



HAL
open science

Fonctions de Mathieu et polynômes de Klein-Gordon

Lisette Jager

► **To cite this version:**

Lisette Jager. Fonctions de Mathieu et polynômes de Klein-Gordon. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Série IV, Physique, Astronomie, 1997, 325, pp.713 - 716. hal-01881742

HAL Id: hal-01881742

<https://hal.science/hal-01881742>

Submitted on 2 Oct 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fonctions de Mathieu et polynômes de Klein-Gordon

Lisette JAGER

Université de Haute-Alsace, Département de Mathématiques, 4, rue des Frères Lumière,
68093 Mulhouse Cedex, France.
E-mail : L.Jager@univ-mulhouse.fr

Résumé. Les fonctions de Mathieu ont été introduites pour résoudre le problème de Dirichlet dans une ellipse. Leurs coefficients de Fourier vérifient des relations de récurrence à trois termes dont on ne connaît pas de solution explicite. On montre ici le lien entre ces coefficients et des suites de polynômes canoniquement associées au calcul de Klein-Gordon, un analogue relativiste du calcul de Weyl développé par A. Unterberger.

Mathieu functions and Klein-Gordon polynomials

Abstract. *Mathieu functions were first introduced to solve the Dirichlet problem in an ellipse. The coefficients of their Fourier-series expansions satisfy three-term recurrence relations, for which no explicit solution is known. We show the link between these coefficients and polynomials which show up in A. Unterberger's Klein-Gordon calculus, a relativistic substitute of the Weyl calculus.*

1. Introduction

La séparation des variables due à Mathieu (1868) pour le problème de Dirichlet dans une ellipse conduit à examiner, pour un certain q , le problème :

$$(1) \quad H'' + 2q(\cos 2\eta)H = -\lambda H, \quad H \text{ est } 2\pi\text{-périodique,}$$

et l'équation différentielle

$$(2) \quad G'' - 2q(\operatorname{ch} 2\xi)G = \lambda G,$$

pour laquelle on pose un certain problème de Sturm-Liouville (voir [6]). Les *fonctions de Mathieu* sont les solutions périodiques ou quasi-périodiques, au sens de la théorie de Floquet, de l'équation (1); les *fonctions de Mathieu modifiées*, celles de l'équation (2). Les coefficients de Fourier des fonctions de Mathieu vérifient des relations de récurrence à trois termes (voir [1]), mais on n'a aucune formule explicite pour le n -ième coefficient. Cette Note exprime les coefficients de Fourier ou de Fourier-Floquet des fonctions de Mathieu grâce à des suites de polynômes étroitement liées au calcul de Klein-Gordon. En effet, si l'on pose $x = c \operatorname{sh} \xi$, l'équation (2) devient :

$$\left(1 + \frac{x^2}{c^2}\right)v''(x) + \frac{x}{c^2}v'(x) - 4q\frac{x^2}{c^4}v(x) = \left(\frac{\lambda}{c^2} + \frac{2q}{c^2}\right)v(x),$$

et l'on reconnaît au membre de droite, si $q = \pi^2 c^4$, -4π fois l'oscillateur relativiste, qui joue un rôle central dans le calcul de Klein-Gordon.

L. Jager

Signalons que ce problème n'est pas isolé : l'équation de Mathieu est un cas particulier de l'équation de Heun confluyente (voir [3]), car on passe de l'équation (1) à

$$y'' + \left(\frac{1/2}{z} + \frac{1/2}{z-1} \right) y' + \left(\frac{qz - \frac{\lambda+2q}{4}}{z(z-1)} \right) y = 0$$

en posant $z = \sin^2 \eta$: les fonctions de Heun confluentes se développent en série de fonctions hypergéométriques ou hypergéométriques confluentes, les coefficients de ces développements vérifient, eux aussi, des relations de récurrence à trois termes.

2. Calcul de Klein-Gordon et oscillateur relativiste : rappels (voir [4] et [5])

Soit c la vitesse de la lumière. On pose, pour tout réel ξ , $\langle \xi \rangle = (1 + c^{-2} \xi^2)^{1/2}$. L'espace de Sobolev $H^{1/2}(\mathbb{R})$ est l'ensemble des distributions tempérées u vérifiant $\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \langle \xi \rangle |\hat{u}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$, la transformée de Fourier étant normalisée par $\hat{u}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2i\pi x \xi} u(x) dx$. Le calcul de Klein-Gordon associe à toute fonction f , nommée *symbole*, intégrable sur \mathbb{R}^2 , l'opérateur $\text{Op}(f)$, borné sur $H^{1/2}(\mathbb{R})$, défini par la formule :

$$\text{ch } \xi \left(\mathcal{F} \text{Op}(f) u \right) (c \text{ sh } \xi) = c \int_{\mathbb{R}} f \left(y, c \text{ sh } \left(\frac{\xi + \eta}{2} \right) \right) (\text{ch } \eta) \hat{u}(c \text{ sh } \eta) e^{-2i\pi c y (\text{sh } \xi - \text{sh } \eta)} \text{ch} \left(\frac{\xi + \eta}{2} \right) d\eta dy.$$

La définition peut être étendue à des classes de symboles moins restrictives, que l'on ne rappellera pas. Soit ρ le symbole défini par :

$$(3) \quad \rho(x, p) = \langle x \rangle^2 \langle p \rangle^2,$$

et soit

$$(4) \quad L_1 = \text{Op}(\rho) = \frac{-\langle x \rangle^2}{4\pi^2 c^2} \frac{d^2}{dx^2} - \frac{x}{4\pi^2 c^4} \frac{d}{dx} + \left(\langle x \rangle^2 + \frac{1}{16\pi^2 c^4} \right);$$

l'oscillateur relativiste de [4] est l'opérateur de symbole $\pi c^2(\rho - 1) - \frac{1}{16\pi c^2}$. L'opérateur L_1 est essentiellement auto-adjoint sur $H^{1/2}(\mathbb{R})$. Son spectre est une suite de *valeurs propres* simples, notée $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tendant vers $+\infty$. On note ψ_k la *fonction propre* de L_1 associée à μ_k et normalisée par :

$$(5) \quad \psi_k(-x) \sim x^{-1/2} c^{1/2} \exp(-2\pi c^2 \langle x \rangle), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Soit f une fonction C^∞ sur \mathbb{R}^+ . Les opérateurs $L_1 = \text{Op}(\rho)$ et $\text{Op}(f(\rho))$ commutent et, ce qui est fondamental, le symbole de leur composée s'écrit exactement :

$$(6) \quad \rho \sharp f(\rho) = \rho f(\rho) - \frac{1}{4\pi^2 c^4} \left(\rho(\rho - 1) f''(\rho) + (2\rho - 1) f'(\rho) \right).$$

Soit F_s l'opérateur de symbole $(2e^s)^{1/2} \exp(2\pi c^2 \text{sh } s) \exp(-2\pi c^2 e^s \rho)$: il commute avec L_1 et a pour fonctions propres les ψ_k . Plus précisément, la normalisation (5) de ψ_k permet de démontrer l'identité

$$(7) \quad F_s \psi_k = \psi_k(c \text{ sh } s) \psi_k,$$

où ψ_k apparaît à la fois comme fonction propre et comme valeur propre. Les F_s opèrent de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ si $|\text{Im}(s)| \leq \pi/2$; ils interviendront dans le calcul des coefficients des fonctions de Mathieu.

3. Polynômes de Klein-Gordon et fonctions de Mathieu ordinaires (voir [2])

Voici d'abord un développement asymptotique des fonctions propres ψ_k de L_1 . Une conséquence immédiate de la formule (6) est l'existence d'un unique polynôme P_n , de degré n , tel que

$$(8) \quad P_n(L_1) = \text{Op}(\rho^n).$$

En développant, en puissances de ρ , l'exponentielle $\exp(-2\pi c^2 e^s \rho)$ du symbole de F_s , on obtient, grâce à (8), le développement asymptotique (non convergent) suivant :

PROPOSITION 1.

$$\psi_k(c \operatorname{sh} s) = (2e^s)^{1/2} \exp(2\pi c^2 \operatorname{sh} s) \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(-2\pi c^2 e^s)^j}{j!} P_j(\mu_k) + O(e^{Ns}), \quad s \sim -\infty.$$

Bien sûr, un tel développement peut être obtenu par la méthode WKB, mais cela ne donne pas de formule générale pour les coefficients. La même suite de polynômes permettra de comprendre les coefficients de Fourier de certaines fonctions de Mathieu (théorème 1).

Les fonctions de Mathieu sont les solutions u quasi-périodiques, de multiplicateur caractéristique $\sigma \in \mathbb{C}$ (c'est-à-dire telles que $u(t + 2\pi) = \sigma u(t)$), de l'équation

$$(9) \quad u''(t) + \left(2\pi^2 c^4 \cos 2t + 2\pi^2 c^4 + \frac{1}{4} \right) u(t) = 4\pi^2 c^4 \mu u(t).$$

La forme des coefficients de l'équation (9) a été choisie pour qu'elle s'écrive, sous le changement de fonction $u(t) = w(ic \sin t)$, $L_1 w = \mu w$. Si, pour une certaine valeur du paramètre spectral μ , l'équation (9) admet une solution 2π -périodique, elle n'en admet pas d'autre qui soit linéairement indépendante de la première. Sinon, elle admet toujours deux solutions quasi-périodiques indépendantes, de multiplicateurs caractéristiques inverses l'un de l'autre (voir [1]).

Si la fonction u est une solution quasi-périodique de l'équation (9), de multiplicateur caractéristique $e^{2i\pi\nu}$, avec $\operatorname{Re} \nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, nous poserons :

$$v(t) = e^{-2i\pi c^2 \sin t} u(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} v_n e^{i(n+\nu)t}.$$

Si $\nu = -\frac{1}{2}$, on peut exprimer les coefficients de Fourier-Floquet v_n , de la fonction v :

THÉORÈME 1. - On a, pour $\nu = -\frac{1}{2}$,

$$v_n = \frac{(-2\pi c^2)^{n-1}}{(n-1)!} P_{n-1}(\mu) v_1 \text{ si } n \geq 1, \quad \text{et} \quad v_{-n} = \frac{(2\pi c^2)^n}{n!} P_n(\mu) v_0 \text{ si } n \geq 0.$$

Les coefficients v_0 et v_1 peuvent être choisis arbitrairement puisque, dans ce cas, l'équation de Mathieu admet deux solutions 2π -anti-périodiques linéairement indépendantes. On démontre ce théorème en remarquant l'identité de la relation de récurrence à trois termes vérifiée par les coefficients v_n , conséquence de (9), et de celle que vérifient les $P_n(\mu)$, conséquence de (6).

Si $\nu \neq -\frac{1}{2}$, les coefficients de Fourier-Floquet s'expriment grâce à d'autres suites de polynômes, dont voici la construction. Définissons les opérateurs $L_\alpha = \text{Op}(\rho^\alpha)$ et, pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}^*)$, $L'_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha+1)^2}{(4\pi^2 c^4)^\alpha} L_{-\alpha-1}$. On obtient (voir [2]) le :

LEMME 1. - L'opérateur suivant est un opérateur scalaire

$$(10) \quad L_z L'_{z+1} - L'_z L_{z+1} = -\Gamma(z+1)^2 (4\pi^2 c^4)^{-z}.$$

L. Jager

D'autre part, les opérateurs L_α et L'_α vérifient, pour $\alpha \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}^*)$, la relation

$$(11) \quad \left(L_1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{4\pi^2 c^4} \right) M_\alpha = M_{\alpha+1} + \frac{\alpha^2}{4\pi^2 c^4} M_{\alpha-1}$$

(où M est mis pour L et L'), conséquence de (6). On peut alors énoncer la :

PROPOSITION 2. – Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (-\mathbb{N})$. Il existe deux suites de polynômes (P_n^α) et (Q_n^α) telles que l'on ait, pour tout entier positif n ,

$$L_{\alpha+n} = P_n^\alpha(L_1)L_\alpha + Q_n^\alpha(L_1)L_{\alpha+1} \quad \text{et} \quad L'_{\alpha+n} = P_n^\alpha(L_1)L'_\alpha + Q_n^\alpha(L_1)L'_{\alpha+1}.$$

Ce sont, en effet, les suites définies par la relation de récurrence

$$R_{n+1}^\alpha(X) = \left(X + \frac{(\alpha+n)(\alpha+n+1)}{4\pi^2 c^4} \right) R_n^\alpha(X) - \frac{(\alpha+n)^2}{4\pi^2 c^4} R_{n-1}^\alpha(X)$$

(où R_n^α est mis pour P_n^α ou Q_n^α) et les conditions initiales

$$P_0^\alpha = 1 \quad \text{et} \quad Q_0^\alpha = 0, \quad P_1^\alpha = 0 \quad \text{et} \quad Q_1^\alpha = 1.$$

On démontre la proposition par récurrence, grâce à (11), et l'on peut obtenir l'expression des polynômes en inversant le système, dont le déterminant est donné par (10) : cela résout, d'une certaine façon, la relation de récurrence.

Par une méthode analogue à celle utilisée pour la démonstration du théorème 1, on peut exprimer, si $\nu \neq -\frac{1}{2}$, les coefficients de Fourier-Floquet de v :

THÉORÈME 2. – Soit $\nu \neq -\frac{1}{2}$ tel que $\text{Re } \nu \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. On a, pour tout entier n positif ou nul :

$$v_n = (-2\pi c^2)^n \frac{\Gamma(\nu + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + \nu + \frac{1}{2})} \left(v_0 P_n^{\nu-1/2}(\mu) - \frac{\nu + \frac{1}{2}}{2\pi c^2} v_1 Q_n^{\nu-1/2}(\mu) \right),$$

$$v_{-n} = (-2\pi c^2)^n \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu)}{\Gamma(n + \frac{1}{2} - \nu)} \left(v_0 P_n^{\nu-1/2}(\mu) + \left[\left(\mu + \frac{\nu^2 + \frac{1}{2}}{4\pi^2 c^2} \right) v_0 + \frac{\nu + \frac{1}{2}}{2\pi c^2} v_1 \right] Q_n^{\nu-1/2}(\mu) \right).$$

Note remise le 2 juillet 1997, acceptée le 11 juillet 1997.

Références bibliographiques

- [1] Campbell R., 1955. *Théorie générale de l'équation de Mathieu et de quelques autres équations différentielles de la mécanique*. Masson, Paris.
- [2] Jager L., 1994. Fonctions de Mathieu et calcul de Klein-Gordon, *Thèse*, Université de Reims Champagne Ardenne.
- [3] Ronveaux A., 1995. *Heun's differential equation*, Oxford University Press.
- [4] Unterberger A., 1991. Quantification relativiste, *Mém. Soc. Math. France*, (nouvelle série, 44,45), Paris.
- [5] Unterberger A., 1993. L'oscillateur relativiste et les fonctions de Mathieu, *Bull. Soc. Math. France*, 121.4, p. 479-508.
- [6] Whittaker E. T. et Watson G. N., 1965. *A course of modern analysis*, 4th ed., Cambridge University Press.