HAL
open science

Approximation locale précisée dans des problèmes multi-échelles avec défauts localisés

Xavier Blanc, Marc Josien, Claude Le Bris

To cite this version:

Xavier Blanc, Marc Josien, Claude Le Bris. Approximation locale précisée dans des problèmes multi-échelles avec défauts localisés. Comptes Rendus. Mathématique, 2019, 10.1016/j.crma.2018.12.005 . hal-01893991v2

HAL Id: hal-01893991

https://hal.science/hal-01893991v2

Submitted on 18 Jan 2019

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Approximation locale précisée dans des problèmes multi-échelles avec défauts localisés

Xavier Blanc [a], Marc Josien [b], Claude Le Bris [b],

[a] *Univ. Paris Diderot, Sorbonne Paris Cité, Laboratoire Jacques-Louis Lions, UMR 7598, UPMC, CNRS, F-75205 Paris, FRANCE*

[b] *Ecole des Ponts and INRIA, 6 & 8, avenue Blaise Pascal, 77455 Marne-La-Vallée Cedex 2, FRANCE*

Reçu le ***** ; accepté après révision le +++++

Présenté par £££££

Résumé

Nous poursuivons l'étude initiée dans [3] de problèmes multi-échelles avec défauts, dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation, spécifiquement ici pour une équation de diffusion avec un coefficient de la forme fonction périodique perturbée par une fonction $L^r(\mathbb{R}^d)$, $1 < r < +\infty$, modélisant un défaut local. Nous esquissons la démonstration du fait que le correcteur, dont l'existence a été prouvée dans [3,4], permet d'approcher la fonction solution de l'équation originale avec la même précision, essentiellement, que dans le cas purement périodique. Les taux de convergence varient, et sont précisés, en fonction de l'intégrabilité L^r du défaut. Une extension à un cas abstrait "général" est mentionnée. Les résultats annoncés dans cette Note seront précisés dans les documents [2,12].

Abstract

Local precised approximation in multiscale problems with local defects.

We proceed here with our systematic study, initiated in [3], of multiscale problems with defects, within the context of homogenization theory. The case under consideration here is that of a diffusion equation with a diffusion coefficient of the form of a periodic function perturbed by an $L^r(\mathbb{R}^d)$, $1 < r < +\infty$, function modeling a localized defect. We outline the proof of the following approximation result: the corrector function, the existence of which has been established in [3,4], allows to approximate the solution of the original multiscale equation with essentially the same accuracy as in the purely periodic case. The rates of convergence may however vary, and are made precise, depending upon the L^r integrability of the defect. The generalization to an abstract setting is mentioned. Our proof exactly follows, step by step, the pattern of the original proof of Avellaneda and Lin in [1] in the periodic case, extended in the works of Kenig and collaborators [13], and borrows a lot from it. The details of the results announced in this Note are given in our publications [2,12].

Email addresses: `blanc@ann.jussieu.fr` (Xavier Blanc), `marc.josien@enpc.fr` (Marc Josien), `claude.le-bris@enpc.fr` (Claude Le Bris).

Abridged English version

We continue our study [3,4] of homogenization problems in nonperiodic media. The particular setting considered here is that of a diffusion equation (1) with a diffusion coefficient a of the form (5), where $\widetilde{a}$ is an $L^r(\mathbb{R}^d)$, $1 < r < +\infty$, function modeling a localized defect, decaying at infinity in a loose sense, and perturbing the background periodic medium a_{per}. We aim at quantitatively estimating at which rate the two-scale expansion (truncated at the first order) provided by homogenization theory approaches the exact solution u^ϵ as ϵ vanishes. Put differently, we seek the rate at which the remainder term (4) goes to zero. In (4), the corrector employed is the function w_p solution to the corrector equation (7), the existence and uniqueness (up to additive constants) of which has been established in our previous works [3,4]. Such a corrector is different from the periodic corrector, and although intuitively one could have thought, based on the observation that the presence of $\widetilde{a}$ does not modify the homogenized equation (2), that the periodic corrector w_p^{per} would give an equally accurate approximation, it does not. The rates of convergence obtained are made precise in our main result, namely Théorème 2.1 of the French version, and estimates (10) through (12) in various norms. Interestingly, the rates of convergence may however vary from one case to another, and also in comparison with the periodic case. They depend upon the L^r integrability of the defect. Our proof exactly follows, step by step, the pattern of the original proof of Avellaneda and Lin in [1] in the periodic case, extended in the works of Kenig and collaborators [13], and borrows a lot from it. Instead of having a bounded (periodic) corrector, as in those proofs, we have here a corrector function that is not necessarily bounded. The crucial ingredient of the proof is then, in fact, the strict sublinearity of the corrector function, which, given our assumptions, can be made precise, see (8). This suggests a generalization of our setting, beyond the "periodic +local perturbation" case, which we make precise in Section 3.1 of the French version: essentially, besides usual assumptions, the key point is that the corrector is stricly sublinear at infinity with a prescribed rate of sublinearity and (a property that is actually very much linked to the former) that the potential function associated to this corrector (defined in (15)-(16)) is also strictly sublinear at infinity in a similar quantitative manner (see (19)). In passing, and as is also the case in the proof of the periodic case, we establish estimates for the Green function G^ϵ of the original problem (see (32), (33), (34) of the French version) and its convergence to the (possibily corrected) Green function of the homogenized problem (2) (see (28)). The details of the results announced in this Note are given in our publications [2,12].

1. Introduction

1.1. *Motivation*

Dans cette Note, nous poursuivons l'étude initiée dans [3] de problèmes elliptiques multi-échelles, dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation. L'équation que nous considérons possède un coefficient qui présente, à l'échelle microscopique, une structure périodique perturbée localement par un « défaut ». On se convainc aisément que le comportement macroscopique d'un tel matériau est dicté par sa seule structure périodique sous-jacente. Si, en revanche, on cherche à obtenir une information plus fine, en terme de taux de convergence, à l'échelle microscopique, pour une norme plus forte ou encore au voisinage du défaut, alors ce défaut ne peut plus être négligé.

Dans [3], il a été montré (en 1D au moins, et formellement en dimension supérieure) dans un cadre hilbertien, i.e pour un défaut dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, qu'il est en effet nécessaire de construire un correcteur prenant en compte le défaut pour obtenir une approximation précisée de la solution. L'existence d'un tel correcteur est démontrée, et ce résultat est généralisé dans [4] au cas d'un défaut d'intégrabilité $L^r(\mathbb{R}^d)$, $1 < r < +\infty$, ainsi qu'à d'autres situations "perturbatives". Il est affirmé dans [3,4] que, formellement, un tel correcteur permet d'assurer l'approximation voulue. L'objet de cette Note est d'énoncer précisément ce résultat, et de donner les grandes lignes de sa preuve : « le correcteur corrige » dans la norme considérée, à un ordre précisé. Les résultats annoncés dans cette Note, et leurs preuves, seront détaillés dans les publications [2,12] en préparation.

1.2. *Le cas périodique*

Nous nous donnons un champ $a \in L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$, pris à valeurs scalaires pour simplifier l'exposé, et nous considérons le problème suivant :

$$-\operatorname{div}(a(x/\epsilon)\nabla u^\epsilon(x)) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \text{et} \quad u^\epsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \tag{1}$$

posé sur un domaine borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Le champ a est elliptique. Il est bien connu (voir par exemple [11]) que, dans le cas où a est périodique, alors le problème (1) s'homogénéise en le problème suivant :

$$-\operatorname{div}\left(a^*.\nabla u^*(x)\right) = f(x) \quad \text{dans} \quad \Omega, \quad \text{et} \quad u^* = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \tag{2}$$

où a^* est une matrice constante. En particulier, on observe la convergence faible $\nabla u^\epsilon \rightharpoonup \nabla u^*$ dans $L^2(\Omega)$. Pour obtenir de la convergence forte, il faut corriger u^*. Pour ce faire, on définit les *correcteurs* w_j, $j \in [\![1, d]\!]$, associés à a comme étant les solutions de l'équation suivante :

$$-\operatorname{div}\left(a\left(e_j + \nabla w_j\right)\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^d, \quad \text{et} \quad |w_j(x)|/(1+|x|) \underset{|x|\to+\infty}{\to} 0, \tag{3}$$

où les e_j sont les vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}^d$, et on introduit le reste défini par

$$R^\epsilon(x) := u^\epsilon(x) - u^*(x) - \epsilon \sum_{j=1}^{d} w_j\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\partial_j u^*(x). \tag{4}$$

Les correcteurs w_j sont périodiques, et on démontre classiquement que $\|\nabla R^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \to 0$. Avellaneda et Lin ont aussi démontré dans [1] que, si de plus a est Hölderienne, on peut obtenir des estimations lipschitziennes sur u^ϵ, et des estimations sur R^ϵ quantifiées en ϵ. Des estimations similaires ont été obtenues dans le cas de coefficients non réguliers stationnaires dans [9, Corollary 3].

Ces travaux ont notamment été approfondis dans [13], où est démontré que, modulo le fait de prendre des correcteurs w_j adaptés au domaine (c'est à dire avec une définition légèrement différente de (3)), on

obtient l'estimation suivante : $\|\nabla R^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\epsilon \ln \epsilon$ (voir [13, Lem. 3.5]). Au cours de la preuve, les auteurs approximent la fonction de Green G^ϵ associée au problème (1), ses gradients $\nabla_x G^\epsilon$ et $\nabla_y G^\epsilon$, et son gradient croisé $\nabla_x \nabla_y G^\epsilon$. Pour ce faire, ils emploient la fonction de Green G^* du problème (2), convenablement modifiée par les correcteurs w_j (voir [13, Th. 3.6 et Th. 3.11]).

1.3. *Le cas périodique perturbé par un défaut local*

Dans [3,4] est considéré le cas d'un champ scalaire

$$a = a_{\text{per}} + \widetilde{a}, \tag{5}$$

où a_{per} est périodique et $\widetilde{a}$ est une perturbation locale. Plus précisément, supposons que $d \geq 3$ (en dimension 2, des détails techniques supplémentaires sont nécessaires du fait que les fonctions de Green d'opérateurs elliptiques ne sont pas bornées à l'infini) et qu'il existe $\alpha > 0$, $\mu > 0$ et $r \in]1, +\infty[$ tels que

$$a_{\text{per}}\ ,\ \widetilde{a} \in C^{0,\alpha}_{\text{unif}}\left(\mathbb{R}^d\right), \quad \mu^{-1} \leq a_{\text{per}} \leq \mu, \quad \mu^{-1} \leq \widetilde{a} + a_{\text{per}} \leq \mu, \quad \text{et} \quad \widetilde{a} \in L^r\left(\mathbb{R}^d\right). \tag{6}$$

Ici, $C^{0,\alpha}_{\text{unif}}\left(\mathbb{R}^d\right)$ désigne l'espace des fonctions uniformément Hölderiennes sur $\mathbb{R}^d$, de coefficient $\alpha \in]0, 1[$. Alors par [4, Th. 4.1], il existe une solution w_j au problème (3) qui s'écrit $w_j = w_j^{\text{per}} + \widetilde{w}_j$, où $\nabla \widetilde{w}_j \in L^r\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ et où w_j^{per} est une solution périodique de

$$-\operatorname{div}\left(a_{\text{per}}\left(e_j + \nabla w_j^{\text{per}}\right)\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^d. \tag{7}$$

Par le Théorème de Morrey [6, Th. 9.12], cela implique en particulier que, si $r \neq d$, les correcteurs w_j satisfont

$$|w_j(x) - w_j(y)| \leq C\,|x - y|^{1-\nu}, \tag{8}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$, où

$$\nu = \nu_r := \min(1, d/r) \in]0, 1]. \tag{9}$$

Dans le cas $r = d$, qui est critique, on obtient (8) seulement pour tout $\nu < 1$. Dans tous les cas, cette estimation est « seulement contraignante » pour $|x - y|$ grand. En effet, pour $|x - y|$ petit, $w_j \in C^{1,\alpha}_{\text{unif}}$ par régularité elliptique (pour la valeur α de (6)), et (8) est triviale (avec $\nu = 0$). L'inégalité (8) traduit une « sous-linéarité renforcée » des correcteurs (qui devient, pour $r < d$, une borne L^∞ sur lesdits correcteurs). Comme nous allons le voir, l'existence d'un correcteur ainsi que l'estimation (8) sont des ingrédients essentiels pour contrôler le gradient du reste ∇R^ϵ.

2. Résultats

Nous démontrons un résultat qui étend au cas ci-dessus une partie de l'analyse faite dans [1] et [13] (en particulier le Théorème 5 de [1] et les Théorèmes 3.4 et 3.7 de [13]) :

Théorème 2.1 *Soit $d \geq 3$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$, $\mu > 0$ et $r \in]1, +\infty[$, $r \neq d$ tels que a_{per} et $\widetilde{a}$ satisfont* (6)*, et soit ν_r défini par* (9)*. Soient Ω un domaine régulier et $\Omega_1 \subset\subset \Omega$. Considérons $f \in L^2(\Omega)$ et $u^\epsilon, u^*, R^\epsilon$ respectivement définies par* (1)*,* (2)*, et* (4)*. Alors $R^\epsilon \in H^1(\Omega)$ et*

$$\|R^\epsilon\|_{L^2(\Omega)} \leq C_1 \epsilon^{\nu_r} \|f\|_{L^2(\Omega)}, \tag{10}$$

$$\|\nabla R^\epsilon\|_{L^2(\Omega_1)^d} \leq C_2 \epsilon^{\nu_r} \|f\|_{L^2(\Omega)}. \tag{11}$$

En outre, pour tout $\beta \in]0, \alpha]$, si $f \in C^{0,\beta}\left(\bar{\Omega}\right)$, on a $R^\epsilon \in W^{1,\infty}(\Omega)$ et

$$\|\nabla R^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega_1)^d} \leq C_3 \epsilon^{\nu_r} \ln\left(2 + \epsilon^{-1}\right) \|f\|_{C^{0,\beta}(\Omega)^d}, \tag{12}$$

où les constantes C_1, C_2, C_3 sont indépendantes de ϵ et f.

L'intégrabilité L^r du défaut détermine la qualité de l'approximation. Le cas $r = 1$ n'est pas inclus dans l'énoncé ci-dessus car on ne sait pas alors démontrer l'existence d'un correcteur dans l'espace fonctionnel associé. Toutefois, on peut obtenir le résultat en notant que $\tilde{a} \in L^r$ pour tout $r \geq 1$, et appliquer le théorème 2.1 avec $r < d$, qui donne $\nu_r = 1$. D'autre part, $r = d$ est critique, ce qui est naturel (voir [4, Section 3]). Il constitue la charnière entre deux régimes. En effet, si $r < d$, les résultats sont les mêmes que dans le cadre de l'homogénéisation périodique, et ce parce que $w_j \in L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$. En revanche, si $r > d$, alors le correcteur n'est pas borné a priori, d'où un moindre contrôle sur la quantité R^ϵ : le défaut devient suffisamment "gros" pour avoir un impact macroscopique (pour l'approximation de u^ϵ dans des normes assez fines et/ou à l'ordre ϵ). Dans le cas $r = d$, il n'est pas prouvé, ni même certain, que les correcteurs w_j sont bornés (voir [4]). Mais on peut se ramener (de façon sous-optimale) aux résultats prouvés pour $r > d$, puisque $L^d \cap L^\infty \subset L^r \cap L^\infty$ pour $d < r < +\infty$. Notons enfin que la présence du correcteur dans (10) est superflue, et qu'on peut avoir la même estimation sur $u^\epsilon - u^*$ (au lieu de R^ϵ).

3. Remarques et extensions possibles

Nous faisons ici quelques remarques et renvoyons aux publications en préparation [2,12] pour plus de précisions.

3.1. *Cadre abstrait général*

La démonstration du Théorème 2.1 ne fait usage de l'hypothèse de la structure "périodique + défaut" que pour démontrer l'existence de correcteurs et d'un potentiel (à savoir la fonction B définie en (15)-(16) ci-dessous) fortement sous-linéaires. Ainsi, les conclusions du Théorème 2.1 sont en fait valides sous les hypothèses suivantes, plus générales que celles utilisées ici :

(i) la matrice a est elliptique, bornée, uniformément Hölderienne ;

(ii) la matrice homogénéisée a^* est constante ;

(iii) elle admet un correcteur w_j, c'est-à-dire une solution de (3) ;

(iv) ce correcteur est fortement sous-linéaire à l'infini, c'est-à-dire qu'il vérifie (8), pour un certain $\nu \in]0, 1]$;

(v) il existe un potentiel B associé (i.e une solution antisymétrique de (15)-(16) ci-dessous), qui est lui aussi fortement sous-linéaire, c'est-à-dire qu'il vérifie (19), pour $\nu \in]0, 1]$.

Ces hypothèses impliquent en particulier que $a(x/\epsilon)$ H-converge uniformément vers a^*, propriété que l'on définit comme suit : pour tout suite $\epsilon_n \to 0$ et toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}^d$,

$$a\left(\frac{x}{\epsilon_n} + y_n\right) \quad \text{H-converge vers} \quad a^*. \tag{13}$$

Pour la définition de la H-convergence, nous renvoyons à [16, Definition 6.4]. Cette propriété est fondamentale dans la preuve esquissée ci-dessous. Pour les détails de cette généralisation, nous renvoyons encore à [2,12].

3.2. *Autres remarques*

(i) La preuve esquissée ici est faite dans le cas où a est scalaire. Toutefois, il est possible de travailler avec un coefficient matriciel, toujours pour une équation scalaire. On obtient alors des résultats analogues.

(ii) La preuve originale de [1] fonctionne pour des systèmes. Par conséquent, dans la mesure où l'existence des correcteurs w_j est aussi prouvée dans [5] pour le cas des systèmes, il semble a priori possible de démontrer un résultat analogue au Théorème 2.1 dans le cadre d'un système d'équations. Une telle adaptation n'a cependant pas été entreprise. Voir à ce sujet la Remarque 1 ci-dessous. Notons que, dans le cas d'une équation, le principe du maximum et le Théorème de De Giorgi-Nash-Moser [8, Th. 8.24 p. 202] permettent de simplifier certains aspects de la démonstration.

(iii) De la même manière que dans [13], il est possible d'approximer la fonction de Green G^ϵ relative à l'Equation (1), ainsi que ses gradients $\nabla_x G^\epsilon$ et $\nabla_y G^\epsilon$, et son gradient croisé $\nabla_x \nabla_y G^\epsilon$.

(iv) Les estimations (11) et (12) sont des estimations à l'intérieur du domaine. Toutefois, dans le cas d'une matrice périodique, on obtient des estimations jusqu'au bord (voir [13]). Cela requiert d'introduire des correcteurs adaptés au domaine, lesquels peuvent être construits à partir des correcteurs définis sur tout $\mathbb{R}^d$ (voir [13, Prop. 2.4]). Ces correcteurs sont également bien définis dans le cas présent, ce qui fournit un point de départ pour adapter la preuve de [13].

(v) On peut aussi montrer dans le cadre du Théorème 2.1 que, si $f \in L^p(\Omega)$, pour tout $p \in [2, +\infty[$, alors

$$\|R^\epsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C\epsilon^{\nu_r} \|f\|_{L^p(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|\nabla R^\epsilon\|_{L^p(\Omega_1)} \leq C\epsilon^{\nu_r} \|f\|_{L^p(\Omega)}.$$

L'estimation sur R^ϵ est immédiate vu le schéma de preuve ci-dessous. L'estimation sur ∇R^ϵ découle d'un Lemme de mesure à la Calderón-Zygmund (voir [15, Th. 2.4]).

4. Schéma de preuve

Notre schéma de preuve suit celui des articles [1,13]. L'idée repose sur le fait que, pour $\epsilon = 0$, l'équation est à coefficients constants, donc vérifie des estimations de régularité elliptique, à la fois de type Schauder (en normes $C^{k,\alpha}$), et de type Sobolev (en normes $W^{k,p}$). Pour ϵ petit, par compacité, on arrive à obtenir des propriétés similaires. Ceci est l'idée fondamentale des preuves de [1], laquelle repose sur le fait que le correcteur w_j est borné, et donne, via l'expression (4), une bonne approximation de u_ϵ. Ici, le correcteur n'est plus borné a priori, mais le fait que $\nabla \widetilde{w}_j \in L^r(\mathbb{R}^d)$ nous permet d'adapter les preuves de [1,13]. Notons que le cas où le défaut est d'intégrabilité $r < d$ ne nécessite que des modifications très minimes, car dans ce cas on sait que les w_j sont bornés, ce qui est un ingrédient fondamental des démonstrations de [1]. En revanche, si $r > d$, il faut faire quelques modifications ponctuelles et techniques, qui changent notamment le taux d'approximation (d'où la présence de l'exposant ν_r dans le Théorème 2.1). Nous donnons ci-dessous les grandes lignes de la démonstration, en indiquant en particulier les points où le fait que w_j n'est pas borné nécessite des adaptations.

4.1. *Justification de l'introduction de la quantité R^ϵ*

Le point de départ de cette étude est un calcul de [11, p. 26-27] (voir aussi [3]), qui indique que pour u^ϵ, u^*, R^ϵ respectivement définis par (1), (2), et (4), on a

$$-\operatorname{div}\left(a\left(x/\epsilon\right)\nabla R^\epsilon(x)\right) = \epsilon \operatorname{div}\left(a\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\sum_{k=1}^{d} w_k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\nabla\partial_k u^*(x)\right) - \sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} M_k^i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\partial_{ik}u^*(x), \tag{14}$$

où

$$M_k^i(x) := A_{ik}^* - a\left(x\right)\left(\delta_{ik} + \partial_i w_k\left(x\right)\right). \tag{15}$$

Pour tout $k \in [\![1,d]\!]$, comme $\operatorname{div}(M_k) = 0$, il existe un potentiel $B_k = \left[B_k^{ij}\right]_{1\le i,j\le d}$ (voir [11, p. 26-27]) associé à M_k, c'est-à-dire une fonction antisymétrique par rapport aux indices i et j qui satisfait

$$\operatorname{div}(B_k) = M_k. \tag{16}$$

Grâce à (14), on déduit que

$$-\operatorname{div}\left(a\left(x/\epsilon\right)\nabla R^\epsilon(x)\right) = \operatorname{div}\left(H^\epsilon(x)\right) \quad \text{dans} \quad \Omega, \tag{17}$$

où

$$H_i^\epsilon(x) = \epsilon \sum_{k=1}^d a\left(\frac{x}{\epsilon}\right) w_k\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\partial_{ik}u^*(x) - \epsilon \sum_{j,k=1}^d B_k^{ij}\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\partial_{jk}u^*(x). \tag{18}$$

Comme a_{per} est périodique et $\widetilde{a} \in L^r\left(\mathbb{R}^d\right)$, le potentiel B_k se construit, pour chaque $k \in [\![1,d]\!]$, en séparant sa partie périodique $B_{k,\text{per}}$ et sa partie due au défaut $\widetilde{B}_k$, pour laquelle on démontre que $\nabla\widetilde{B}_k \in L^r\left(\mathbb{R}^d\right)^{d\times d}$ (par la théorie de Calderón-Zygmund, voir [14, p. 233]). Par le Théorème de Morrey [6, Th. 9.12], cela implique alors que, pour tout $i,j,k \in [\![1,d]\!]$,

$$\left|B_k^{ij}(x) - B_k^{ij}(y)\right| \le C|x-y|^{1-\nu_r}, \qquad \forall x,y \in \mathbb{R}^d, \tag{19}$$

pour ν_r défini par (9). Grâce à (6), (8) et à (19), on déduit de (18) que, pour tout $p \in [1,+\infty]$, si $f \in L^p(\Omega)$,

$$\|H^\epsilon\|_{L^p(\Omega)^d} \le C\epsilon^{\nu_r}\left\|\nabla^2 u^*\right\|_{L^p(\Omega)^{d\times d}} \le C\epsilon^{\nu_r}\|f\|_{L^p(\Omega)}\,. \tag{20}$$

Comme on sait par ailleurs par régularité elliptique que $\nabla w_j \in L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$, si $f \in C^{0,\beta}$ avec $\beta \le \alpha$, on peut démontrer, toujours à partir de (18), (19), (6), (8), que

$$\|H^\epsilon\|_{C^{0,\beta}(\Omega)^d} \le C\epsilon^{\nu_r-\beta}\|f\|_{C^{0,\beta}(\Omega)} \quad \text{et} \quad \|H^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)^d} \le C\epsilon^{\nu_r}\|f\|_{C^{0,\beta}(\Omega)}\,. \tag{21}$$

L'enjeu de la suite de la démonstration consiste à tirer parti de (17) et du contrôle sur H^ϵ, à savoir (20) et (21), pour borner R^ϵ.

4.2. *Convergence dans $H^1(\Omega_1)$*

Nous esquissons dans cette section la preuve de (10) et (11). Dans cette section, nous utilisons le principe du maximum et certaines de ses conséquences (inégalité de Harnack, estimation de De Giorgi-Nash-Moser). C'est pourquoi elle n'est valable, telle quelle, que pour des équations scalaires, et nécessite une adaptation pour traiter le cas de systèmes. Supposons momentanément que $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ avec $p > d$. La fonction R^ϵ satisfait (17) dans Ω. Néanmoins, elle n'est pas nulle au bord, ce qui empêche de faire un simple raisonnement variationnel. On la scinde donc en deux parties $R^\epsilon = R_1^\epsilon + R_2^\epsilon$ telles que

$$-\operatorname{div}\left(a\left(x/\epsilon\right)\nabla R_1^\epsilon(x)\right) = 0 \quad \text{dans} \quad \Omega \qquad \text{et} \quad R_1^\epsilon = -\epsilon\sum_{j=1}^d w_j\left(\cdot/\epsilon\right)\partial_j u^* \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \tag{22}$$

$$-\operatorname{div}\left(a\left(x/\epsilon\right)\nabla R_2^\epsilon(x)\right) = \operatorname{div}\left(H^\epsilon(x)\right) \quad \text{dans} \quad \Omega \qquad \text{et} \quad R_2^\epsilon = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega. \tag{23}$$

Grâce au principe du maximum et à (8), on peut estimer R_1^ϵ

$$\|R_1^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \le \left\|\epsilon\sum_{j=1}^d w_j\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right)\partial_j u^*\right\|_{C^0(\overline{\Omega})} \le C\epsilon^{\nu_r}\|u^*\|_{C^1(\overline{\Omega})}\,, \tag{24}$$

puis, grâce à une injection de Sobolev de $W^{2,p}(\Omega)$ dans $C^{1,\gamma}(\Omega)$ (pour un certain $\gamma > 0$) et à l'estimation de régularité elliptique classique [8, Lem. 9.17 p. 242], on obtient

$$\|R_1^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\epsilon^{\nu_r} \|u^*\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\epsilon^{\nu_r} \|f\|_{L^p(\Omega)} . \tag{25}$$

On étudie maintenant R_2^ϵ. Rappelons que, grâce à [10, Th. 1.1], si G^ϵ est la fonction de Green relative à l'Equation (1) (donc avec conditions de Dirichlet homogènes au bord), alors la fonction $\nabla_y G^\epsilon(x,\cdot)$ est bornée dans l'espace de Marcinkiewicz $\left(L^{\frac{d}{d-1},\infty}(\Omega)\right)^d$, uniformément en $x \in \Omega$ et en $\epsilon > 0$. Ainsi, en réécrivant

$$R_2^\epsilon(x) = -\int_\Omega \nabla_y G^\epsilon(x,y) H^\epsilon(y) \mathrm{d}y,$$

et en utilisant (20) (rappelons que $p > d$), on obtient

$$\|R_2^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|H^\epsilon\|_{L^p(\Omega)} \leq C\epsilon^{\nu_r} \|f\|_{L^p(\Omega)} , \tag{26}$$

Par conséquent, (25), (26) et la deuxième inégalité de (24) impliquent

$$\|u^\epsilon - u^*\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\epsilon^{\nu_r} \|f\|_{L^p(\Omega)} . \tag{27}$$

Ceci étant vrai pour tout $f \in L^p(\Omega)$, un argument de dualité (voir [13, Th. 3.3] dans le cas $\nu_r = 1$) permet d'estimer $G^\epsilon - G^*$, où G^* est la fonction de Green de l'Equation (2), sur le domaine $\widetilde{\Omega}(x,y) := \Omega \cap B(y, |x-y|/16)$. On obtient ainsi

$$\|G^\epsilon(x,\cdot) - G^*(x,\cdot)\|_{L^{p'}\left(\widetilde{\Omega}(x,y)\right)} \leq C\epsilon^{\nu_r} |x-y|^{2-\frac{d}{p}-\nu_r} \qquad \forall x,y \in \Omega,$$

On applique alors la preuve de [13, Lem. 3.2], qui démontre une version au bord du résultat (27), que l'on applique à la fonction G^ϵ

$$\begin{aligned} |G^\epsilon(x,y) - G^*(x,y)| \leq & C|x-y|^{-d/p'} \|G^\epsilon(x,.) - G^*(x,.)\|_{L^{p'}\left(\widetilde{\Omega}(x,y)\right)} \\ & + C\epsilon^{\nu_r}|x-y|^{1-\nu_r} \|\nabla_y G^*(x,.)\|_{L^\infty\left(\widetilde{\Omega}(x,y)\right)} \\ & + C\epsilon^{\nu_r}|x-y|^{2-\frac{d}{p}-\nu_r} \left\|(\nabla_y)^2 G^*(x,.)\right\|_{L^p\left(\widetilde{\Omega}(x,y)\right)} . \end{aligned}$$

Le résultat de [7, Th. 1] permet de borner $\nabla_y G^*$ et $(\nabla_y)^2 G_*$, point par point. Ainsi, grâce à l'inégalité de Hölder, on obtient

$$|G^\epsilon(x,y) - G^*(x,y)| \leq C\epsilon^{\nu_r}|x-y|^{2-d-\nu_r} \qquad \forall x,y \in \Omega. \tag{28}$$

Si on suppose maintenant, conformément à l'hypothèse du Théorème 2.1, que $f \in L^2(\Omega)$, l'inégalité (28) implique, via l'inégalité de Young et le fait que $|x|^{2-d-\nu_r} \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$,

$$\|u^\epsilon - u^*\|_{L^2(\Omega)} \leq C\epsilon^{\nu_r} \|f\|_{L^2(\Omega)} , \tag{29}$$

d'où (10), grâce à (8) et au fait que $u^* \in H^1(\Omega)$. Cette estimation (10) de la norme L^2 de R_ϵ se transmet en l'estimée (11) de son gradient en utilisant l'inégalité de Caccioppoli et des arguments similaires à ceux ci-dessus.

4.3. *Estimation L^∞ sur le gradient : le cas homogène*

Nous adaptons la preuve du résultat [1, Lem. 16] qui implique que, si $-\operatorname{div}(a(\cdot/\epsilon)\nabla u^\epsilon) = 0$ dans $B(0,2)$, alors

$$\|\nabla u^\epsilon\|_{L^\infty(B(0,1))} \leq C \|u^\epsilon\|_{L^\infty(B(0,2))} . \tag{30}$$

Dans [1], l'ingrédient essentiel de la preuve est le caractère borné du correcteur, propriété impliquée par la périodicité. Cependant, l'uniforme H-convergence et la sous-linéarité du correcteur sont en fait suffisants pour appliquer leur preuve. La démonstration de (30) se fait en trois étapes :

(i) Initialisation (voir [1, Lem. 14], avec un second membre nul) : on obtient l'estimation

$$\sup_{|x|\leq\theta}\left|u^\epsilon(x)-u^\epsilon(0)-\sum_{i=1}^d\left\{x_i+\epsilon w_i\left(\frac{x}{\epsilon}\right)\right\}\fint_{B(0,\theta)}\partial_i u^\epsilon\right|\leq\theta^{1+\gamma}\left(\fint_{B(0,2)}|u^\epsilon|^2\right)^{1/2}, \tag{31}$$

uniforme en ϵ suffisamment petit, à une échelle $\theta\in]0,1[$ fixée. Cette étape repose sur l'existence des correcteurs et sur une propriété d'uniforme H-convergence de $a(\cdot/\epsilon)$ vers A^*, c'est-à-dire (13).

(ii) Itération (voir [1, Lem. 15]) : on répète l'étape précédente sur les boules $B(0,\theta^2)$, $B(0,\theta^3)$, etc., jusqu'à l'échelle θ^k d'ordre ϵ. Cette étape se déroule dans notre cas comme dans le cas périodique.

(iii) *Blow-up* (voir [1, Lem. 16]) : au cours de cette étape, on utilise la théorie classique de Schauder pour estimer $\nabla u^\epsilon(0)$. (Ici, le point 0 ne joue pas de rôle particulier.) Il faut pour cela assurer un contrôle en norme L^∞ sur les correcteurs rescalés $\epsilon w_j(\cdot/\epsilon)$. De nouveau, ce contrôle est immédiat dans le cas périodique ou si $r<d$, parce que les correcteurs sont alors bornés ; dans le cas où $r>d$, il se fait via la propriété de sous-linéarité sur les correcteurs w_i présente dans (8).

Remarque 1 La preuve ci-dessus ne dépend pas du fait qu'on traite un système ou une équation. Ce n'est pas le cas de la section 4.2, où nous avons utilisé le principe du maximum et des estimations de de Giorgi-Nash. En conséquence, pour la preuve dans le cas d'un système, il serait nécessaire d'inverser l'ordre des arguments : d'abord démontrer (30)*, puis démontrer les résultats de la section 4.2, en utilisant, en lieu et place des estimations de de Giorgi-Nash et du principe du maximum, l'estimation* (30)*.*

4.4. *Estimation sur les fonctions de Green*

L'estimation suivante est démontrée dans [10, Th. 1.1], sous des hypothèses beaucoup plus générales que celles supposées ici :

$$|G^\epsilon(x,y)|\leq C|x-y|^{2-d}\qquad\qquad\forall x\neq y\in\Omega. \tag{32}$$

D'autre part, (30), après changement d'échelle, implique que $\|\nabla G^\epsilon(\cdot,y)\|_{L^\infty(B_R)}\leq CR^{-1}\|G^\epsilon(\cdot,y)\|_{L^\infty(B_{2R})}$, pour toutes boules concentriques B_R et B_{2R} telles que $y\notin B_{2R}$. Ceci permet de démontrer, en utilisant $R=|x-y|/4$,

$$|\nabla_x G^\epsilon(x,y)|\leq C|x-y|^{1-d}\quad\text{et}\quad|\nabla_y G^\epsilon(x,y)|\leq C|x-y|^{1-d}\qquad\qquad\forall x\neq y\in\Omega_1, \tag{33}$$

et, en remarquant que, en dérivant par rapport à y l'équation $-\operatorname{div}_x(a(x)\nabla_x G(x,y)=\delta(x-y)$, on a $-\operatorname{div}_x\left(a(x/\epsilon)\nabla_y\nabla_x G^\epsilon(x,y_0)\right)=0$ dans $\Omega\backslash B(y_0,R)$, pour tous $y_0\in\Omega$ et $R>0$. On obtient donc, en utilisant (30) et (33)

$$|\nabla_x\nabla_y G^\epsilon(x,y)|\leq C|x-y|^{-d}\qquad\qquad\forall x\neq y\in\Omega_1. \tag{34}$$

4.5. *Estimation L^∞ sur le gradient : le cas non-homogène*

On suppose désormais que $f\in C^{0,\beta}(\overline{\Omega})$, avec $\beta\leq\alpha$. Nous appliquons alors la preuve du résultat [13, Lem. 3.5], dont nous esquissons la démonstration. Si G^ϵ satisfaisait (34) sur tout le domaine, et si R^ϵ était nul sur $\partial\Omega$ (ce qui n'est pas le cas en général), alors on déduirait de (17) que

$$\nabla R^\epsilon(x)=-\int_\Omega\nabla_x\nabla_y G^\epsilon(x,y)H^\epsilon(y)\mathrm{d}y, \tag{35}$$

d'où, en isolant la singularité de $\nabla_x \nabla_y G^\epsilon$ et en utilisant (20) (pour $p = +\infty$) et (21),

$$\|\nabla R^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\Big[\epsilon^2 \|H^\epsilon\|_{C^{0,\beta}(\Omega)} + \ln\left(2+\epsilon^{-1}\right) \|H^\epsilon\|_{L^\infty(\Omega)}\Big] \leq C\epsilon^{\nu_r} \ln\left(2+\epsilon^{-1}\right) \|f\|_{C^{0,\beta}(\Omega)}. \tag{36}$$

Pour prendre en compte que (34) est une estimée intérieure et que R^ϵ est non nul au bord de $\partial\Omega$, on procède à une localisation en multipliant R^ϵ par une fonction de cut-off, et on démontre ainsi (12).

Remerciements

Le travail du second auteur a été partiellement financé par l'ONR, Grant N00014-15-1-2777, et par l'EOARD, Grant FA-9550-17-1-0294.

Références

[1] M. Avellaneda and F.-H. Lin. Compactness methods in the theory of homogenization. *Comm. Pure Appl. Math.*, 40(6) :803–847, 1987.

[2] X. Blanc, M. Josien, and C. Le Bris. Precised approximations in elliptic homogenization problems beyond the periodic setting. Soumis.

[3] X. Blanc, C. Le Bris, and P.-L. Lions. A possible homogenization approach for the numerical simulation of periodic microstructures with defects. *Milan J. Math.*, 80(2) :351–367, 2012.

[4] X. Blanc, C. Le Bris, and P.-L. Lions. Local profiles for elliptic problems at different scales : defects in, and interfaces between periodic structures. *Comm. Partial Differential Equations*, 40(12) :2173–2236, 2015.

[5] X. Blanc, C. Le Bris, and P.-L. Lions. On correctors for linear elliptic homogenization in the presence of local defects. *Comm. Partial Differential Equations*, 2018. à paraître.

[6] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.

[7] G. Dolzmann and S. Müller. Estimates for Green's matrices of elliptic systems by L^p theory. *Manuscripta Math.*, 88(2) :261–273, 1995.

[8] D. Gilbarg and N. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.

[9] A. Gloria, S. Neukamm, and F. Otto. A regularity theory for random elliptic operators. In preparation.

[10] M. Grüter and K.-O. Widman. The Green function for uniformly elliptic equations. *Manuscripta Math.*, 37(3) :303–342, 1982.

[11] V. V. Jikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleĭnik. *Homogenization of differential operators and integral functionals*. Springer-Verlag, Berlin, 1994.

[12] M. Josien. *Etude mathématique et numérique de quelques modèles multi-échelles issus de la mécanique des matériaux*. PhD thesis, Université Paris-Est, 2018.

[13] C. E. Kenig, F. Lin, and Z. Shen. Periodic homogenization of Green and Neumann functions. *Comm. Pure Appl. Math.*, 67(8) :1219–1262, 2014.

[14] Yves Meyer. *Ondelettes et opérateurs. II*. Actualités Mathématiques. [Current Mathematical Topics]. Hermann, Paris, 1990.

[15] Z. Shen. The Calderón-Zygmund lemma revisited. In *Lectures on the analysis of nonlinear partial differential equations. Part 2*, volume 2 of *Morningside Lect. Math.*, pages 203–224. Int. Press, Somerville, MA, 2012.

[16] L. Tartar. *The general theory of homogenization*, volume 7 of *Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana*. Springer-Verlag, Berlin ; UMI, Bologna, 2009. A personalized introduction.