



Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)

OATAO is an open access repository that collects the work of some Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author's version published in: <https://oatao.univ-toulouse.fr/20168>

To cite this version :

Paroissien, Eric and Gourinat, Yves Stratégie de modélisation avancée des assemblages structuraux aérospatiaux. Matériaux, interfaces, fatigue, dynamique. (2018) In: Journée scientifique 3AF & ONERA. Assemblages innovants : de l'élaboration matérielle à la modélisation structurale: Enjeux et perspectives., 13 June 2018 (Châtillon, France). (Unpublished)

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator:

tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

Journée scientifique 3AF & ONERA, le 13 juin 2018 à l'ONERA Châtillon
Assemblages innovants : de l'élaboration matérielle à la modélisation structurale
Enjeux et perspectives.

Stratégie de modélisation avancée des assemblages structuraux aérospatiaux.

Matériaux, interfaces, fatigue, dynamique.

¹Éric PAROISSIEN

eric.paroissien@isae-superaero.fr +33(0)561338438

¹Yves GOURINAT

yves.gourinat@isae-superaero.fr

*¹Institut Clément Ader (ICA), Université de Toulouse, ISAE-SUPAERO, INSA, IMT MINES ALBI, UTIII, CNRS,
3 Rue Caroline Aigle, 31400 Toulouse, France*



La Recherche à l'Institut Clément Ader

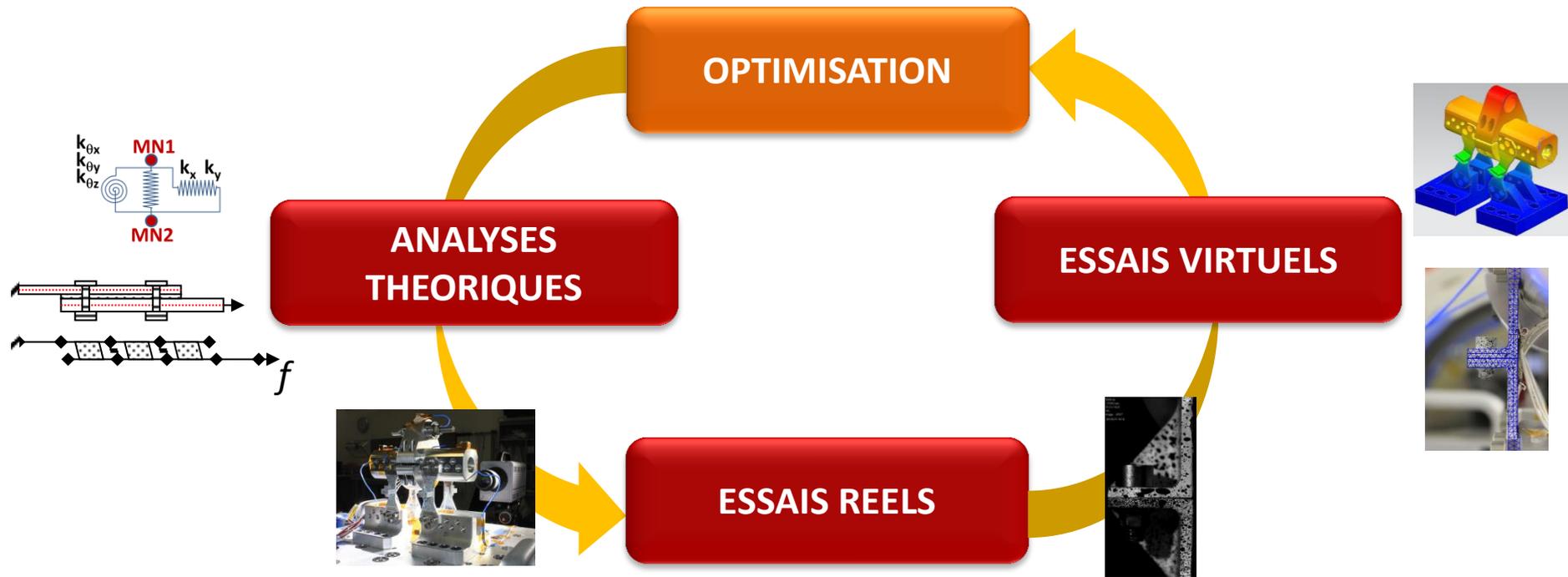
Laboratoire de mécanique des solides d'Occitanie

Matériaux, Structures, Procédés, Aérospatial

UMR CNRS, 237 chercheurs (49 HDR, 118 doctorants)

4 groupes : Métalliques, Composites, Méthodes, Mesures

“Chasseurs d'entropie structurale”



3 thématiques scientifiques

➤ Durability & Damage of Materials (DDM)

- *Structural Additive Manufacturing (SAM)*

➤ Dynamics of Aerospace Structures (DAS)

- *Structural & Architectural Optimisation (SAO)*

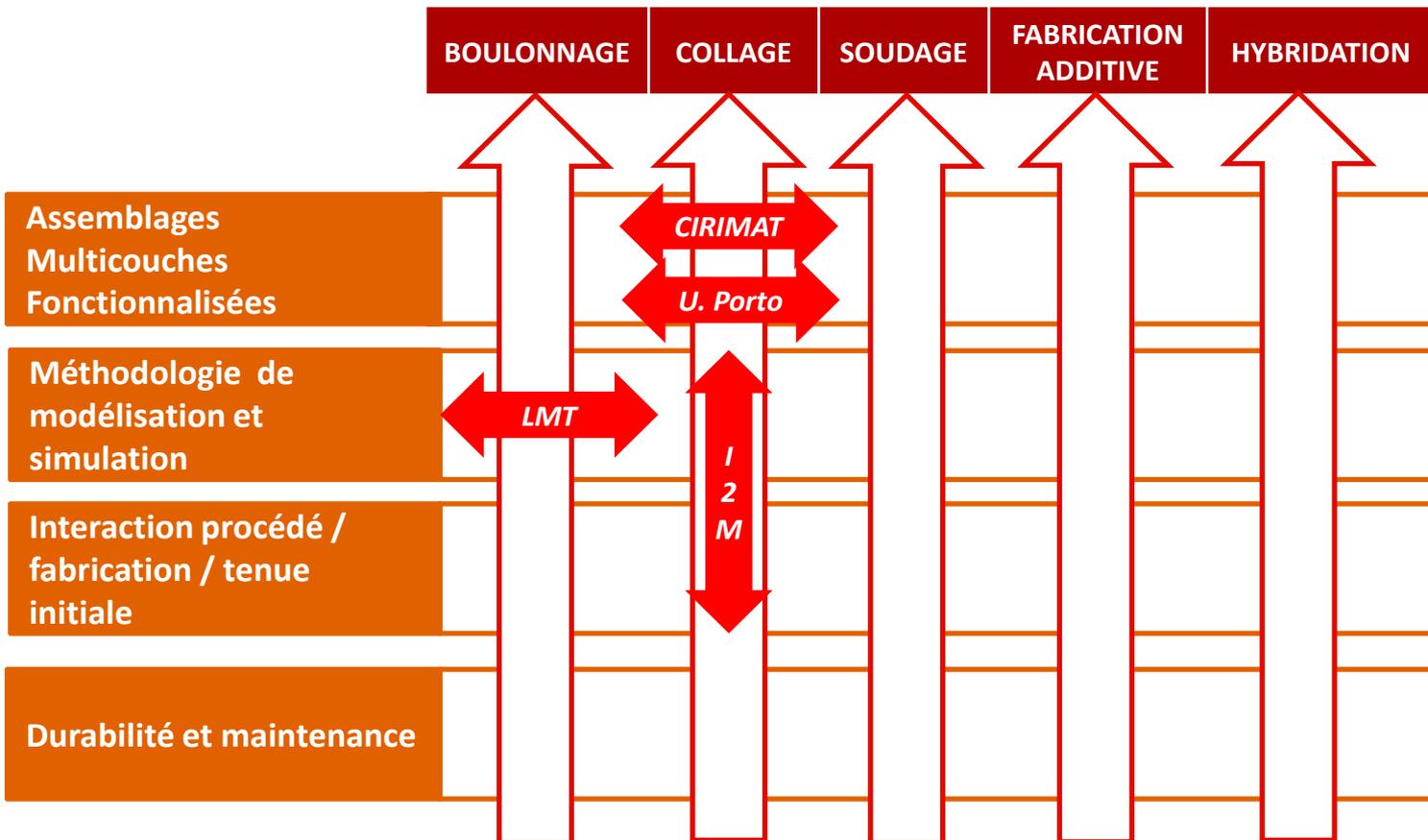
➤ Multiphysics Driven Simulation (MDS)

- *Shell-Fluid Interaction & Biodynamics (SIB)*

✓ Assemblages : thématique transverse porteuse

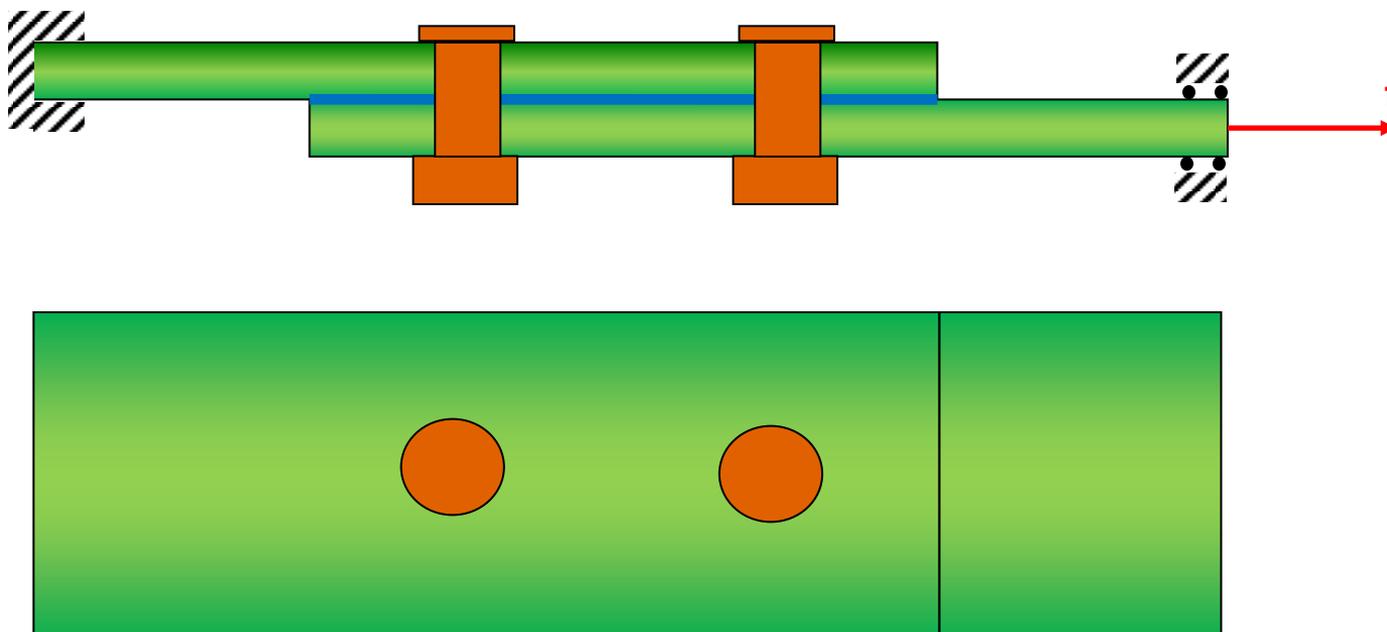
AXE TRANSVERSE ASSEMBLAGE

- créé en 2013: forte demande industrielle et historique dans le domaine
- investiguer les questions posées par les technologies d'assemblage



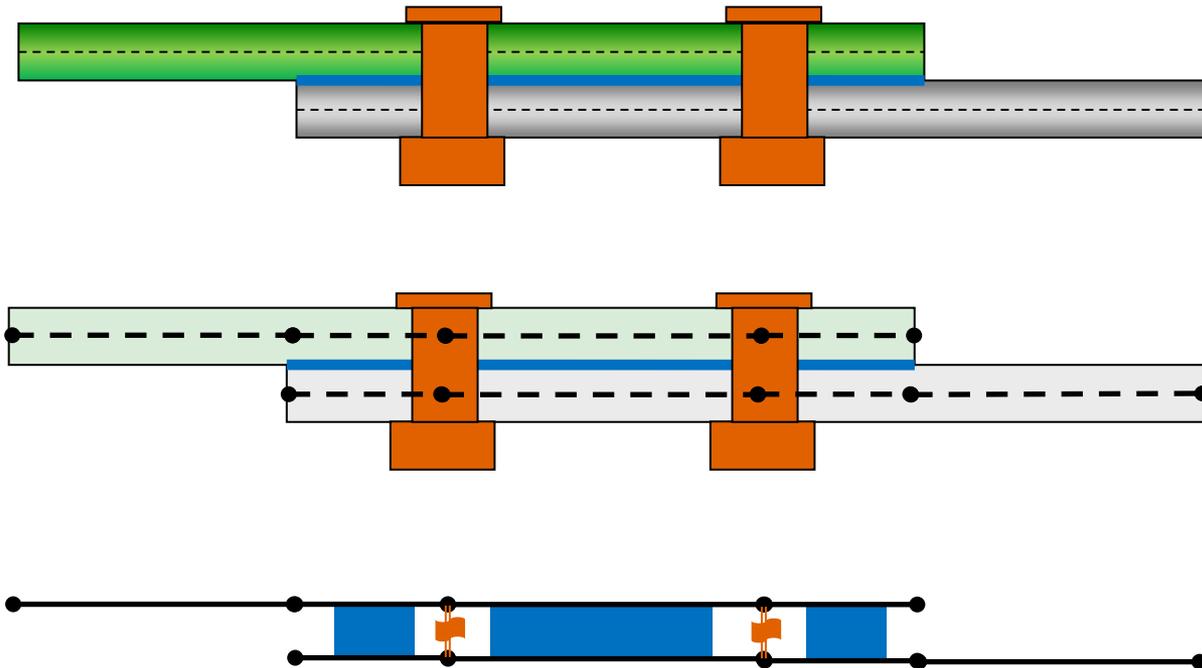
ORIGINE

Quelle **modélisation simplifiée** pour évaluer **rapidement et précisément le transfert des efforts** dans un assemblage **hybride (boulonné/collé)** chargé dans le plan ?



ORIGINE

Marc Sartor (INSA Toulouse) a proposé de modéliser la jonction à l'aide d'éléments spéciaux **dénommés macro-éléments (ME)**. (Paroissien, 2006) (Paroissien et al., 2007a) (Paroissien et al., 2007b)



ORIGINE

Marc Sartor (INSA Toulouse) a proposé de modéliser la jonction à l'aide d'éléments spéciaux **dénommés macro-éléments (ME)**.



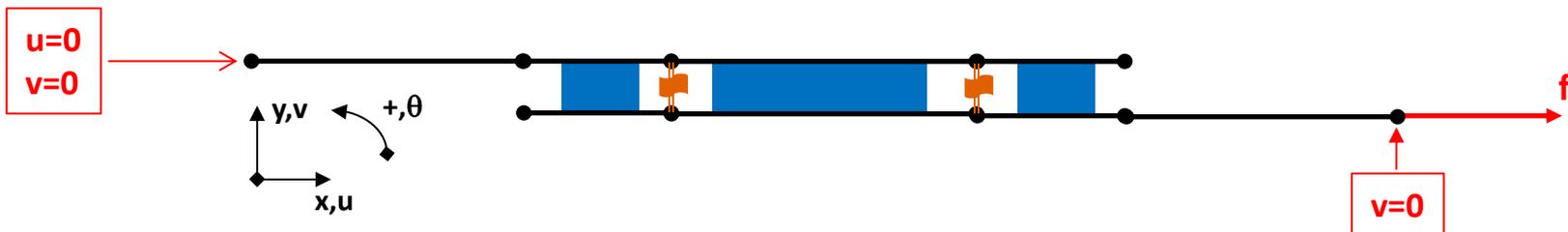
cinématique			
1D barre	élément barre	éléments barres-collées	élément fixation 2 DDL
1D poutre	élément poutre	éléments poutres-collées	élément fixation 6 DDL
matrice de raideur élémentaire	K_{barre} K_{poutre}	K_{BC} K_{PC}	K_{F_3} K_{F_6}

ORIGINE

La méthodologie consiste alors à :

1. assembler la matrice de raideur de l'assemblage à partir des matrices de raideur élémentaires K_s
2. appliquer les conditions aux limites
3. minimiser l'énergie potentielle menant au système linéaire à inverser $F_s = K_s U_s$

La principale difficulté est alors la formulation des matrices de raideur élémentaires.



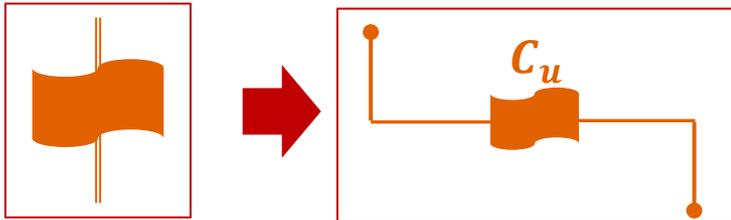
MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

La matrice de raideur élémentaire de fixation dépend de la cinématique choisie.

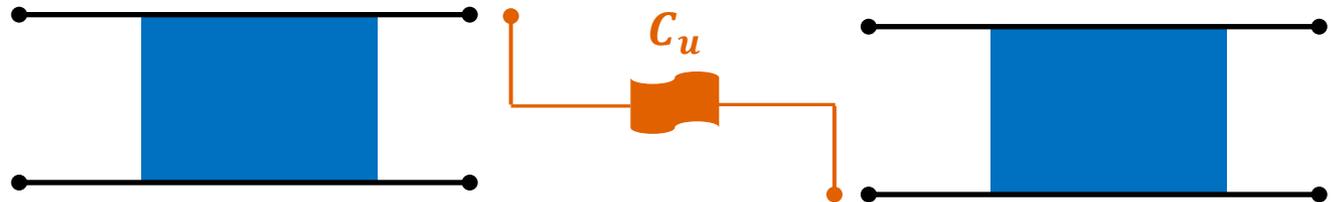
1D barre

Ressort de cisaillement

Cette modélisation correspond à celle utilisée pour la modélisation simplifiée des assemblages boulonnés dans une cinématique de barre (Ross, 1947).



$$K_{F-2} = C_u \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

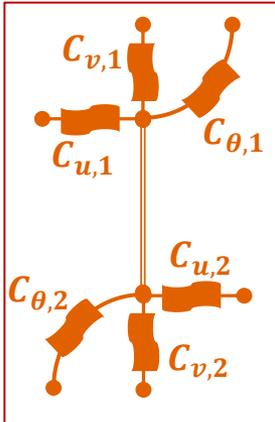
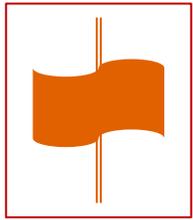


MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

La matrice de raideur élémentaire de fixation dépend de la cinématique choisie.

1D poutre

6 ressorts + 1 élément rigide

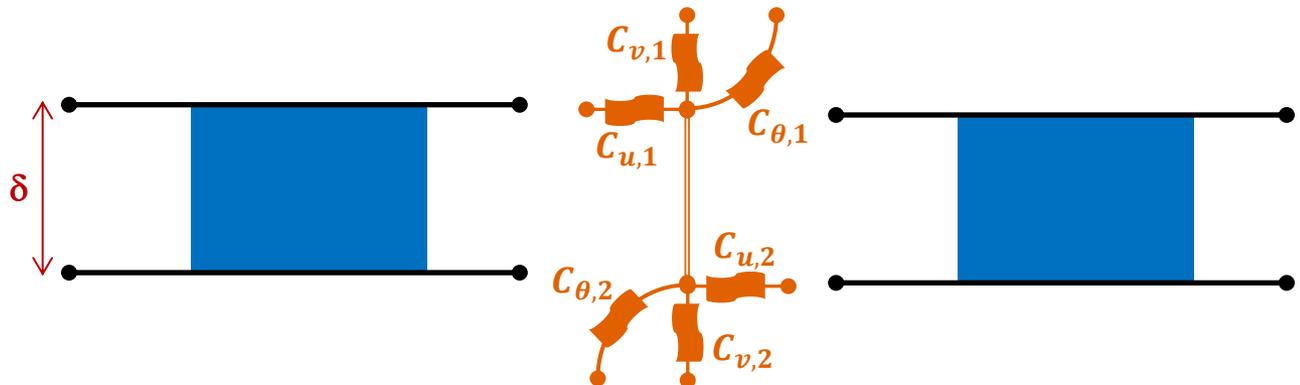


fixation symétrique

$$K_{F-6} = \frac{1}{k} \begin{pmatrix} 2C_u C_\theta & -2C_u C_\theta & 0 & 0 & -\delta C_u C_\theta & -\delta C_u C_\theta \\ -2C_u C_\theta & 2C_u C_\theta & 0 & 0 & \delta C_u C_\theta & \delta C_u C_\theta \\ 0 & 0 & kC_v & -kC_v & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -kC_v & kC_v & 0 & 0 \\ -\delta C_u C_\theta & \delta C_u C_\theta & 0 & 0 & 2C_\theta^2 + \delta^2 C_u C_\theta & -2C_\theta^2 \\ -\delta C_u C_\theta & \delta C_u C_\theta & 0 & 0 & 2C_\theta^2 & 2C_\theta^2 + \delta^2 C_u C_\theta \end{pmatrix}$$

$$k = 2C_\theta + \frac{\delta^2}{2} C_u$$

(Paroissien et al., 2017)

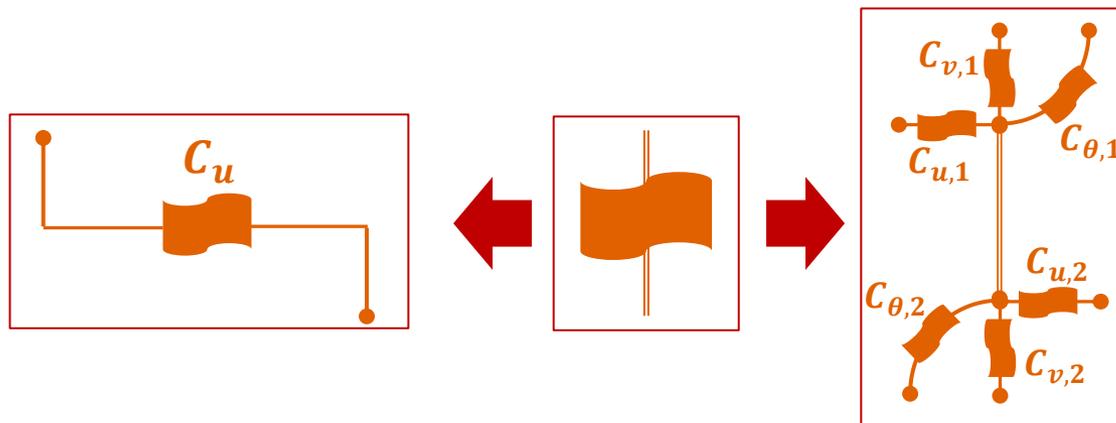


MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

Les matrices de raideurs élémentaires pour les ME de fixations dépendent de raideurs de fixation C_u , C_v et C_θ .

Il existe dans la littérature de nombreuses formules pour calculer ces raideurs comme par exemple :
(Tate and Rosenfeld, 1946) (Swift, 1984) (Huth, 1986) (Cope and Lacy, 2000) (Morris, 2004)

Ces raideurs sont vues comme des paramètres globaux représentant un ensemble de phénomènes locaux. Ils peuvent être calibrés à partir d'essais expérimentaux ou numériques pour un domaine d'application borné.



MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

A – Préambule

Il existe dans la littérature scientifique de nombreuses modélisations simplifiées fournissant une représentation précise du comportement mécanique des assemblages collés, comme détaillée par exemple dans [\(van Ingen and Volt, 1993\)](#) [\(Tsaï and Morton, 1994\)](#) [\(da Silva et al. 2009\)](#).

Néanmoins, le champs d'application des solutions obtenues est en général assez restreint. Les **hypothèses simplificatrices** sont traduites en équations différentielles:

- équations constitutives
- équations d'équilibre local

Un système d'équations différentielles est alors obtenu, qui est en général difficile de résoudre analytiquement, en particulier dans les cas :

- avec des substrats dissimilaires
- et/ou avec des conditions aux limites variées (hyperstaticité,...)
- et/ou avec des comportements matériaux non linéaires

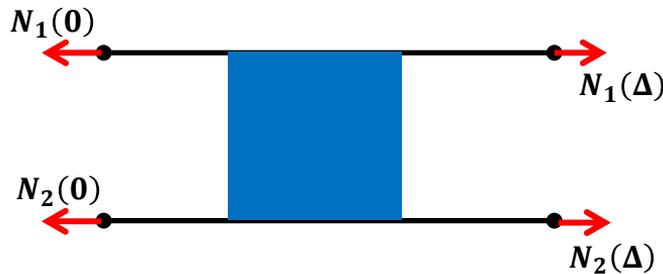
Des schémas de **résolution particuliers** peuvent être employés tels que :

- « multisegment integration method » [\(Mortensen, 1997\)](#)
- la **technique par macro-élément** [\(Gustafson et al., 2006\)](#) [\(Paroissien, 2006\)](#)

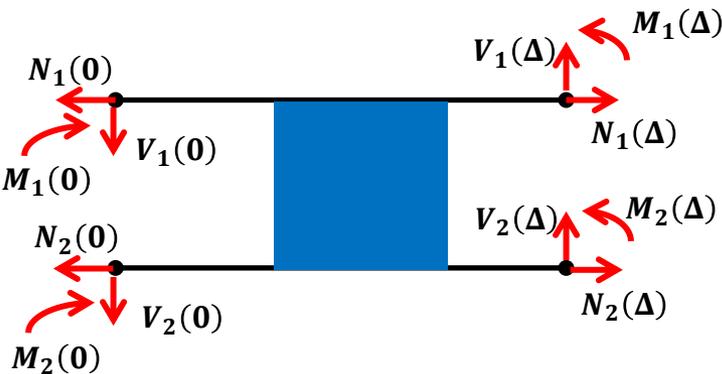
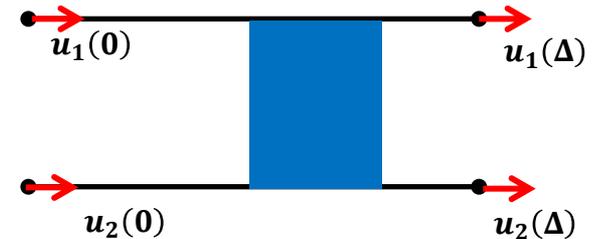
MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

B – Principe

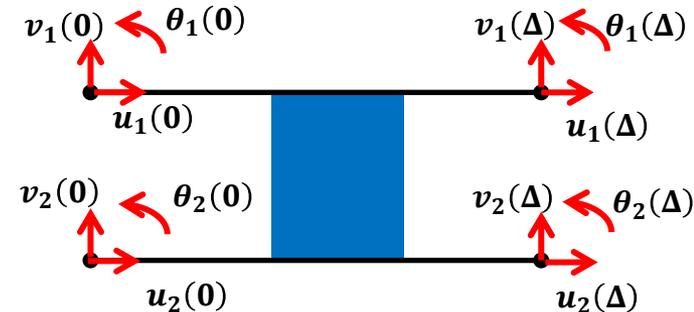
La matrice de raideur élémentaire du recouvrement collé exprime les relations entre les déplacements nodaux et les efforts nodaux.



$$\begin{pmatrix} -N_1(0) \\ -N_2(0) \\ N_1(\Delta) \\ N_2(\Delta) \end{pmatrix} = K_{BC} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_1(\Delta) \\ u_2(\Delta) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} -N_1(0) \\ -N_2(0) \\ N_1(\Delta) \\ N_2(\Delta) \\ -V_1(0) \\ -V_2(0) \\ V_1(\Delta) \\ V_2(\Delta) \\ -M_1(0) \\ -M_2(0) \\ M_1(\Delta) \\ M_2(\Delta) \end{pmatrix} = K_{PC} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_1(\Delta) \\ u_2(\Delta) \\ v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_1(\Delta) \\ v_2(\Delta) \\ \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \\ \theta_1(\Delta) \\ \theta_2(\Delta) \end{pmatrix}$$

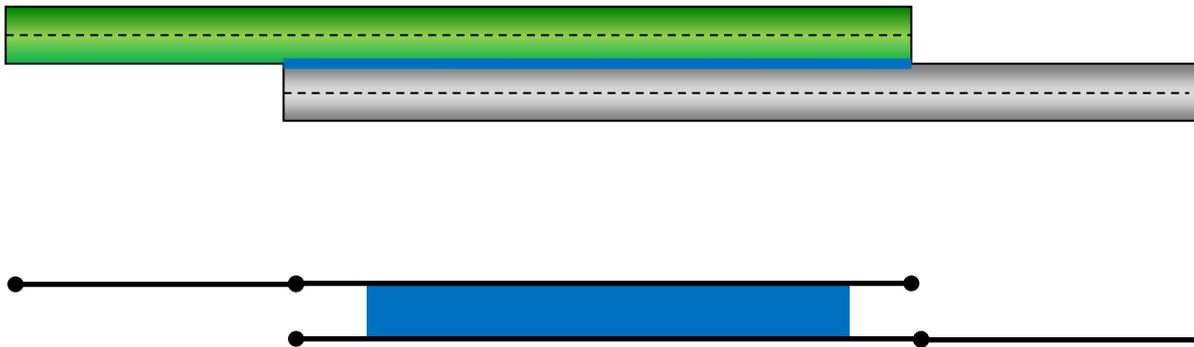


MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

B – Principe

Contrairement aux éléments finis classiques, il n'y a **aucune hypothèse sur les fonctions de forme**.
Les fonctions de forme ont la forme des solutions qui résolvent le système d'équations différentielles.

Une conséquence est **qu'un unique ME est suffisant pour représenter un recouvrement collé**, en calcul linéaire élastique. Les déplacements, efforts internes et contraintes seront alors obtenus pour toutes les abscisses du recouvrement.



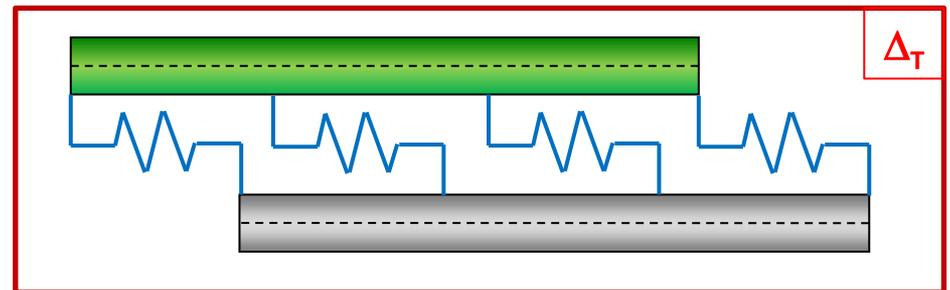
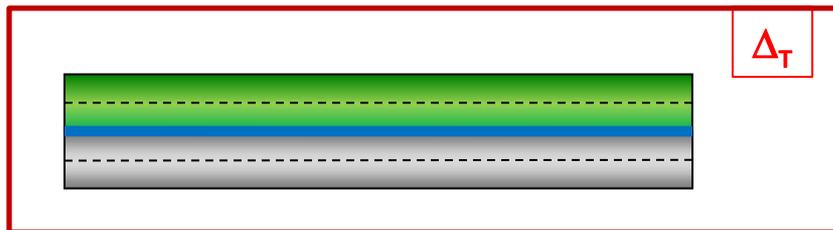
- 6 nœuds
- 6 ddl en 1D barre
- 18 ddl en 1D poutre

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D barre

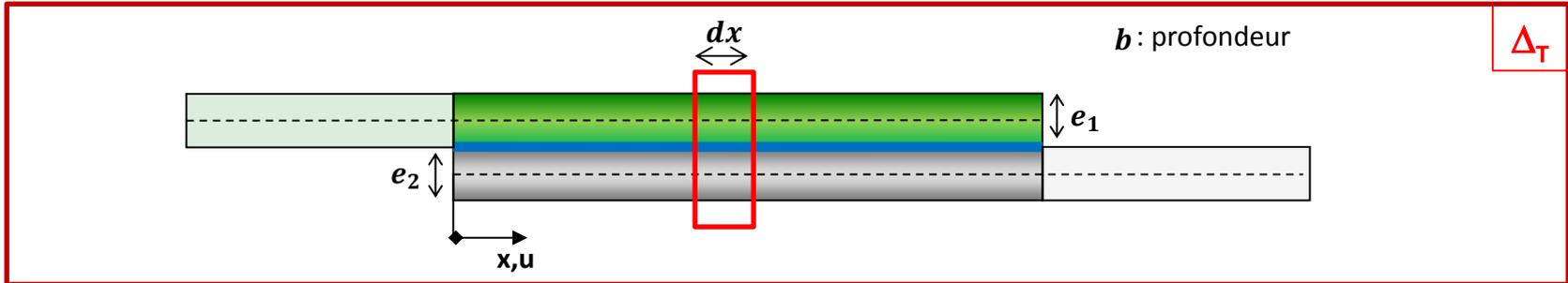
Les hypothèses sont:

- comportement linéaire élastique homogène des matériaux
- l'équilibre local de Volkersen est utilisé (Volkersen, 1938)
- les substrats sont modélisés comme des barres, avec éventuellement une variation linéaire de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur (Tsaï et al., 1998)
- la couche adhésive est représentée par une infinité de ressorts de cisaillement
- épaisseur de colle e_a constante
- chargement mécanique et application d'une variation de température uniforme Δ_T

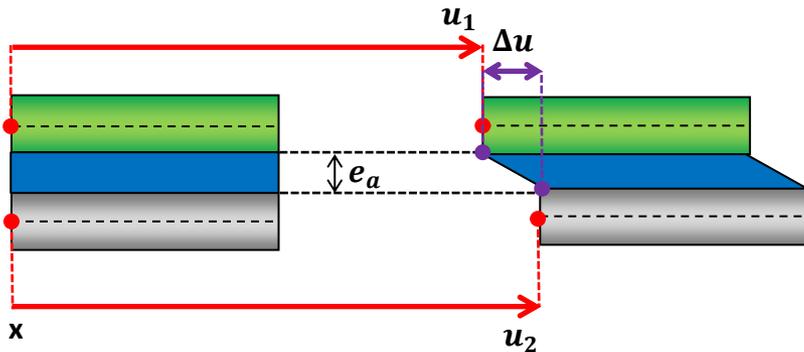


MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D barre

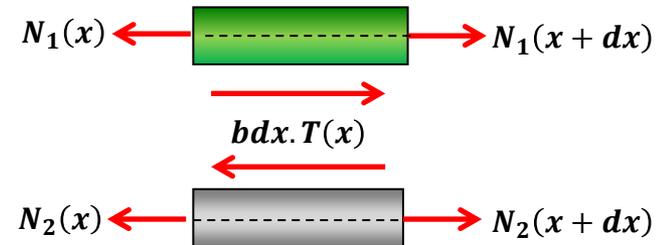


équations constitutives



$$\frac{du_j}{dx} = \frac{N_j}{A_j} + \alpha_j \Delta T \quad A_j = E_j b e_j \quad T = \frac{G_a}{e_a} \Delta u$$

équilibre local de Volkersen



$$\frac{dN_1}{dx} = -bT \quad \frac{dN_2}{dx} = bT$$

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D barre

A partir des équations constitutives et équations d'équilibre local, un système d'équations différentielles linéaires du 2nd ordre en les déplacements longitudinaux peut être déduit et résolu.

$$\frac{dN_j}{dx} = (-1)^j bT, j = 1,2$$

$$T = \frac{G_a}{e_a} (u_2 - u_1)$$

$$\frac{du_j}{dx} = \frac{N_j}{A_j} + \alpha_j \Delta T, j = 1,2$$



$$\frac{d^2 u_1}{dx^2} + \frac{G_a}{e_a} \frac{1}{e_1 E_1} (u_2 - u_1) = 0$$

$$\frac{d^2 u_2}{dx^2} + \frac{G_a}{e_a} \frac{1}{e_2 E_2} (u_2 - u_1) = 0$$



$$u_1 = \frac{1}{2} [c_1 + c_2 x - c_3(1 + \chi)e^{-\eta x} - c_4(1 + \chi)e^{\eta x}]$$

$$u_2 = \frac{1}{2} [c_1 + c_2 x + c_3(1 - \chi)e^{-\eta x} + c_4(1 - \chi)e^{\eta x}]$$

$$\eta^2 = \frac{G_a}{e_a} \left(\frac{1}{e_1 E_1} + \frac{1}{e_2 E_2} \right) \quad \chi = \frac{\frac{1}{e_1 E_1} - \frac{1}{e_2 E_2}}{\frac{1}{e_1 E_1} + \frac{1}{e_2 E_2}}$$

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D barre

Les 4 constantes d'intégration c_i peuvent alors être exprimées en fonction des 4 déplacements nodaux.

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} [c_1 + c_2 x - c_3(1 + \chi)e^{-\eta x} - c_4(1 + \chi)e^{\eta x}] \\ u_2 = \frac{1}{2} [c_1 + c_2 x + c_3(1 - \chi)e^{-\eta x} + c_4(1 - \chi)e^{\eta x}] \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = M_e^{-1} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_1(\Delta) \\ u_2(\Delta) \end{pmatrix} \Leftrightarrow C = M_e^{-1} U_e$$

$$M_e^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(1 - \chi)}{(1 - \chi)} & \frac{(1 + \chi)}{(1 + \chi)} & 0 & 0 \\ -\frac{\Delta}{e^{\eta\Delta}} & -\frac{\Delta}{e^{\eta\Delta}} & \frac{(1 - \chi)}{\Delta} & \frac{(1 + \chi)}{\Delta} \\ -\frac{2 \sinh \eta\Delta}{e^{-\eta\Delta}} & \frac{2 \sinh \eta\Delta}{e^{\eta\Delta}} & 1 & 1 \\ \frac{2 \sinh \eta\Delta}{e^{-\eta\Delta}} & -\frac{2 \sinh \eta\Delta}{e^{\eta\Delta}} & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D barre

A partir des équations constitutives des substrats, les efforts normaux peuvent être déduits en fonction des constantes d'intégration:

$$\frac{N_1}{A_1} = \frac{du_1}{dx} - \alpha_1 \Delta_T$$

$$\frac{N_2}{A_2} = \frac{du_2}{dx} - \alpha_2 \Delta_T$$



$$N_1(x) = \frac{1}{2} [c_2 + c_3 \eta (1 + \chi) e^{-\eta x} - \eta c_4 (1 + \chi) e^{\eta x}] A_1 - A_1 \alpha_1 \Delta_T$$

$$N_2(x) = \frac{1}{2} [c_2 - c_3 \eta (1 - \chi) e^{-\eta x} + \eta c_4 (1 - \chi) e^{\eta x}] A_2 - A_2 \alpha_2 \Delta_T$$

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D barre

A partir des équations constitutives des substrats, les efforts normaux peuvent être déduits en fonction des constantes d'intégration:

$$\left. \begin{aligned} \frac{N_1}{A_1} &= \frac{du_1}{dx} - \alpha_1 \Delta T \\ \frac{N_2}{A_2} &= \frac{du_2}{dx} - \alpha_2 \Delta T \end{aligned} \right\} \rightarrow \left. \begin{aligned} N_1(x) &= \frac{1}{2} [c_2 + c_3 \eta (1 + \chi) e^{-\eta x} - \eta c_4 (1 + \chi) e^{\eta x}] A_1 - A_1 \alpha_1 \Delta T \\ N_2(x) &= \frac{1}{2} [c_2 - c_3 \eta (1 - \chi) e^{-\eta x} + \eta c_4 (1 - \chi) e^{\eta x}] A_2 - A_2 \alpha_2 \Delta T \end{aligned} \right\}$$

Les efforts nodaux équivalents s'expriment donc en fonction des constantes d'intégration par:

$$\begin{pmatrix} -N_1(0) \\ -N_2(0) \\ N_1(\Delta) \\ N_2(\Delta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -A_1 \alpha_1 \\ -A_2 \alpha_2 \\ A_1 \alpha_1 \\ A_2 \alpha_2 \end{pmatrix} \Delta T = N_e \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{F}_e + \mathbf{F}_{therm} = N_e \mathbf{C}$$

$$N_e = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -A_1 & -\eta(1 + \chi)A_1 & \eta(1 + \chi)A_1 \\ 0 & -A_2 & \eta(1 - \chi)A_2 & -\eta(1 - \chi)A_2 \\ 0 & A_1 & \eta(1 + \chi)e^{-\eta\Delta}A_1 & -\eta(1 + \chi)e^{\eta\Delta}A_1 \\ 0 & A_2 & -\eta(1 - \chi)e^{-\eta\Delta}A_2 & \eta(1 - \chi)e^{\eta\Delta}A_2 \end{pmatrix}$$

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D barre

Pour la cinématique 1D barre, il est donc possible d'obtenir les expressions analytiques des composantes de la matrice de raideur élémentaire (Paroissien, 2006) (Paroissien, 2007a).

$$C = M_e^{-1} U_e$$

$$F_e + F_{therm} = N_e C$$

$$F_e + F_{therm} = \boxed{N_e M_e^{-1} U_e}$$

\uparrow
 K_{BC}

$$K_{BC} = \frac{1}{1 + \chi_A} \frac{A_2}{\Delta} \begin{pmatrix} \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} + \frac{1}{\chi_A} & 1 - \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} & -\frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - \frac{1}{\chi_A} & \frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - 1 \\ 1 - \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} & \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} + \chi_A & \frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - 1 & -\frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - \chi_A \\ -\frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - \frac{1}{\chi_A} & \frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - 1 & \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} + \frac{1}{\chi_A} & 1 - \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} \\ \frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - 1 & -\frac{\eta\Delta}{\sinh \eta\Delta} - \chi_A & 1 - \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} & \frac{\eta\Delta}{\tanh \eta\Delta} + \chi_A \end{pmatrix} \quad \chi_A = \frac{A_2}{A_1}$$

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D barre

La résolution du système $\mathbf{F}_S = \mathbf{K}_S \mathbf{U}_S$ permet de déterminer le vecteur déplacement: \mathbf{U}_S

Pour chaque macro-élément, il est donc possible d'extraire le vecteur déplacement: \mathbf{U}_e

Ainsi, pour chaque macro-élément, on détermine les constantes d'intégration: $\mathbf{C} = \mathbf{M}_e^{-1} \mathbf{U}_e$

On peut donc retrouver les distributions des déplacements, des efforts et contraintes pour tout abscisse x .

$$u_1 = \frac{1}{2} [c_1 + c_2 x - c_3(1 + \chi)e^{-\eta x} - c_4(1 + \chi)e^{\eta x}]$$

$$u_2 = \frac{1}{2} [c_1 + c_2 x + c_3(1 - \chi)e^{-\eta x} + c_4(1 - \chi)e^{\eta x}]$$

$$T = \frac{G_a}{e_a} (u_2 - u_1)$$

$$N_1(x) = \frac{1}{2} [c_2 + c_3 \eta (1 + \chi) e^{-\eta x} - \eta c_4 (1 + \chi) e^{\eta x}] A_1 - A_1 \alpha_1 \Delta_T$$

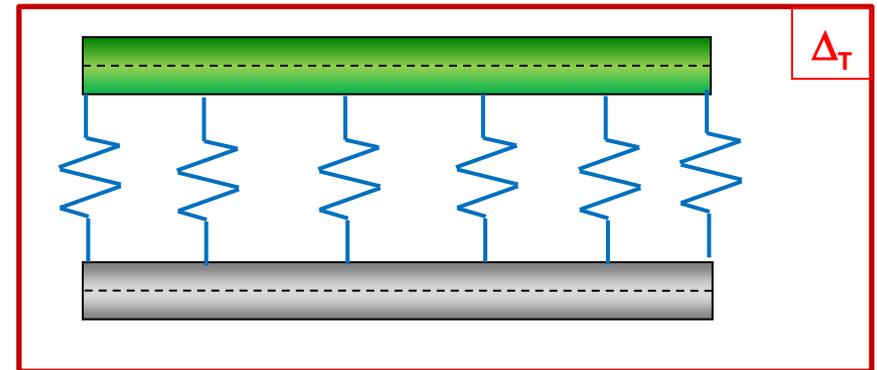
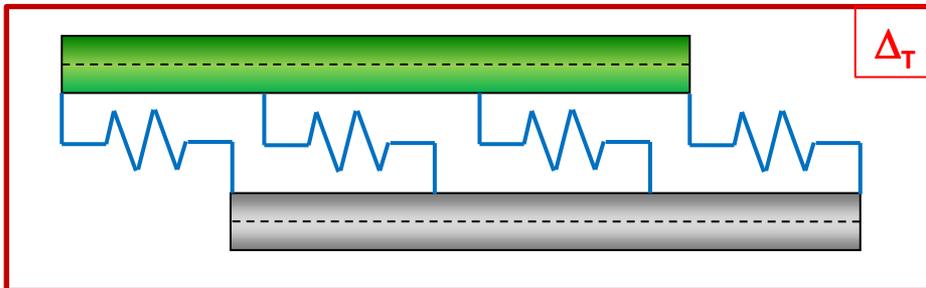
$$N_2(x) = \frac{1}{2} [c_2 - c_3 \eta (1 - \chi) e^{-\eta x} + \eta c_4 (1 - \chi) e^{\eta x}] A_2 - A_2 \alpha_2 \Delta_T$$

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D poutre

Les hypothèses sont:

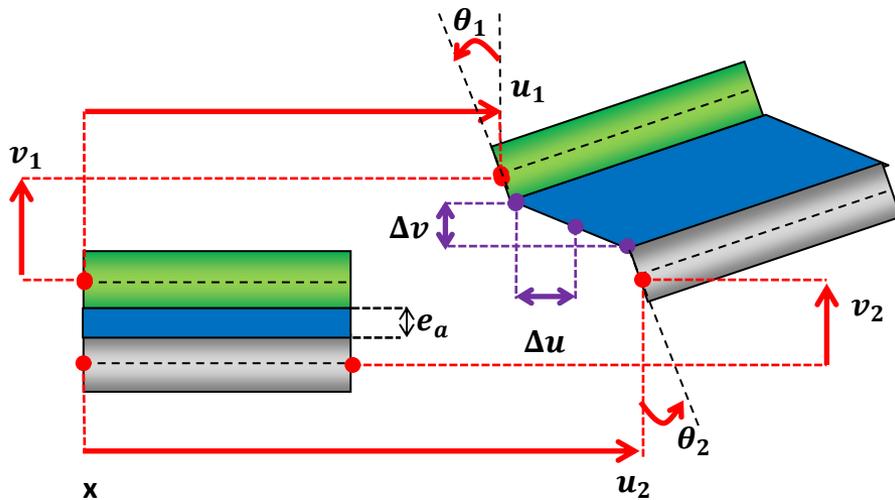
- comportement linéaire élastique des matériaux
- l'équilibre local de Goland et Reissner ([Goland and Reissner, 1944](#))
- les substrats sont modélisés comme des poutres stratifiées dans un modèle d'Euler Bernoulli, avec éventuellement une variation linéaire de la contrainte de cisaillement dans l'épaisseur ([Tsaï et al., 1938](#))
- la couche adhésive est représentée par une infinité de ressorts de cisaillement et de pelage
- épaisseur de colle e_a constante
- chargement mécanique et application d'une variation de température uniforme Δ_T



MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D poutre

équations constitutives

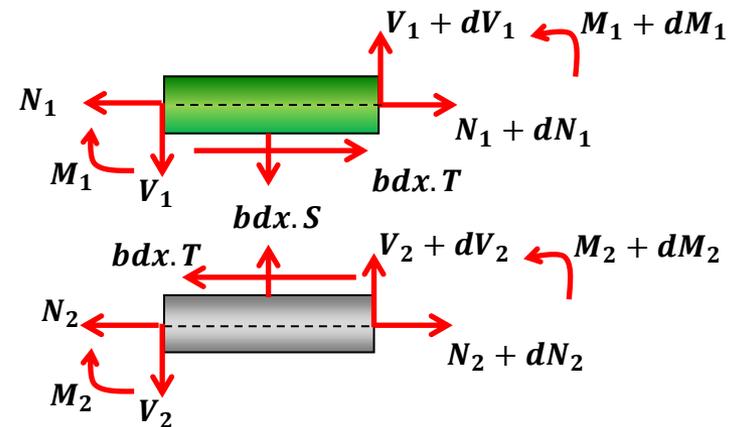


$$N_j = A_j \frac{du_j}{dx} - B_j \frac{d\theta_j}{dx} \quad M_j = -B_j \frac{du_j}{dx} + D_j \frac{d\theta_j}{dx}$$

$$\theta_j = \frac{dv_j}{dx}$$

$$T = \frac{G_a}{e_a} \left(u_2 - u_1 - \frac{e_2}{2} \theta_2 - \frac{e_1}{2} \theta_1 \right) \quad S = \frac{E_a}{e_a} \Delta v$$

équilibre local de Goland and Reissner



$$\frac{dN_j}{dx} = (-1)^j b T$$

$$\frac{dV_j}{dx} = (-1)^{j+1} b S$$

$$\frac{dM_j}{dx} + V_j + b \frac{e_j}{2} T = 0$$

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D poutre

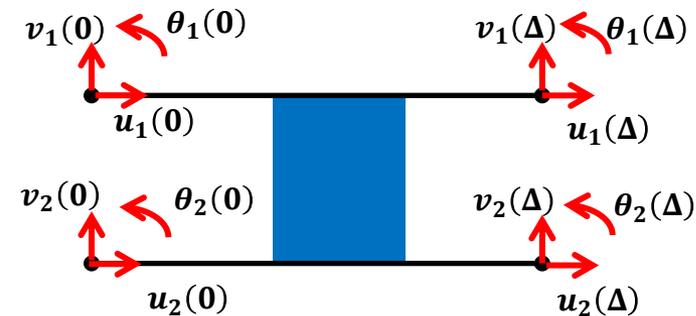
Contrairement au cas 1D barre, les expressions analytiques des composantes de la matrice de raideur ne sont pas obtenues. Néanmoins, le schéma de résolution consistant à rechercher :

- la forme **des solutions des déplacements** en fonction des constantes d'intégration
 - déduire la forme des efforts internes en fonction des constantes d'intégration
- peut être appliqué.

La difficulté ici est **l'identification d'un jeu de constantes d'intégration libres** (solution obtenue fin 2008).

$$\begin{pmatrix} -N_1(0) \\ -N_2(0) \\ N_1(\Delta) \\ N_2(\Delta) \\ -V_1(0) \\ -V_2(0) \\ V_1(\Delta) \\ V_2(\Delta) \\ -M_1(0) \\ -M_2(0) \\ M_1(\Delta) \\ M_2(\Delta) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -N_1^{\Delta T} \\ -N_2^{\Delta T} \\ N_1^{\Delta T} \\ N_2^{\Delta T} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ M_1^{\Delta T} \\ M_2^{\Delta T} \\ -M_1^{\Delta T} \\ -M_2^{\Delta T} \end{pmatrix} = K_{PC} \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \\ u_1(\Delta) \\ u_2(\Delta) \\ v_1(0) \\ v_2(0) \\ v_1(\Delta) \\ v_2(\Delta) \\ \theta_1(0) \\ \theta_2(0) \\ \theta_1(\Delta) \\ \theta_2(\Delta) \end{pmatrix}$$

$$F_e + F_{therm} = N_e M_e^{-1} U_e = K_{PC} U_e$$



MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D poutre

Un autre schéma de résolution est développé depuis 2014. Il s'appuie sur la résolution du système d'équations différentielles au premier ordre en les efforts internes et les déplacements des substrats via l'exponentielle matricielle (Paroissien et al., 2018a) (Paroissien et al., 2018b).

$$\frac{dN_j}{dx} = (-1)^j b \frac{G_a}{e_a} \left(u_2 - u_1 - \frac{e_2}{2} \theta_2 - \frac{e_1}{2} \theta_1 \right)$$

$$\frac{dV_j}{dx} = (-1)^{j+1} b \frac{E_a}{e_a} (v_1 - v_2)$$

$$\frac{dM_j}{dx} = -V_j - b \frac{e_j G_a}{2 e_a} \left(u_2 - u_1 - \frac{e_2}{2} \theta_2 - \frac{e_1}{2} \theta_1 \right)$$

$$\frac{du_j}{dx} = \frac{D_j N_j + B_j M_j}{\Delta_j}$$

$$\frac{dv_j}{dx} = \theta_j$$

$$\frac{d\theta_j}{dx} = \frac{A_j M_j + B_j N_j}{\Delta_j}$$



$$\frac{dX}{dx} = AX$$

$$X = \begin{pmatrix} N_1 \\ V_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ V_2 \\ M_2 \\ u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} \Phi_A(X=0) = \expm(A \cdot 0) \\ \Phi_A(X=\Delta) = \expm(A \cdot \Delta) \end{cases}$$



$$M_e, N_e, K_{PC} = N_e M_e^{-1}$$

MATRICE DE RAIDEUR ÉLÉMENTAIRE

C – 1D poutre

Un intérêt est qu'il permet de formuler rapidement la matrice de raideur quand on change les hypothèses simplificatrices initiales. Par exemple, modèle de poutre de Timoshenko, équilibre local d'Hart-Smith ([Hart-Smith, 1973](#)) ou de Luo et Tong ([Luo et Tong, 2009](#)).

$$\frac{dN_j}{dx} = (-1)^j b \frac{G_a}{e_a} \left(u_2 - u_1 - \frac{e_2}{2} \theta_2 - \frac{e_1}{2} \theta_1 \right)$$

$$\frac{dV_j}{dx} = (-1)^{j+1} b \frac{E_a}{e_a} (v_1 - v_2)$$

$$\frac{dM_j}{dx} = -V_j - b \frac{e_j}{2} \frac{G_a}{e_a} \left(u_2 - u_1 - \frac{e_2}{2} \theta_2 - \frac{e_1}{2} \theta_1 \right)$$

$$\frac{du_j}{dx} = \frac{D_j N_j + B_j M_j}{\Delta_j}$$

$$\frac{dv_j}{dx} = \theta_j$$

$$\frac{dv_j}{dx} = \frac{V_j}{H_i} + \theta_j$$

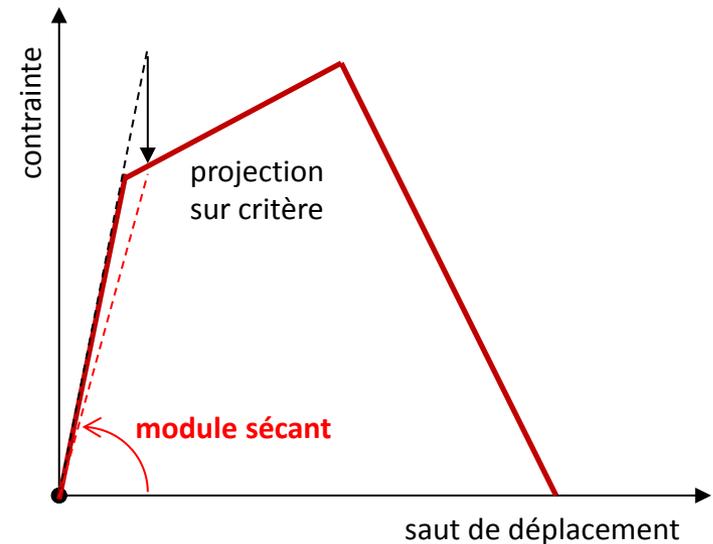
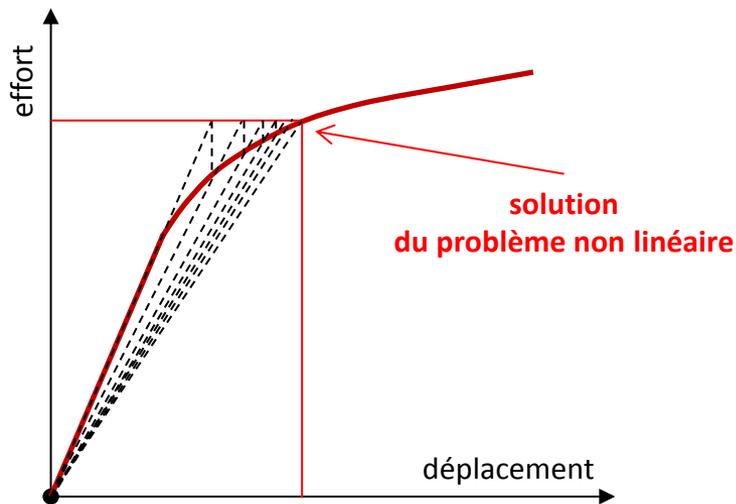
$$\frac{d\theta_j}{dx} = \frac{A_j M_j + B_j N_j}{\Delta_j}$$

$$\frac{dM_j}{dx} = -V_j - b \frac{e_j}{2} \frac{G_a}{e_a} \left(u_2 - u_1 - \frac{e_2}{2} \theta_2 - \frac{e_1}{2} \theta_1 \right) - \theta_j N_j$$

$$\frac{dM_j}{dx} = -V_j - b \frac{(e_j + e_a)}{2} \frac{G_a}{e_a} \left(u_2 - u_1 - \frac{e_2}{2} \theta_2 - \frac{e_1}{2} \theta_1 \right)$$

CALCUL NONLINÉAIRE

Il est possible de prendre en compte des comportements non linéaires des fixations et/ou de l'adhésif grâce à l'implémentation d'un algorithme de calcul itératif basé sur un schéma de résolution de Newton-Raphson modifié à matrice sécante (Lélias et al., 2015), construite à l'aide des propriétés matériaux sécantes. Un maillage est alors nécessaire le long du recouvrement (aucun maillage dans la profondeur ou l'épaisseur).



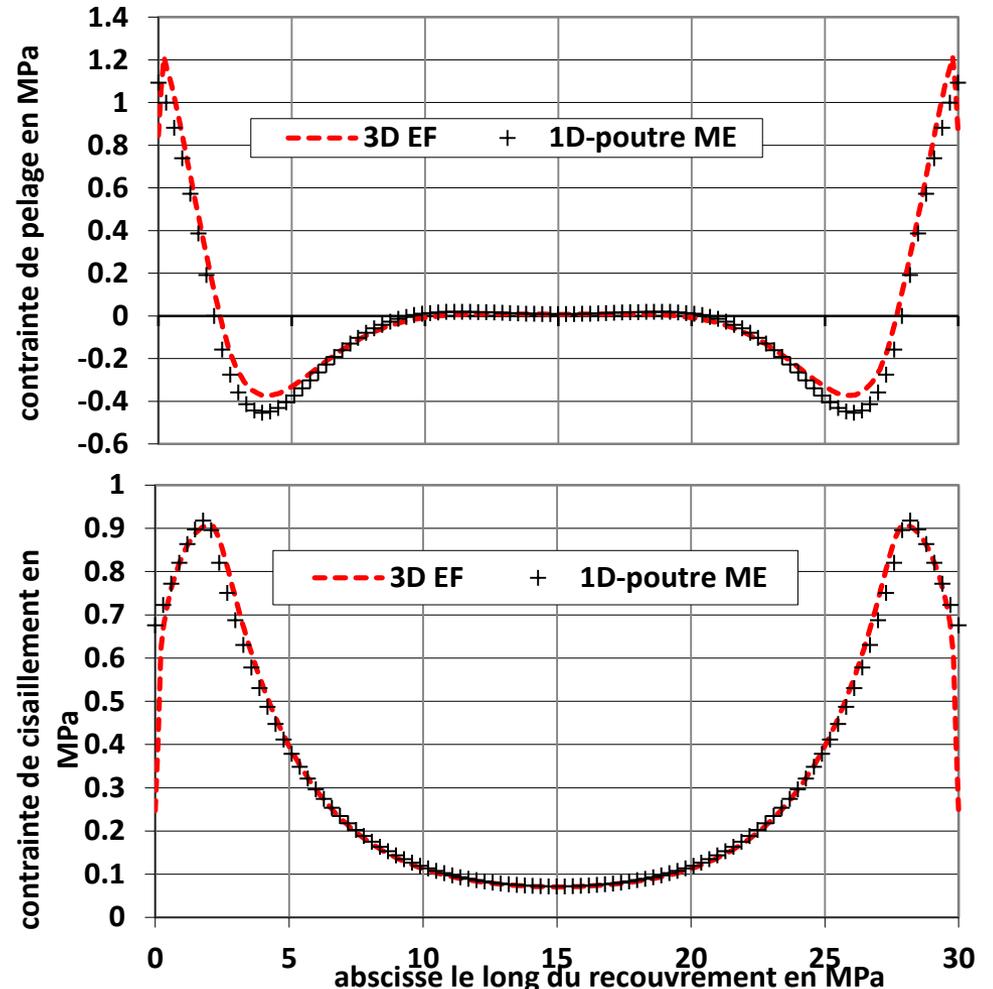
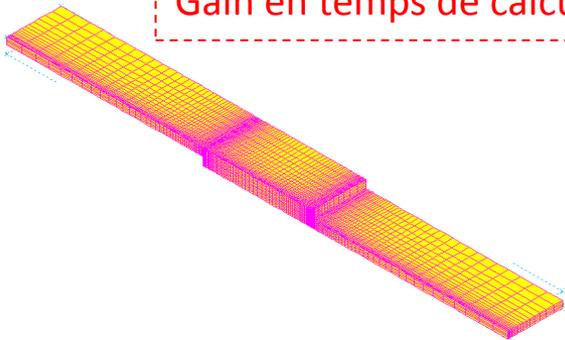
Différents types de lois de comportements ont été implémentées (élasto-plastique, adoucissante (CZM)) ou en cours d'implémentation (visco-élastique, visco-plastique).

RÉDUCTION DES TEMPS DE CALCUL

Éprouvette collée en simple recouvrement avec un comportement élasto-plastique parfait de la colle, chargée mécaniquement (Paroissien et al., 2013b).

Contraintes adhésives récupérées sur la ligne moyenne de la couche du modèle EF 3D volumique convergé.

Gain en temps de calcul: facteur 50



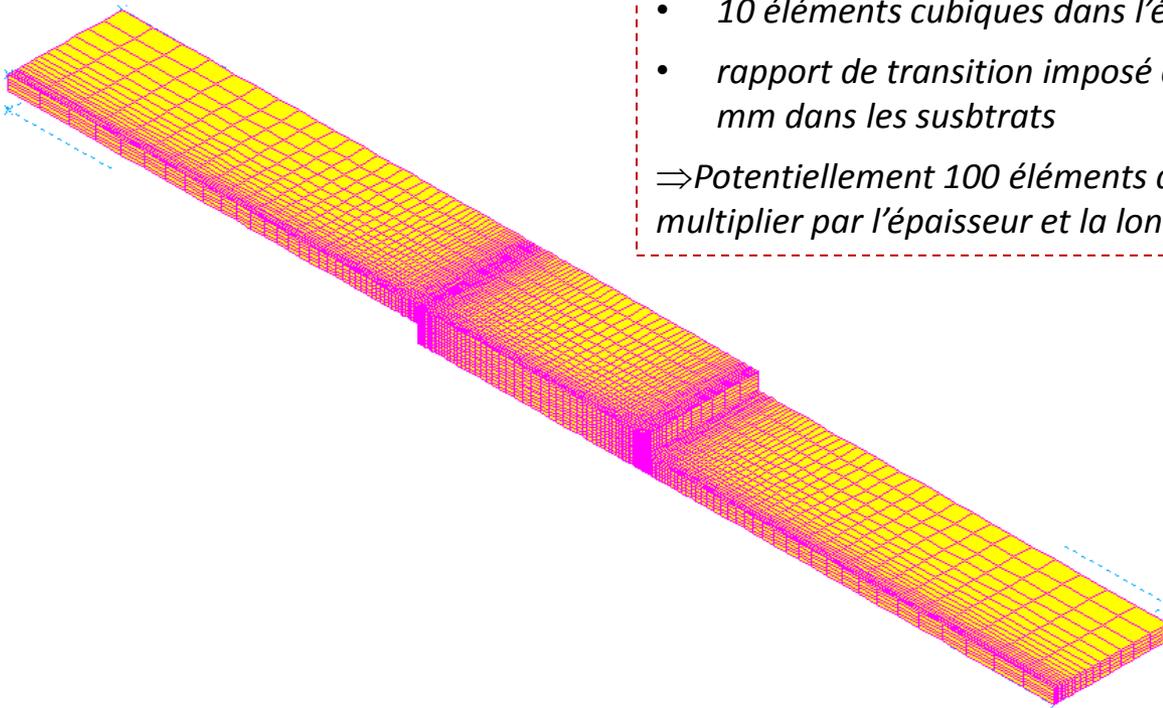
RÉDUCTION DES TEMPS DE CALCUL

La simulation du comportement mécanique des assemblages collés par la méthodes des EF est coûteuse du fait de la différence significative entre les épaisseurs des substrats et de la colle.

Exemple du simple recouvrement collé en 3D

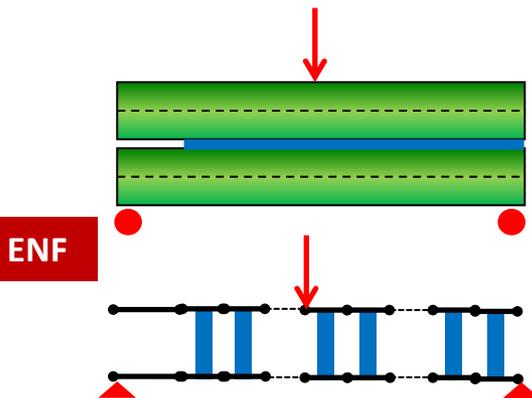
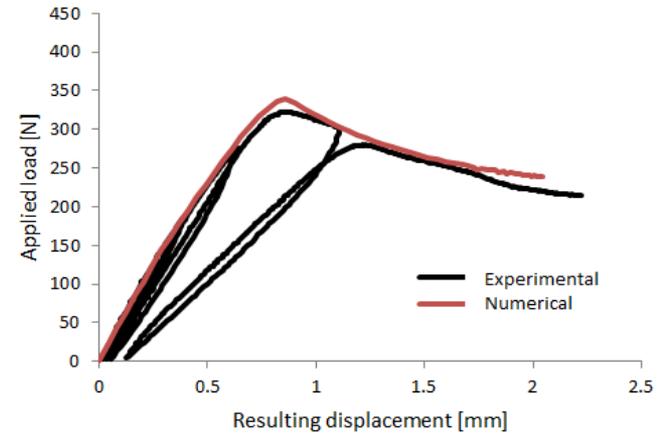
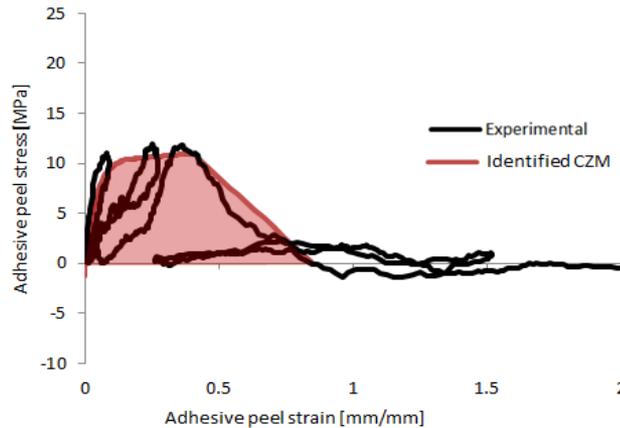
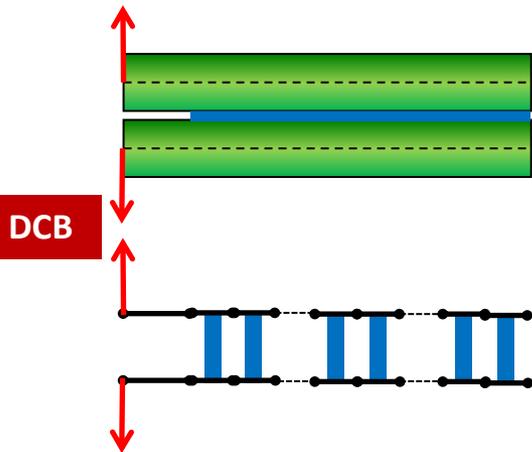
- Épaisseur substrat: 2 mm / épaisseur colle: 0.2 mm
- 10 éléments cubiques dans l'épaisseur de colle: 0.02 mm chacun
- rapport de transition imposé à 1 à l'interface colle / substrat: 0.02 mm dans les substrats

⇒ Potentiellement 100 éléments dans l'épaisseur des substrats à multiplier par l'épaisseur et la longueur

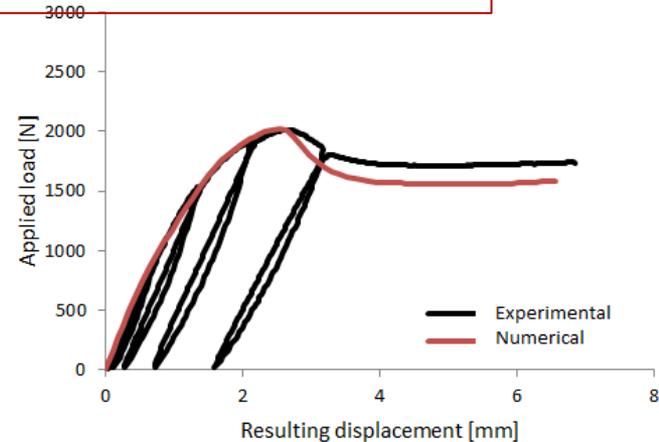
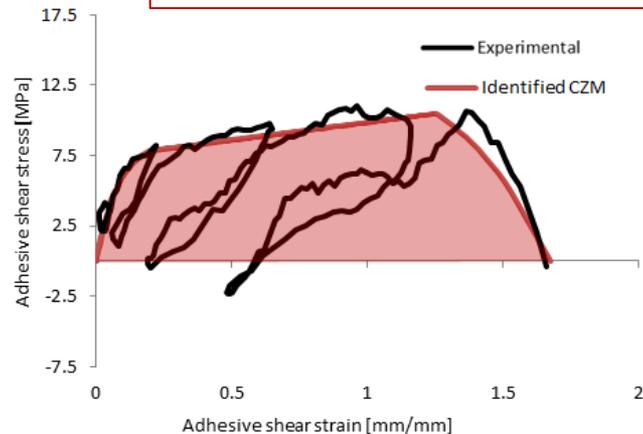


CARACTÉRISATION DE LOIS DE COMPORTEMENT ADHÉSIVES

L'approche de calcul a été utilisée pour la prédiction du comportement mécanique des joints adhésifs sur éprouvette de caractérisation (Lélias, 2016) (Lélias et al., 2018).

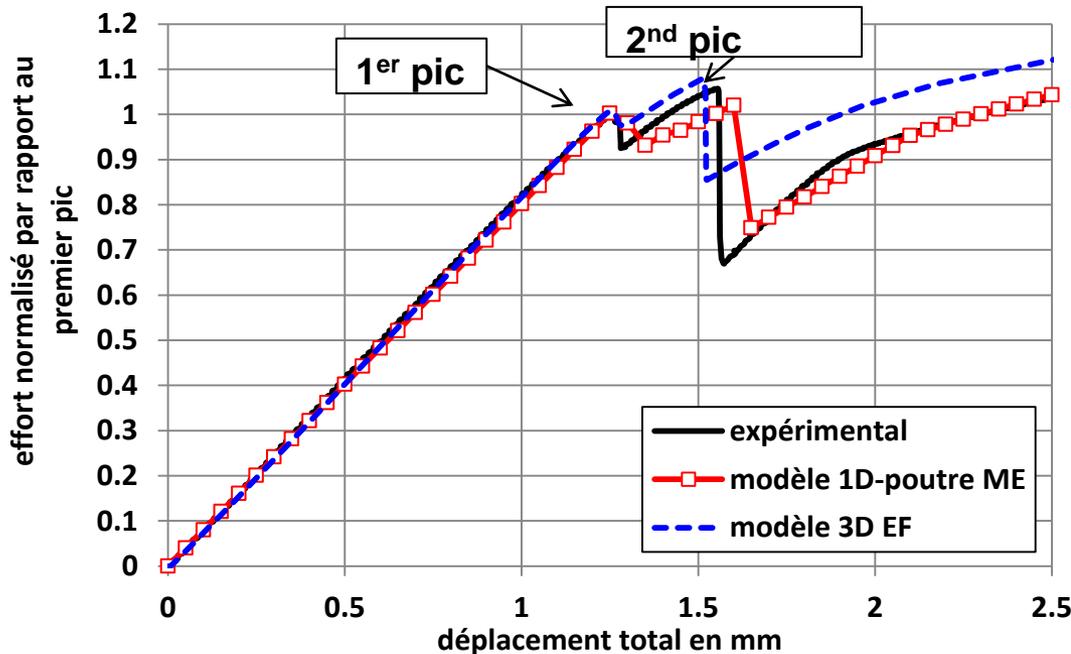
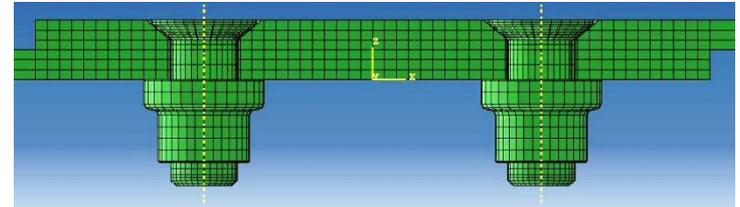
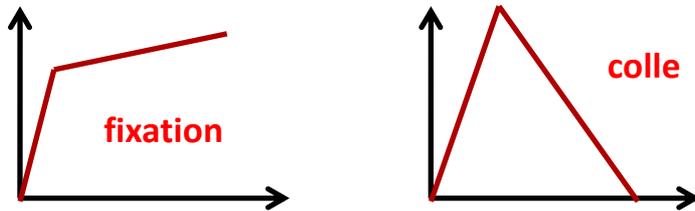


Construction de modèle comme un "jeu de légo"



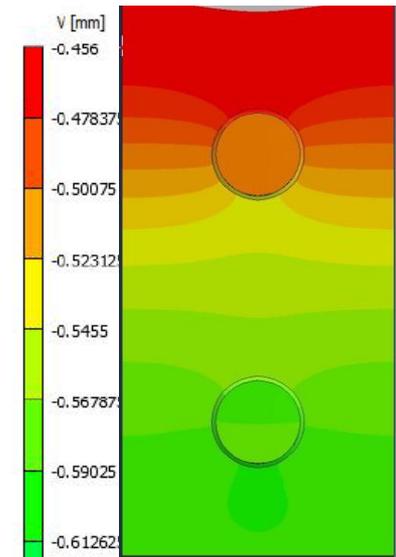
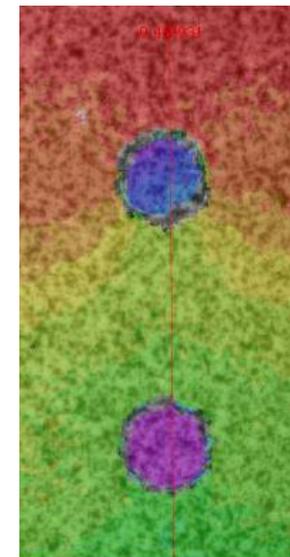
ASSEMBLAGES HYBRIDES (BOULONNÉS/COLLÉS)

Comparaison essais expérimentaux, essais numériques EF 3D et numériques 1D-poutre ME sous chargement mécanique statique (Paroissien et al., 2017).



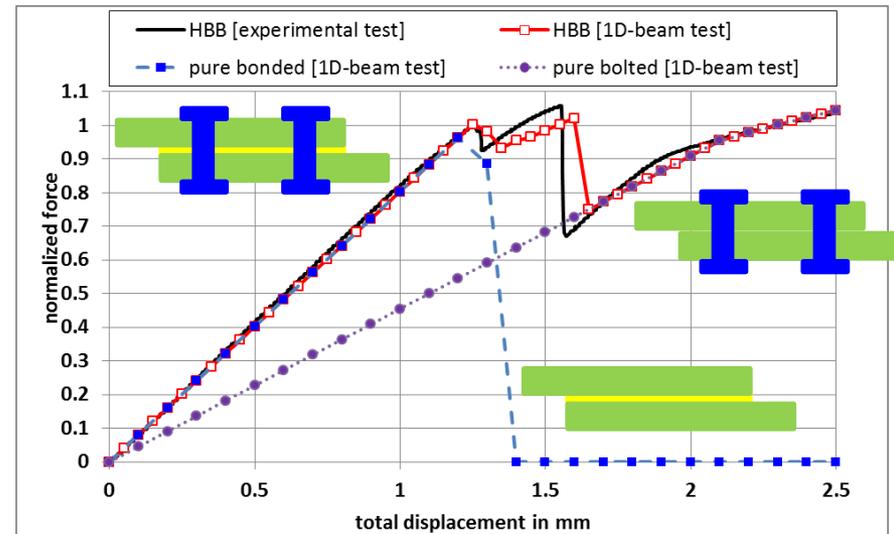
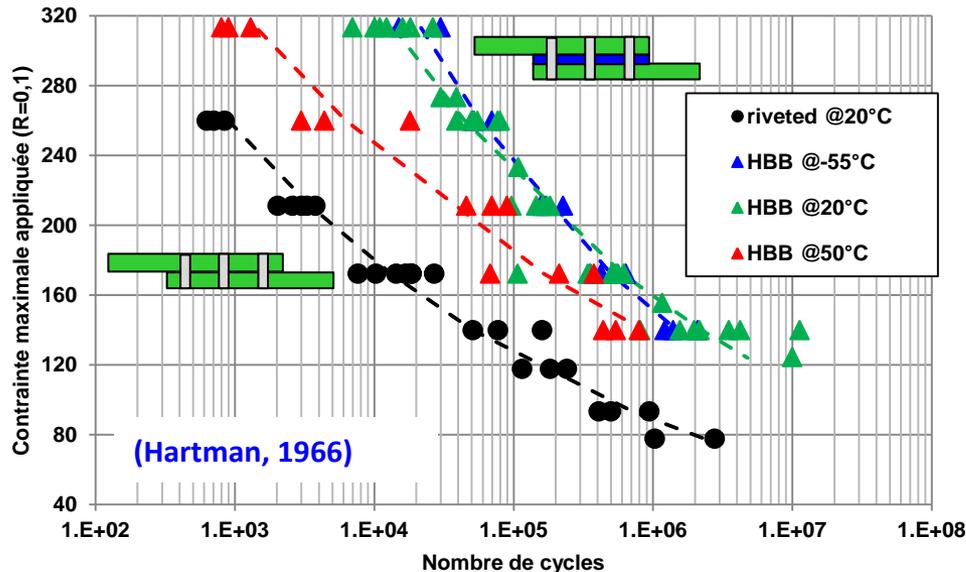
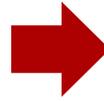
expérimental

numérique 3D



ASSEMBLAGES HYBRIDES (BOULONNÉS/COLLÉS)

Performance mécanique statique et fatigue meilleure que les assemblages purement collés ou purement boulonnés.



Calcul en fatigue possible

- les trous via le taux de transfert et les approches semi-empiriques (Müller, 1995)
- la couche de colle par dégradation progressive de la CZM (Khomarishad, 2011)

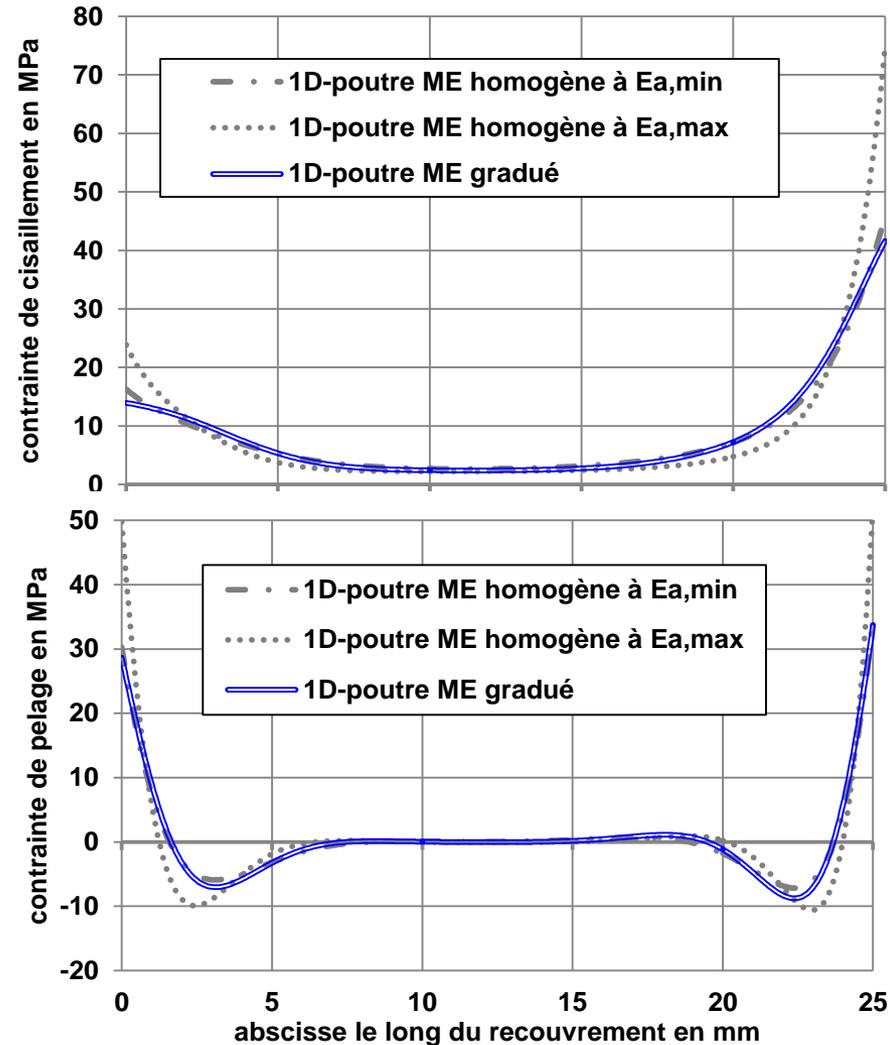
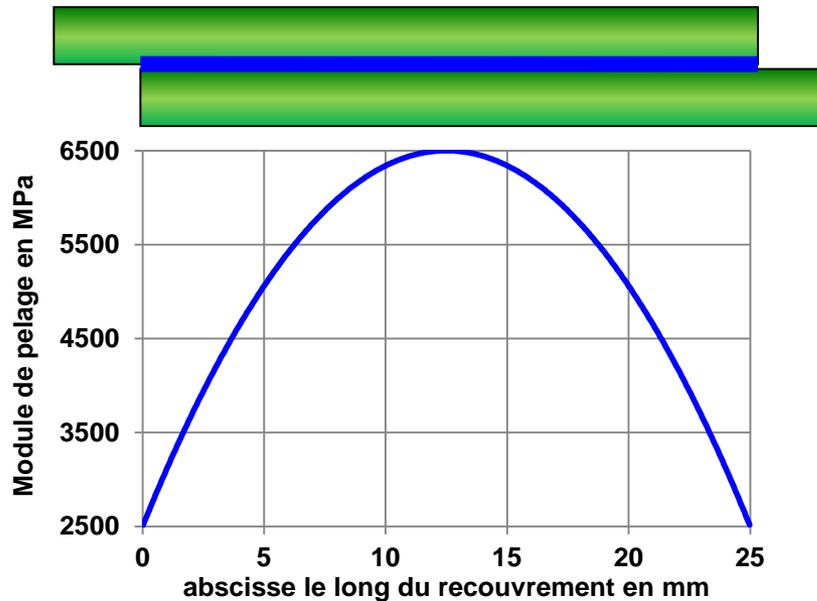


ASSEMBLAGES COLLÉS À GRADIENTS DE PROPRIÉTÉS

En collaboration avec l'Université de Porto.

Chargement **mécanique et thermique** d'un simple recouvrement collé **dissymétrique** avec une graduation parabolique symétrique (Paroissien et al., 2018b).

- réduction des pics de contraintes résultant de l'élasticité des matériaux
- utilisation pour rechercher la graduation optimale



Prédiction de la rupture adhésive [PRACCOMET]

- thèse de doctorat de Thiago Birro (2017-2020) co-encadrée par ¹Frédéric Lachaud, ²Maëlen Aufray et ¹Éric Paroissien
- cofinancée par la Région Occitanie et l'ISAE-SUPAERO (APR2017 UFT MiP)
- collaboration avec l'axe transverse adhérence du CIRIMAT: **TACCOS**
- **modélisation numérique et expérimentale de la rupture adhésive en mode mixte**



Caractérisation du comportement mécanique des joints adhésifs [S3PAC]

- thèse de doctorat d'Agathe Jaillon (2017-2020) co-encadrée par ¹Frédéric Lachaud, ³Julien Jumel et ¹Éric Paroissien
- cofinancée par BPI France, la Région Occitanie et la Région Nouvelle Aquitaine
- cadre du FUI (21) S3PAC
- **modélisation numérique et expérimentale du comportement cohésif jusque rupture de couche adhésive en fonction de l'épaisseur**



¹Institut Clément Ader (ICA), Université de Toulouse, CNRS, INSA, ISAE-SUPAERO, Mines Albi, UPS, France

²CIRIMAT, Université de Toulouse, CNRS, INPT, UPS, France

³Université de Bordeaux, Arts et Métiers ParisTech, CNRS, I2M, UMR 5295, France

Macro-élément de plaques collées [SCODyn]

- thèse de doctorat (2018-2021) co-encadrée par ¹Michel Salaün et ¹Éric Paroissien
- cofinancée par le CETIM et la DGA
- **simulation simplifiée de structures minces 3D collées en statique et dynamique**

Fonctionnalisation duale tenue et fragmentation [SIMPACOS]

- *réponse de l'obtention du financement: fin juin 2016*
- thèse de doctorat (2018-2021) co-encadrée par ¹Christine Espinosa et ⁴Lucas FM da Silva
- financée par l'ED MEGeP
- **simulation particulière d'assemblages collés pour prédire la tenue et la fragmentation en rentrée atmosphérique**

¹Institut Clément Ader (ICA), Université de Toulouse, CNRS, INSA, ISAE-SUPAERO, Mines Albi, UPS, France

⁴Department of Mechanical Engineering, Faculty of Engineering, University of Porto, Portugal

DDS Thématiques Historiques

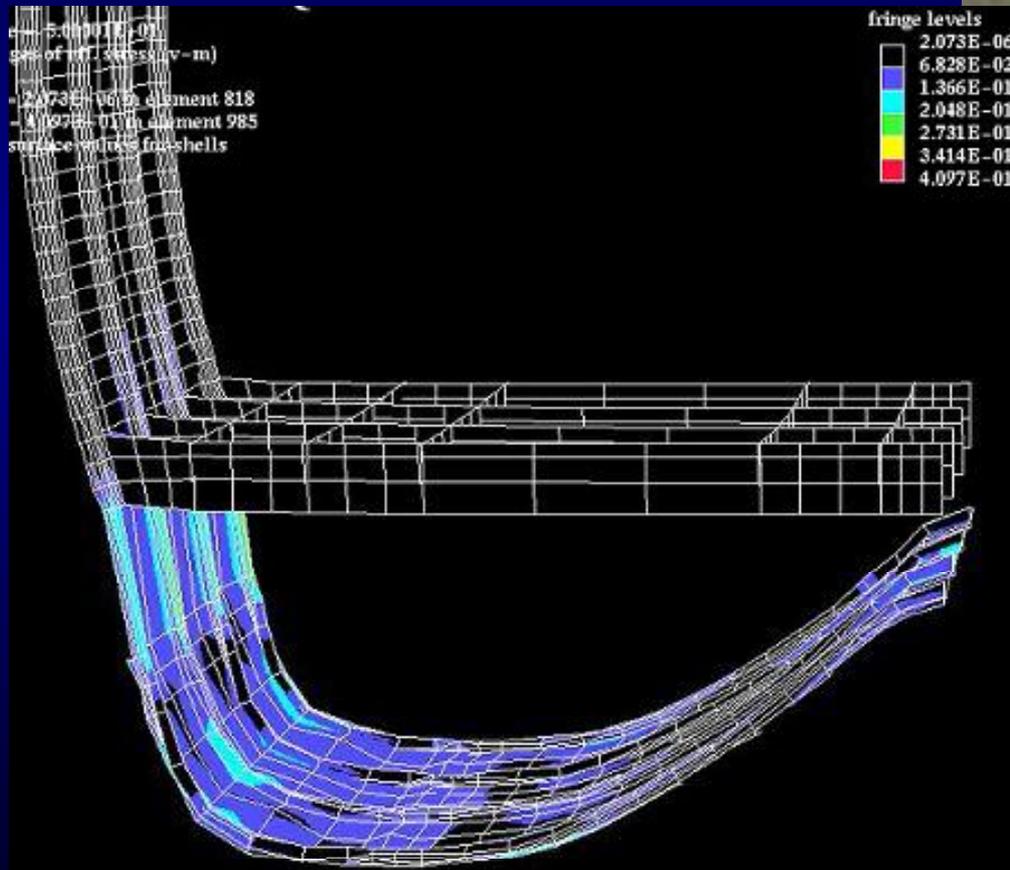
➤ *Modes non linéaires*

- Pompage énergétique
- Matériaux amortissants
- Mode en rotation

➤ *Identification Vibrations & Chocs*

- SHM – Modes endommagés
- Rhéologie rapide des matériaux
- Fatigue vibratoire des composites

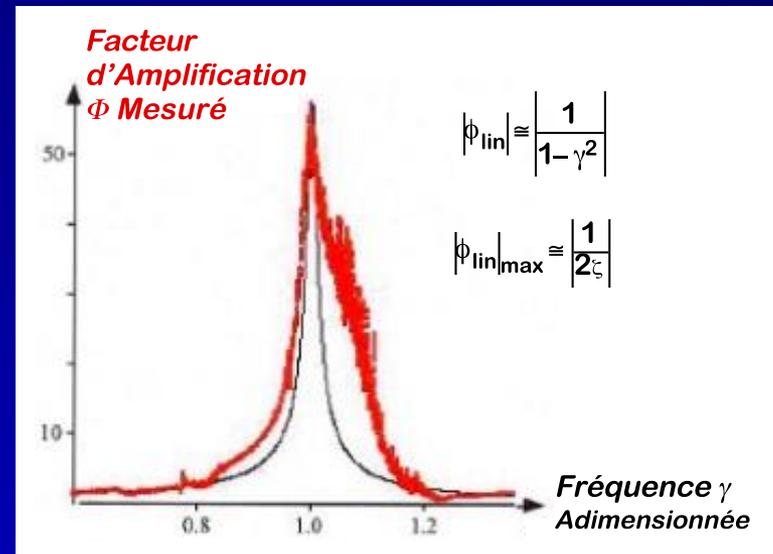
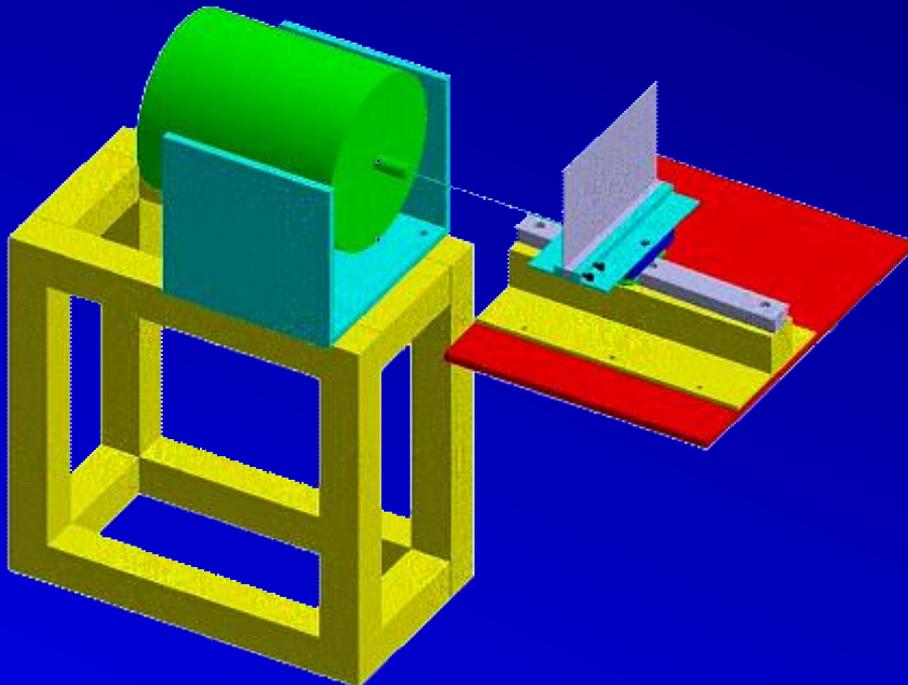
Dynamical Similarity A380-type Fuselage



Essais sous Vide à Résonance

Modes Flexion
Système 1DDL Équivalent

$$z_{\text{lin}}(t) = \alpha e^{-\xi \omega t} \cos(\omega_a t - \varphi) + \beta A \frac{1 + (2\xi\gamma)^2}{\sqrt{(1 - \gamma^2)^2 + (2\xi\gamma)^2}} \cos(\omega t - \psi) \quad ; \quad \begin{cases} \omega_a = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \\ \gamma = \frac{\omega_e}{\omega} \end{cases}$$



Alliage 2024 - Pic Asymétrique
Réponse partiellement linéaire
(Amplitude et Phase)

Dynamique des assemblages

- ***Enjeu diagnostic modal opérationnel & optimisation topologique***
 - Analyse non-linéaire modale et dissipative
 - Assemblage considéré comme un défaut ou une condition limite
 - Recommandations dans un contexte certificatoire
 - Lien étroit avec les réparations
 - Modèles dynamiques de structures hybrides

- ***Endommagements, dynamique non-linéaire, interfaces***

(Paroissien, 2006)

E. Paroissien, 2006. Contribution aux Assemblages Hybrides (Boulonnés/Collés) – Application aux Jonctions Aéronautiques. PhD Dissertation (in French), Université de Toulouse III.

(Paroissien et al., 2007a)

Paroissien, E., Sartor, M., Huet, J., 2007a. Hybrid (bolted/bonded) joints applied to aeronautic parts: Analytical one-dimensional models of a single-lap joint. In: Advanced in Integrated Design and Manufacturing in Mechanical Engineering II. S Tichkiewitch, M Tollenaere, and P Ray (Eds.), 95-110, Springer, Dordrecht, The Netherlands.

(Ross, 1947)

R.D. Ross, 1947. An electrical computer for the solution of shear-lag and bolted joints problems. Technical Note, NACA, TN 1281.

(Paroissien et al., 2007b) Paroissien, E., Sartor, M., Huet, J., Lachaud, F., 2007b. Analytical two-dimensional model of a hybrid (bolted/bonded) single-lap joint, J. Aircraft, 44, 573-582.

(Paroissien et al., 2017)

Paroissien, E., Lachaud, F., Da Veiga, A., Barrière, P., 2017. Simplified Stress Analysis of Hybrid (Bolted/Bonded) Joints. Int. J. Adhes. Adhes., 77, 183-197.

(Morris, 2004)

Morris, G.M., 2004. Defining a standard formula and test-method for fastener flexibility in lap-joints. MS Thesis Dissertation, Delft University of Technology, The Netherlands.

(Tate and Rosenfeld, 1946)

Tate, M.B., Rosenfeld, S.J., 1946. Preliminary investigation of the loads carried by individual bolts in bolted joints. Technical Note, NACA, TN 1051.

(Swift, 1984)

Swift, T., 1984. Fracture analysis of stiffened structure, Damage Tolerance of metallic structures: analysis methods and application ASTM STP 842, J.B. Chang & J.L. Rudd, Eds., American Society for Testing and Materials, 69-107.

(Huth, 1986)

Huth, H., 1986. Influence of Fastener flexibility on the prediction of load transfer and fatigue life for multiple row joints. Fatigue in mechanically fastened composite and metallic joints, ASTM STP 927, John M. Potter, Ed., Philadelphia, PA, 221-250.

(Cope and Lacy, 2000)

Cope, D.A., Lacy, T.E. Stress intensity determination in lap joints with mechanical fasteners. Proceedings of 41st AIAA / ASME / ASCE / AHS / ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials conference, AIAA-2000-1368, 3-6 April 2000, Atlanta, Georgia.

(van Ingen and Vlot, 1993)

van Ingen, J.W., Vlot, A. Stress analysis of adhesively bonded single lap joints. (Report LR-740). Delft University of Technology, The Netherlands.

(Tsai and Morton, 1994)

Tsai, M.Y., Morton, J., 1994. An evaluation of analytical and numerical solutions to the single-lap joint. *Int. J. Solids Struct.*, 31, 2537-2563.

(da Silva et al. 2009)

Da Silva, L.F.M., das Neves, P.J.C., Adams, R.D., Spelt, J.K., 2009. Analytical models of adhesively bonded joints-Part I: Literature survey. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 29, 319-330.

(Mortensen, 1997)

Mortensen, F., 1997. Development of tools for engineering analysis and design of high-performance FRP-composite structural elements. PhD Thesis, Aalborg University, Denmark.

(Gustafson et al., 2006) Gustafson, P.A., Bizard, A., M. Waas., 2006. A macroscopic joint finite element for a symmetric double lap joint. Proceedings of the American Society of Composites 21st Annual Technical Conferences, No. 24, American Society of Composites.

(Volkersen, 1938)

Volkersen, O., 1938. Die Nietkraftverteilung in Zugbeanspruchten Nietverbindungen mit konstanten Laschenquerschnitten, *Luftfahrtforschung*. 15(24), 41-47.

(Tsai et al., 1998) Tsai, M.Y., Oplinger, D.W., Morton, J., 1998. Improved Theoretical Solutions for Adhesive Lap Joints *Int. J. Solids Struct.*, 35(12), 1163-1185.

(Goland and Reissner, 1944)

Goland, M., Reissner, E., 1944. The stresses in cemented joints, *J. Appl. Mech.*, 11, A17-A27.

(Paroissien et al., 2018a)

Paroissien, E., Lachaud, F., Morlier, J., Schwartz, S., 2018. A direct method for the assessment of cohesive zone models for thin adhesive layers loaded in mode I, mode II, and mixed-mode I/II. *Rev. Adhes. Adhes.*, Open Access Supplement, DOI: 10.7569/RAA.2018.097301.

(Paroissien et al., 2018b)

Paroissien, E., da Silva, L.F.M., Lachaud, F., 2018. Simplified stress analysis of functionally graded single-lap joints subjected to combined thermal and mechanical loads. Submitted in May 2018 to *Composite Structures*

(Hart-Smith, 1973)

Hart-Smith, L.J., 1973. Adhesive bonded single lap joints. NASA Technical Report, CR-112236, Douglas Aircraft Company, Long Beach, California.

(Luo and Tong, 2009)

Luo, Q., Tong, L., 2009. Analytical solutions for non linear analysis of composite single lap adhesive joints. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 29, 144-154.

(Lélias et al., 2015)

Lélias, G., Paroissien, E., Lachaud, F., Morlier, J., Schwartz, S., Gavaille, C., 2015. An extended semi-analytical formulation for fast and reliable mode I/II stress analysis of adhesively bonded joints. *Int. J. Solids Struct.*, 62, 18-38.

(Lélias, 2016)

Lélias, G., 2016. Mechanical behavior of adhesively bonded joints: Modeling, simulation and experimental characterization. PhD Thesis, University of Toulouse 3, Toulouse, France.

(Lélias et al., 2018)

Lélias, G., Paroissien, E., Lachaud, F., Morlier, J. 2018. Experimental Characterization of Cohesive Zone Models for Thin Adhesive Layers Loaded in Mode I, Mode II, and Mixed-Mode I/II by the use of a Direct Method. Submitted in April 2018 to *International Journal of Solids and Structures*.

(Paroissien et al., 2017)

Paroissien, E, Lachaud, F, Da Veiga, A, Barrière, P, 2017. Simplified Stress Analysis of Hybrid (Bolted/Bonded) Joints. *Int. J. Adhes. Adhes.*, 77, 183-197.

(Hartman, 1966)

Hartman, A., 1966. Fatigue tests on single-lap joints in clad 2024-T3 aluminium alloy manufactured by a combination of riveting and adhesive bonding. NLR, TN M2170.

(Müller, TU Delft, 1995)

Müller, R.P.G., 1995. An Experimental and Analytical Investigation on the Fatigue Behaviour of Fuselage Riveted Lap Joints. PhD Thesis Dissertation, Delft University of Technology, The Netherlands.

(Khomarishad et al. 2010)

Khomarishad ,H., Crocombe, A.D., Katman, K.B., Ashcroft, I.A., 2010. Predicting fatigue damage in adhesively bonded joints using a cohesive zone model. *Int. J. Fatigue*, 32, 1146-1158.