancé. Par la suite, nous avons montré dans des travaux antérieurs comment étendre ces techniques à des échantillons de matériaux de dimensions faibles, ce qui représente une avancée notable dans la mesure où la mise en œuvre de ces matériaux prend souvent la forme de butées ou de plots, donc des structures compactes. Il n'est pas toujours aisé et souvent couteux d'extruder des échantillons sous la forme de barreaux. L'idée principale de cette méthode était de reconstruire l'évolution temporelle de l'onde dans une structure composite constituée d'un barreau porte-échantillon de propriétés connues ou non et d'un échantillon de matériau à caractériser, collé à son extrémité. Les propriétés viscoélastiques de l'échantillon étaient déterminées dans le domaine fréquentiel à l'aide d'une méthode inverse réalisée dans le domaine temporel.

Dans l'industrie, les applications d'isolation vibratoire ou acoustique utilisent souvent des composants support de type plot qui ont en outre la fonction de soutenir le poids des structures et des machines. C'est pourquoi il est intéressant de connaître leurs propriétés viscoélastiques tangentes autour de leur point de fonctionnement mécanique. Dans cette étude, nous montrons comment prendre en compte cette contrainte

supplémentaire pour étendre le domaine d'application de la méthode de mesure au cas des matériaux précontraints. Nous présentons le cadre théorique de la méthode d'identification des propriétés viscoélastiques et nous élaborons un modèle structural de type éléments finis de la structure composite pour valider le principe de mesure.

Cet axe de recherche s'inscrit dans un projet plus global « Concevoir plus Silencieux » dont le but originel était de développer des méthodes expérimentales ou numériques permettant de concevoir des machines plus silencieuses et moins vibrantes. La méthode développée ici offre le double intérêt d'un coût très faible, quelques dizaines d'euros, donc à la portée de tous les bureaux d'étude et d'un spectre de caractérisation fréquentielle très large en comparaison aux méthodes vibratoires conventionnelles très onéreuses consistant à soumettre des échantillons à des cycles de déformation balayés en fréquence.

1. INTRODUCTION

Les applications industrielles pour l'isolation vibratoire et acoustique utilisent couramment des matériaux absorbants comme les élastomères. C'est par exemple le cas des supports de machines constitués de plots en caoutchouc. L'optimisation de ces composants mécaniques par simulation numérique requiert la connaissance de leurs propriétés mécaniques intrinsèques.

La viscoélasticité se caractérise par une relation spéciale liant les contraintes et les déformations pouvant se scinder en une réponse instantanée et une réponse différée. Tous les matériaux, qu'ils soient naturels ou manufacturés, présentent des caractéristiques viscoélastiques dans des mesures variables. Ces dernières résultent de l'énergie de dissipation interne de la matière.

Dans la littérature, des grandeurs physiques équivalentes peuvent être utilisées pour caractériser ce comportement mécanique. Les contraintes peuvent s'exprimer comme une fonction des déformations grâce au module d'élasticité complexe $E^* = E' + jE''$. La partie réelle décrit la réponse élastique pure alors que la partie imaginaire fournit une mesure de l'atténuation de l'énergie ou, de manière équivalente, de l'amortissement. δ est nommé l'angle de perte entre la contrainte et la déformation, c.à.d. l'angle de phase. La grandeur $\text{tg}(\delta)$ s'obtient à partir de E'' et E' et se nomme le facteur perte.

De nombreuses méthodes ont été développées par le passé et plus récemment pour mesurer ces grandeurs. On les scinde en trois grandes familles.

Premièrement, les méthodes AMD (Analyse Mécanique Dynamique) sont utilisées pour caractériser les matériaux hors résonances structurales [1-4]. Des échantillons de matériaux sont testés dans des conditions stationnaires. Une contrainte sinusoïdale leur est appliquée et la déformation résultante est mesurée. Le module complexe est alors déduit de ces grandeurs duales. Ces méthodes sont submodales, c.à.d. elles ne supposent aucun effet inertiel. En conséquence, elles possèdent des limitations fréquentielles pour éviter toute résonance de l'échantillon. Typiquement, les fabricants de visco-analyseurs affichent des limitations de l'ordre de 200 Hz dans les spécifications techniques de leurs matériels. Des améliorations ont été proposées pour tenir compte de la souplesse des bancs, en particulier au niveau des mâchoires de maintien des échantillons et aussi pour compenser l'effet dynamique dû à la densité non nulle des matériaux testés [5,6]. Des formules correctrices permettent ainsi de traiter les mesures brutes.

A l'inverse, une seconde classe de méthodes tire profit des modes structuraux. L'excitation d'échantillons de formes simples par des vibrations stationnaires permet de détecter et mesurer des composantes harmoniques de fréquences propres. Usuellement, les sources ultrasonores sont utilisées à ces fins [7]. La partie réelle du module d'élasticité peut s'exprimer en fonction des ordres harmoniques supérieurs selon la dimension de la structure. L'amortissement ou la partie imaginaire peut être déduite du facteur de surtension mesuré préalablement par balayage en fréquence autour de la résonance. Le même principe est utilisé avec la méthode d'Oberst. Ici, l'extrémité libre d'une poutre encastrée multicouches est excitée par un actionneur électrodynamique [8,9]. La poutre de base est composée d'un matériau faiblement amorti comme de l'aluminium ou de l'acier et recouverte du matériau à tester. D'autres types d'échantillons peuvent être utilisés, supposant au préalable que la réponse à la résonance est connue de préférence sous forme analytique. Par exemple, la méthode SAE est fondée sur l'analyse vibratoire d'une plaque enduite suspendue et le coefficient d'amortissement est déduit de la réponse en fréquence FRF par la méthode de la bande passante à -3dB ou toute autre méthode alternative [10].

La troisième classe de méthode est basée sur une analyse transitoire. Un choc est généré à l'extrémité d'un barreau. La mesure du front d'onde à deux passages distincts ou à deux endroits le long du barreau permet d'en déduire l'évolution des propriétés élastiques en fréquence par un simple calcul de fonction de transfert. H. Kolsky établit les bases théoriques de cette méthode en 1954 [11]. Elle a été améliorée progressivement au cours des 5 dernières décennies [12-21]. A l'inverse des méthodes AMD, les méthodes de propagation d'ondes sont adaptées aux

intervalles de fréquences plus étendus, typiquement la gamme audiométrique. Ces méthodes sont donc idéalement adaptées aux applications vibro-acoustiques. En contrepartie, leur usage était restreint aux expérimentateurs confirmés. Par exemple, le collage des jauges de déformations est très délicat sur des matériaux souples. Dans le passé, nous avons montré comment substituer aux jauges de déformation l'usage de têtes de lecture de disques vinyles [22]. Ainsi, la vitesse matérielle, aussi dénommée vitesse de front d'onde [23], peut être mesurée puis traitée numériquement sans aucune compétence particulière. Une autre limitation était due au milieu de propagation, donc au matériau lui-même. Le milieu à une dimension prend la forme d'un barreau fin et long qu'il est souvent difficile de produire techniquement. Les fabricants préfèrent plutôt tester directement des composants sous la forme de plots ou de butées. Cette difficulté a été résolue en utilisant un barreau composite composé d'un barreau porte-échantillon adjoint d'un échantillon de courte longueur. Par cette nouvelle approche, les propriétés viscoélastiques de l'échantillon peuvent être déterminées à l'aide d'une méthode inverse. La propagation de l'onde dans deux milieux est reconstruite dans le domaine fréquentiel à l'aide des équations de dispersion incluant les termes de transport et des coefficients de réflexion et de transmission. L'onde ainsi reconstruite est comparée à la mesure dans le domaine temporel, comme une fonction des paramètres viscoélastiques de l'échantillon et du porte-échantillon. La solution de ce problème d'optimisation fournit une mesure des propriétés viscoélastiques réelles de l'échantillon test. Cette méthode a été validée expérimentalement lors de travaux antérieurs [24]. En particulier, l'hypothèse de milieu unidimensionnel a été satisfaite avec un barreau de référence de 1m et des échantillons d'élastomères de 22 mm et 45 mm.

En pratique, les applications industrielles vibro-acoustiques utilisent des plots ou des supports absorbants. Ces composants assurent une fonction mécanique de soutien en plus du découplage des structures. Il est alors intéressant de déterminer leurs propriétés viscoélastiques dans leur état déformé, c.à.d. un état précontraint. En effet, les matériaux absorbants étant généralement non linéaires, le module d'élasticité, tout comme l'amortissement peuvent varier en fonction de la déformation de la matière. Cette étude vise à développer une nouvelle méthode permettant de prendre en compte cet état de précontrainte au sein de l'échantillon de matériau testé. Cela nécessite de redéfinir les conditions d'essais, en particulier les conditions limites de l'échantillon et leurs répercussions sur la propagation des ondes. Les principales répercussions porteront sur les coefficients de réflexion et de transmission à l'interface entre les deux milieux du barreau de référence et de l'échantillon. Nous avons également développé un modèle éléments

finis du banc d'essai, sorte de banc d'essai numérique qui nous a servi à vérifier que la méthode de mesurage fonctionnait dans son principe.

2. METHODE

La méthode proposée consiste à générer une onde de choc plane à l'extrémité d'un barreau fin composé d'un matériau connu ou non, prolongé par un échantillon court composé du matériau que l'on souhaite caractériser. L'échantillon est comprimé entre ces deux extrémités pour atteindre le degré de déformation ou de contrainte souhaité. Nous ne nous intéressons pas dans cette étude au système permettant de contraindre l'échantillon. On suppose simplement que sa rigidité et sa masse sont telles qu'elles n'influent pas sur la propagation de l'onde plane parcourant la structure.

L'onde de compression se propage dans les deux milieux à différentes vitesses, produisant ainsi des ondes transmises et des ondes réfléchies à chaque passage de l'interface. En supposant les déformations suffisamment faibles, on se place dans le cadre théorique de la mécanique linéaire. Le front d'onde de vitesse matérielle mesuré à une position donnée du barreau peut alors s'exprimer comme la superposition de l'onde incidente et de tous ses échos.

Le concept clef de la méthode proposée est la reconstruction de l'onde mesurée dans le domaine temporel comme une fonction des propriétés fréquentielles viscoélastiques des deux milieux, ces dernières constituant les variables d'optimisation du modèle de propagation. Les structures unidimensionnelles présentent l'avantage de permettre la résolution des équations sous forme analytique.

L'onde ainsi reconstruite numériquement est comparée à l'onde mesurée. L'écart (au sens des moindres carrés) est minimisé pour obtenir finalement l'identification des propriétés viscoélastiques du matériau de l'échantillon.

Comme cette méthode tient compte de la dispersion, nous introduisons en premier lieu les notions de propagation dans les milieux dispersifs.

2.1. EQUATIONS DE PROPAGATION DANS LES MILIEUX DISPERSIFS

En général, l'hypothèse unidimensionnelle est gouvernée par le rapport entre la longueur et la section du barreau guide d'onde. Sous cette hypothèse, appelons $f(x, t)$ la forme générale de l'onde à la distance x et à l'instant t . Elle

peut indifféremment représenter la contrainte normale ou la vitesse matérielle. $\bar{f}(x, \omega)$ représente la transformation de Fourier de $f(x, t)$ en fonction du temps. La résolution des équations du mouvement dans un milieu homogène de longueur infinie conduit alors à la solution générale [25] :

$$\bar{f}(x, \omega) = X^+ e^{-\gamma(\omega)x} + X^- e^{\gamma(\omega)x} \quad (1)$$

avec $\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\omega/c(\omega)$

Le coefficient d'amortissement $\alpha(\omega)$ et la vitesse de phase, c.à.d. la vitesse de propagation du son dans ce milieu $c(\omega)$ sont des propriétés intrinsèques du matériau. $X^+(\omega)$ et $X^-(\omega)$ sont déterminés par les conditions initiales et les conditions limites. Par la suite, pour améliorer la lecture, le terme (ω) sera délibérément omis dans l'expression des variables, c.à.d. c, α, X .

La transformation de Fourier inverse de l'Eq. (1) conduit à :

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^+ e^{-\alpha x + j\omega(t-x/c)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^- e^{\alpha x + j\omega(t+x/c)} d\omega \quad (2)$$

Les fonctions intégrales expriment respectivement les composantes avant (propagation) et arrière (rétropropagation) de l'onde progressive.

2.2. CONDITIONS DE REFLEXION ET DE TRANSMISSION A L'INTERFACE

Considérons un échantillon collé à l'extrémité d'un barreau de référence.

L'échantillon est supposé libre à son extrémité. Chaque composante de Fourier de l'onde incidente a la forme d'une onde sinusoïdale de pulsation ω . En traversant l'interface entre les deux milieux, des ondes transmises et réfléchies sont automatiquement engendrées, comme l'illustre la Fig. 1:

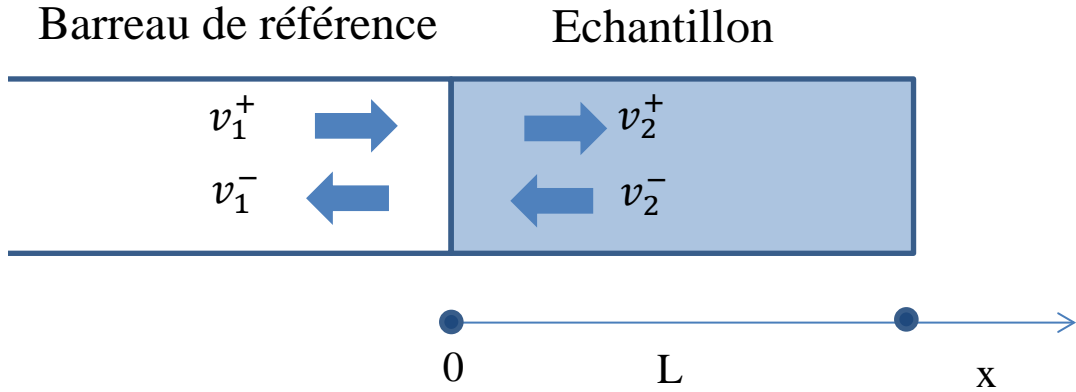


FIG. 1: ondes concourant à l'interface

On s'intéresse ici aux ondes de vitesse matérielle. Elles doivent satisfaire aux conditions de continuité à l'interface ($x = 0$):

$$X_1^+ + X_1^- = X_2^+ + X_2^- \quad (3)$$

La conservation de la quantité de mouvement doit aussi être satisfaite :

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{\rho v^+}{\frac{1}{c} - j\frac{\alpha}{\omega}} \text{ (propagation)} \\ p = -\frac{\rho v^-}{\frac{1}{c} - j\frac{\alpha}{\omega}} \text{ (rétropropagation)} \end{cases} \quad (4)$$

avec ρ et p représentant respectivement la densité et la pression du milieu. L'Eq. (4) peut s'exprimer à l'interface selon :

$$\rho_1 X_1^+ \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) - \rho_1 X_1^- \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) = \rho_2 X_2^+ \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) - \rho_2 X_2^- \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) \quad (5)$$

La conservation de la quantité de mouvement à l'extrémité de l'échantillon ($x = L$), fournit une autre équation :

$$X_2^- = e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} X_2^+ \quad (6)$$

Finalement, à partir de l'Eq. (3), (5) et (6) il est possible d'obtenir une expression analytique du coefficient de réflexion C_r dans les conditions libres :

$$C_r = \frac{X_1^-}{X_1^+} = \frac{\rho_1 \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) \left(1 + e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} \right) - \rho_2 \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) \left(1 - e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} \right)}{\rho_1 \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) \left(1 + e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} \right) + \rho_2 \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) \left(1 - e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} \right)} \quad (7)$$

Une onde progressive incidente v_1^+ est réfléchiée à l'interface par multiplication du coefficient C_r . On observe que ce coefficient de réflexion dépend de la fréquence.

Ce terme unique tient compte des contributions en nombre infini des échos se propageant dans l'échantillon et retransmis à chaque passage à l'interface. Il est donc plus rigoureux de considérer ce terme comme un coefficient de réflexion du train d'onde issu de l'interface avec le second milieu. Ce train d'onde continue de se propager le long du barreau de référence jusqu'à sa réflexion à son extrémité libre et son retour à l'interface. On décrit ainsi un processus qui se répète à l'infini.

Finalement, l'onde complète peut s'exprimer comme la superposition de tous ses échos, selon :

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(C_r)^n \hat{f}(x, \omega) \left(e^{-2\alpha_1(nl+x) + j\omega \left(t - \frac{2(nl+x)}{c_1} \right)} + e^{-2\alpha_1 nl + j\omega \left(t - \frac{2nl}{c_1} \right)} \right) \right] \right) d\omega \quad (8)$$

où l est la longueur du barreau de référence et $-l \leq x \leq 0$. $\hat{f}(x, \omega)$ est le spectre fréquentiel de l'onde incidente à la position x . Les deux termes exponentiels représentent les fonctions de transport de chaque train d'onde successif, l'un provenant de l'extrémité libre du barreau de référence et l'autre de l'interface. n est l'ordre de l'écho.

Dans le cas d'échantillons précontraints, les conditions limites de l'extrémité libre ne sont plus valides. A la place, on doit supposer une distance constante L (la vitesse matérielle à $x=0$ et $x=L$ est obtenue par addition des ondes avant et arrière en chacun de ces points. Les deux grandeurs doivent être égales à tout instant puisque leur distance est constante), conduisant alors à l'équation :

$$X_2^- = X_2^+ e^{-\alpha_2 L - j \frac{\omega L}{c_2}} \quad (9)$$

En pratique, L est constant pour un essai donné et est bien entendu arbitraire. C'est cette grandeur qui caractérise le degré de précontrainte du matériau testé.

La conservation de la quantité de mouvement implique deux contributions supplémentaires (membre droit de l'Eq. (10)), car la contrainte cinématique de l'échantillon impose à son extrémité de se déplacer comme l'interface. Leur signe est opposé aux contributions de l'onde transmise à l'interface, car l'onde se propage dans le sens inverse :

$$\begin{aligned} \rho_1 X_1^+ \left(\frac{1}{c_2} - j \frac{\alpha_2}{\omega} \right) - \rho_1 X_1^- \left(\frac{1}{c_2} + j \frac{\alpha_2}{\omega} \right) &= \rho_2 X_2^+ \left(\frac{1}{c_1} - j \frac{\alpha_1}{\omega} \right) - \rho_2 X_2^- \left(\frac{1}{c_1} + j \frac{\alpha_1}{\omega} \right) - \rho_2 X_2^+ \left(\frac{1}{c_1} - j \frac{\alpha_1}{\omega} \right) e^{-\alpha_2 L - j \frac{\omega L}{c_2}} + \\ \rho_2 X_2^- \left(\frac{1}{c_1} + j \frac{\alpha_1}{\omega} \right) e^{\alpha_2 L + j \frac{\omega L}{c_2}} & \end{aligned} \quad (10)$$

En combinant l'Eq. (3), (9) et (10) on obtient l'expression des coefficients de réflexion et de transmission sous précontrainte :

$$C_r = \frac{\rho_1 \left(\frac{1}{c_2} - j \frac{\alpha_2}{\omega} \right) \left(1 + e^{-j \frac{\omega L}{c_2} - \alpha_2 L} \right) - 2 \rho_2 \left(\frac{1}{c_1} - j \frac{\alpha_1}{\omega} \right) \left(1 - e^{-j \frac{\omega L}{c_2} - \alpha_2 L} \right)}{\rho_1 \left(\frac{1}{c_2} - j \frac{\alpha_2}{\omega} \right) \left(1 + e^{-j \frac{\omega L}{c_2} - \alpha_2 L} \right) + 2 \rho_2 \left(\frac{1}{c_1} - j \frac{\alpha_1}{\omega} \right) \left(1 - e^{-j \frac{\omega L}{c_2} - \alpha_2 L} \right)} \quad (11)$$

Il est remarquable que l'expression soit identique au cas des conditions libres Eq. (7), après multiplication de ρ_2 et division de L par un facteur 2. Tout se passe comme si l'échantillon avait une section double, une demi-longueur et était libre à son extrémité.

Le même résultat aurait pu être obtenu à partir de l'Eq. (9) en observant aussi que :

$$v_2^+ \left(\frac{L}{2}, \omega \right) = v_2^- \left(\frac{L}{2}, \omega \right) \quad (12)$$

qui peut être interprété comme la conservation de la quantité de mouvement d'une section située au milieu de l'échantillon ($x = \frac{L}{2}$).

De plus, à partir de l'Eq. (9), on peut montrer que v_2^+ et v_2^- sont des ondes miroir :

$$v_2^+(L - x, \omega) = v_2^-(x, \omega) \quad (13)$$

De la même manière, l'Eq. (10) peut être interprétée comme la conservation de la quantité de mouvement à l'interface entre le barreau de référence et deux échantillons libres collés en parallèle, c.à.d. un échantillon équivalent de densité double.

2.3. IDENTIFICATION DES PROPRIETES VISCOELASTIQUES

Comme expliqué plus haut, plusieurs couples de grandeurs physiques équivalentes peuvent être choisies pour caractériser les propriétés viscoélastiques. Elles sont toutes liées entre-elles par les lois de comportement. Par exemple, dans les structures unidimensionnelles, le module d'élasticité et le facteur de perte peuvent s'exprimer comme une fonction de la vitesse de phase et du coefficient d'amortissement, selon [26] :

$$\begin{cases} |E(\omega)| = \rho c(\omega)^2 \cos^2\left(\frac{\delta(\omega)}{2}\right) \\ \delta(\omega) = 2 \text{Arctg}\left(\frac{\alpha(\omega)c(\omega)}{\omega}\right) \end{cases} \quad (14)$$

Par la suite, nous avons choisi de nous intéresser aux grandeurs $[c_i(\omega), \alpha_i(\omega)]$. Leur dépendance fréquentielle peut être approchée par une fonction linéaire par morceaux :

$$\begin{cases} c_i(\omega) \simeq \sum_{p=0}^k \left[\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_0} - p \right) (c_{i|p+1} - c_{i|p}) + c_{i|p} \right] \Pi\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_0} - p\right) \\ \alpha_i(\omega) \simeq \sum_{p=0}^k \left[\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_0} - p \right) (\alpha_{i|p+1} - \alpha_{i|p}) + \alpha_{i|p} \right] \Pi\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_0} - p\right) \end{cases} \quad (15)$$

$i \in [1; 2]$

Π Fonction porte : $\Pi(x) = 1$, si $0 \leq x \leq 1$, $\Pi(x) = 0$ sinon.

$\Delta\omega_0$ représente la longueur constante des intervalles de fréquence sur lesquels les grandeurs sont approchées par des fonctions linéaires.

Les grandeurs viscoélastiques sont alors entièrement définies par $2(k + 1)$ degrés de liberté $c_{i|p}$ et $\alpha_{i|p}$.

Finalement, l'identification de $c_2(\omega)$ et $\alpha_2(\omega)$ consiste à minimiser l'écart au sens des moindres carrés entre la vitesse matérielle mesurée et sa reconstruction en suivant l'Eq. (8).

L'Eq. (8) nécessite de mesurer l'onde incidente et d'opérer sa transformation dans le domaine fréquentiel. Cela suppose que le barreau de référence soit suffisamment long pour pouvoir isoler le choc initial des échos successifs.

En pratique, la minimisation est assurée sur un intervalle temporel fini. En supposant l'espace temporel discrétisé par un pas constant Δt , la transformée de Fourier discrète inverse (IDFT) est utilisée à la place d'une transformation Fourier continue. La fonction objectif du problème d'optimisation peut alors s'écrire :

$$\Psi(c_{i|p}, \alpha_{i|p})_{i \in [1;2], 0 \leq p \leq k} = \sum_{i=0}^{i_0} \left| f_{mesure}(x, i\Delta t) - \text{IDFT} \left(\sum_{n=0}^{n_0} \left[(C_r)^n \hat{f}(x, \omega) \left(e^{-2\alpha_1(nl+x) - j\omega \left(\frac{2(nl+x)}{c_1} \right)} + e^{-2\alpha_1 nl - j\omega \left(\frac{2nl}{c_1} \right)} \right) \right] \right) \right|_{|i\Delta t|}^2 \quad (16)$$

$i_0 \Delta t$ est la limite supérieure de l'intervalle de temps de la fenêtre délimitant l'intervalle d'identification de l'onde. n_0 est l'ordre d'écho maximum affectant l'onde sur cet intervalle.

Les variables d'optimisation sont l'ensemble des degrés de liberté $c_{i|p}$ et $\alpha_{i|p}$. Cet ensemble peut être restreint à $c_{2|p}$ et $\alpha_{2|p}$ si le matériau constituant le barreau de référence est connu.

En pratique, le problème d'optimisation est résolu en utilisant un algorithme génétique [27] mais tout autre méthode plus performante peut bien entendu lui être préférée.

3. VERIFICATION

La méthode de mesurage proposée a été évaluée à l'aide d'un banc d'essai numérique. De cette manière, il était plus aisé de faire varier virtuellement les conditions d'essais, mais aussi cela offrait la possibilité d'accéder à des grandeurs locales en un point quelconque de la structure d'essai. Le banc d'essai numérique est développé sous la

forme d'un modèle éléments finis (EF) axisymétrique. Il permet de modéliser l'essai de génération du choc à l'extrémité du barreau composite décrit plus haut et de calculer la vitesse matérielle instantanée en un point quelconque. Comme l'échantillon doit être précontraint et maintenu dans cet état avant la réalisation du calcul de propagation d'onde, nous avons dû utiliser une loi de comportement de type hyper-viscoélastique dans des conditions de calcul en petites déformations. Le modèle a été établi à l'aide du logiciel Code_Aster (version 13.3.0). Ce code EF développé et distribué gratuitement par EDF R&D ne comporte pas de loi de comportement de type hyper-viscoélastique. Nous avons donc dû implémenter cette loi à l'aide du solveur frontal MFront.

3.1. DEVELOPPEMENT D'UNE LOI HYPER-VISCOELASTIQUE

L'expression la plus simple du modèle rhéologique équivalent d'un matériau viscoélastique est le modèle de Maxwell. Il se compose d'un ressort purement élastique et d'un amortisseur purement visqueux en série.

Le modèle de Maxwell généralisé, aussi connu sous le nom de modèle de Maxwell-Wiechert ou de représentation en séries de Prony [28,29] a été introduit pour modéliser la dispersion ou, en d'autres termes, pour rendre compte du fait que la relaxation n'intervient pas à un instant donné mais est distribuée dans le temps. Ce modèle rhéologique est composé d'un nombre arbitraire de branches de Maxwell en parallèle, comme illustré en Fig. 2.

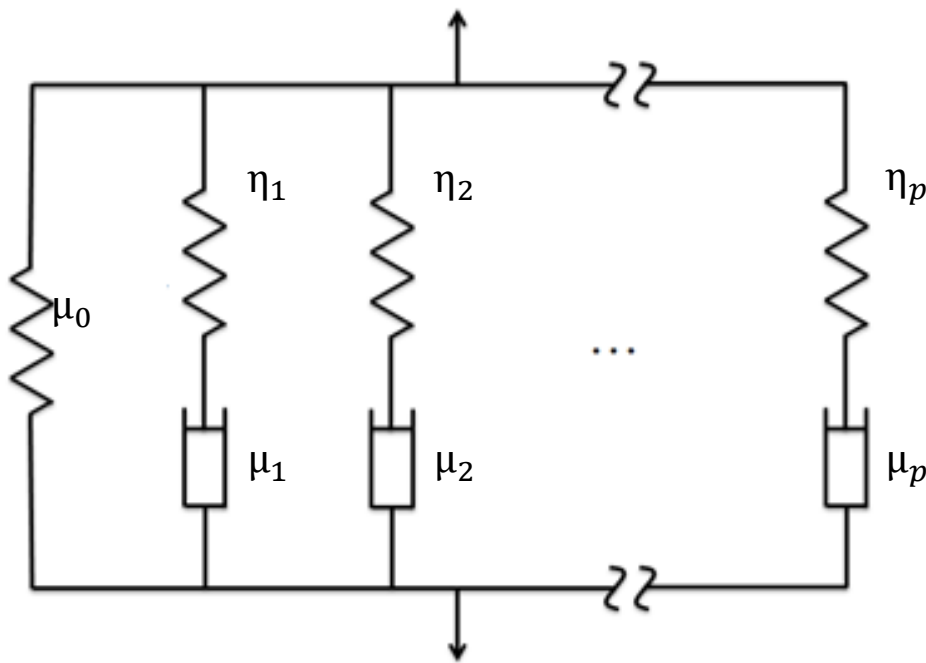


FIG. 2: modèle rhéologique de Maxwell généralisé

Selon le principe de superposition de Boltzmann, la réponse d'un chargement temporel s'obtient par :

$$\sigma(\varepsilon, t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} ds \quad (17)$$

avec $G(t) = \mu_0 + \sum_{i=1}^r \mu_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$ et $\tau_i = \frac{\eta_i}{\mu_i}$

l'équation héréditaire Eq. (17) peut s'interpréter comme la somme continue de toutes les réponses de relaxation issues des chargements infinitésimaux successifs.

En substituant $\frac{d\sigma}{G(0)}$ à $d\varepsilon$ l'Eq. (17) devient alors :

$$\sigma(\varepsilon, t) = \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{\partial \sigma}{\partial s} ds \quad (18)$$

avec $g(t) = g_\infty + \sum_{i=1}^r g_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$

$$\text{et } \begin{cases} 0 < g_\infty \leq 1 \\ 0 \leq g_i < 1 \\ g_\infty + \sum_{i=1}^r g_i = 1 \end{cases}$$

En suivant l'implémentation explicitée par L.R. Hermann et F.E Peterson [30-32], la discrétisation temporelle est utilisée pour calculer la contrainte de manière incrémentale :

$$\sigma(t) = g_\infty \sigma_0(t) + \sum_{i=1}^r \underbrace{\int_{-\infty}^t g_i e^{-\frac{t-s}{\tau_i}} \frac{\partial \sigma_0}{\partial s} ds}_{h_i(t)} \quad (19)$$

$$h_i^{n+1} \approx h_i(t_{n+1}) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}} h_i^n + g_i \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}}}{\frac{\Delta t}{\tau_i}} (\sigma_0^{n+1} - \sigma_0^n) \quad (20)$$

Expérimentalement on a montré que le comportement viscoélastique est surtout lié à la partie isochore de la déformation [32]. L'évolution temporelle gouvernée par l'Eq. (19) est alors appliquée uniquement à la partie déviatorique du tenseur des contraintes.

Nous avons choisi comme loi hyperélastique une forme particulière de la loi de Signorini, disponible dans la bibliothèque de lois de comportement de Code_Aster [33]. Dans cette formulation, le tenseur de Piola-Kirchhoff-II dérive de deux potentiels :

$$S = 2 \frac{\partial \psi^{iso}}{\partial c} + 2 \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial c} \quad (21)$$

Les potentiels d'énergie s'expriment à partir des invariants du tenseur de déformation de Cauchy-Green droit du tenseur déviatorique des contraintes I_c^* , II_c^* and III_c^* :

$$\begin{cases} I_c^* = J^{-\frac{2}{3}} I_c \\ II_c^* = J^{-\frac{4}{3}} II_c \\ III_c^* = 1 \end{cases} \quad (22)$$

La forme générale du potentiel d'énergie de la loi de Signorini s'écrit :

$$\psi = \sum_{(p,q)} C_{pq} (I_c^* - 3)^p (II_c^* - 3)^q \quad (23)$$

Pour (p, q) nous avons choisi la combinaison particulière de coefficients $(1,0), (0,1), (2,0)$, ce qui conduit à l'expression :

$$\begin{cases} \psi^{iso} = C_{10}(I_c^* - 3) + C_{01}(II_c^* - 3) + C_{20}(I_c^* - 3)^2 \\ \psi^{vol} = \frac{K}{2}(J - 1)^2 \end{cases} \quad (24)$$

Le tenseur PKII peut alors être scindé en une partie volumétrique et une partie isochore (déviatorique) :

$$S_{ij}^{vol} = K(J - 1)C_{ij}^{-1} \quad (25)$$

$$S_{ij}^{iso} = 2 \left((C_{10} + 2C_{20}(I_c^* - 3))J^{-\frac{2}{3}} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3}C_{ij}^{-1}I_c \right) + C_{01}J^{-\frac{4}{3}} \left(I_c \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3}C_{ij}^{-1}II_c \right) \right) \quad (26)$$

Finalement, pour la loi hyperélastique, seulement la partie déviatorique est mise à jour selon l'évolution viscoélastique fournie par l'Eq. (19) et l'Eq. (20) :

$$\begin{cases} \widehat{S}_{ij}^{vol} [n+1] = S_{ij}^{vol} [n+1] \\ \widehat{S}_{ij}^{iso} [n+1] = g_\infty S_{ij}^{iso} [n+1] + \sum_{i=1}^N h_i^{n+1} \end{cases} \quad (27)$$

avec :

$$h_i^{n+1} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}} h_i^n + g_i \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}}}{\frac{\Delta t}{\tau_i}} \left(S_{ij}^{iso} [n+1] - S_{ij}^{iso} [n] \right) \quad (28)$$

La matrice de raideur tangente \widehat{K} est déduite de la matrice tangente K de la loi hyperélastique selon :

$$K = 4 \frac{\partial^2 \psi^{iso}}{\partial C \partial C} + 4 \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial C \partial C} \quad (29)$$

$$\begin{cases} K_{ijkl}^{iso} = 4 \left[\frac{\partial^2 \psi^{iso}}{\partial I_c^{*2}} \right] \frac{\partial^2 I_c^*}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \frac{\left[\frac{\partial^2 \psi^{iso}}{\partial II_c^{*2}} \right]}{0} \frac{\partial^2 II_c^*}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \\ K_{ijkl}^{vol} = 4 \frac{\left[\frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \right]}{K} \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 I_c^*}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = III_c^{*\frac{1}{3}} \left(C_{kl}^{-1} C_{ij}^{-1} I_c - C_{ij}^{-1} \delta_{kl} - C_{kl}^{-1} \delta_{ij} + \frac{1}{3} C_{kl}^{-1} C_{ij}^{-1} I_c \right) \\ \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{1}{4} III_c^{*\frac{1}{4}} (C_{kl}^{-1} C_{ij}^{-1} - C_{kl}^{-1} C_{ij}^{-1}) \end{cases} \quad (31)$$

Enfin, la matrice tangente est réactualisée selon :

$$\mathcal{K}_{ijkl}^{n+1} = K^{vol}_{ijkl}{}^{n+1} + g_\infty + \sum_{i=1}^r g_i \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}}}{\frac{\Delta t}{\tau_i}} K^{iso}_{ijkl}{}^{n+1} \quad (32)$$

3.2. MODELE ELEMENTS FINIS DU BARREAU COMPOSITE

Le modèle EF est 2D axisymétrique et composé de deux structures rectangulaires (=cylindrique dans l'espace à 3 dimensions) :

- Le barreau de référence de dimensions 1m × 0.005m comprend 891 éléments quadratiques.
- L'échantillon test de dimensions 0.03m × 0.005m comprend 441 éléments quadratiques.

Les 2 structures comportent 9 éléments dans leur largeur (=rayon dans l'espace à 3 dimensions). L'interface est modélisé par des nœuds communs.

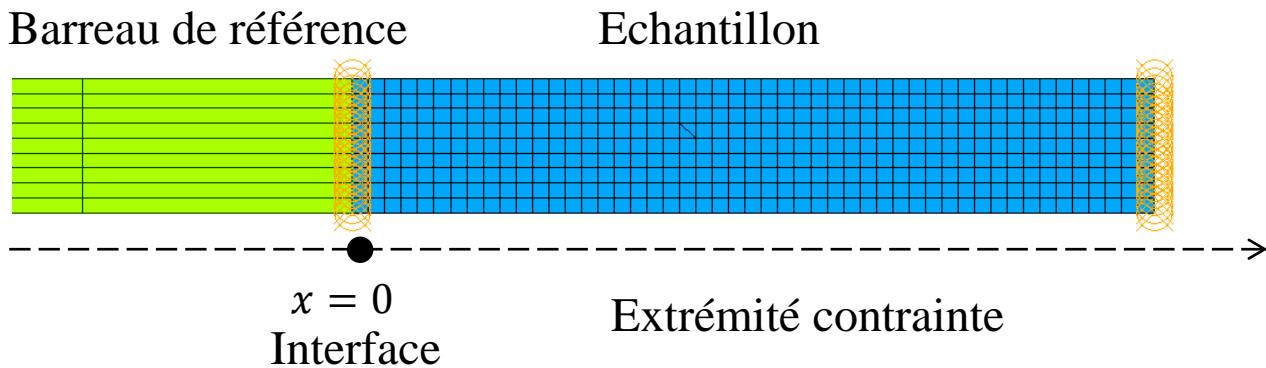


FIG. 3: vue de détail du maillage du barreau composite

Les deux structures sont composées de matériau viscoélastique de propriétés différentes. Les valeurs numériques d'élasticité ont été choisies comme représentatives du PVC et du caoutchouc respectivement [24], sachant que le module d'Young de matériaux non contraints peut être approximé par les coefficients de Signorini pour les petites déformations [33] :

$$E = 6(C_{01} + C_{10}) \quad (33)$$

		<i>Matériau de référence</i>	<i>Matériau échantillon</i>
C_{10}	(Pa)	5.90×10^8	3.03×10^7
C_{01}	(Pa)	6.01×10^7	3.08×10^6
C_{20}	(Pa)	1.03×10^8	5.30×10^6
K , module de compression	(Pa)	1.03×10^{11}	$3. \times 10^{10}$
ν , coefficient de Poisson		0.499	0.499
ρ , densité	(kg/m ³)	1400.	1200.
g_∞		0.93	0.65
g_0		0.05	0.01
g_1		0.01	0.32
g_2		0.01	0.04
τ_0	(s)	0.1	0.1
τ_1	(s)	0.01	0.0001
τ_2	(s)	0.001	0.00001

TAB. 1: propriétés matérielles

L'évolution temporelle de la vitesse matérielle peut être calculée au milieu du barreau de référence sur un nœud de surface de coordonnée $x = -0.515$ m.

Le calcul requiert deux étapes :

- D'abord l'échantillon est comprimé le long de l'axe x à un taux de compression donné. 3 valeurs de compression ont été testées (0 m, 0.005 m, 0.01 m) : le groupe de nœuds à l'extrémité de l'échantillon est déplacé incrémentalement vers l'interface dans des conditions quasi-statiques, alors que les nœuds de l'interface sont encastrés.

- Le calcul est alors relancé dans une seconde étape en ajoutant une contrainte cinématique reliant le groupe de nœuds à l'interface et le groupe de nœuds à l'extrémité de l'échantillon. Leur distance est maintenue constante (=la distance obtenue après compression lors de l'étape de calcul précédente). De plus, l'encastrement des nœuds d'interface est supprimé et un choc (force) est imposé à $t = 0$. Le profil de force trapézoïdal dure 1.2×10^{-4} s avec une montée de $2. \times 10^{-6}$ s et une descente de $2. \times 10^{-6}$ s. durant cette seconde étape de calcul, le barreau composite est libre à ses deux extrémités.

Les deux étapes de calcul sont réalisées sous les hypothèses de petites déformations.

Plusieurs séries de calcul ont été effectuées avec un pas de temps constants en décroissant sa valeur jusqu'à ce qu'aucun écart significatif ne se manifeste dans les résultats.

La valeur finale retenue vaut $2. \times 10^{-6}$ s.

3.3. ANALYSE MECANIQUE DYNAMIQUE NUMERIQUE

Le modèle EF ainsi défini a été utilisé pour mettre en œuvre la méthode de caractérisation proposée pour déterminer les propriétés viscoélastiques de l'échantillon précontraint. De plus, afin de contrôler la pertinence des résultats, un second modèle EF a servi à simuler un essai AMD. Ce modèle, plus rudimentaire, est composé d'un unique élément volumique simplement supporté sur une de ses faces. Un déplacement sinusoidal est imposé sur la face opposée. Chaque calcul, de type temporel transitoire, est réalisé à fréquence constante. L'amplitude du déplacement imposé a été déterminée de telle sorte à maintenir l'accélération crête constante au cours des calculs.

Le module d'élasticité et l'angle de perte ont été déduits de ces calculs par la méthode du Lissajous [34], chaque calcul fournissant un couple de valeurs pour ces deux grandeurs à une fréquence donnée. La courbe de Lissajous est une représentation de la force de réaction comme une fonction du déplacement imposé. A cause de la présence d'amortissement, cette courbe est une ellipse dont les dimensions sont directement liées aux propriétés viscoélastiques :

$$\begin{cases} \delta = \text{Arcsin}\left(\frac{a}{b}\right) \\ E = \frac{bh}{sc} \end{cases} \quad (34)$$

où S et h sont respectivement la section et la longueur de l'élément volumique.

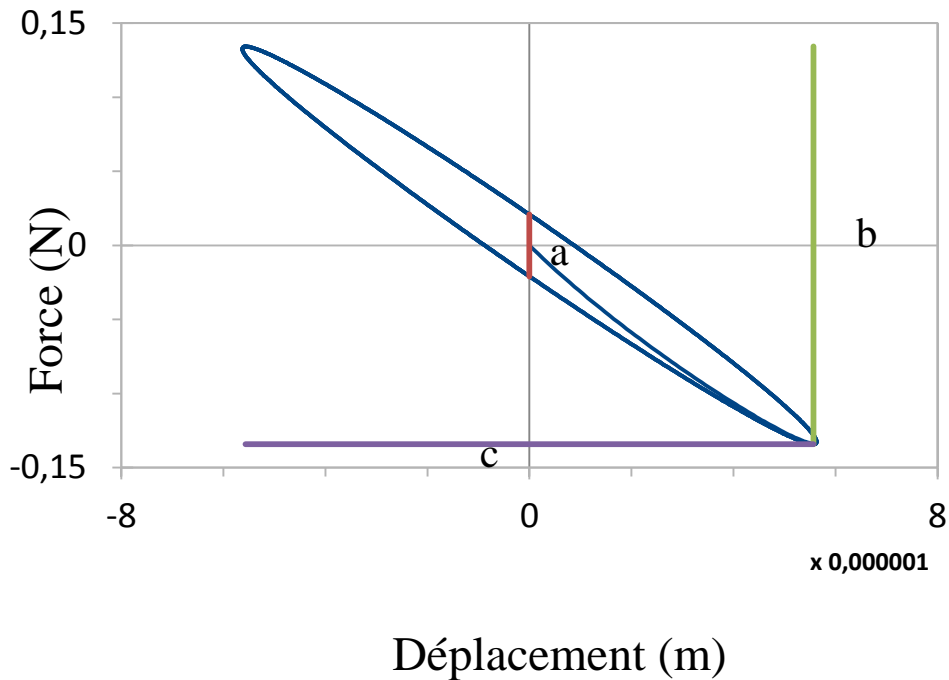


FIG. 4: courbe de Lissajous

De cette manière, nous sommes capables de tracer l'évolution fréquentielle de E et δ point par point et de comparer ces valeurs avec celles identifiées à partir du modèle EF de barreau composite par la méthode de propagation d'onde.

4. RESULTATS ET DISCUSSION

Nous avons calculé l'évolution temporelle de la vitesse matérielle pour les trois valeurs de compression citées plus haut. La propagation de l'onde de vitesse matérielle a été calculée dans l'intervalle de temps $[0-2. \times 10^{-3} \text{ s}]$.

La méthode d'optimisation explicitée plus haut a été mise en œuvre afin de calculer les lois d'évolution fréquentielle de la vitesse de front d'onde et de l'amortissement. Ces deux grandeurs ont été préalablement paramétrées par des fonctions linéaires par morceaux dans l'intervalle de fréquence $[0-10\ 000 \text{ Hz}]$.

La Fig. 5 illustre les résultats de cette identification pour la vitesse matérielle calculée au milieu du barreau de référence et pour chaque valeur du taux de compression. On observe qu'il est possible de reconstruire précisément la forme de l'évolution du front d'onde au cours du temps selon l'Eq. (8) à partir des valeurs optimales des variables

$$[c_{2|p}, \alpha_{2|p}]_{1 \leq p \leq 4}.$$

Dans chaque cas, la solution optimale a été obtenue avec moins de 100 itérations, chacune de ces itérations ne requérant que quelques dixièmes de secondes sur un micro-ordinateur de bureau avec une onde incidente discrétisée par 500 échantillons temporels. Le calcul est donc quasi instantané.

L'échelle des valeurs de la vitesse matérielle n'est pas utile car l'évolution du front d'onde est reconstruite à partir de l'onde incidente, c.à.d. le pic initial de la Fig. 5 (à l'instant $3.3 \times 10^{-4} \text{ s}$). Le modèle étant linéaire, le résultat est indépendant de l'échelle.

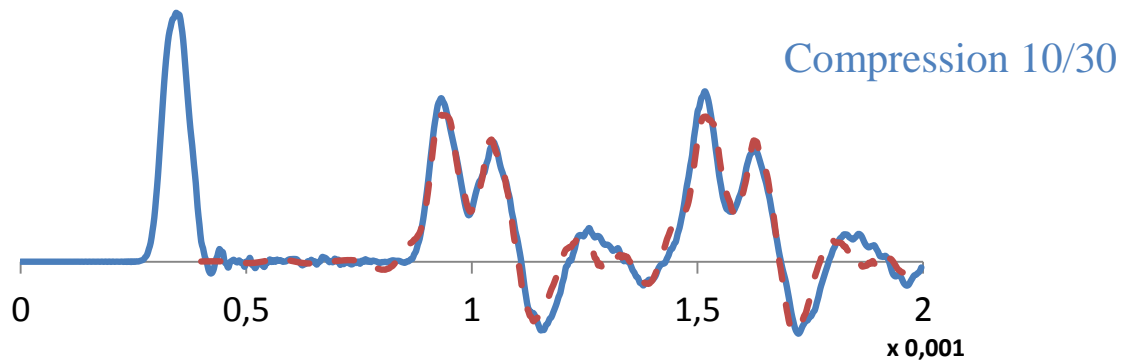
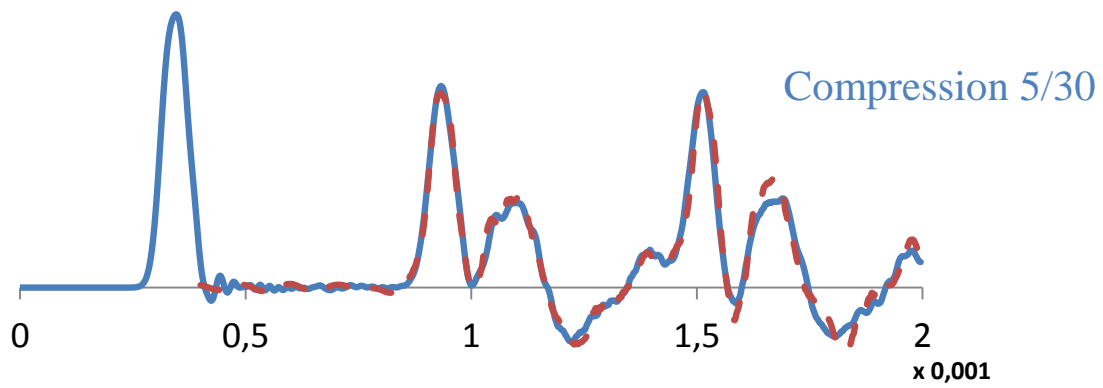
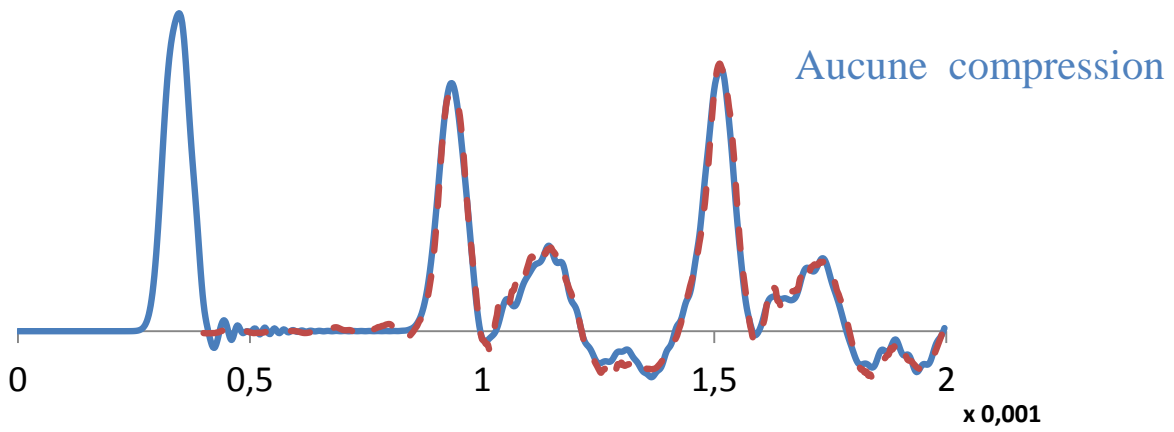


FIG. 5: évolution temporelle des vitesses matérielles calculées au milieu du barreau de référence pour trois valeurs du taux de compression de l'échantillon
(bleu : calcul EF; rouge: identification)

La Fig. 6 illustre la contribution de chaque écho à la réponse transitoire complète. Dans la fenêtre temporelle d'étude, l'écho d'ordre 1 est suffisant pour reconstruire l'onde complète.

Le premier pic (0) représente l'onde incidente (1^{er} passage) calculée au milieu du barreau de référence. Ce front d'onde se propage dans le barreau de référence jusqu'à l'interface. Le deuxième pic (1) est l'écho de l'onde incidente à l'interface alors que le train d'onde (2) représente les transmissions successives dans le barreau de référence (rétropropagation) de l'onde se réfléchissant sans cesse à l'intérieur de l'échantillon. Le troisième pic (3) et le second train d'onde (4) sont respectivement l'écho du pic (1) et du train d'onde (2) à l'extrémité libre du barreau de référence.

Les réflexions (1) et (2), c.à.d. la courbe b), proviennent du premier terme de transport de l'Eq. (8) associé à l'écho d'ordre $n=0$. Les réflexions (3) et (4) c.à.d. la courbe c) proviennent du second terme de transport de l'Eq. (8) associé à $n=1$. Le premier pic (0) est le signal d'entrée (choc incident) de l'Eq. (8). Il résulte également du second terme de transport associé à $n=0$. En effet, dans le cas $n=0$, ce terme n'est rien d'autre que la transformée de Fourier inverse de $\hat{f}(x = -0.515, \omega)$ lui-même transformée de Fourier de l'onde incidente.

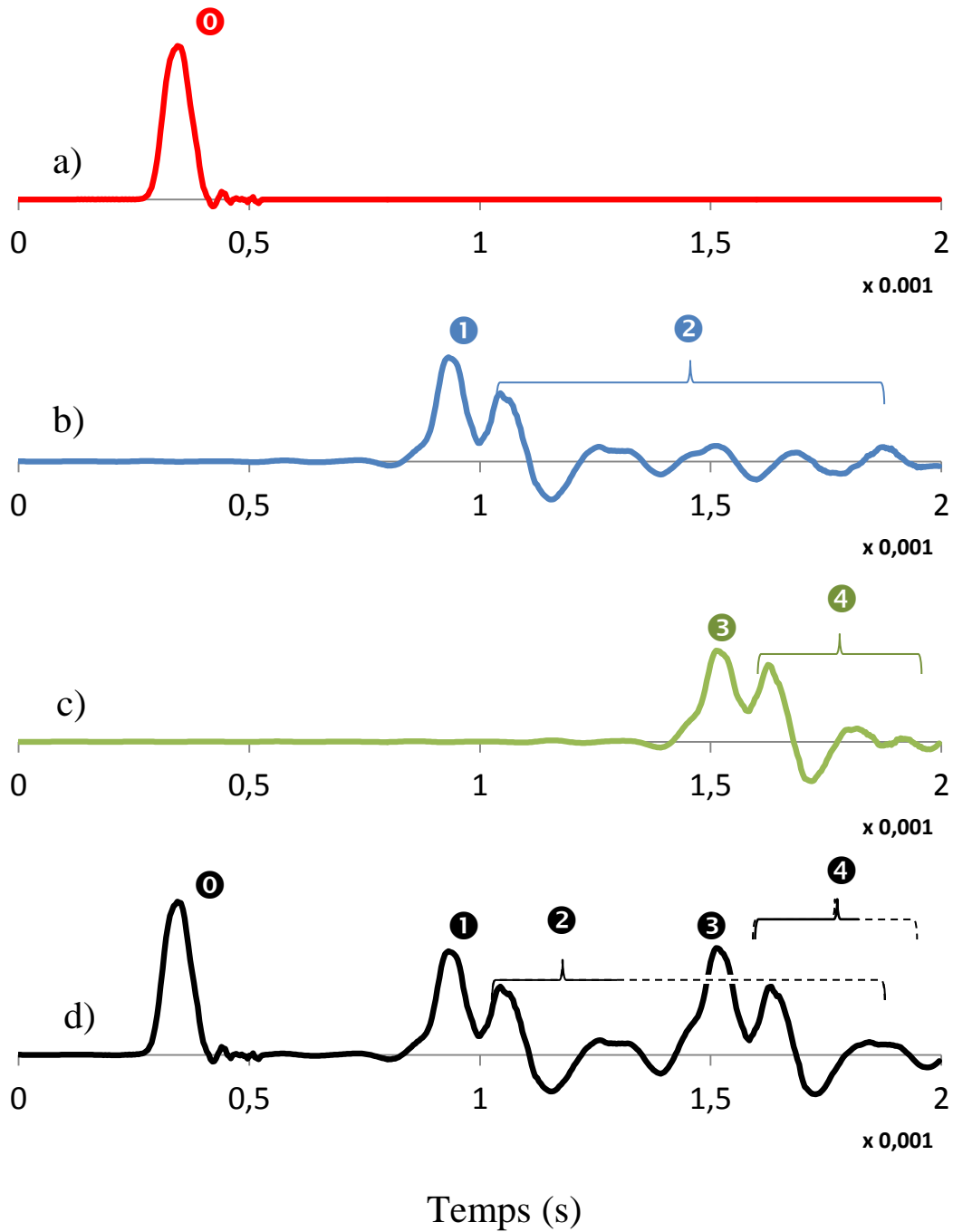


FIG. 6: Contribution des échos à l'évolution temporelle de la vitesse matérielle (a : onde incidente; b : écho à l'interface; c : écho à l'extrémité du barreau de référence; d : superposition)

La Fig. 7 illustre la déformée de l'échantillon à plusieurs instants de la propagation pour un taux de compression de 10/30. Le taux élevé de déformation est à l'origine du gonflement de l'échantillon. L'onde incidente atteint

l'interface à l'instant $t = 6.51 \times 10^{-4}$ s. Il en résulte que la section de l'échantillon est comprimée localement autour de l'interface et symétriquement dilatée à son extrémité, à cause de la contrainte cinématique de l'Eq. (9). Deux ondes miroir sont ainsi engendrées, confirmant par la même l'équation d'onde unidimensionnelle Eq. (13). Les deux ondes se propagent dans l'échantillon avec une amplitude plus élevée que dans le barreau de référence. Cela provient de la valeur élevée du coefficient de transmission du milieu de référence vers le milieu de l'échantillon.

A l'instant $t = 7.6 \times 10^{-4}$ s, l'onde est retransmise vers le barreau de référence pendant qu'elle continue de se propager dans l'échantillon ($t = 8.96 \times 10^{-4}$ s).

Plus tard, à $t = 1.783 \times 10^{-3}$ s l'écho du train d'onde revient après s'être propagé dans le barreau de référence. Il est transmis à nouveau au travers de l'interface engendrant un nouveau train d'onde ($t = 1.864 \times 10^{-3}$ s).

Comme le barreau composite est soumis à des conditions limites libre-libre, il se translate par paliers comme un corps rigide en sens unique, à chaque passage de l'onde à ses extrémités. On peut observer ce phénomène dans la Fig.7 où la position initiale de l'échantillon est délimitée par une ligne pointillée.

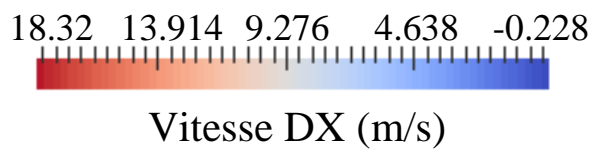
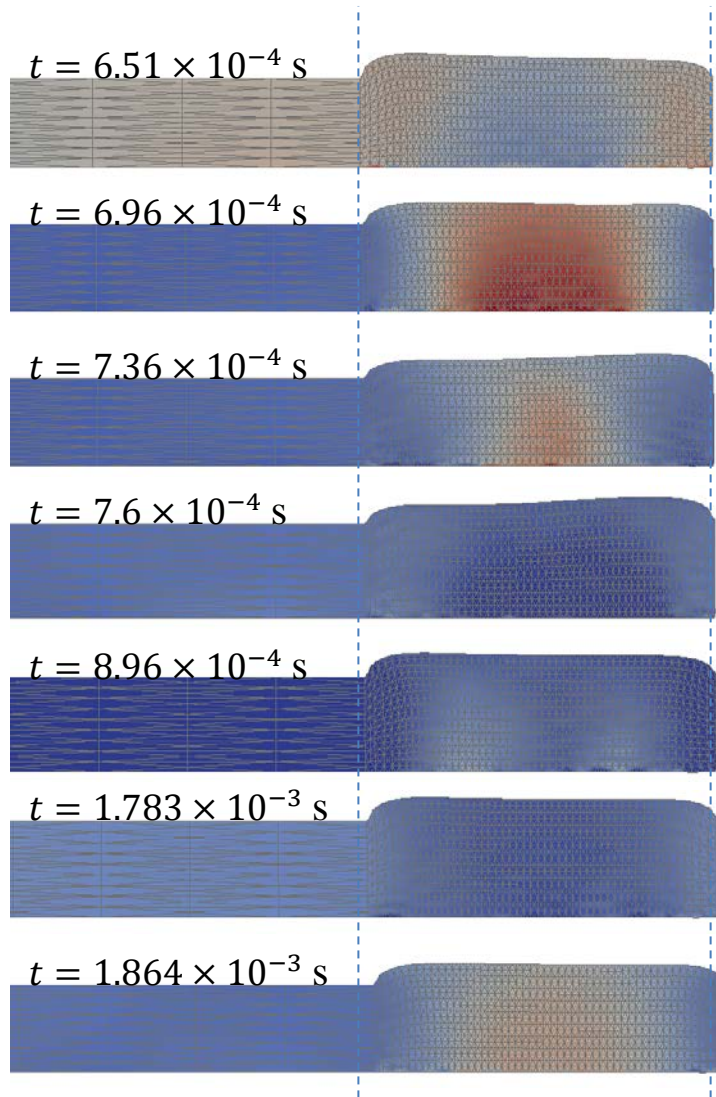


FIG. 7: Déformée de l'échantillon précontraint à plusieurs instants. Echelle de couleur : vitesse matérielle longitudinale

Comme le matériau de l'échantillon est de type hyperélastique et quasi incompressible, lorsqu'une section est comprimée longitudinalement, elle se dilate dans la direction transverse de telle sorte à ce que le volume reste constant localement. C'est la raison pour laquelle on peut observer des proéminences se propager superficiellement à la même vitesse que les ondes longitudinales. C'est particulièrement significatif dans l'échantillon pour lequel le module de compression est bien moins élevé.

La Fig. 8 fournit une illustration des déformations transverses. L'échelle de couleur met en évidence l'onde de déformation transverse antisymétrique. L'expansion à une extrémité de l'échantillon est liée à la rétraction simultanée à l'extrémité opposée et vice versa.

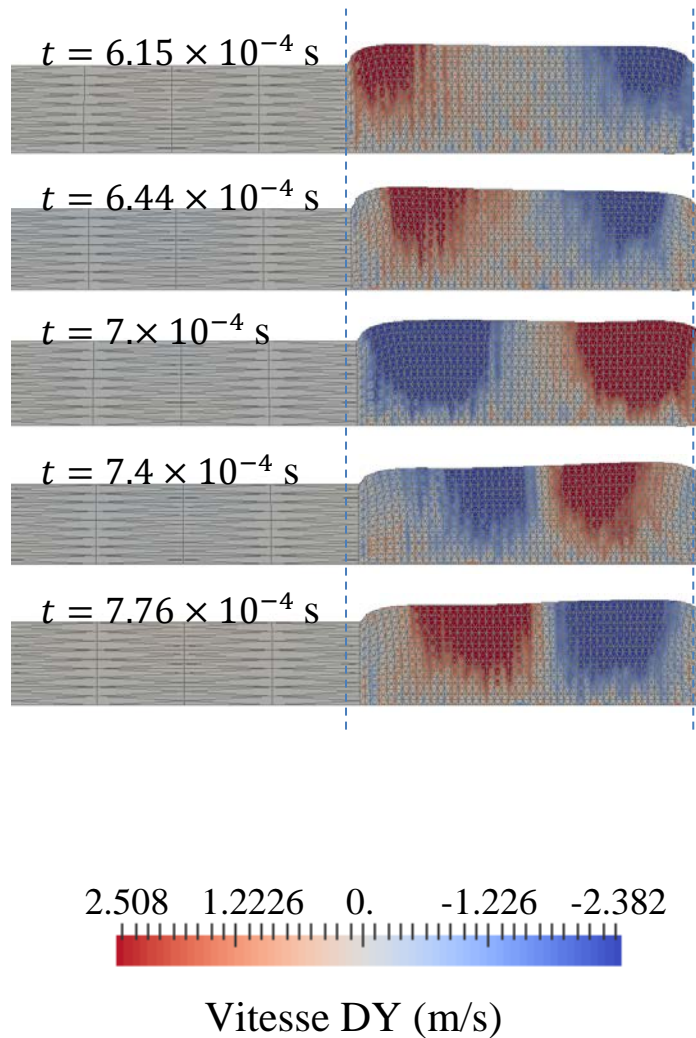


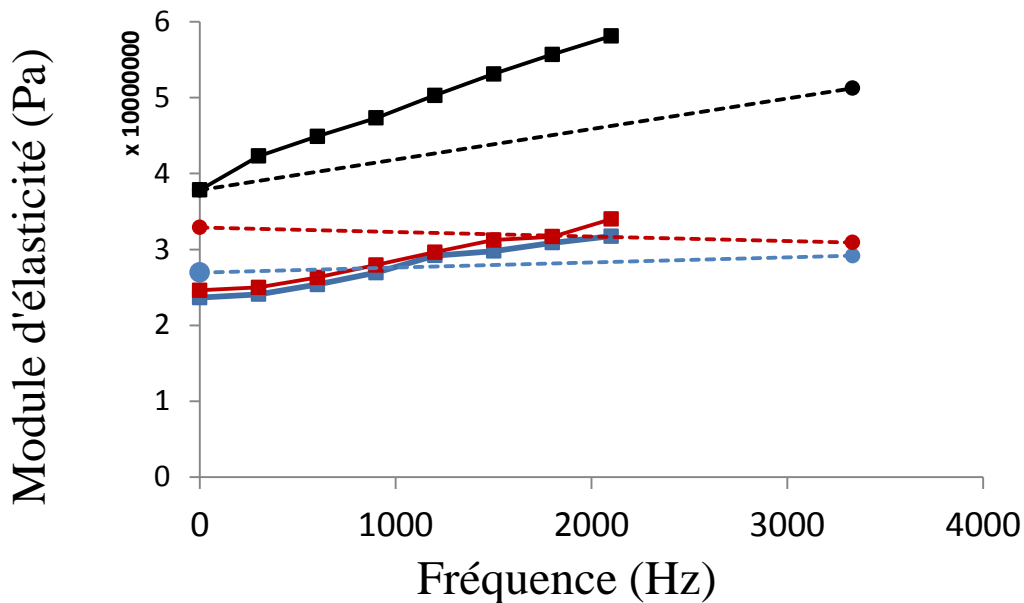
FIG. 8: Déformée de l'échantillon précontraint à plusieurs instants. Echelle de couleur : vitesse matérielle transverse

Dans la méthode d'identification proposée, le modèle analytique de propagation décrit au paragraphe 2.2 est unidimensionnel. Par conséquent il ne permet pas de rendre compte de ce phénomène (manifestation de l'effet Poisson). Néanmoins nous avons montré plus haut que les symétries miroir des ondes se propageant dans l'échantillon étaient vérifiées avec le modèle EF axisymétrique.

Les résultats de l'identification réalisée à partir du modèle EF sont présentés en Fig. 9. L'angle de perte et le module d'Young issus du processus d'optimisation décrit au paragraphe 2.3 sont comparés aux valeurs obtenues à partir de l'AMD numérique. Les trois cas de précontrainte ont été étudiés.

Les comparaisons montrent des résultats cohérents pour les deux grandeurs physiques.

La première valeur de précontrainte n'induit pas de modifications significatives pour le module d'élasticité tangent et le coefficient d'amortissement par rapport au cas à compression nulle. En revanche, la valeur plus élevée de précontrainte a pour effet d'augmenter notablement le module d'élasticité et dans une moindre mesure la valeur du coefficient d'amortissement.



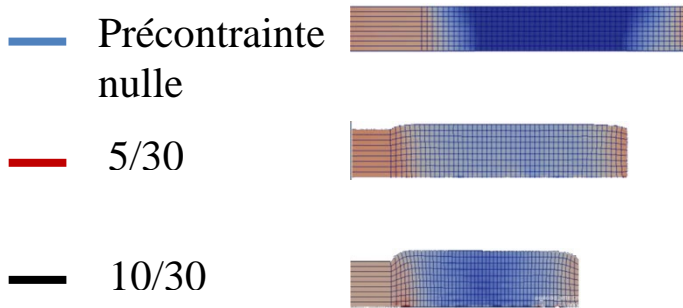
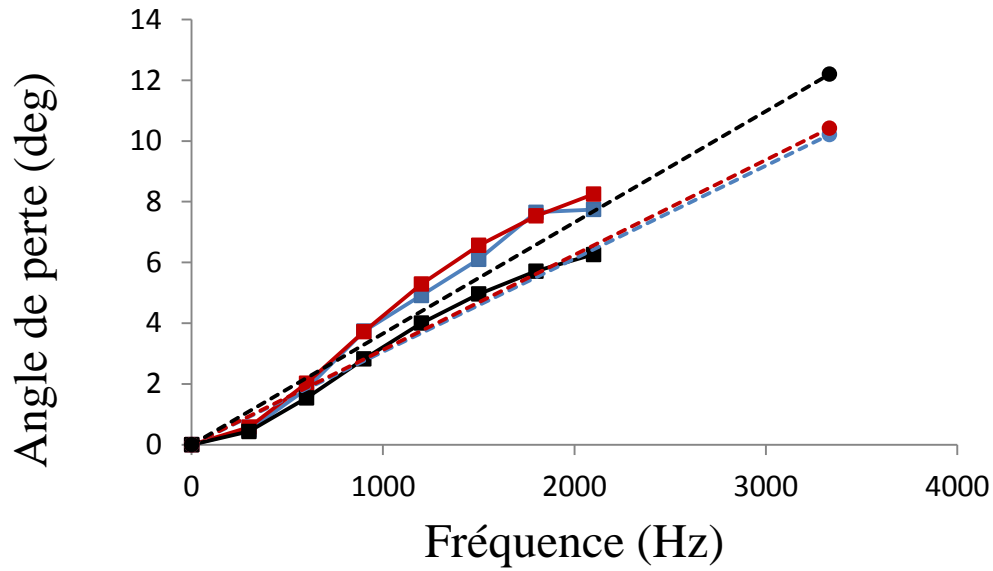


FIG. 9: calcul des propriétés viscoélastiques d'un échantillon sous diverses valeurs de précontrainte. Carrés : AMD numérique; points : méthode d'identification par propagation d'onde.

Seule la première bande fréquentielle [0-3333 Hz] a été affichée car la contribution des intervalles supérieurs n'est pas significative dans l'onde globale. En effet, au-delà de 5000 Hz, le contenu fréquentiel de l'impulsion incidente est quasiment nul, comme illustré en Fig. 10.

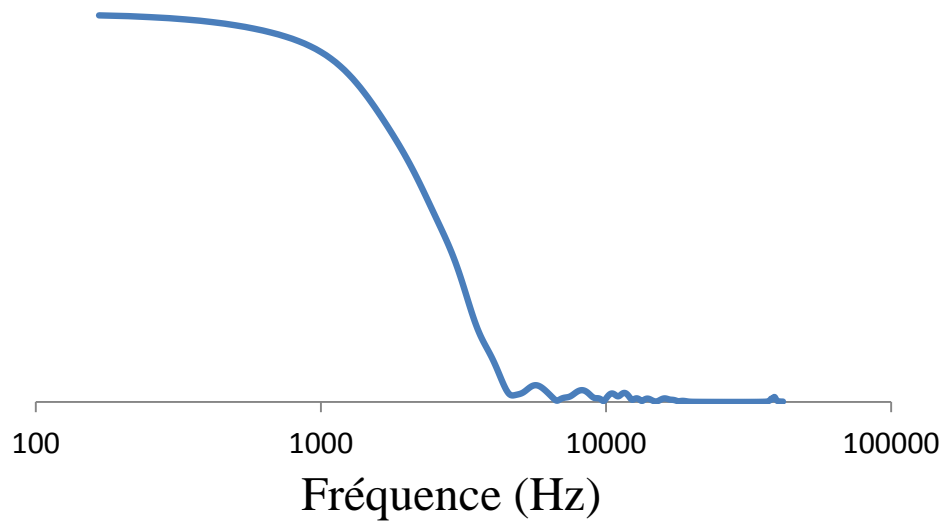


FIG. 10: amplitude de la transformée de Fourier discrète de l'onde incidente : $\hat{f}(x = -0.515, \omega)$.

Nous avons aussi évalué la distorsion spatiale de l'onde se propageant dans le barreau composite. La vitesse matérielle a été calculée en tous les nœuds d'une même section plane dans le cas extrême d'une précontrainte associée à une déformation de 10/30. La Fig. 11 montre comment les courbes d'évolution temporelle de la vitesse matérielle ponctuelle se superposent, confirmant ainsi l'hypothèse d'onde plane dans le milieu de référence.

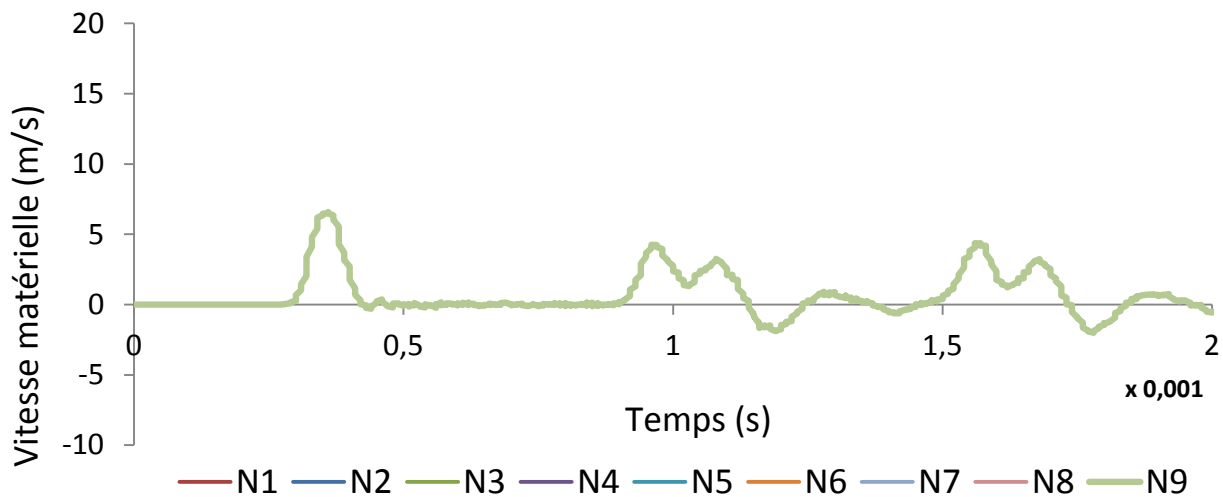


FIG. 11: vitesse matérielle calculée à l'aide du modèle EF axisymétrique en chaque nœud d'une même section du barreau de référence (N1: ext; N9:int).

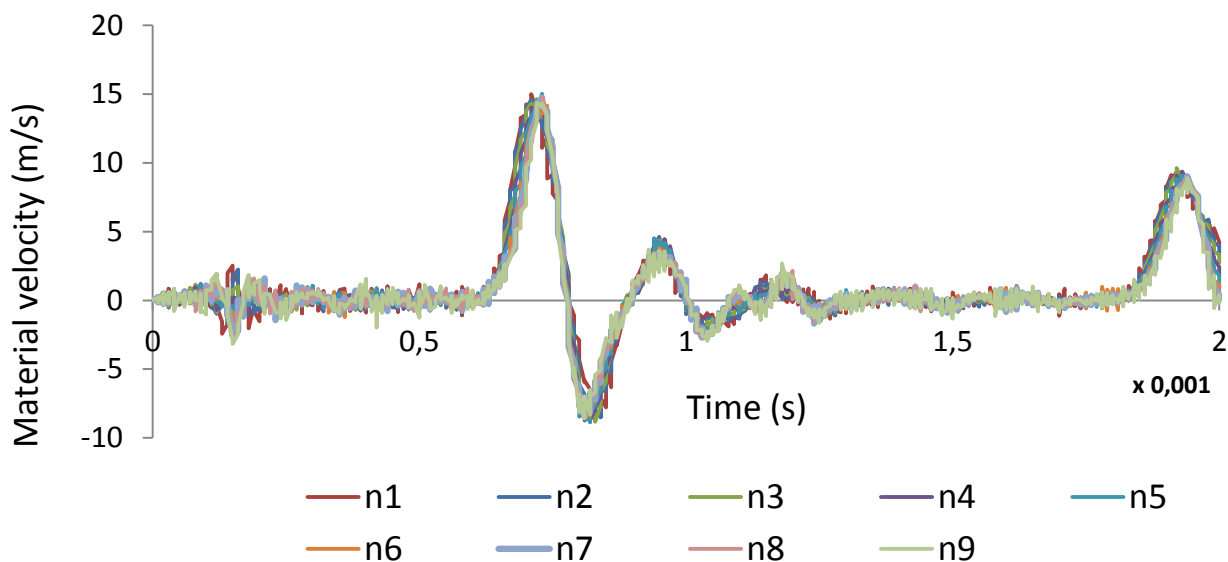


FIG. 12: vitesse matérielle normalisée calculée à l'aide du modèle EF axisymétrique en chaque nœud d'une même section au milieu de l'échantillon (n1: ext; n9: int).

En revanche, l'onde transmise dans l'échantillon est distordue spatialement. L'évolution temporelle de la vitesse matérielle est uniforme dans une section mais son amplitude dépend de l'éloignement du point d'observation par rapport à l'axe de symétrie du barreau. Elle décroît avec l'éloignement du centre du barreau. Toutes les courbes de la

Fig. 12 ont été normalisées par un coefficient fonction de la coordonnée radiale du point d'observation. La Fig. 11 et la Fig. 12 ont une échelle identique, ce qui met en évidence l'amplification de l'onde dans l'échantillon (au facteur de normalisation près).

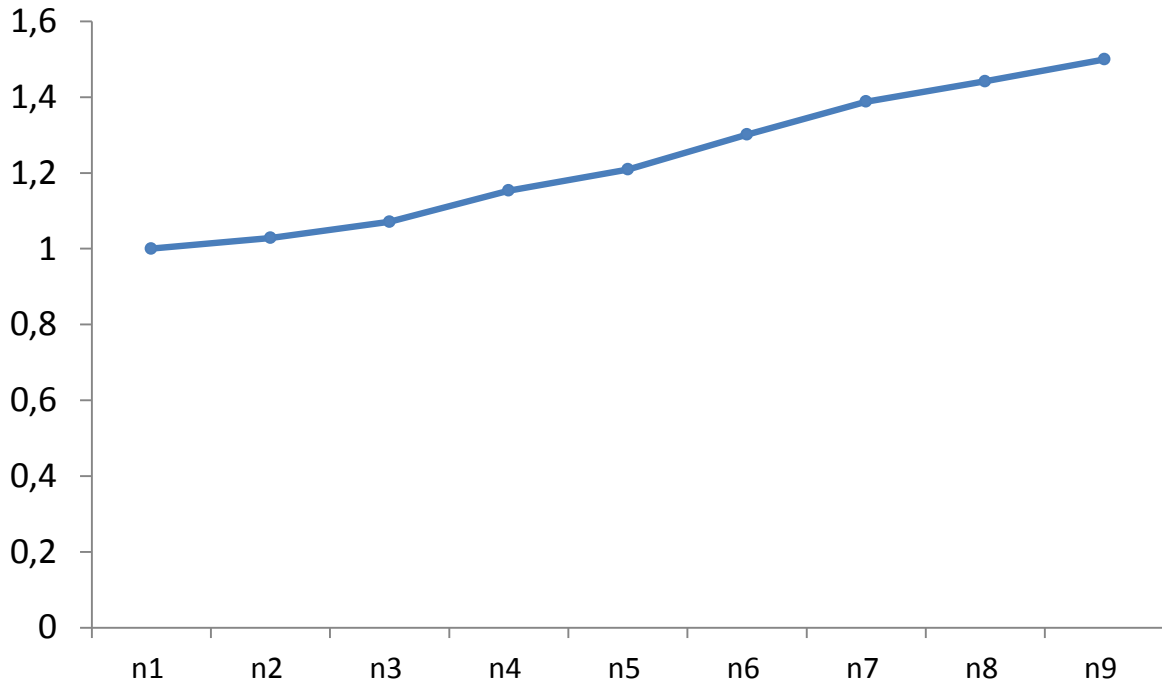


FIG. 13: profil d'amplitude de vitesse matérielle dans la section milieu de l'échantillon (n1: ext ; n9:int).

Fig. 13 illustre le profil d'amplitude de vitesse matérielle dans le plan de symétrie transverse de l'échantillon. Les nœuds n1 à n9 sont répartis uniformément le long d'un rayon de l'échantillon. Les valeurs représentées sont à multiplier aux courbes normalisées de la Fig. 12 pour obtenir l'évolution temporelle réelle des ondes transmises dans le milieu de l'échantillon.

5. CONCLUSION

Dans l'étude présente nous avons montré comment étendre le domaine d'application des méthodes de propagation d'onde pour mesurer les propriétés viscoélastiques de matériaux précontraints. Nous avons démontré que la méthode précédemment conçue pour caractériser les échantillons de courte longueur peut être adaptée pour prendre en compte une précontrainte éventuelle. Cette adaptation peut sembler complexe et non intuitive au premier regard, mais elle

conduit à une formulation théorique exacte des coefficients de transmission et de réflexion sous une forme analytique. L'expression de ces coefficients est finalement très proche de celle concernant les échantillons non contraints.

Nous avons montré la faisabilité théorique de cette méthode basée sur une approche inverse correspondant à une identification de signal transitoire dans le domaine temporel.

Dans la pratique, une attention extrême devra être portée à l'appareillage permettant d'assurer la précontrainte de l'échantillon. En particulier il ne devra pas augmenter de manière significative la masse de l'échantillon sous peine de modifier les conditions de conservation de la quantité de mouvement à l'interface décrites précédemment.

Des travaux supplémentaires permettront de confirmer la faisabilité pratique de cette méthode de mesurage.

Remerciements

Merci à Thomas Helfer pour l'implémentation de la loi hyperélastique dans MFront. Le code source est disponible ici :

<http://tfel.sourceforge.net/gallery/hyperviscoelasticity/SignoriniHyperViscoelasticity.mfront>.

Measuring viscoelastic properties of strained materials with a novel wave propagation method

Pierre Lemerle

Institut National de Recherche et de Sécurité, 1 rue du Morvan – CS 60027 – 54519 Vandœuvre cedex, France

Viscoelastic materials are commonly used for vibroacoustic solutions thanks to their ability to dissipate energy and thus attenuate vibration and sound. Wave propagation methods are a growing family of material characterization techniques based on the measurement of the waveform pattern of a transitory pulse along a one-dimensional structure. The time evolution of the pattern can be used to deduce the material's elasticity and damping characteristics. The most popular propagation methods, namely Hopkinson bar methods, assume no dispersion, i.e. no frequency dependency of the complex elasticity modulus which is not representative of resilient materials such as elastomers. More recent techniques have been derived and allow the measurement of frequency dependent properties from a pulse propagating in a slender bar. We showed in previous works how to adapt these techniques for shorter samples of materials, representing a genuine advance as many materials are difficult to extrude in practice. The main concept was to reconstruct the time history of the wave propagating in a composite structure composed of a long incident bar made of a known material and extended by a shorter sample bar. Then the viscoelastic properties of the sample material were determined in the frequency domain within an inverse optimization routine in the time domain. In industry, most isolation solutions using mounts or bushings must support structural weights. This is why it is particularly interesting to know the tangent viscoelastic properties of the material around the static stressed state. In the present paper, we show how to overcome this challenging issue. The theoretical framework of the computational approach is presented and the method is verified using a finite element model simulating the wave propagation in the structure tested.

1. INTRODUCTION

Engineering solutions for attenuating noise and vibration emissions make frequent use of resilient materials like elastomers. This is true for instance with engine mounts composed of rubber studs. Optimizing these components by numerical simulation requires knowledge of the material's properties.

Viscoelasticity is characterized by a special relationship between stress and strain which can be split into an instant part and a delayed contribution. All materials, whether natural or manufactured, present viscoelastic effects to varying extents, that result only from internal energy dissipation.

Various equivalent physical quantities are used in the scientific literature to account for this mechanical behavior. Stress can be expressed as a function of strain by the complex elasticity modulus $E^* = E' + jE''$. The real part drives the pure elasticity response as the imaginary part gives a measure of the energy loss or the damping. δ stands for the loss angle between stress and strain, i.e. the phase angle. $\text{tg}(\delta)$ is given by the ratio between E'' and E' and is known as the loss factor.

Many methods have been developed in the past and in recent years. They can be categorized into 3 families. First, Dynamic Mechanical Analysis (DMA) is used to characterize materials off structural resonances [1-4]. Material samples are tested under stationary conditions. A sinusoidal stress is applied and the resulting strain is measured. The complex modulus is thus deduced from the dual quantities. These methods are sub-modal, i.e. they assume no inertia effect. Consequently, they have frequency limitations to avoid structural resonances.

Typically, manufacturers of visco-analyzers stipulate a maximum frequency of 200 Hz in their technical specifications. Some improvements have been proposed to take into account system compliance and inertia [5,6] with correction formulae.

Conversely, a second class of methods takes advantage of structural modes. Exciting simple shaped samples with stationary vibration allows detecting and measuring high-order harmonic components of natural frequencies. Usually ultrasound sources are used [7]. The real part of the elasticity modulus may be expressed in terms of the overtone order and frequency according to the structure's dimensions. The damping or the imaginary part can be deduced from the quality factor measured previously by frequency scanning around the resonance. The same concept is used with the Oberst method. Here, the free end of a multi-layered cantilever beam is excited by a contactless electro-mechanical actuator [8,9]. The base beam is made of a lightly damped material such as steel or aluminum and coated with the material for testing. Other types of samples can be used, provided that the response at resonance is known, preferably in analytical form. For instance, the SAE method is based on the vibration analysis of a suspended coated

beam plate and the damping coefficients are derived from the Frequency Response Function FRF with a half power frequency band at -3dB steps or alternative methods [10].

The third class of methods is based on a transient analysis. A shock wave is generated in a slender bar. Measuring the wave front at two instants or two locations along the bar allows retrieving the elasticity frequency laws from a transfer function calculation. H. Kolsky proposed the basic concept of this method in 1954 [11]. It has been improved gradually over the five last decades [12-21]. Unlike DMA, wave propagation methods are adapted to wider frequency ranges of analysis, typically the audiometric range which is suitable for vibroacoustic applications. On the other hand, due to technical constraints and limitations they were reserved for qualified users. For instance, the strain gauge gluing operation was not a simple matter with soft materials. In the early 2000s we showed how to substitute turntable needles (phono cartridge heads) for strain gauges [22]. This way, the material velocity, also called signal-front velocity [23], can be measured and processed without difficulty or particular skill. Another limitation was due to the propagation media. The one-dimensional medium requires the production of long and slender test bars that are sometimes technically difficult to extrude. Manufacturers often prefer to test real components in the form of studs or bushings. This problem was addressed by using a composite structure composed of a long reference bar extended by a finite sample test bar. With this novel approach, the viscoelastic properties of the test sample are determined using an inverse method. The wave propagation in the two media is reconstructed in the frequency domain thanks to the dispersion equations including the transport terms and the reflection and transmission coefficients. The resulting wave is fitted to the measurement in the time domain as a function of the viscoelastic parameters of the sample and the reference bar. The solution of this optimization problem gives a measure of its real viscoelastic properties. This method was experimentally verified [24]. In particular the 1D assumption was satisfied with a pvc reference bar of 1m and rubber samples of 22 mm and 45 mm.

In practice, the industrial applications of noise and vibration reduction frequently rely on using resilient studs or mounts. Additionally, these uncoupling structures must support the weight of the machine they are designed to isolate. The goal is then to determine their viscoelastic properties around their deformed state which represents a challenge. Indeed, both the elasticity modulus and the damping of absorbent materials can vary as a function of their stress state. This research work aims at providing new solutions to adapt the wave propagation method to characterize strained material samples of short length. This requires a new theoretical framework which was tested and verified by means of a digital test bench based on a finite element model.

2. METHOD

The proposed method consists in generating a plane shock wave in a long slender bar composed of a given material, known or not, and extended with a material sample squeezed along its length at the desired strain (or stress) ratio. The pulse wave propagates in the two media at different velocities, producing reflected waves and transmitted waves each time it passes through the junction. Assuming small perturbations, the signal-front velocity measured at a given location of the incident bar is the superposition of all these echoes.

The core concept of the method is the reconstruction of the measured wave in the time domain as a function of the viscoelastic frequency laws of the two materials, the latter being the design variables of the whole propagation model. One-dimensional structures offer the advantage of solving the equations of motion in an analytical form.

The computed wave is then fitted to the measured wave in the least square sense, finally leading to the identification of the sample's viscoelastic properties.

As the method takes account of the dispersion, we first introduce the propagation equations in dispersive media

2.1. PROPAGATION EQUATIONS IN DISPERSIVE MEDIA

Generally speaking, the one-dimensional assumption is governed by the ratio of the length and the cross-section of a bar. Under this assumption, let us denote as $f(x, t)$ the general form of a pulse at a distance x and at a time t . It can either represent the strain or the material velocity. $\bar{f}(x, \omega)$ stands for the Fourier transform of $f(x, t)$ with respect to time. The resolution of the motion equations in an homogeneous infinite medium then leads to the general solution [25]:

$$\bar{f}(x, \omega) = X^+ e^{-\gamma(\omega)x} + X^- e^{\gamma(\omega)x} \quad (1)$$

with $\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\omega/c(\omega)$

The damping coefficient $\alpha(\omega)$ and the phase velocity, i.e. the sound velocity in the medium $c(\omega)$ are intrinsic properties of the material as $X^+(\omega)$ and $X^-(\omega)$ are determined by the initial and boundary conditions. In the following, for the sake of readability the term (ω) is omitted in all the frequency dependent variables, i.e. c, α, X .

The inverse Fourier transform of Eq. (1) leads to:

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^+ e^{-\alpha x + j\omega(t-x/c)} d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^- e^{\alpha x + j\omega(t+x/c)} d\omega \quad (2)$$

The integral terms express the forward and backward components of the progressive wave, respectively.

2.2. REFLECTION AND TRANSMISSION CONDITIONS AT THE INTERFACE

Let us consider the conditions of a sample pasted at the end of the reference bar.

The sample is assumed free at its extremity first. Each Fourier component of the pulse is a sine wave with pulsation ω . Crossing the junction generates reflection and transmission waves in the two media as depicted in Fig. 1:

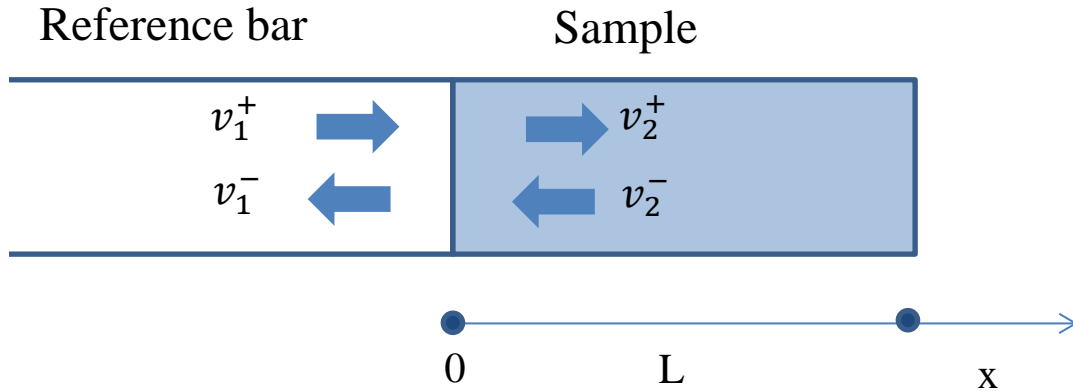


FIG. 1: Waves involved at the junction

Assuming material velocity waves, they must meet continuity conditions at the junction ($x = 0$):

$$X_1^+ + X_1^- = X_2^+ + X_2^- \quad (3)$$

The conservation of momentum must also be satisfied:

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} p = \frac{\rho v^+}{\frac{1}{c} - j\frac{\alpha}{\omega}} \text{ for forward progressive waves} \\ p = -\frac{\rho v^-}{\frac{1}{c} - j\frac{\alpha}{\omega}} \text{ for backward progressive waves} \end{cases} \quad (4)$$

with ρ and p representing the density and the pressure of the medium respectively. Eq. (4) can be expressed at the junction according to:

$$\rho_1 X_1^+ \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) - \rho_1 X_1^- \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) = \rho_2 X_2^+ \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) - \rho_2 X_2^- \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) \quad (5)$$

The conservation of momentum at the sample's end ($x = L$), provides another relation:

$$X_2^- = e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} X_2^+ \quad (6)$$

Finally, from Eq. (3), (5) and (6) it is possible to obtain the analytical expression of the reflection coefficient C_r under free conditions:

$$C_r = \frac{X_1^-}{X_1^+} = \frac{\rho_1 \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) \left(1 + e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} \right) - \rho_2 \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) \left(1 - e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} \right)}{\rho_1 \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) \left(1 + e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} \right) + \rho_2 \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) \left(1 - e^{-2j\frac{\omega L}{c_2} - 2\alpha_2 L} \right)} \quad (7)$$

One progressive wave v_1^+ is reflected at the junction with the complex multiplicative coefficient C_r . It should be noted that this reflection coefficient is a function of the frequency.

This unique term takes into account the contribution of the infinite number of echoes propagating inside the sample and transmitted back through the junction. Thus it is more meaningful to consider the reflection as a wave train. This wave train keeps on propagating along the reference bar until it is reflected at the free extremity and reaches the junction again in a never-ending process.

Thus the entire pulse signal can be expressed as the superposition of all the echoes:

$$f(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left[(C_r)^n \hat{f}(x, \omega) \left(e^{-2\alpha_1(nl+x)+j\omega\left(t-\frac{2(nl+x)}{c_1}\right)} + e^{-2\alpha_1 nl+j\omega\left(t-\frac{2nl}{c_1}\right)} \right) \right] \right) d\omega \quad (8)$$

where l is the length of the reference bar and $-l \leq x \leq 0$. $\hat{f}(x, \omega)$ is the incident pulse spectrum at location x . The two exponential terms represent the transport functions of each successive wave train echo, one from the junction and the next one from the free extremity of the bar. n is the echo order.

In the case of a strained sample, the free boundary conditions at the sample's extremity are no longer valid. A constant distance L must be assumed instead (summation of forward and backward waves expressed at $x=0$ and $x=L$. Both quantities are equal at any time), leading to the following equation:

$$X_2^- = X_2^+ e^{-\alpha_2 L - j\frac{\omega L}{c_2}} \quad (9)$$

In practice, L is constant for a given test but it can be modified arbitrarily to test materials with various compression states. This is the real advantage of this other type of boundary condition.

The conservation of momentum implies two more contributions because the kinematic constraint of the sample's extremity moving like the junction. Their sign is opposed to the waves transmitted in the sample at the junction, because they propagate in the opposite direction:

$$\begin{aligned} \rho_1 X_1^+ \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) - \rho_1 X_1^- \left(\frac{1}{c_2} - j\frac{\alpha_2}{\omega} \right) &= \rho_2 X_2^+ \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) - \rho_2 X_2^- \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) - \rho_2 X_2^+ \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) e^{-\alpha_2 L - j\frac{\omega L}{c_2}} + \\ \rho_2 X_2^- \left(\frac{1}{c_1} - j\frac{\alpha_1}{\omega} \right) e^{\alpha_2 L + j\frac{\omega L}{c_2}} & \end{aligned} \quad (10)$$

Combining Eq. (3), (9) and (10) gives the expression of the reflection coefficient under strained conditions:

$$C_r = \frac{\rho_1 \left(\frac{1}{c_2} - j \frac{\alpha_2}{\omega} \right) \left(1 + e^{-j \frac{\omega L}{c_2} - \alpha_2 L} \right) - 2 \rho_2 \left(\frac{1}{c_1} - j \frac{\alpha_1}{\omega} \right) \left(1 - e^{-j \frac{\omega L}{c_2} - \alpha_2 L} \right)}{\rho_1 \left(\frac{1}{c_2} - j \frac{\alpha_2}{\omega} \right) \left(1 + e^{-j \frac{\omega L}{c_2} - \alpha_2 L} \right) + 2 \rho_2 \left(\frac{1}{c_1} - j \frac{\alpha_1}{\omega} \right) \left(1 - e^{-j \frac{\omega L}{c_2} - \alpha_2 L} \right)} \quad (11)$$

It is remarkable that the expression is identical to the free conditions Eq. (7), after multiplying ρ_2 and dividing L by a factor 2. Everything happens as if the sample had a double section and half its actual length but was free at its end.

The same result would have been obtained from Eq. (9) also observing that:

$$v_2^+ \left(\frac{L}{2}, \omega \right) = v_2^- \left(\frac{L}{2}, \omega \right) \quad (12)$$

which may be interpreted as the conservation of momentum for a free border in the middle of the sample ($x = \frac{L}{2}$).

In addition, from Eq. (9), we can show that v_2^+ and v_2^- are mirrored waves:

$$v_2^+(L - x, \omega) = v_2^-(x, \omega) \quad (13)$$

In the same manner, Eq. (10) may be interpreted as the conservation of momentum at the junction of 2 samples pasted in parallel to the reference bar, i.e. one equivalent sample of double density.

2.3. IDENTIFICATION OF VISCOELASTIC PROPERTIES

As explained before, various couples of equivalent physical quantities may be chosen to characterize viscoelastic behaviors. They are all tied together by constitutive equations. For instance, in one-dimensional structures, the elastic modulus and the loss angle can be expressed as a function of the phase velocity and the damping coefficient according to [26]:

$$\begin{cases} |E(\omega)| = \rho c(\omega)^2 \cos^2 \left(\frac{\delta(\omega)}{2} \right) \\ \delta(\omega) = 2 \text{Arctg} \left(\frac{\alpha(\omega) c(\omega)}{\omega} \right) \end{cases} \quad (14)$$

Hereafter, the physical quantities $[c_i(\omega), \alpha_i(\omega)]$ are chosen as viscoelastic properties. Their frequency dependency is approximated with piecewise linear functions:

$$\begin{cases} c_i(\omega) \simeq \sum_{p=0}^k \left[\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_0} - p \right) (c_{i|p+1} - c_{i|p}) + c_{i|p} \right] \Pi \left(\frac{\omega}{\Delta\omega_0} - p \right) \\ \alpha_i(\omega) \simeq \sum_{p=0}^k \left[\left(\frac{\omega}{\Delta\omega_0} - p \right) (\alpha_{i|p+1} - \alpha_{i|p}) + \alpha_{i|p} \right] \Pi \left(\frac{\omega}{\Delta\omega_0} - p \right) \end{cases} \quad (15)$$

$i \in [1; 2]$

Π being the gate function: $\Pi(x) = 1$, if $0 \leq x \leq 1$, $\Pi(x) = 0$ otherwise.

$\Delta\omega_0$ represents the uniform length of the pulsation ranges.

Then, the two viscoelastic functions are fully determined as the $2(k + 1)$ degrees of freedom $c_{i|p}$ and $\alpha_{i|p}$ are known.

Finally, the identification of $c_2(\omega)$ and $\alpha_2(\omega)$ consists in minimizing the least square difference between the measured material velocity and its reconstruction according to Eq. (8).

Eq. (8) requires as input signal the incident wave measured in the time domain and transformed into the frequency domain. This assumes that the reference bar is sufficiently long to isolate the pulse from its upcoming echoes.

In practice, the minimization is performed over a finite time interval. Assuming that the time space is digitized with step Δt , the inverse discrete Fourier transform (IDFT) is used instead of the continuous inverse Fourier transform and the objective function can be expressed as:

$$\Psi(c_{i|p}, \alpha_{i|p})_{i \in [1; 2], 0 \leq p \leq k} = \sum_{i=0}^{i_0} \left| f_{measure}(x, i\Delta t) - \text{IDFT} \left(\sum_{n=0}^{n_0} \left[(C_r)^n \hat{f}(x, \omega) \left(e^{-2\alpha_1(nl+x) - j\omega \left(\frac{2(nl+x)}{c_1} \right)} + e^{-2\alpha_1 nl - j\omega \left(\frac{2nl}{c_1} \right)} \right) \right] \right) \right|_{i\Delta t}^2 \quad (16)$$

$i_0 \Delta t$ is the upper bound of the time window delimiting the study period of the pulse. n_0 is the maximum echo order affecting the pulse function over this period.

The optimization variables are the sets of degrees of freedom $c_{i|p}$ and $\alpha_{i|p}$. The set may be restricted to $c_{2|p}$ and $\alpha_{2|p}$ if the reference material is supposed known.

In practice, the optimization problem was solved easily using a genetic algorithm [27] but any other relevant minimization method would have been appropriate.

3. VERIFICATION

The measurement method was verified using a digital test bench. This way, it was easier to test various trial configurations but above all it gave us the possibility of obtaining local values of physical quantities. The digital test bench is composed of a Finite Element (FE) model. It is intended to model the test of generating a pulse in the composite bar described above and measuring the material velocity at a given location. As the viscoelastic sample must be compressed and maintained in its strained conditions prior to the test, the material law must be of hyper-viscoelastic type and the calculation must meet the assumptions of finite strain theory. The model was built using Code_Aster (version 13.3.0). This free open-source FE software developed and distributed by EDF R&D has no built-in hyper-viscoelastic behavior laws. Therefore we had to implement one with the help of the multi-solver frontal software MFront.

3.1. DEVELOPMENT OF A HYPER-VISCOELASTIC LAW

The simplest expression of the equivalent rheological model of a viscoelastic material is known as the Maxwell model. It is composed of one purely elastic spring and one purely viscous damper in series.

The generalized Maxwell model, also known as Maxwell-Wiechert model or Prony series representation [28,29] was introduced to model the dispersion or, in other words, to take into account that the relaxation does not occur at a single time, but is distributed over time. This rheological model is composed of an arbitrary number of Maxwell branches in parallel, as illustrated in Fig. 2.

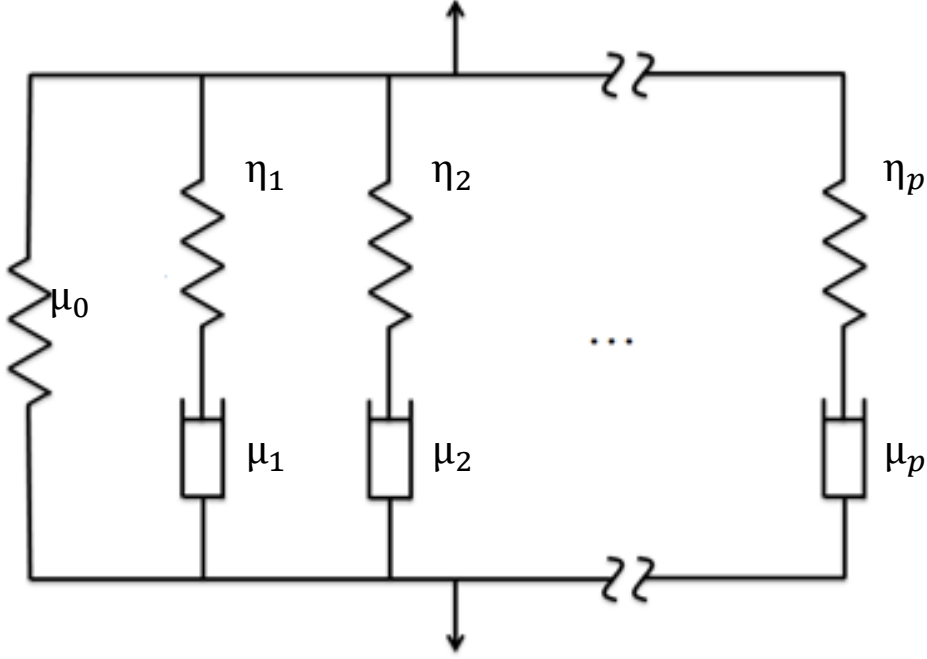


FIG. 2: generalized Maxwell rheological model

According to the Boltzmann superposition principle, the response of the combined load history is then given by:

$$\sigma(\varepsilon, t) = \int_{-\infty}^t G(t-s) \frac{\partial \varepsilon}{\partial s} ds \quad (17)$$

$$\text{with } G(t) = \mu_0 + \sum_{i=1}^r \mu_i e^{-\frac{t}{\tau_i}} \text{ and } \tau_i = \frac{\eta_i}{\mu_i}$$

The hereditary equation Eq. (17) may be interpreted as the continuous summation of all the relaxation responses caused by successive infinitesimal strain steps.

By substituting $\frac{d\sigma}{G(0)}$ for $d\varepsilon$ Eq. (17) then becomes:

$$\sigma(\varepsilon, t) = \int_{-\infty}^t g(t-s) \frac{\partial \sigma}{\partial s} ds \quad (18)$$

$$\text{with } g(t) = g_\infty + \sum_{i=1}^r g_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

$$\text{and } \begin{cases} 0 < g_\infty \leq 1 \\ 0 \leq g_i < 1 \\ g_\infty + \sum_{i=1}^r g_i = 1 \end{cases}$$

Following the implementation given by L.R. Hermann and F.E Peterson [30-32], time discretization is used to compute the stress incrementally:

$$\sigma(t) = g_\infty \sigma_0(t) + \underbrace{\sum_{i=1}^r \int_{-\infty}^t g_i e^{-\frac{t-s}{\tau_i}} \frac{\partial \sigma_0}{\partial s} ds}_{h_i(t)} \quad (19)$$

$$h_i^{n+1} \approx h_i(t_{n+1}) = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}} h_i^n + g_i \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}}}{\frac{\Delta t}{\tau_i}} (\sigma_0^{n+1} - \sigma_0^n) \quad (20)$$

Experimental investigations have shown that viscoelastic behavior is mainly related to the isochoric part of the deformation [32]. Thus, the time evolution governed by Eq. (19) is applied to the deviatoric part of the stress tensor only.

We chose as hyper-elastic law one particular form of Signorini's law which was available in Code_Aster's constitutive law library [33]. In this formulation, the Piola-Kirchhoff-II tensor derives from two energy potentials:

$$S = 2 \frac{\partial \psi^{iso}}{\partial c} + 2 \frac{\partial \psi^{vol}}{\partial c} \quad (21)$$

The energy potentials are expressed as a function of the invariants of the right Cauchy-Green deformation tensor of deviatoric strains I_c^* , II_c^* and III_c^* :

$$\begin{cases} I_c^* = J^{-\frac{2}{3}} I_c \\ II_c^* = J^{-\frac{4}{3}} II_c \\ III_c^* = 1 \end{cases} \quad (22)$$

The general form of the energy potential is for the Signorini's law:

$$\psi = \sum_{(p,q)} C_{pq} (I_c^* - 3)^p (II_c^* - 3)^q \quad (23)$$

We chose for (p, q) the particular combination of coefficients $(1,0)$, $(0,1)$, $(2,0)$:

$$\begin{cases} \psi^{iso} = C_{10}(I_c^* - 3) + C_{01}(II_c^* - 3) + C_{20}(I_c^* - 3)^2 \\ \psi^{vol} = \frac{K}{2}(J - 1)^2 \end{cases} \quad (24)$$

The PKII tensor is then split into the volumetric part and the isochoric (deviatoric) part:

$$S_{ij}^{vol} = K(J - 1)C_{ij}^{-1} \quad (25)$$

$$S_{ij}^{iso} = 2 \left((C_{10} + 2C_{20}(I_c^* - 3))J^{-\frac{2}{3}} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{3}C_{ij}^{-1}I_c \right) + C_{01}J^{-\frac{4}{3}} \left(I_c \delta_{ij} - C_{ij} - \frac{2}{3}C_{ij}^{-1}II_c \right) \right) \quad (26)$$

Finally, for the hyper-viscoelastic law, only the deviatoric part is updated according to the viscoelastic evolution given by Eq. (19) and Eq. (20):

$$\begin{cases} \widehat{S}_{ij}^{vol} [n+1] = S_{ij}^{vol} [n+1] \\ \widehat{S}_{ij}^{iso} [n+1] = g_\infty S_{ij}^{iso} [n+1] + \sum_{i=1}^N h_i^{n+1} \end{cases} \quad (27)$$

with:

$$h_i^{n+1} = e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}} h_i^n + g_i \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}}}{\frac{\Delta t}{\tau_i}} \left(S_{ij}^{iso} [n+1] - S_{ij}^{iso} [n] \right) \quad (28)$$

The tangent stiffness matrix \hat{K} is deduced from the tangent stiffness matrix K of the hyper-elastic law according to:

$$K = 4 \frac{\partial^2 \psi^{iso}}{\partial c \partial c} + 4 \frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial c \partial c} \quad (29)$$

$$\begin{cases} K_{ijkl}^{iso} = 4 \left[\frac{\partial^2 \psi^{iso}}{\partial I_c^{*2}} \right] \frac{\partial^2 I_c^*}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} + \left[\frac{\partial^2 \psi^{iso}}{\partial II_c^{*2}} \right] \frac{\partial^2 II_c^*}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \\ K_{ijkl}^{vol} = 4 \left[\frac{\partial^2 \psi^{vol}}{\partial J^2} \right] \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} \end{cases} \quad (30)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 I_c^*}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = III_c^{* \frac{1}{3}} \left(C_{ki}^{-1} C_{lj}^{-1} I_c - C_{ij}^{-1} \delta_{kl} - C_{kl}^{-1} \delta_{ij} + \frac{1}{3} C_{kl}^{-1} C_{ij}^{-1} I_c \right) \\ \frac{\partial^2 J}{\partial C_{ij} \partial C_{kl}} = \frac{1}{4} III_c^{* \frac{1}{4}} \left(C_{kl}^{-1} C_{ij}^{-1} - C_{ki}^{-1} C_{lj}^{-1} \right) \end{cases} \quad (31)$$

Finally, the tangent stiffness matrix is updated following:

$$\hat{K}_{ijkl}^{n+1} = K_{ijkl}^{vol n+1} + g_\infty + \sum_{i=1}^r g_i \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\tau_i}}}{\tau_i} K_{ijkl}^{iso n+1} \quad (32)$$

3.2. FINITE ELEMENT MODEL OF THE COMPOSITE BAR

The FE model is axisymmetric and composed of 2 rectangular structures (=cylindrical in 3D space):

- The reference bar of dimension $1\text{m} \times 0.005\text{m}$ comprises 891 quadratic elements.
- The test sample of dimensions $0.03\text{m} \times 0.005\text{m}$ comprises 441 quadratic elements.

The two structures have 9 elements in the width (=radius in 3D space). Their junction is modeled with common nodes.

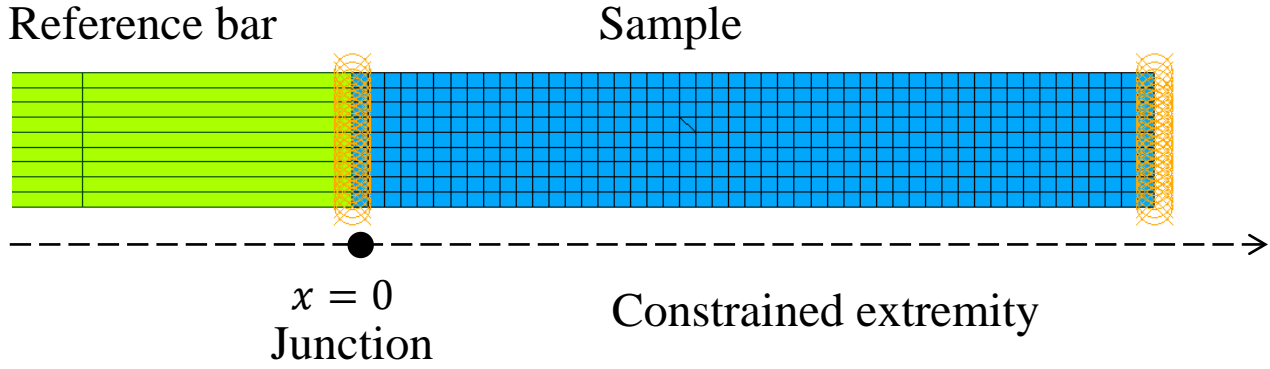


FIG. 3: detail view of the composite bar's meshing

Both structures are composed of viscoelastic materials with different properties. The numerical values of elasticity were chosen as representative of PVC and rubber respectively [24], knowing that the Young's modulus of unstrained materials can be approximated by Signorini's coefficients for small strains [33]:

$$E = 6(C_{01} + C_{10}) \quad (33)$$

		<i>Reference material</i>	<i>Sample material</i>
C_{10}	(Pa)	5.90×10^8	3.03×10^7
C_{01}	(Pa)	6.01×10^7	3.08×10^6
C_{20}	(Pa)	1.03×10^8	5.30×10^6
K , Bulk modulus	(Pa)	1.03×10^{11}	$3. \times 10^{10}$
ν , Poisson		0.499	0.499
ρ , Density	(kg/m ³)	1400.	1200.
g_∞		0.93	0.65

g_0		0.05	0.01
g_1		0.01	0.32
g_2		0.01	0.04
τ_0	(s)	0.1	0.1
τ_1	(s)	0.01	0.0001
τ_2	(s)	0.001	0.00001

TAB. 1: Material properties

The time history of the material velocity is calculated in the middle of the reference bar at a surface node of coordinate $x = -0.515$ m.

The calculation requires 2 stages:

- First the sample is compressed along axis x according to a given ratio. Three compression values were investigated (0 m, 0.005 m, 0.01 m). The group of nodes at the sample's extremity is incrementally moved back towards the node group of the junction in quasi-static conditions, while the latter is kept clamped.
- Then the calculation is restarted with kinematics constraints linking the two groups of nodes at a constant distance (=the compression distance reached at the end of the previous stage). Simultaneously, the junction's clamping is released and a force pulse is imposed at $t = 0$. The trapezoidal pulse lasts 1.2×10^{-4} s with a rise of $2. \times 10^{-6}$ s and a fall of $2. \times 10^{-6}$ s. During the second stage the composite bar stays free at both ends.

The two steps were performed under the assumption of the finite strain theory.

The time step was reduced by trials until the time history of the material velocity showed no significant variations.

This was achieved with a value of $2. \times 10^{-6}$ s.

3.3. DIGITAL DMA TEST

The FE model was used to formulate the proposed wave propagation method for determining the viscoelastic properties of the strained sample. In addition, in order to verify the results, we calculated the frequency evolution of these properties following the DMA approach.

We built a FE model composed of a single volume element simply supported at its bottom face. A sinusoidal displacement was imposed on the opposite face. Each run was performed at a given frequency. The magnitude of the imposed displacement was set to maintain constant acceleration between all the runs.

The elasticity modulus and the loss angle were then deduced from these calculations using the Lissajous method [34], each run providing one value for the two quantities with respect to one given frequency. The Lissajous curve is a representation of the reaction force as a function of the imposed displacement. Due to the presence of damping this curve is an ellipse whose dimensions are directly linked to the viscoelastic properties:

$$\begin{cases} \delta = \text{Arcsin}\left(\frac{a}{b}\right) \\ E = \frac{bh}{sc} \end{cases} \quad (34)$$

where S and h are respectively the cross-section area and the length of the volume element.

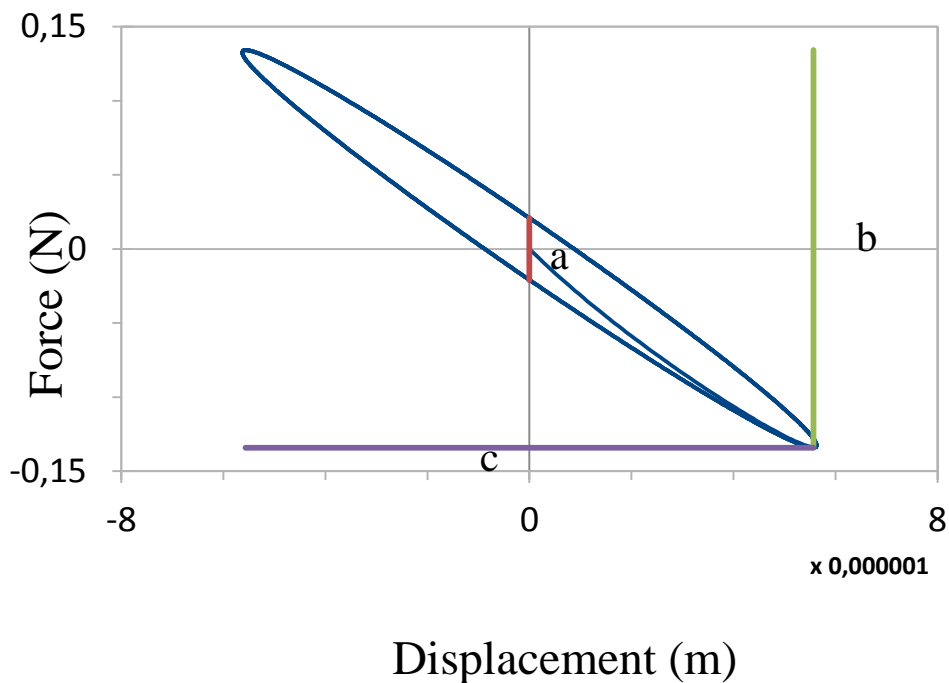


FIG. 4: Lissajous curve

This way, we were able to draw the frequency law of E and δ point by point and compare it to the values identified by the wave propagation method.

4. RESULTS and DISCUSSION

We calculated the time history of the material velocity with respect to the three aforementioned values of the compression ratio. The front wave propagation was calculated in the time interval $[0-2. \times 10^{-3} \text{ s}]$.

The optimization method explained above was applied to compute the frequency laws of damping and phase velocity. The two quantities were parameterized beforehand with piecewise linear functions in four equal frequency bands within the interval $[0-10\,000 \text{ Hz}]$.

In Fig. 5 we show the resulting identifications of the material velocities calculated in the middle of the reference bar for each strain ratio. Very close agreement can be observed between the FE calculations and the reconstruction of the wave fronts over the selected time interval according to Eq. (8) and with the sets of identified viscoelastic parameters

$$[c_{2|p}, \alpha_{2|p}]_{1 \leq p \leq 4}.$$

In every case the optimal solution was reached in fewer than 100 iterations, each step requiring a few tens of seconds on a basic microcomputer with an incident wave composed of 500 time samples. The calculation was almost immediate.

The unit scale of the material velocity was not needed as the complete wave was reconstructed from the incident wave front, i.e. the first peak in Fig. 5 (at instant $3.3 \times 10^{-4} \text{ s}$). Then the same sets of viscoelastic parameters led to homothetic curves when the FE calculated velocity was multiplied by a constant factor, which for instance can result from changing the pulse magnitude under the assumption of sufficiently small impacts.

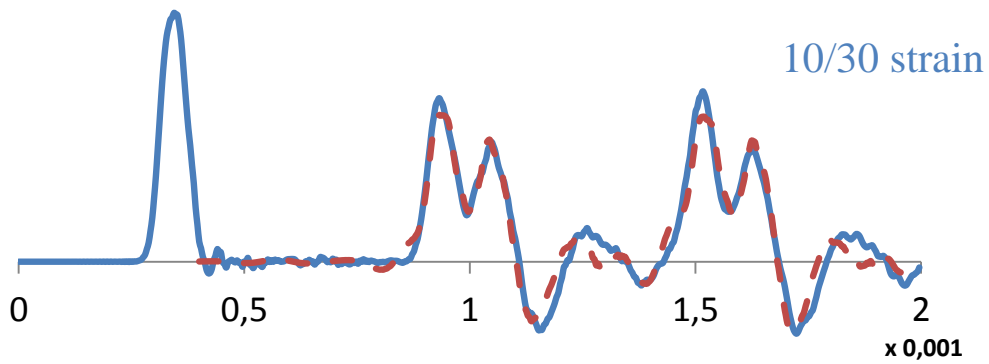
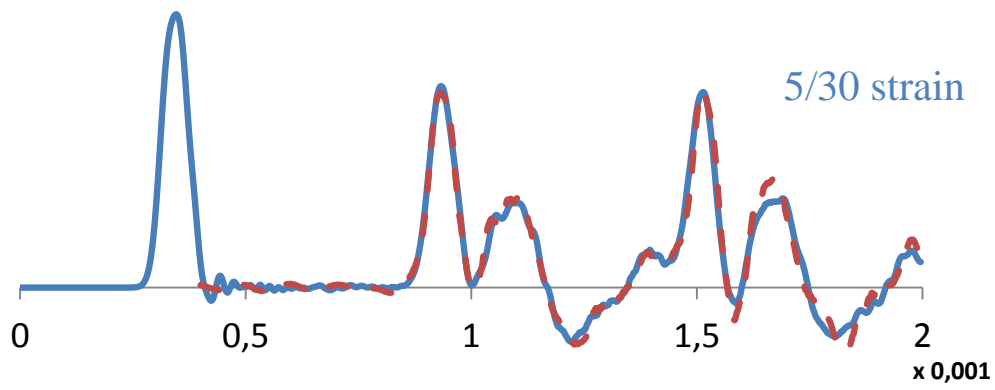
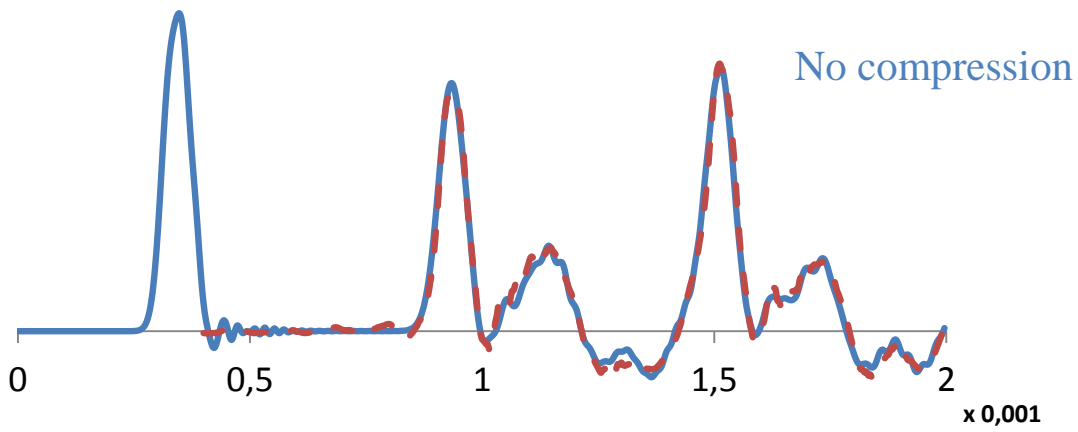


FIG. 5: Time histories of the material velocity for three different values of strain ratio

(blue: FE calculation; red line: identification)

Fig. 6 highlights the contribution of each echo in the global transient response. In the study time window, the first echo order is sufficient to reconstruct the complete wave.

The first peak (0) represents the incident wave captured in the middle of the reference bar. This pulse keeps on propagating along the reference bar up to the sample interface. The second peak (1) is its direct reflection in the reference bar propagating back to the capture location, while the wavetrain (2) highlights the multiple reflections of the incident wave in the sample then transmitted back in the reference bar. Lastly, the third peak (3) and the second wavetrain (4) are the echoes of peak (1) and wavetrain (2) respectively at the free extremity of the reference bar.

Reflections (1) and (2), i.e. curve b), are given by the first transport term of Eq. (8) associated with the echo order $n=0$. Reflections (3) and (4) i.e. curve c) are given by the second transport term of Eq. (8) associated with $n=1$. The first peak (0) is the input signal of Eq. (8). It also results from the second transport term associated with $n=0$. Indeed, in the case $n=0$ this term is nothing more than the inverse Fourier transform of $\hat{f}(x = -0.515, \omega)$ which is the Fourier transform of the incident wave.

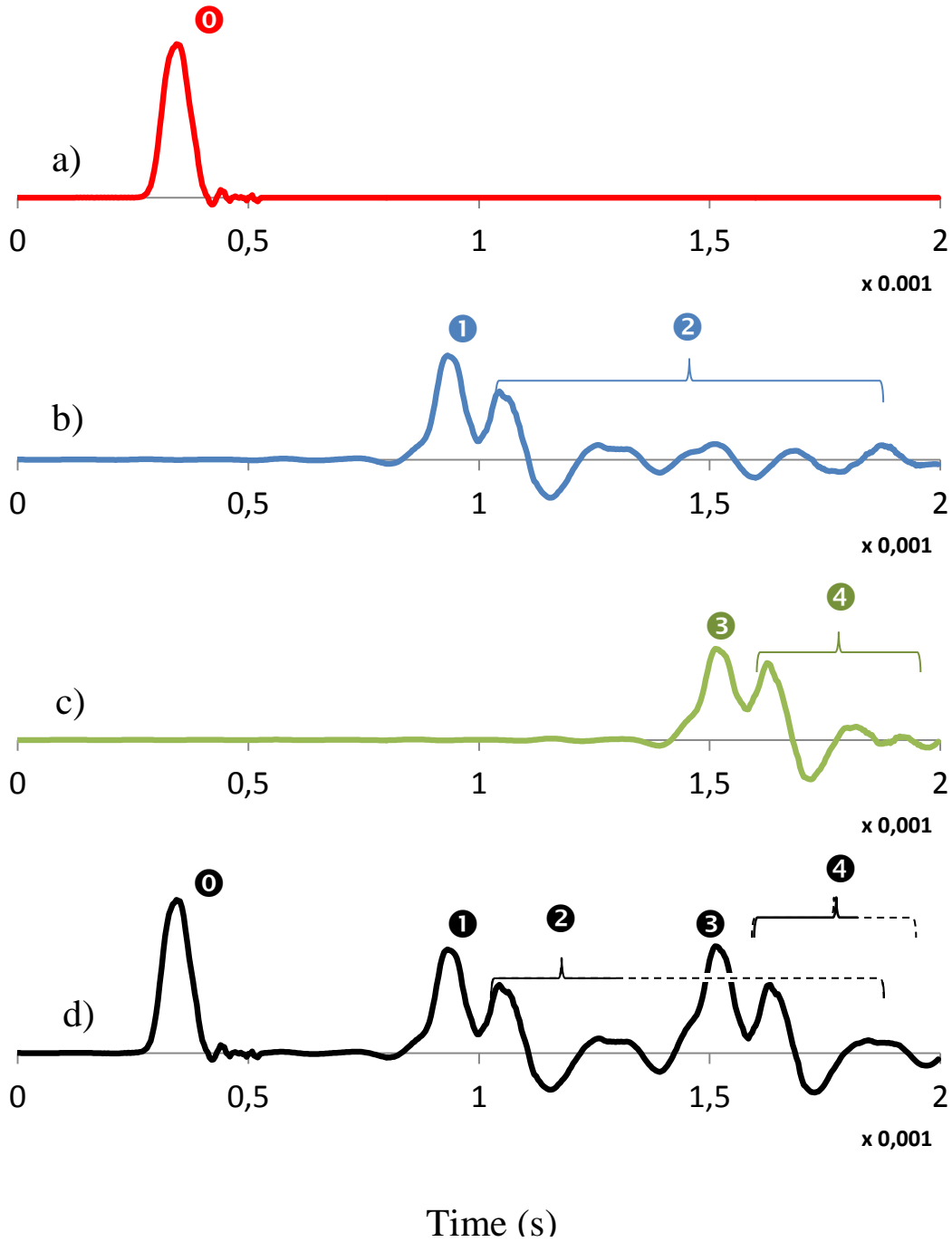


FIG. 6: Contribution of all the echoes in the material velocity (a: incident wave; b: echo at the junction; c:echo at the reference bar extremity; d:superposition)

We show in Fig. 7 the deformed shape of the sample at several instants of the wave propagation for an initial strain ratio of 10/30. The high amount of strain causes the sample to bulge. The incident wave reaches the junction at

instant $t = 6.51 \times 10^{-4}$ s. As a result, the sample's cross-section is squeezed locally near the junction and symmetrically expanded near the extremity, due to the kinematic constraint of Eq. (9). Two mirrored waves are then generated, confirming the one-dimensional wave equation Eq. (13). They both propagate in the sample at higher magnitude than in the reference bar. This is caused by the high value of the transmission coefficient from the reference medium to the sample medium.

At instant $t = 7.6 \times 10^{-4}$ s, the wave is transmitted back to the reference bar while continuing to propagate in the sample ($t = 8.96 \times 10^{-4}$ s).

Later, at $t = 1.783 \times 10^{-3}$ s the wavetrain echo returns after travelling along the reference bar. It is transmitted again through the junction generating a new wavetrain ($t = 1.864 \times 10^{-3}$ s).

The composite bar moves forward gradually each time a wave is reflected at its extremities. This can be observed in Fig.7 where the initial position of the sample is indicated by dotted lines.

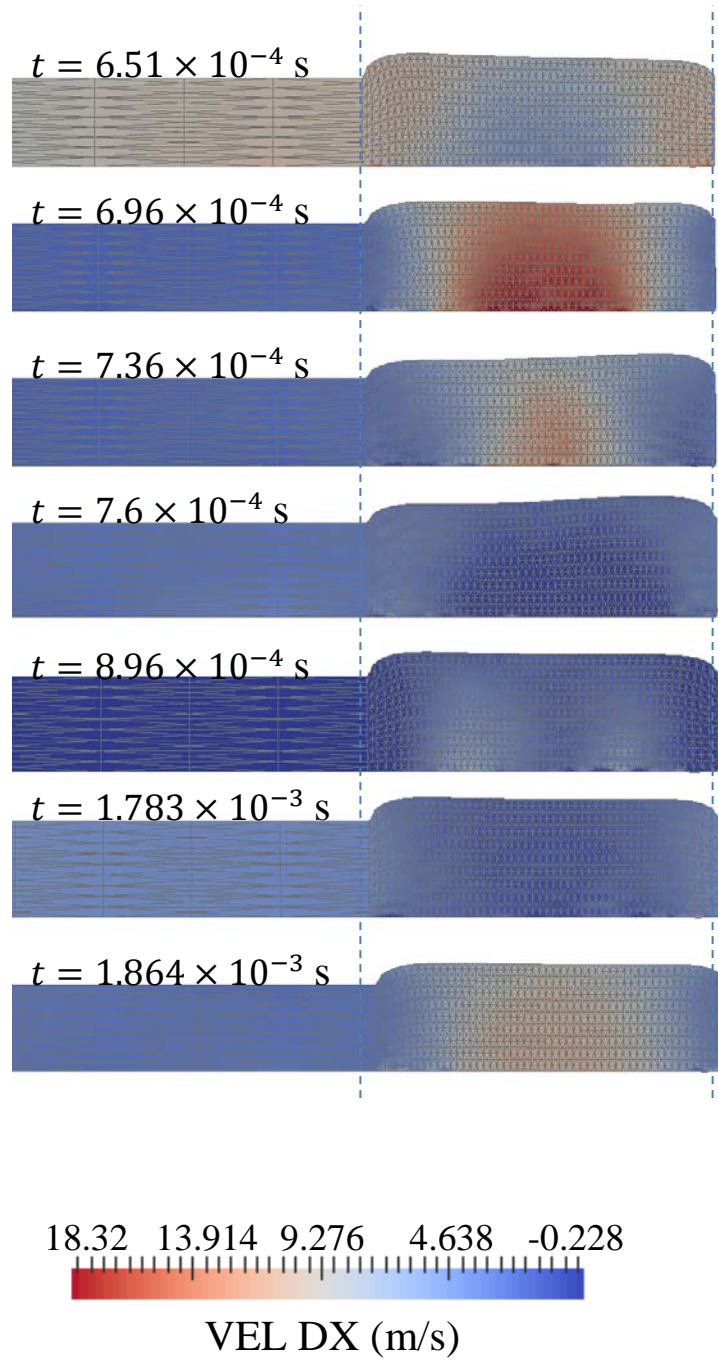


FIG. 7: Deformed shapes of the strained sample at various instants. Color map: longitudinal material velocity

As the sample material is hyper-elastic and almost incompressible, when a cross-section of the composite bar is squeezed a transverse expansion is induced so that the volume remains unchanged locally. That is the reason why local prominences propagate superficially accompanying the longitudinal waves. This is particularly significant in the sample because the bulk modulus is much lower than in the reference bar.

Fig. 8 gives an illustration of the transverse deformations. The color map clearly shows the antisymmetric transverse strain waves. Expansion at one end of the sample is linked to compression at the opposite end and vice versa.

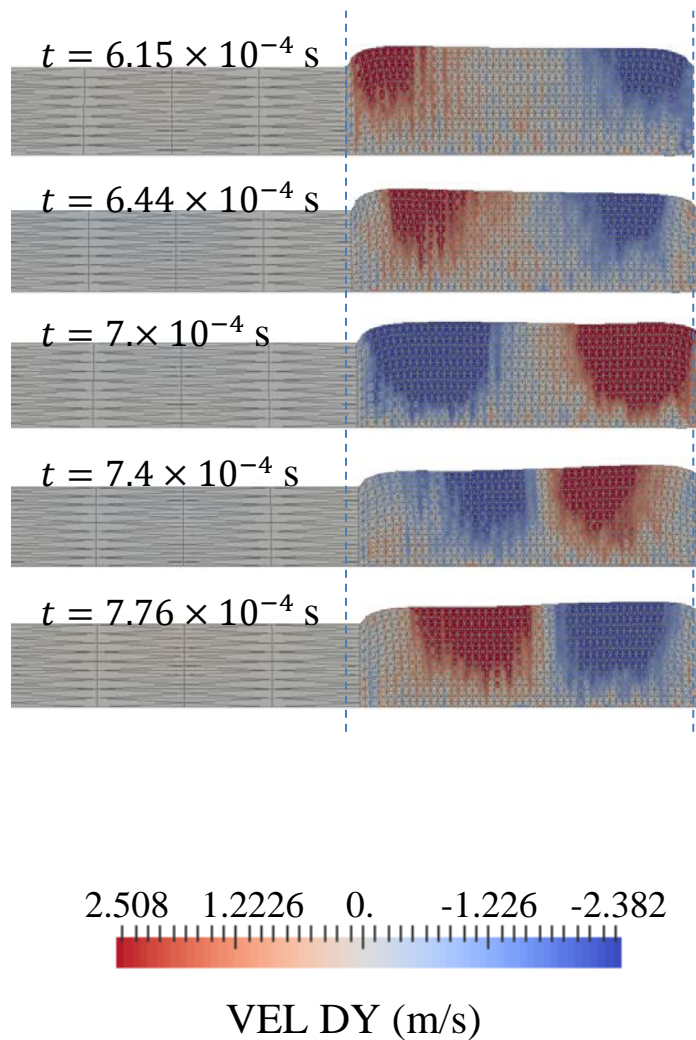


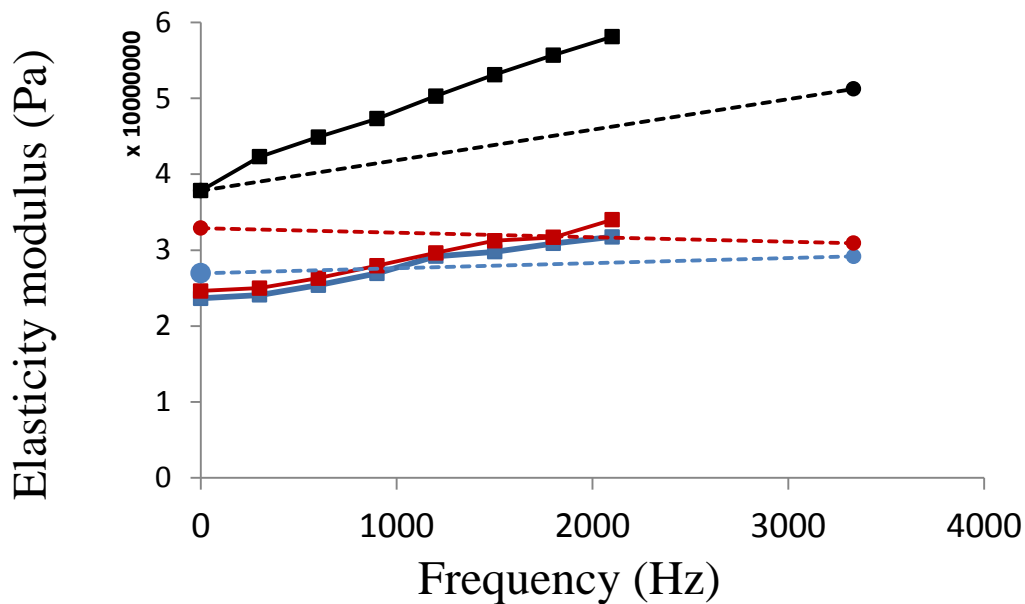
FIG. 8: Deformed shapes of the strained sample at various instants. Color map: transverse material velocity

In the identification method proposed a one-dimensional propagation model is used and this manifestation of the Poisson effect cannot be restored. Nevertheless, we showed above that the mirroring properties for the longitudinal strains are also verified inside the strained sample in the case of EF modeling assumptions.

The identification results are presented in Fig. 9. Both loss angles and the Young's moduli obtained from the fitting process detailed above were compared to the values deduced from the DMA simulations. The three strain ratio values were studied.

The comparison shows consistent results for both physical quantities.

The first strain value induces no significant changes for the tangent elasticity modulus and the damping compared with the unstrained material properties as the highest strain value considerably increases the elasticity modulus and slightly decreases the loss angle.



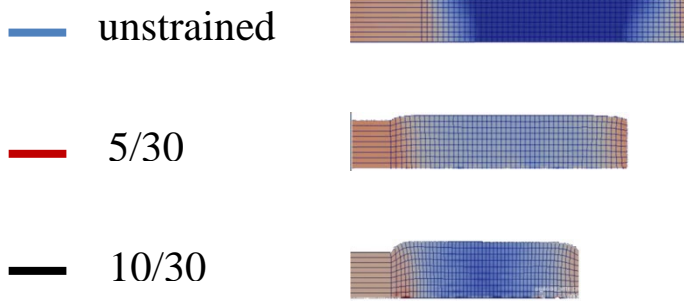
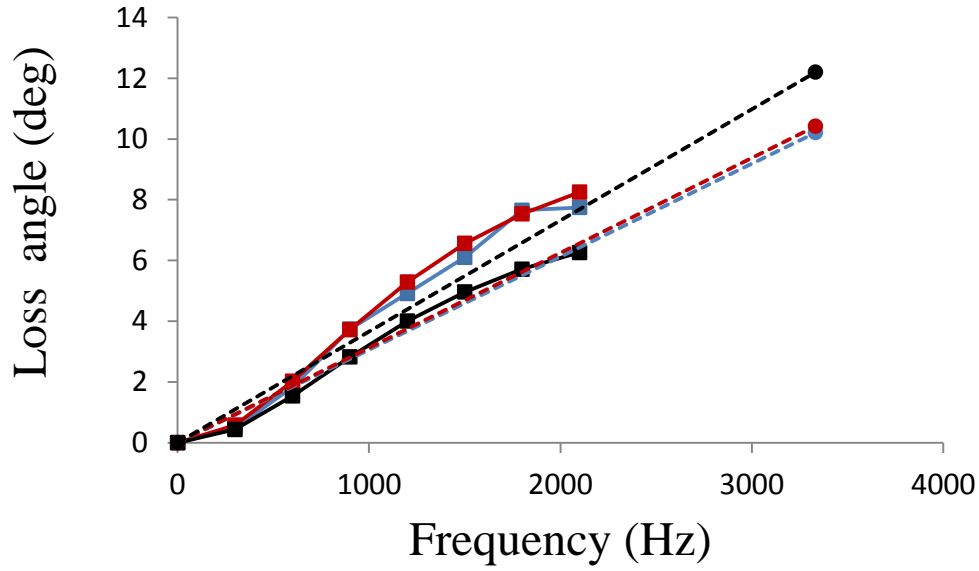


FIG. 9: calculation of the viscoelastic properties of a sample under various state of strain. Square: digital DMA; dot: proposed wave propagation method.

Only the first frequency band [0-3333 Hz] was displayed as the contribution of the higher intervals in the global wave is not significant. Above 5000 Hz, the spectral content of the pulse is almost nil, as illustrated in Fig. 10.

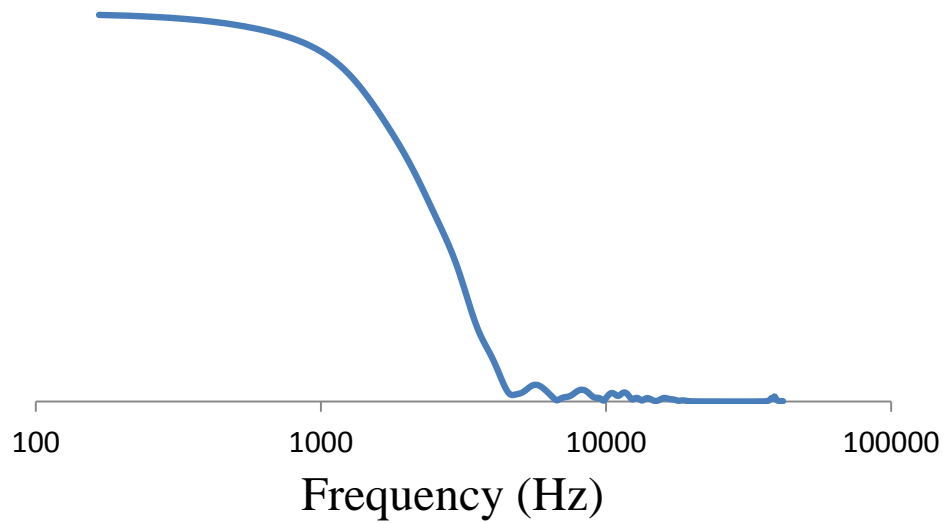


FIG. 10: magnitude of the discrete Fourier transform of the incident wave: $\hat{f}(x = -0.515, \omega)$.

We checked the space distortion of the wave propagating in the composite bar. The material velocity of all the nodes of the same cross-section was calculated in the case of 10/30 strain. Fig. 11 shows how well all the curves match, confirming the assumption of plane waves in the reference medium.

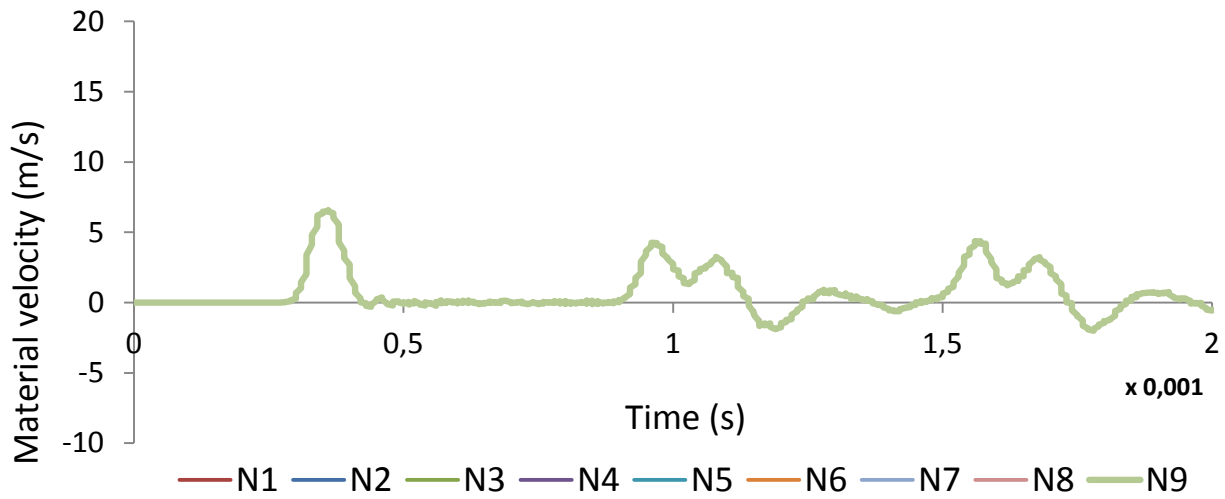


FIG. 11: The material velocity at all the nodes of the cross-section in the middle of the reference bar was calculated by FE (N1: ext; N9:int).

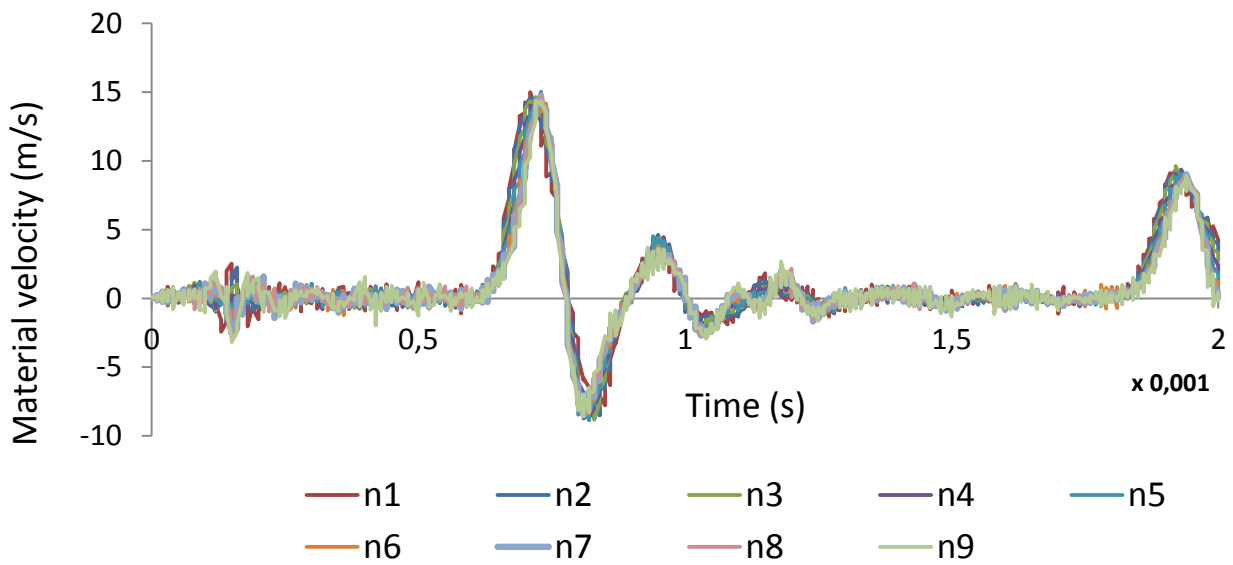


FIG. 12: Normalized material velocity calculated by FE at all the nodes of the cross-section in the middle of the sample (n1: ext; n9: int).

On the other hand, the wave transmitted in the sample is somewhat spatially distorted. The time evolution is uniform in the cross-section but the wave magnitude decreases at points remote from the symmetry axis. All the curves of

Fig. 12 have been normalized as a function of the surface wave. Fig. 11 and Fig. 12 have the same scales to show the amplification of the transmitted wave.

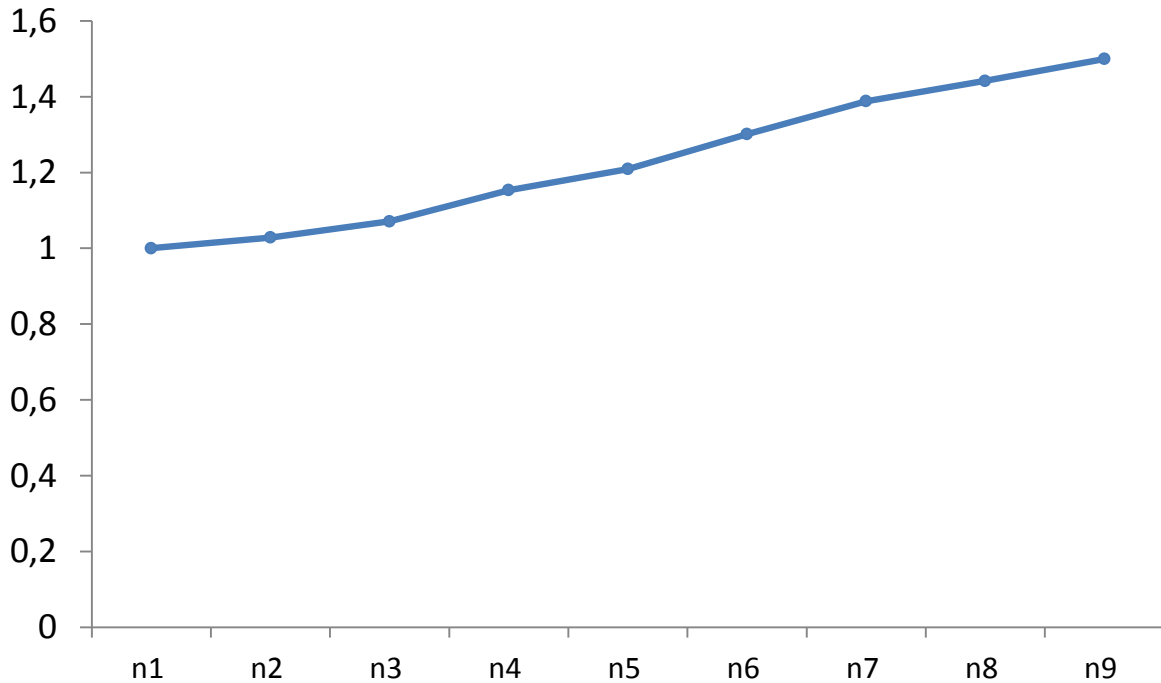


FIG. 13: Material velocity profile in the sample's middle plane (n1: ext ; n9:int).

Fig. 13 shows the material velocity profile in the transverse symmetry plane of the sample. These values must be multiplied by the normalized curves of Fig. 12 to obtain the true time histories of the wave transmitted in the sample media.

5. CONCLUSION

In the present study we showed how to extend the scope of application of wave propagation methods to measure the material viscoelastic properties of strained structures. We demonstrated that the method previously developed for characterizing samples of short length can be modified to allow the use of strained samples. While this may seem tedious and unintuitive at first glance, the exact theoretical formulation of a reflection coefficient can be expressed as for the case of samples tested in free boundary conditions.

We showed the feasibility of the inverse method based on a curve fitting process in the time domain.

In practice care should be taken with the compression apparatus. In particular it should not add too much weight to the material sample thus impairing the conservation of the momentum at the junction, as was described.

This work should be supplemented to improve the sensitivity of the technique by fitting the material velocity of the sample instead of the reference bar, as we showed that the magnitude of the waves in it is higher. The difficulty partly lies in formulating the theoretical expression of the transmission coefficient.

Acknowledgement

We would like to thank Thomas Helfer for coding the hyper-viscoelastic law in MFront. The source code is available here:

<http://fcl.sourceforge.net/gallery/hyperviscoelasticity/SignoriniHyperViscoelasticity.mfront>.

We are deeply grateful to Thomas Helfer for the precious aid provided to the mechanical simulation community with his open-source code generator.

6. REFERENCES

- ¹ KP . Menard (2008). *Dynamic mechanical analysis: a practical introduction*, CRC press.
- ² IM . Krieger, T-F . Niu (1973). “A rheometer for oscillatory studies of nonlinear fluids,” *Rheol. Acta*, **12**, 567–571.
- ³ G . Locati (1978). “The operation of the rheovibron in the shear mode,” *Polym. Eng. Sci.*, **18**, 793–798. doi:10.1002/pen.760181010
- ⁴ M . Baumgaertel, HH . Winter (1989). “Determination of discrete relaxation and retardation time spectra from dynamic mechanical data,” *Rheol. Acta*, **28**, 511–519.
- ⁵ DJ . Massa (1973). “Measuring the dynamic moduli of glassy polymers: analysis of the Rheovibron,” *J. Appl. Phys.*, **44**, 2595–2600. doi:10.1063/1.1662619
- ⁶ AR . Ramos, FS . Bates, RE . Cohen (1978). “Importance of the Massa correction for loss tangent measurements on the rheovibron,” *J. Polym. Sci. Polym. Phys. Ed.*, **16**, 753–758. doi:10.1002/pol.1978.180160416
- ⁷ G . Mayer, J . Gigon (1955). “Mesure par ultrasons des constantes élastiques des solides (ultrasound measurement of the elastic properties of solids),” *J. Phys. Radium*, **16**, 704–706. Retrieved from <https://doi.org/10.1051/jphysrad:01955001608-9070400>
- ⁸ H . Oberst, K . Frankenfeld (n.d.). “Über die Dämpfung der Biegeschwingungen dünner Bleche durch fest haftende Beläge, (On the attenuation of the bending vibrations of thin sheets by firmly adhering pads)” *Acta Acust. united with Acust.*, Retrieved from <http://www.ingentaconnect.com/content/dav/aaua/1952/00000002/A00406s4/art00002>

- ⁹ H . Koruk, KY . Sanliturk (2010). “On measuring dynamic properties of damping materials using Oberst beam method,” ASME 2010 10th Bienn. Conf. Eng. Syst. Des. Anal., American Society of Mechanical Engineers, 127–134.
- ¹⁰ A . Behar, LN . Taibo (n.d.). “Measurement of the Efficiency of Damping Materials,” Acta Acust. united with Acust., Retrieved from <http://www.ingentaconnect.com/content/dav/aaau/1974/00000030/00000001/art00009>
- ¹¹ H . Kolsky (1954). “LXXVIII The propagation of longitudinal elastic waves along cylindrical bars,” London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. J. Sci., **45**, 712–726.
- ¹² H . Kolsky (1956). “LXXI The propagation of stress pulses in viscoelastic solids,” Philos. Mag., **1**, 693–710.
- ¹³ SR . Bodner, H . Kolsky (1958). “Stress wave propagation in lead,” Proc. 3rd US Natl. Congr. Appl. Mech.,
- ¹⁴ H . Kolsky, SS . Lee (1962). *The propagation and reflection of stress pulses in linear viscoelastic media* DTIC Document.
- ¹⁵ H . Kolsky (1963). *Stress waves in solids*, Courier Corporation, Vol. 1098.
- ¹⁶ RH . Blanc, FP . Champomier (1976). “A wave-front method for determining the dynamic properties of high damping materials,” J. Sound Vib., **49**, 37–44.
- ¹⁷ RH . Blanc (1993). “Transient wave propagation methods for determining the viscoelastic properties of solids,” Trans. Soc. Mech. Eng. J. Appl. Mech., **60**, 763.
- ¹⁸ B . Lundberg, RH . Blanc (1988). “Determination of mechanical material properties from the two-point response of an impacted linearly viscoelastic rod specimen,” J. Sound Vib., **126**, 97–108.
- ¹⁹ R . Christensen (2012). *Theory of viscoelasticity: an introduction*, Elsevier.
- ²⁰ PS . Theocaris, N . Papadopoulou (1978). “Propagation of stress waves in viscoelastic media,” Polymer (Guildf)., **19**, 215–219.
- ²¹ Y . Sogabe, K . Kishida, K . Nakagawa (1982). “Wave propagation analysis for determining the dynamic properties of high damping alloys,” Bull. JSME, **25**, 321–327.
- ²² P . Lemerle, A . Berthelot (2001). “Study of phonography cartridges for determining the viscoelastic properties of materials by a wave propagation method,” Noise Control Eng. J., **49**, 231–237.
- ²³ SJ . Orfanidis (2002). *Electromagnetic waves and antennas*, Rutgers University New Brunswick, NJ, 85-86 pages.
- ²⁴ P . Lemerle (2002). “Measurement of the viscoelastic properties of damping materials: adaptation of the wave propagation method to test samples of short length,” J. Sound Vib., **250**, 181–196.
- ²⁵ R . Hill, IN . Sneddon (1960). *Progress in Solid Mechanics*, North-Holland Publishing Company.
- ²⁶ RH . Blanc (1971). “*Détermination de l'équation de comportement des corps viscoélastiques linéaires par une méthode d'impulsion (determination of the viscoelastic behaviour equation with an impulse method)*,” Retrieved from <https://books.google.fr/books?id=Qu1aNAAACAAJ>
- ²⁷ R . Storn, K . Price (1997). “Differential Evolution – A Simple and Efficient Heuristic for global Optimization over Continuous Spaces,” J. Glob. Optim., **11**, 341–359. doi:10.1023/A:1008202821328
- ²⁸ E . Wiechert (n.d.). *Ueber elastische Nachwirkung, Inaugural-Dissertation ... am 19. Februar 1889 ... vertheidigt von Emil Wiechert ...*, Hartungsche Buchdruckerei. Retrieved from

<https://books.google.fr/books?id=xzhQwAACAAJ>

- ²⁹ E . Wiechert (1893). “Gesetze der elastischen Nachwirkung für constante Temperatur,” *Ann. Phys.*, **286**, 546–570. doi:10.1002/andp.18932861110
- ³⁰ LR . Hermann, FE . Peterson (1968). “A numerical procedure for viscoelastic stress analysis,” *Proc. Seventh Meet. ICRPG Mech. Behav. Work. Gr.*, Orlando.
- ³¹ RL . Taylor, KS . Pister, GL . Goudreau (1970). “Thermomechanical analysis of viscoelastic solids,” *Int. J. Numer. Methods Eng.*, **2**, 45–59. doi:10.1002/nme.1620020106
- ³² M . Kaliske, H . Rothert (1997). “Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains,” *Comput. Mech.*, **19**, 228–239. doi:10.1007/s004660050171
- ³³ M . ABBAS *Loi de comportement hyper-élastique : matériau presque incompressible*, (hyperelastic behaviour law : near incompressible materials) Man. référence Code_Aster - Fasc. r5.03.19 Mécanique non linéaire, 1-8 pages. Retrieved from http://www.code-aster.org/doc/v12/fr/man_r/r5/r5.03.19.pdf
- ³⁴ AP . French (1971). *Vibrations and Waves*, M.I.T. introductory physics series, Taylor & Francis. Retrieved from <https://books.google.fr/books?id=RqE26vDmd5wC>