



**HAL**  
open science

## Solution analytique tridimensionnelle en convection naturelle stationnaire

Miloslav Grundmann, Abdelkader Mojtabi

► **To cite this version:**

Miloslav Grundmann, Abdelkader Mojtabi. Solution analytique tridimensionnelle en convection naturelle stationnaire. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie, 1998, 326 (7), pp.423-428. 10.1016/S1287-4620(98)80011-2 . hal-01891921

**HAL Id: hal-01891921**

**<https://hal.science/hal-01891921v1>**

Submitted on 10 Oct 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



## Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: <http://oatao.univ-toulouse.fr/20651>

**Official URL:**

[https://doi.org/10.1016/S1287-4620\(98\)80011-2](https://doi.org/10.1016/S1287-4620(98)80011-2)

**To cite this version:**

Grundmann, Miloslav and Mojtabi, Abdelkader  
Solution analytique tridimensionnelle en convection naturelle  
stationnaire. (1998) Comptes Rendus de l'Académie des  
Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy, 326  
(7). 423-428. ISSN 1287-4620

Any correspondence concerning this service should be sent  
to the repository administrator: [tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr](mailto:tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr)

# Solution analytique tridimensionnelle en convection naturelle stationnaire

Miloslav GRUNDMANN<sup>a</sup>, Abdelkader MOJTABI<sup>b</sup>

<sup>a</sup> Laboratoire MIP, UMR CNRS–UPS–INSA, université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France

<sup>b</sup> Institut de mécanique des fluides, UMR CNRS–UPS 5502, université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex 4, France

---

**Résumé.** On résout analytiquement le problème de la convection naturelle dans une cellule cubique saturée par un milieu poreux. L'algorithme utilisé permet de résoudre les équations de Darcy–Boussinesq formulées en terme de pression et de température. Les fonctions dépendantes  $P(x, y, z)$  et  $T(x, y, z)$  sont écrites sous la forme d'un développement en puissance du paramètre  $\varepsilon = (Ra - Ra_c)^{1/2} / \pi$  où  $Ra_c$  désigne la valeur du nombre de Rayleigh critique dans la cavité cubique ( $Ra_{c1} = 4 \pi^2$  pour l'écoulement 2D et  $Ra_{c2} = 4,5 \pi^2$  pour l'écoulement 3D). Les développements ont été effectués à l'ordre 48 pour l'écoulement 2D et à l'ordre 16 pour le 3D. Les résultats analytiques sont en très bon accord avec les résultats numériques obtenus à partir d'une méthode spectrale de collocation Legendre. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

calcul symbolique / solution analytique / convection naturelle / milieux poreux

## ***3D analytical steady solution of natural convection problem***

**Abstract.** *An analytical study of free convection in a cubic cavity of fluid-saturated porous material is reported. The analytical algorithm integrates the Darcy–Boussinesq equations formulated in terms of pressure and temperature. The dependent variables ( $P, T$ ) are expressed using an asymptotic development in the parameter  $\varepsilon = (Ra - Ra_c)^{1/2} / \pi$  where  $Ra_c = 4 \pi^2$  denotes the value of the critical Rayleigh number, in a cubic cavity ( $Ra_{c1} = 4 \pi^2$  for the 2D flow and  $Ra_{c2} = 4.5 \pi^2$  for 3D flow). Terms up to order 48 for the 2D flow and up to order 16 for the 3D flow are computed. The analytical value of the Nusselt number is in good agreement with a numerical one obtained using a Legendre spectral collocation method. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris*

*symbolic computation / analytic solution / free convection / porous media*

---

## ***Abridged English Version***

Beck [1] and Combarous and Bories [2] performed a linear stability analysis of the convective solution from which they derived critical Rayleigh numbers and the form of convective flow which sets in after the first transition. They show that convection begins in a cube of porous medium when the Rayleigh number,  $Ra$ , equals  $Ra_{c1} = 4 \pi^2$ . A two-dimensional roll cell is the only stable flow immediately above this critical value. At  $Ra_{c2} = 4.5 \pi^2$ , a three-dimensional convective mode named (1, 1, 1) begins. Steen [3] showed that this 3D flow remains unstable from birth until  $Ra = 4.87 \pi^2$ , when it

---

Note présentée par René MOREAU.

gains stability and begins to compete with the two-dimensional pattern. Schubert and Strauss [4] conducted a numerical study using a Galerkin method. They found numerically that the 2D flow transports more heat than the 3D one for  $Ra < 97$ , while the opposite is true for  $Ra > 97$ . We confirmed this numerical result analytically. Caltagirone and Fabrie [5] confirmed Schubert and Strauss's results and extended their results from non-stationary flows to chaotic ones. In the present study using a computer with 128 MB of total system memory, we have extended the earlier 2D work by Grundmann and Mojtabi [6], from order 34 to order 48. The solution obtained gives a very good description of the two-dimensional roll cell in a porous cube heated from below.

The solution of partial differential equations (1) and (2) uses an asymptotic development of  $P$  and  $T$  in the parameter  $\varepsilon = (Ra - Ra_c)^{1/2} / \pi$ . To find these components and their coefficients, we have to use a program for symbolic computations. In this study the Maple program was used. The 2D and 3D results are in very good agreement with those obtained earlier by other authors and with the one obtained by the Legendre spectral collocation method [7].

The present study has fulfilled a dual purpose of providing a solution to the problem of natural convection in cubic porous cavities, and demonstrating how the extended-perturbation method can be considered as an attractive alternative to finite difference computations or spectral methods. The solution thus obtained could be useful as a benchmark for the validation of future numerical 3D codes.

---

## 1. Introduction

L'avènement des ordinateurs dotés de capacités de mémoire et de puissance de calcul sans cesse croissantes, ainsi que la disponibilité de logiciels de calcul symbolique (Maple, Mathematica, Axiom...) nous ont permis d'obtenir des solutions de problèmes aux dérivées partielles non linéaires, jusque-là, accessibles seulement par des méthodes numériques approchées. Ces méthodes numériques ne permettent généralement pas d'appréhender l'erreur commise sur la détermination de telle ou telle grandeur physique, leur précision étant tributaire de l'ordre des schémas utilisés et du choix du maillage.

Ainsi, l'étude de la convection naturelle dans une cavité poreuse 2D et 3D, chauffée par le bas, a été analysée par différentes approches numériques. J.L. Beck [1], M. Combarnous et S. Bories [2], ont montré que le régime conductif perdait sa stabilité pour  $Ra_{c1} = 4 \pi^2$  pour donner naissance à un régime convectif monocellulaire.

Dans le cas d'une cellule cubique, la solution conductive perd sa stabilité à partir de  $Ra_{c1} = 4 \pi^2$  et seul le régime 2D est stable, mais à partir de  $Ra_{c2} = 4,5 \pi^2$  un nouvel écoulement 3D, qualifié de mode (1, 1, 1), prend naissance. Cependant Steen [3] montre que cet écoulement 3D est instable entre  $4,5 \pi^2$  et  $4,87 \pi^2$ , et ce n'est qu'à partir de cette dernière valeur qu'il devient stable et entre en compétition avec l'écoulement 2D. En utilisant la méthode de Galerkin, Schubert et Strauss [4] ont remarqué que l'écoulement 2D induit un flux convectif supérieur à celui de l'écoulement 3D pour  $Ra < 97$  et cette situation est inversée pour  $Ra > 97$ . Nous confirmons analytiquement ce résultat numérique. Caltagirone et Fabrie [5] étendent les résultats de Schubert et Strauss à des Rayleigh supérieurs à 1 400 en 2D et mettent ainsi en évidence les différents scénarios conduisant au chaos.

Dans cette étude, nous étendons la méthode précédemment employée en 2D [6] au cas de la cellule cubique. La formulation précédente n'étant pas extensible au 3D, nous avons alors été amenés à reformuler le problème en termes de pression et de température. Ainsi, grâce à la capacité en mémoire vive des machines actuelles, nous avons réussi à prolonger la validité de l'intervalle d'étude de notre solution analytique en développant la solution 2D en  $(P, T)$  à l'ordre 48 (le développement en  $(\psi, T)$  était fait à l'ordre 34 et le domaine de validité de la solution obtenue était restreint à

$Ra = 120$ ). En utilisant dans cette étude le procédé d'accélération de la convergence de Padé, nous avons mis en évidence une solution en parfaite concordance avec celle issue de la méthode spectrale de collocation type Legendre ( $51 \times 51$ ) et ce, jusqu'à un Rayleigh de 310, soit de l'ordre de  $9 Ra_{c1}$ . Nous avons également obtenu la solution 3D (mode (1, 1, 1)) par la même démarche jusqu'à l'ordre 16. La solution proposée est en très bon accord avec les résultats de la méthode spectrale jusqu'à  $Ra = 130$  [6]. Il est possible également, dans un avenir proche, d'étendre le domaine de validité de cette solution 3D, comme il est également possible de représenter d'autres structures 3D par cette approche. Une fois ces solutions déterminées de manière précise et sous forme analytique, il deviendra alors plus aisé de définir les critères de stabilité des différentes solutions obtenues.

## 2. Approche analytique

### 2.1. Formulation mathématique 3D

On s'intéresse à la convection naturelle dans une cavité cubique poreuse  $[0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$  chauffée par le bas et isolée latéralement. La formulation adimensionnelle de ce problème, fondée sur l'approximation de Boussinesq et la loi de Darcy est donnée par :

$$\nabla \cdot \vec{V} = 0; \quad \vec{V} = -\nabla P + T \vec{e}_z; \quad \frac{\partial T}{\partial t} + Ra \vec{V} \cdot \nabla T = \nabla^2 T \quad (1)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} T = 0, T = -\pi & \text{pour } z = 0 \text{ et } z = \pi, \quad \forall x, \forall y \\ \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0 & \text{pour } x = 0, \pi, \forall y, \forall z \text{ et } y = 0, \quad \forall x, \forall z \\ \nabla P \cdot \vec{n} = -T(M) \cdot \vec{e}_z \cdot \vec{n}, & \forall M \in \partial\Omega \end{cases} \quad (2)$$

Le choix de la dimension du cube est fait dans le but d'obtenir des solutions du problème avec des expressions les plus simples possibles.

En prenant le rotationnel de l'équation de Darcy, on est amené à une nouvelle formulation, en termes de pression et de température des écoulements 3D, soit :

$$\Delta P = \frac{\partial T}{\partial z}; \quad \Delta T = Ra(T \vec{e}_z - \nabla P) \cdot \nabla T \quad (3)$$

Le problème ainsi défini admet une solution conductive, quel que soit  $Ra$  qui s'écrit sous la forme :

$$P_0 = -\frac{z^2}{2}, \quad T_0 = -z \quad (4)$$

### 2.2. Approche asymptotique

On se propose de déterminer les solutions 3D qui prennent naissance juste après le point de bifurcation. C'est-à-dire pour des nombres de Rayleigh  $Ra$  supérieurs à la valeur critique  $Ra_c$  soit :  $Ra = Ra_c + \pi^2 \varepsilon^2$ .

On écrit alors  $P$  et  $T$  sous la forme d'un développement asymptotique en  $\varepsilon$  :

$$T = -z + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i t_i, \quad P = -\frac{z^2}{2} + \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i p_i \quad (5)$$

En utilisant les conditions aux limites (2), le système d'équations aux dérivées partielles (3) peut être représenté sous la forme symbolique suivante :

$$P = P(T), \quad D(T, P(T)) = 0 \quad (6)$$

En développant l'opérateur  $D$  par rapport à  $\varepsilon$ , nous pouvons réécrire ce système sous la forme :

$$\varepsilon D'(T_0, P(T_0)) t_1 + O(\varepsilon^2) = 0 \quad (7)$$

où  $D'$  est un opérateur linéaire. La solution  $t_1$  est cherchée dans une base des vecteurs propres de l'opérateur  $D'$ . On vérifie que :

$$\tau_{n,m,l} = \cos(nx) \cos(my) \sin(lz), \quad P_{n,m,l} = -\tau_{n,m,l} / (n^2 + m^2 + l^2) \quad (8)$$

sont les fonctions propres de  $D'$  associées aux valeurs propres :

$$\lambda_{n,m,l} = (Ra(n^2 + m^2) / \pi^2 - (n^2 + m^2 + l^2)^2) / (n^2 + m^2 + l^2) \quad (9)$$

Nous pouvons donc tirer les valeurs critiques  $Ra_c$  pour lesquelles  $\lambda_{n,m,l} = 0$  soit :

$$Ra_c = \pi^2 (n^2 + m^2 + l^2)^2 / (n^2 + m^2) \quad (10)$$

L'approximation à l'ordre  $N$  s'écrit ainsi :

$$P = -\frac{z^2}{2} + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i p_i(t_i), \quad T = -z + \sum_{i=1}^N \varepsilon^i t_i \quad (11)$$

La solution (11) est calculée pour un choix bien défini des paramètres  $m$ ,  $n$  et  $l$  qui restent fixés dans toute la suite du calcul. Le choix  $m = n = l = 1$  conduit à l'écoulement stationnaire 3D de type (1, 1, 1), pour  $m = l = 1$  et  $n = 0$ , il s'agit de l'écoulement 2D stationnaire. Ces deux écoulements 2D, sous forme de rouleaux, et 3D existent simultanément dans un cube pour  $Ra$  supérieur à  $Ra_{c2} = 4,5 \pi^2$ . Une fois obtenus les champs de pression et de température à l'ordre 48 en  $\varepsilon$  pour la solution 2D et à l'ordre 16 pour la solution 3D dans la cavité cubique, on en déduit le nombre de Nusselt sous forme de série entière de  $\varepsilon^2 = (Ra - Ra_c) / \pi^2$  soit :

$$Nu_{\text{asyp.}} = 1 + \sum_{i=1}^{i=N} q_i(\varepsilon^2)^i \quad (12)$$

Pour les deux écoulements 2D et 3D, les séries donnant le nombre de Nusselt sont des séries alternées. La convergence de ces séries est ainsi analysée en vue d'en augmenter le domaine de validité. Le processus d'accélération de la convergence de Padé a été utilisé et nous a permis d'obtenir de façon heuristique une estimation du nombre de Nusselt pour la solution 2D par :

$$Nu_{\text{padé}} = 1 + \sum_{i=1}^{i=23} a_i(\varepsilon^2)^i \left( (4 + \varepsilon^2) \sum_{i=5}^{i=15} \left( 1 + \frac{1}{i} \varepsilon^2 + \frac{1}{i^2} \varepsilon^4 \right) \right) \quad (13)$$

Cette nouvelle approche nous a fournis non seulement une meilleure approximation du nombre de Nusselt et ce, pour des valeurs de Nusselt au-delà du rayon de convergence de la série en Nusselt, comme le montrent les comparaisons présentées dans les *tableaux I* et *II* donnant les nombres de Nusselt pour les écoulements 2D et 3D en fonction du nombre de Rayleigh. En 2D, avec une approximation de 48, la valeur du nombre de Nusselt analytique diffère de manière significative de celle obtenue numériquement à partir de  $Ra = 120$  et les résultats divergent complètement au-delà. En revanche, dans le *tableau I*, on peut remarquer que la valeur du nombre de Nusselt obtenue avec l'accélération de Padé reste convenable au-delà de  $Ra = 300$ . En 3D, le *tableau II* montre que pour  $Ra = 95$ , la valeur du Nusselt issue de l'expression analytique est déjà erronée et le champ de température correspondant n'est plus totalement cohérent. En revanche, l'approximation de la valeur du nombre de Nusselt, avec l'accélération de Padé, est acceptable jusqu'à 105.

**Tableau I.** Nombre de Nusselt pour l'écoulement 2D.**Table I.** *Nusselt number for 2D flow.*

$Ra$	$Nu_{num.}$ ( $51 \times 51$ )	$Nu_{asympt.}$ Padé	$Ra$	$Nu_{num.}$ ( $51 \times 51$ )	$Nu_{asympt.}$ Padé
110	2,084 394 3	2,080 439 4	230	4,050 458	4,055 236
120	2,949 133 5	2,949 134 4	240	4,124 302	4,131 053
130	3,082 539	3,082 544	250	4,195 396	4,204 635
140	3,206 405	3,206 418	260	4,263 953	4,276 251
150	3,322 107	3,322 146	270	4,330 167	4,346 141
160	3,430 731	3,430 829	280	4,394 205	4,414 515
170	3,533 154	3,533 369	290	4,456 221	4,481 555
180	3,630 091	3,630 518	300	4,516 352	4,547 423
190	3,722 140	3,722 919	310	4,574 721	4,612 255
200	3,809 802	3,811 129	–	–	–
210	3,893 505	3,895 638	–	–	–
220	3,973 618	3,976 879	–	–	–

**Tableau II.** Nombre de Nusselt pour l'écoulement 3D, mode (1, 1, 1).**Table II.** *Nusselt number for 3D flow, mode (1, 1, 1).*

$Ra$	$Nu_{asympt.}$ ( $\varepsilon^{16}$ )	$Nu$ Padé ( $\varepsilon^{12}, 1$ )	$Nu_{num.}$ ( $31 \times 31 \times 31$ )	$Ra$	$Nu_{asympt.}$ ( $\varepsilon^{16}$ )	$Nu$ Padé ( $\varepsilon^{12}, 1$ )	$Nu_{num.}$ ( $31 \times 31 \times 31$ )
50	1,207 434 13	1,207 434 10	1,207 434 10	80	2,155	2,155	2,157
55	1,383 258 88	1,383 254 11	1,383 254 11	85	2,288	2,288	2,294
60	1,551 380	1,551 282	1,551 284	90	2,410	2,410	2,427
65	1,713 09	1,712 24	1,712 26	95	3,345	2,519	2,554
70	1,871 1	1,866 5	1,866 7	100	–	2,609	2,677
75	2,032 2	2,014 2	2,015 0	105	–	2,671	2,796
				110	–	2,696	2,912

Les valeurs des 24 coefficients  $q_n$  et  $a_n$ , relatifs à l'écoulement 2D, sont données dans le *tableau III*. Pour l'écoulement 3D, la série donnant l'expression analytique de Nusselt s'écrit :

$$Nu_{3D} = 1 + 0,37\ 860\ 082\ \varepsilon^2 - 0,24\ 031\ 992 \times 10^{-1}\ \varepsilon^4 + 0,55\ 308\ 300 \times 10^{-2}\ \varepsilon^6 - 0,20\ 344\ 428 \times 10^{-2}\ \varepsilon^8 + 0,57\ 258\ 206 \times 10^{-3}\ \varepsilon^{10} - 0,11\ 766\ 038 \times 10^{-3}\ \varepsilon^{12} + 0,19\ 400\ 578 \times 10^{-4}\ \varepsilon^{14}$$

De cette dernière série on déduit la nouvelle expression de Nusselt utilisant le processus de Padé soit :

$$Nu_{Padé} = (1 + 0,54\ 348\ 707\ \varepsilon^2 + 0,38\ 394\ 078 \times 10^{-1}\ \varepsilon^4 + 0,15\ 682\ 850 \times 10^{-2}\ \varepsilon^6 - 0,11\ 224\ 850 \times 10^{-2}\ \varepsilon^8 + 0,23\ 713\ 041 \times 10^{-3}\ \varepsilon^{10} - 0,23\ 249\ 468 \times 10^{-4}\ \varepsilon^{12}) / (1 + 0,16\ 488\ 625 \times \varepsilon^2)$$

où :  $\varepsilon^2 = (Ra - 4,5\ \pi^2) / \pi^2$ .

### 3. Approche numérique

Nous avons mis au point, pour la comparaison des résultats analytiques et numériques, une méthode spectrale de collocation Legendre avec des points de collocation de Gauss–Lobatto pour la discrétisation spatiale des équations de Darcy et d'Helmholtz. La procédure de diagonalisation successive est utilisée

**Tableau III.** Valeurs des 24 coefficients  $q_n$  et  $a_n$  des séries (13) et (14).

**Table III.** Values of the first 24 coefficients  $q_n$  and  $a_n$  of series (13) and (14).

$n$	$q_n$	$a_n$	$n$	$q_n$	$a_n$
1	0,500 000 000	2	13	$+ 0,205 990 703 \times 10^{-7}$	$0,224 969 977 \times 10^{-6}$
2	$- 0,088 541 667$	2,615 624 653	14	$- 0,514 563 873 \times 10^{-8}$	$0,200 499 981 \times 10^{-7}$
3	0,020 724 826	1,856 243 052	15	$+ 0,128 517 862 \times 10^{-8}$	$0,155 727 126 \times 10^{-8}$
4	$- 0,005 210 012 6$	0,907 186 386 6	16	$- 0,321 195 053 \times 10^{-9}$	$0,104 890 220 \times 10^{-9}$
5	$+ 0,001 335 357 1$	0,337 487 709 3	17	$+ 0,803 299 1 \times 10^{-10}$	$0,607 912 591 \times 10^{-11}$
6	$- 000 339 666 98$	0,100 596 068 6	18	$- 0,200 892 43 \times 10^{-10}$	$0,299 617 009 \times 10^{-12}$
7	$+ 0,000 085 098 645$	0,024 797 277 67	19	$+ 0,502 315 72 \times 10^{-11}$	$0,123 403 549 \times 10^{-13}$
8	$- 000 021 135 603$	0,005 158 988 76	20	$- 0,125 564 61 \times 10^{-11}$	$0,414 081 014 \times 10^{-15}$
9	$+ 0,525 248 45 \times 10^{-5}$	0,000 918 572 999	21	$+ 0,313 850 34 \times 10^{-12}$	$0,108 455 337 \times 10^{-16}$
10	$- 131 163 18 \times 10^{-5}$	0,000 141 300 602	22	$- 0,784 553 68 \times 10^{-13}$	$0,190 877 369 \times 10^{-18}$
11	$+ 0,328 639 6 \times 10^{-6}$	0,000 018 897 040 4	23	$+ 0,196 146 79 \times 10^{-13}$	$0,420 305 739 \times 10^{-20}$
12	$- 0,823 486 31 \times 10^{-7}$	$0,220 539 355 \times 10^{-5}$	24	$- 0,490 366 98 \times 10^{-14}$	-

pour inverser ces différents opérateurs. L'intégration temporelle utilise un schéma aux différences finies semi-implicite du second ordre. Les termes linéaires sont traités de manière implicite par le schéma du second ordre d'Euler retardé, et les termes non linéaires par le schéma d'Adams-Basforth [7].

#### 4. Conclusion

Nous avons ainsi résolu le problème de la convection naturelle dans une cavité cubique chauffée par le bas et isolée latéralement. La solution analytique obtenue est en très bon accord avec les résultats numériques jusqu'à des valeurs de l'ordre de neuf fois le Rayleigh critique linéaire pour la solution 2D et trois fois pour la solution 3D.

Cette approche représente une alternative possible aux calculs numériques discrets. La solution proposée pourrait servir de solution de référence pour la validation des codes de calculs 3D.

**Remerciements.** Les auteurs sont reconnaissants au groupe de recherches de calcul formel MEDICIS (Mathématiques effectives, développements informatiques, calculs, ingénierie et systèmes) pour son aide.

#### Références bibliographiques

- [1] Beck J.L., Convection in a box of porous material saturated with fluid, Phys. Fluids 15 (1972) 1377.
- [2] Combarous M., Bories S., Hydrothermal convection in saturated porous media. Advances in hydrosience, vol. 10, Academic Press, New York/London, 1975, pp. 231-307.
- [3] Steen P., Pattern selection for finite-amplitude convection states in boxes of porous media. J. Fluid Mech. 136 (1983) 219.
- [4] Schubert G., Strauss J.M., Three-dimensional and multicellular steady and unsteady convection in fluid-saturated porous media at high Rayleigh numbers, J. Fluid Mech. (1979) 25-38.
- [5] Caltagirone J.P., Fabrie P., Natural convection in porous media at high Rayleigh numbers. Part I: Darcy Model. Eur. J. Mech. B/Fluids 8,3 (1989) 207-227.
- [6] Grundmann M., Mojtabi A., Solution asymptotique du problème de la convection naturelle dans la cavité carrée poreuse chauffée par le bas, C. R. Acad. Sci. Paris, série Iib 321 (1995) 401-406.
- [7] Grundmann M., Contribution à l'étude numérique et théorique des écoulements de convection naturelle en géométrie confinée, thèse de doctorat de l'université Paul-Sabatier, Toulouse, 1996, pp. 1-121.