HAL open science

Fonctions arithmétiques multiplicativement monotones

Michel Balazard

To cite this version:

Michel Balazard. Fonctions arithmétiques multiplicativement monotones. Bulletin of the Belgian Mathematical Society - Simon Stevin, 2019, 26 (2), pp.161-176. 10.36045/bbms/1561687559 . hal-01878329

HAL Id: hal-01878329

https://hal.science/hal-01878329v1

Submitted on 20 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Fonctions arithmétiques multiplicativement monotones

Michel Balazard

Abstract

A real arithmetic function f is *multiplicatively monotonous* if $f(mn) - f(m)$ has constant sign for m, n positive integers. Properties and examples of such functions are discussed, with applications to positive hermitian Toeplitz-multiplicative determinants.

Keywords

Sets of multiples, Toeplitz-multiplicative determinants, logarithmic density.
MSC classification (2010) : 11C20, 11N37 (primary) ; 15A15, 15B05 (secondary).

1 Question initiale

L'origine du texte qui suit est l'étude de la question suivante.

Question *Soit $c : \mathbb{Q}^{+*} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que*

$$c(1/r) = \overline{c(r)} \quad (r \in \mathbb{Q}^{+*}),$$

et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le déterminant

$$D_n = \det \big(c(i/j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

soit strictement positif (par convention, $D_0 = 1$).

La suite

$$D_n^{1/n} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

a-t-elle une limite quand n tend vers l'infini ?

Si $c : \mathbb{Q}^{+*} \to \mathbb{C}$ est une fonction quelconque (ne vérifiant pas nécessairement la condition $c(1/r) = \overline{c(r)}$), la matrice Toeplitz-multiplicative infinie associée à c est

$$M = \big(c(i/j)\big)_{i,j \geqslant 1}$$

Cette définition, due à Hilberdink (2006, cf. [8]), est analogue à celle, classique, de matrice de Toeplitz (additive)

$$\big(c_0(i-j)\big)_{i,j\geqslant 1}$$

où c_0 est définie sur $\mathbb{Z}$ (on numérote alors parfois les lignes et colonnes de la matrice à partir de 0, mais nous garderons la même convention pour les deux cas).

À la fonction c on peut associer la suite des matrices M_n obtenues à partir de M en ne retenant que les lignes et colonnes d'indices $\leqslant n$, où $n \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$D_n = \det M_n = \det\big(c(i/j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Nous dirons que la suite (D_n) ainsi définie est une suite de déterminants Toeplitz-multiplicatifs.

La condition $c(1/r) = \overline{c(r)}$ assure de plus que les matrices M_n sont hermitiennes, et un critère classique de Sylvester montre que la question posée concerne le cas où les matrices M_n sont toutes définies positives.

Cette question est motivée par le fait que son analogue pour les déterminants de Toeplitz « additifs » a une réponse positive. On a même un résultat plus fort, signalé par Fekete à Szegő, et mentionné dans le premier article de ce dernier (1915, [11], §3, p. 494-495) : si la fonction c_0 vérifie $c_0(-i) = \overline{c_0(i)}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, et si les déterminants

$$\Delta_n = \det\big(c_0(i-j)\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

sont tous strictement positifs, alors la suite Δ_n/Δ_{n-1} est décroissante, donc convergente. La démonstration classique de ce fait est rappelée au §6. Il en résulte que la suite $\Delta_n^{1/n}$ est aussi convergente. Dans le cas des déterminants Toeplitz-multiplicatifs hermitiens positifs, nous verrons au même paragraphe §6 une propriété analogue de décroissance « multiplicative » ; avec les hypothèses et les notations de la question ci-dessus, on a

$$k \mid n \Rightarrow D_n/D_{n-1} \leqslant D_k/D_{k-1} \quad (k, n \in \mathbb{N}^*).$$

Dès lors, en oubliant provisoirement les spécificités des déterminants Toeplitz-multiplicatifs, il est légitime de s'interroger, dans un cadre plus général, sur les conséquences, pour le comportement asymptotique d'une suite donnée, de l'hypothèse de monotonie multiplicative ; c'est l'objet des paragraphes §§2-5. Le résultat principal est l'existence d'une valeur moyenne logarithmique, démontrée à la proposition 4 au §4.3. Après ce détour, je reviendrai aux déterminants Toeplitz-multiplicatifs au §6 ; j'y donnerai un début de réponse à la question initiale, qui restera néanmoins ouverte.

2 Fonctions arithmétiques multiplicativement monotones

Au lieu du terme « suite », nous pouvons employer le terme « fonction arithmétique ». Il s'agit formellement des mêmes objets ; le changement de vocabulaire induit simplement un changement de point de vue, ici pertinent.

2.1 Définition

Nous dirons d'une fonction arithmétique f à valeurs réelles qu'elle est *multiplicativement croissante* si elle vérifie

$$k \mid n \Rightarrow f(k) \leqslant f(n) \quad (k, n \in \mathbb{N}^*).$$

La fonction f est *multiplicativement décroissante* si la propriété analogue a lieu avec la dernière inégalité changée de sens ; elle est *multiplicativement monotone* si elle est multiplicativement croissante ou multiplicativement décroissante.

2.2 Exemples

Toute fonction arithmétique monotone au sens usuel est multiplicativement monotone. Voici trois autres classes d'exemples de fonctions multiplicativement monotones.

2.2.1 Ensembles de multiples

Les fonctions arithmétiques, multiplicativement croissantes, et à valeurs dans $\{0, 1\}$, sont exactement les fonctions indicatrices des *ensembles de multiples*. Rappelons que l'ensemble des multiples de la partie A de $\mathbb{N}^*$ est défini par

$$\mathcal{M}(A) = \{ka,\ a \in A,\ k \in \mathbb{N}^*\}.$$

2.2.2 Fonctions dont la dérivée au sens de Bougaïef est de signe constant

Bougaïef a défini la « dérivée numérique » d'une fonction arithmétique f par la formule

$$Df = f * \mu,$$

(où $*$ désigne la convolution des fonctions arithmétiques, et μ la fonction de Möbius), et développé la théorie des fonctions arithmétiques à partir de cette notion dans les années 1870 (cf. [2] pour un résumé en français). Sa terminologie est imparfaite, notamment parce que cette « dérivation » ne vérifie pas de règle de Leibniz *. Néanmoins, la relation inverse

$$f(n) = \sum_{d \mid n} (Df)(d),$$

est décrite par Bougaïef comme le fait que f est l'« intégrale numérique » de Df ; ses deux définitions ont donc une certaine cohérence.

*. Il ne faut pas confondre la dérivée au sens de Bougaïef avec la dérivée $f'(n) = f(n) \ln n$ de la théorie des nombres premiers, qui, elle, vérifie la règle de Leibniz $(f * g)' = f' * g + f * g'$.

Si $Df \geqslant 0$, alors f est multiplicativement croissante. En effet,

$$k \mid n \Rightarrow f(n) = \sum_{d|n} (Df)(d) \geqslant \sum_{d|k} (Df)(d) = f(k).$$

La réciproque est fausse : la dérivée au sens de Bougaïef de la fonction indicatrice de l'ensemble des multiples de 2 et 3 vaut -1 pour $n = 6$.

2.2.3 Déterminants Toeplitz-multiplicatifs hermitiens positifs

Comme nous l'avons signalé au §1, les quotients D_n/D_{n-1}, formés à partir d'une suite de déterminants Toeplitz-multiplicatifs hermitiens positifs, constitue une suite multiplicativement croissante. Cela sera démontré au §6.

2.3 Premières propriétés

Nous énonçons dans ce paragraphe quelques propriétés générales, et immédiates, de la monotonie multiplicative, en nous limitant au cas de la croissance, celui de la décroissance étant analogue.

1. Une fonction arithmétique f multiplicativement croissante est bornée inférieurement. En effet, on a $f(n) \geqslant f(1)$.

2. Si f est une fonction arithmétique multiplicativement croissante et α une fonction à valeurs réelles, définie et croissante sur une partie de $\mathbb{R}$ contenant l'image de f, alors $\alpha \circ f$ est multiplicativement croissante.

3. L'ensemble des fonctions arithmétiques multiplicativement croissantes est un cône convexe.

4. Si $(f_i)_{i\in i}$ est une famille de fonctions arithmétiques multiplicativement croissantes telle que

$$f(n) = \sup_{i\in I} f_i(n) < \infty \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

alors f est multiplicativement croissante.

5. Si f est une fonction arithmétique à valeurs réelles, il existe une plus petite fonction arithmétique g, multiplicativement croissante, et telle que $f \leqslant g$. Elle est définie par

$$g(n) = \max\{f(d),\, d \mid n\} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Si f est la fonction indicatrice d'une partie A de $\mathbb{N}^*$, alors g est la fonction indicatrice de l'ensemble de multiples $\mathcal{M}(A)$.

6. Si f et g sont deux fonctions arithmétiques à valeurs positives ou nulles, et si l'une d'elles, disons g, est multiplicativement croissante, alors $f * g$ est multiplicativement croissante. Cela généralise l'exemple du §2.2.2 :

$$k \mid n \Rightarrow f * g(n) = \sum_{d|n} f(d)g(n/d) \geqslant \sum_{d|k} f(d)g(n/d) \geqslant \sum_{d|k} f(d)g(k/d) = f * g(k).$$

3 Facteurs directs de l'ensemble des nombres entiers positifs

Indépendamment de l'hypothèse de monotonie multiplicative, nous rappelons dans ce paragraphe un cas important d'existence de la limite des moyennes de Cesàro d'une fonction arithmétique. Cette condition suffisante s'appuie sur la notion de *facteur direct*, et sera employée dans la démonstration des propositions 4 et 7.

Une partie A de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des nombres entiers positifs est un facteur direct s'il existe une partie $B \subset \mathbb{N}^*$ telle que tout nombre entier $n \geqslant 1$ admette une décomposition unique,

$$n = a \cdot b \quad (a \in A,\, b \in B).$$

La partie B, dite *complémentaire* de A, est manifestement aussi un facteur direct, et A est complémentaire de B.

Un théorème d'Erdős, Saffari et Vaughan (cf. [10], [7] et [3]) affirme que tout facteur direct admet une densité asymptotique, égale à la somme des inverses des éléments de son complémentaire :

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{b \in B \\ b \leqslant x}} 1 \to \Big(\sum_{a \in A} \frac{1}{a} \Big)^{-1} \quad (x \to \infty) \tag{1}$$

(si la série diverge, la densité est nulle).

Si f est une fonction arithmétique et A, B des facteurs directs complémentaires, la fonction arithmétique A-réduite de f est définie par

$$f(n; A) = f(a) \quad (n = ab,\, a \in A,\, b \in B). \tag{2}$$

Proposition 1 *Soit A et B deux facteurs directs complémentaires de $\mathbb{N}^*$. On suppose que la somme des inverses des éléments de A converge, et on pose*

$$\lambda = \Big(\sum_{a \in A} \frac{1}{a} \Big)^{-1} (\in]0, 1]).$$

Soit f une fonction arithmétique à valeurs réelles, telle que

$$\sum_{a \in A} \frac{\min\big(f(a), 0\big)}{a} > -\infty. \tag{3}$$

Alors

$$t^{-1} \sum_{n \leqslant t} f(n; A) \to \alpha(f; A) \quad (t \to \infty),$$

où

$$\alpha(f; A) = \lambda \sum_{a \in A} \frac{f(a)}{a} \quad (\in]-\infty, \infty]).$$

Démonstration

En notant a un élément générique de A, et b un élément générique de B, on a

$$\begin{aligned} t^{-1}\sum_{n\leqslant t} f(n;A) &= t^{-1}\sum_{ab\leqslant t} f(a) \\ &= \sum_{a} \frac{f(a)}{a}(t/a)^{-1}\sum_{b\leqslant t/a} 1. \end{aligned}$$

Si $\sum_a |f(a)|/a < \infty$, le résultat découle donc de (1) et du théorème de Tannery (théorème de convergence dominée de Lebesgue pour les séries). Sinon, il découle de (3) et du lemme de Fatou (ou d'un raisonnement élémentaire). □

Par sommation partielle, on obtient aussi la relation

$$(\ln t)^{-1}\sum_{n\leqslant t}\frac{f(n;A)}{n} \to \alpha(f;A) \quad (t\to\infty),$$

si f vérifie (3).

4 Étude de la moyenne logarithmique d'une fonction multiplicativement monotone

La proposition 4 ci-dessous généralise aux fonctions multiplicativement croissantes un résultat de Davenport et Erdős concernant les ensembles de multiples (1936, 1951, cf. [4], [5]). Nos démonstrations suivent précisément l'approche élémentaire adoptée par ces auteurs dans [5] ; par souci d'autonomie, nous donnons néanmoins tous les détails.

4.1 Décomposition en facteurs friable et criblé

Soit $y > 1$. Un nombre entier positif est dit y-friable † si tous ses diviseurs premiers sont $\leqslant y$. L'ensemble de ces nombres sera noté $\mathcal{S}(y)$. Un nombre entier positif est dit y-criblé si tous ses diviseurs premiers sont $> y$. L'ensemble de ces nombres sera noté $\mathcal{E}(y)$. Ces deux ensembles sont des facteurs directs complémentaires : tout nombre entier positif n a une unique décomposition

$$n = ab, \text{ où } a\in\mathcal{S}(y) \text{ et } b\in\mathcal{E}(y).$$

Nous dirons que a est le facteur y-friable de n, et b son facteur y-criblé.

†. Dans certains textes en langue anglaise, la locution *y-smooth* est utilisée pour désigner un tel nombre entier.

Dans ce cas, le théorème d'Erdős, Saffari et Vaughan est immédiat ; on a les relations

$$\sum_{a\in\mathcal{S}(y)} \frac{1}{a} = \prod_{p\leqslant y}(1-1/p)^{-1} \tag{4}$$

$$t^{-1} \sum_{\substack{b\leqslant t\\ b\in\mathcal{E}(y}} 1 \to \prod_{p\leqslant y}(1-1/p) \quad (t\to\infty). \tag{5}$$

Si $z \geqslant y > 1$, le facteur y-friable de n divise son facteur z-friable, le facteur z-criblé de n divise son facteur y-criblé. De plus, si

$$n = a'b',\ \text{où } a' \in \mathcal{S}(z) \text{ et } b' \in \mathcal{E}(z), \tag{6}$$

alors

$$a' = ab'',\ \text{où } b'' = (a', b) \in \mathcal{E}(y).$$

En particulier, n et a' ont même facteur y-friable.

Si $\mathcal{S}(y,z)$ désigne l'ensemble des nombres entiers dont tous les diviseurs premiers p vérifient l'encadrement $y < p \leqslant z$, tout élément de $\mathcal{S}(z)$ est, de façon unique, le produit d'un élément de $\mathcal{S}(y)$ et d'un élément de $\mathcal{S}(y,z)$. L'identité suivante est une variante de (4) :

$$\sum_{n\in\mathcal{S}(y,z)} \frac{1}{n} = \prod_{y<p\leqslant z}(1-1/p)^{-1}. \tag{7}$$

4.2 Réduction friable d'une fonction arithmétique

Si f est une fonction arithmétique, et $y > 1$, la *réduite y-friable* de f est la fonction arithmétique définie par

$$f(n;y) = f(a) \quad (n\in\mathbb{N}^*;\ n = ab,\ a\in\mathcal{S}(y),\ b\in\mathcal{E}(y)), \tag{8}$$

autrement dit, $f(n;y) = f\big(n;\mathcal{S}(y)\big)$, avec la notation (2).

Si $z \geqslant y > 1$ et si g est la réduite y-friable de f, alors, la réduite z-friable de g est égale à g. En effet, avec les notations de (6), on a

$$g(n;z) = g(a') = f(a';y) = f(n;y) = g(n), \tag{9}$$

puisque n et a' ont le même facteur y-friable.

Explicitons le cas particulier de la proposition 1 obtenu en prenant $A = \mathcal{S}(y)$ et $B = \mathcal{S}(y)$.

Proposition 2 *Soit f une fonction arithmétique à valeurs réelles, et soit $y > 1$. On suppose que*

$$\sum_{a\in\mathcal{S}(y)} \frac{\min\big(f(a),0\big)}{a} > -\infty. \tag{10}$$

Alors

$$t^{-1}\sum_{n\leqslant t} f(n;y) \to \alpha(f;y) \quad (t\to\infty),$$

où

$$\alpha(f;y) = \prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{a\in\mathcal{S}(y)}\frac{f(a)}{a} \quad (\in\,]-\infty,\infty]).$$

On a donc aussi

$$(\ln t)^{-1}\sum_{n\leqslant t}\frac{f(n;y)}{n} \to \alpha(f;y) \quad (t\to\infty). \tag{11}$$

Proposition 3 *Soit f une fonction arithmétique à valeurs réelles, et soit $z \geqslant y > 1$. On suppose que* (10) *est vérifiée et on considère la fonction arithmétique $g(n) = f(n;y)$ définie par* (8).

Alors, (10) *est vérifiée en remplaçant f par g et y par z, et*

$$\alpha(g;z) = \alpha(f;y).$$

Démonstration

Compte tenu de (7), (9) et (10), on a

$$\sum_{a'\in\mathcal{S}(z)}\frac{\min\big(g(a'),0\big)}{a'} = \sum_{\substack{a\in\mathcal{S}(y)\\ b\in\mathcal{S}(y,z)}}\frac{\min\big(f(a),0\big)}{ab} = \prod_{y<p\leqslant z}(1-1/p)^{-1}\sum_{a\in\mathcal{S}(y)}\frac{\min\big(f(a),0\big)}{a} > -\infty.$$

Par conséquent,

$$\alpha(g;z) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\sum_{n\leqslant t} g(n;z) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\sum_{n\leqslant t} f(n;y) = \alpha(f;y). \qquad \square$$

4.3 Existence de la valeur moyenne logarithmique des fonctions multiplicativement monotones

Comme nous l'avons signalé ci-dessus, la proposition suivante généralise aux fonctions multiplicativement croissantes un théorème de Davenport et Erdős concernant les ensembles de multiples.

Proposition 4 *Soit f une fonction arithmétique multiplicativement croissante. La quantité*

$$\alpha(f;y) = \prod_{p\leqslant y}\Big(1-\frac{1}{p}\Big)\sum_{n\in\mathcal{S}(y)}\frac{f(n)}{n}$$

est une fonction croissante de y. Posons

$$\alpha = \lim_{y\to\infty} \alpha(f;y) \quad (\in]-\infty,+\infty]).$$

Alors, on a

$$\alpha = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{n\leqslant x} \frac{f(n)}{n} = \liminf_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n).$$

Démonstration

Si f est multiplicativement croissante, elle est bornée inférieurement, donc la condition (10) est vérifiée et $\alpha(f;y)$ est bien défini pour tout $y>1$. C'est une fonction croissante de y. En effet, soit $z \geqslant y > 1$. Comme f est multiplicativement croissante, on a

$$f(n;z) \geqslant f(n;y) \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

d'où $\alpha(f;z) \geqslant \alpha(f;y)$, d'après la proposition 2.

Posons maintenant

$$\begin{aligned}
\alpha &= \lim_{y\to\infty} \alpha(f;y) = \sup_{y>1} \alpha(f;y) \\
\beta &= \liminf_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n) \\
\gamma &= \liminf_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{n\leqslant x} \frac{f(n)}{n} \\
\delta &= \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{\ln x} \sum_{n\leqslant x} \frac{f(n)}{n}.
\end{aligned}$$

Les quatre limites $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ appartiennent à $]-\infty,\infty]$. Nous allons voir qu'elles sont toutes égales en démontrant les inégalités

$$\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \alpha.$$

Parmi elles, l'inégalité $\gamma \leqslant \delta$ est évidente, et l'inégalité $\beta \leqslant \gamma$ est une relation, vraie pour toute fonction arithmétique f, qui se démontre par sommation partielle. Il reste à prouver les deux inégalités concernant α.

Preuve de l'inégalité $\alpha \leqslant \beta$.

Soit $y > 1$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $f(n) \geqslant f(n;y)$, donc

$$\beta = \liminf_{t\to\infty} t^{-1} \sum_{n\leqslant t} f(n) \geqslant \lim_{t\to\infty} t^{-1} \sum_{n\leqslant t} f(n;y) = \alpha(f;y),$$

d'après la proposition 2. Le résultat s'obtient en faisant tendre y vers l'infini.

Preuve de l'inégalité $\delta \leqslant \alpha$.

Si $\alpha = \infty$, l'inégalité est évidente. Supposons donc $\alpha < \infty$.

Soit $y > 1$. Posons

$$\begin{aligned} g(n) &= f(n;y) \\ h(n) &= f(n) - g(n). \end{aligned}$$

Comme f est multiplicativement monotone, on a $h \geqslant 0$. Par conséquent, pour $x > y$,

$$\begin{aligned} \prod_{p\leqslant x}(1-1/p)\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n} &\leqslant \prod_{p\leqslant x}(1-1/p)\sum_{n\in\mathcal{S}(x)}\frac{h(n)}{n} \\ &= \alpha(h;x) = \alpha(f;x) - \alpha(g;x) \\ &= \alpha(f;x) - \alpha(f;y) \quad \text{(d'après la proposition 3)} \\ &\leqslant \alpha - \alpha(f;y). \end{aligned} \tag{12}$$

Maintenant, quand x tend vers l'infini,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n} &= \frac{1}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{g(n)}{n} + \frac{1}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{h(n)}{n} \\ &\leqslant \alpha(f;y) + o(1) + \frac{1}{\ln x}\prod_{p\leqslant x}(1-1/p)^{-1}\big(\alpha - \alpha(f;y)\big) \quad \text{(d'après (11) et (12))} \\ &\leqslant \alpha + o(1) + O\big(\alpha - \alpha(f;y)\big), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la majoration élémentaire $\prod_{p\leqslant x}(1-1/p)^{-1} \ll \ln x$. On a donc, pour tout y, la majoration $\delta \leqslant \alpha + O\big(\alpha - \alpha(f;y)\big)$, ce qui entraîne la conclusion en faisant tendre y vers l'infini. □

Si f est multiplicativement monotone, nous poserons

$$\alpha(f) = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\ln x}\sum_{n\leqslant x}\frac{f(n)}{n}\cdot$$

C'est la *valeur moyenne logarithmique* de f. Notons que $\alpha(f) \geqslant f(1)$, si f est multiplicativement croissante, et $\alpha(f) \leqslant f(1)$, si f est multiplicativement décroissante.

L'égalité (8), p. 22, de l'article [5] de Davenport et Erdős, est généralisée aux fonctions multiplicativement croissantes dans la proposition suivante.

Proposition 5 *Soit $(f_k)_{k\geqslant 1}$ une suite croissante de fonctions arithmétiques multiplicativement croissantes. On suppose que*

$$f(n) = \sup_{k\geqslant 1} f_k(n) < \infty \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Alors $\alpha(f_k)$ tend vers $\alpha(f)$ quand k tend vers l'infini.

Démonstration

On sait que f est multiplicativement croissante. Pour tout $y > 1$, $\alpha(f_k; y)$ tend vers $\alpha(f; y)$, quand k tend vers l'infini, par convergence monotone. Par suite,

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \alpha(f_k) &= \sup_{k\geqslant 1} \alpha(f_k) = \sup_{k\geqslant 1} \sup_{y>1} \alpha(f_k; y) \\ &= \sup_{y>1} \sup_{k\geqslant 1} \alpha(f_k; y) = \sup_{y>1} \alpha(f; y) = \alpha(f). \qquad \square\end{aligned}$$

5 Remarques sur la moyenne de Cesàro des fonctions multiplicativement monotones

En vertu de la proposition 4, l'existence de la valeur moyenne d'une fonction arithmétique multiplicativement croissante, c'est-à-dire de la limite, éventuellement infinie, de ses moyennes de Cesàro, équivaut à l'inégalité

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n) \leqslant \alpha(f). \tag{13}$$

On sait depuis 1934 que cette inégalité n'est pas toujours vraie, puisque Besicovitch a montré dans [1] comment construire des ensembles de multiples sans densité asymptotique.

Erdős a donné en 1948 (cf. [6]) un critère nécessaire et suffisant pour la validité de (13) dans le cas d'un ensemble de multiples. Il serait intéressant de généraliser ce critère aux fonctions arithmétiques multiplicativement croissantes.

Observons que l'existence de la valeur moyenne est évidente dans le cas où la dérivée au sens de Bougaïef est de signe constant :

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{1}{x} \sum_{m\leqslant x} Df(m)\lfloor x/m \rfloor \to \sum_{m\geqslant 1} \frac{Df(m)}{m} \quad (x \to \infty).$$

6 Déterminants Toeplitz-multiplicatifs hermitiens positifs

Toute matrice hermitienne définie positive infinie ‡

$$H = (h_{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$$

est la matrice de Gram

$$G = (\langle e_i, e_j \rangle)_{i,j\in\mathbb{N}^*}$$

‡. J'entends par là que toutes les sections finies $(h_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$ sont définies positives.

d'une suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de vecteurs d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, par exemple $\ell^2(\mathbb{N}^*)$. Cela se démontre en appliquant l'algorithme de Cholesky à H.

Si H est une matrice de Toeplitz (au sens usuel, additif), on a $h_{ij} = c_0(i-j)$, donc

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle e_{i+k}, e_{j+k}\rangle \quad (i,j\in\mathbb{N}^*,\ k\in\mathbb{N}). \tag{14}$$

Si H est une matrice Toeplitz-multiplicative, on a $h_{ij} = c(i/j)$, donc

$$\langle e_i, e_j\rangle = \langle e_{ki}, e_{kj}\rangle \quad (i,j,k\in\mathbb{N}^*). \tag{15}$$

Notons

$$D_n = \det(h_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \quad (n\in\mathbb{N}^*)$$

avec $D_0 = 1$ par convention. Une formule classique de géométrie hilbertienne nous donne

$$\frac{D_n}{D_{n-1}} = \frac{\mathrm{Gram}(e_1,\dots,e_n)}{\mathrm{Gram}(e_1,\dots,e_{n-1})} = \mathrm{dist}^2_{\mathcal{H}}\big(e_n, V_{n-1}\big),$$

où

$$V_k = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \quad (k\in\mathbb{N}),$$

(on a donc $V_0 = 0$).

Si H est une matrice de Toeplitz au sens usuel, on a, pour $n\geqslant 2$,

$$\begin{aligned}
\frac{D_n}{D_{n-1}} &= \mathrm{dist}^2_{\mathcal{H}}\big(e_n, V_{n-1}\big)\\
&\leqslant \mathrm{dist}^2_{\mathcal{H}}\big(e_n, \mathrm{Vect}(e_2,\dots,e_{n-1})\big)\\
&= \frac{\mathrm{Gram}(e_2,\dots,e_n)}{\mathrm{Gram}(e_2,\dots,e_{n-1})}\\
&= \frac{\mathrm{Gram}(e_1,\dots,e_{n-1})}{\mathrm{Gram}(e_1,\dots,e_{n-2})} \quad \text{(d'après (14))}\\
&= \frac{D_{n-1}}{D_{n-2}}.
\end{aligned}$$

C'est le résultat de Fekete mentionné au §1. La convergence de la suite D_n/D_{n-1}, qui en résulte, entraîne celle de la suite $D_n^{1/n}$, vers la même limite. Si les c_k sont les coefficients de Fourier d'une fonction f, de période 1, continue et positive, Szegő démontra dans le même article [11] une conjecture de Pólya, affirmant que cette limite est la moyenne géométrique des valeurs de f :

$$D_n^{1/n} \to \exp\Big(\int_0^1 \ln f(t)\,dt\Big) \quad (n\to\infty).$$

Ce résultat fut le premier d'une nouvelle théorie, dont l'ouvrage récent [9] est un exposé actualisé.

Le raisonnement ci-dessus s'adapte de la façon suivante au cas où H est une matrice Toeplitz-multiplicative (hermitienne, définie positive). Si $n = km$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{D_n}{D_{n-1}} &= \mathrm{dist}^2_{\mathcal{H}}\big(e_{km}, V_{km-1}\big) \\
&\leqslant \mathrm{dist}^2_{\mathcal{H}}\big(e_{km}, \mathrm{Vect}(e_m, e_{2m}, \dots, e_{(k-1)m})\big) \\
&= \frac{\mathrm{Gram}(e_m, e_{2m}, \dots, e_{(k-1)m}, e_{km})}{\mathrm{Gram}(e_m, e_{2m}, \dots, e_{(k-1)m})} \\
&= \frac{\mathrm{Gram}(e_1, \dots, e_k)}{\mathrm{Gram}(e_1, \dots, e_{k-1})} \quad \text{(d'après (15))} \\
&= \frac{D_k}{D_{k-1}}.
\end{aligned}$$

La suite des quotients D_n/D_{n-1} est donc multiplicativement décroissante. La suite de leurs logarithmes l'étant également, on obtient la conclusion suivante par application de la proposition 4 à la fonction

$$f(n) = -\ln(D_n/D_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

Proposition 6 *Avec les hypothèses et les notations de la question du §1, la moyenne logarithmique*

$$\frac{1}{\ln N} \sum_{k \leqslant N} \frac{1}{k} \ln(D_k/D_{k-1})$$

converge vers un élément α de $[-\infty, \ln c(1)]$ quand N tend vers l'infini. De plus,

$$\limsup_{N \to \infty} D_N^{1/N} = e^{\alpha}.$$

Si $\alpha = -\infty$, on a donc une réponse positive à la question du §1 : la limite cherchée est nulle. Si $\alpha > -\infty$, on peut récrire l'assertion sur la moyenne logarithmique sous la forme

$$\prod_{k=1}^{N} (D_k/D_{k-1})^{1/k} = N^{\alpha + o(1)} \quad (N \to \infty).$$

Cela étant, en toute généralité, je ne sais pas répondre à la question initiale. La construction de Besicovitch peut-elle être adaptée au cas des déterminants Toeplitz-multiplicatifs, et fournir ainsi un exemple où $D_n^{1/n}$ n'a pas de limite ?

Les propositions suivantes, 7 et 8, indiquent des cas simples où cette limite existe.

Proposition 7 *Soit A un facteur direct, stable par multiplication, et dont la somme des inverses converge. On pose*

$$R = \{a/a',\, a \in A,\, a' \in A\}$$

Soit $c : \mathbb{Q}^{+*} \to \mathbb{C}$ une fonction telle que

$$c(1/r) = \overline{c(r)} \quad (r \in R)$$
$$c(r) = 0 \quad (r \notin R),$$

et telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant

$$D_n = \det\big(c(i/j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

soit strictement positif.

Alors la suite $D_n^{1/n}$ est convergente.

Démonstration

Soit B le facteur direct complémentaire de A. En interprétant D_n comme déterminant de Gram, et en utilisant le fait que chaque nombre entier $j \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de façon unique $j = ab$, avec $a \in A$, $b \in B$, on a

$$D_n = \mathrm{Gram}(e_{ab}\,;\, a \in A,\, b \in B,\, ab \leqslant n),$$

où nous utilisons aussi le fait qu'un déterminant de Gram est indépendant de l'ordre des vecteurs qui le composent.

Si $b, b' \in B$, et $a, a', \alpha, \alpha' \in A$, on a

$$\frac{ab}{a'b'} = \frac{\alpha}{\alpha'} \Rightarrow \alpha' a \cdot b = \alpha a' \cdot b' \Rightarrow b = b',$$

puisque A et B sont des facteurs directs complémentaires et puisque A est stable par multiplication. Comme c est à support dans R, cela montre que

$$\langle e_i, e_j \rangle = 0 \quad (i = ab\,;\, j = a'b'\,;\, a, a' \in A\,;\, b, b' \in B\,;\, b \neq b').$$

Autrement dit, les vecteurs e_i et e_j sont orthogonaux si les décompositions de i et j en produits d'un élément de A par un élément de B ne font pas intervenir le même élément de B. Cela permet de décomposer D_n en produit :

$$\begin{aligned} D_n &= \prod_{b \in B, b \leqslant n} \mathrm{Gram}(e_{ab}\,;\, a \in A,\, a \leqslant n/b) \\ &= \prod_{b \in B, b \leqslant n} \mathrm{Gram}(e_a\,;\, a \in A,\, a \leqslant n/b), \end{aligned}$$

d'après (15).

En écrivant maintenant $n = \alpha\beta$, avec $\alpha \in A$, $\beta \in B$, on a

$$\mathrm{Gram}(e_a\,;\, a \in A,\, a \leqslant n/b) = \mathrm{Gram}(e_a\,;\, a \in A,\, a \leqslant (n-1)/b) \quad (b \neq \beta).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{D_n}{D_{n-1}} &= \frac{\mathrm{Gram}(e_a\,;\, a \in A,\, a \leqslant n/\beta)}{\mathrm{Gram}(e_a\,;\, a \in A,\, a \leqslant (n-1)/\beta)} \\ &= \frac{\mathrm{Gram}(e_a\,;\, a \in A,\, a \leqslant \alpha)}{\mathrm{Gram}(e_a\,;\, a \in A,\, a \leqslant \alpha - 1)} \\ &= \frac{D_\alpha}{D_{\alpha-1}}, \end{aligned} \tag{16}$$

puisque (16) ne dépend pas de β.

On peut donc appliquer la proposition 1 à la fonction arithmétique

$$f(n) = -\ln(D_n/D_{n-1}) \quad (n \in \mathbb{N}^*),$$

puisqu'elle vérifie $f(n) = f(n; A)$ et $f(n) \geqslant -\ln c(1)$ pour tout n. Le résultat s'en déduit. □

Proposition 8 *Soit $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{C}$ une fonction multiplicative, et $c : \mathbb{Q}^{+*} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par*

$$c(i/j) = \sigma\big(i/(i,j)\big) \cdot \overline{\sigma\big(j/(i,j)\big)} \quad (i, j \geqslant 1),$$

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le déterminant

$$D_n = \det\big(c(i/j)\big)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$$

est strictement positif.

Alors la suite $D_n^{1/n}$ est convergente.

Démonstration

Au point (*ii*) du Corollary 3.4, p. 274 de l'article [8], Hilberdink donne une expression de D_n :

$$D_n = \prod_p \prod_{k \geqslant 1} (\rho_{k+1}(p)/\rho_k(p))^{\lfloor n/p^k \rfloor},$$

où, pour tout nombre premier p,

$$\rho_k(p) = \frac{\Delta_k(p)}{\Delta_{k-1}(p)} \quad (k \geqslant 1),$$

où $\big(\Delta_k(p)\big)_{k\geqslant 1}$ est une suite de déterminants de Toeplitz usuels (additifs), hermitiens et positifs.

Le théorème de Fekete montre que les quotients $\rho_{k+1}(p)/\rho_k(p)$ sont tous $\leqslant 1$. Par conséquent,

$$\frac{1}{n}\ln D_n = \sum_p \sum_{k\geqslant 1} \ln\big(\rho_{k+1}(p)/\rho_k(p)\big)\frac{\lfloor n/p^k\rfloor}{n} \to \sum_p \sum_{k\geqslant 1} \frac{\ln\big(\rho_{k+1}(p)/\rho_k(p)\big)}{p^k} \quad (n\to\infty)$$

Dans ce cas, la dérivée de $\ln(D_n/D_{n-1})$ au sens de Bougaïef est $\leqslant 0$. □

Terminons par deux remarques sur cette proposition 8. D'abord, le Theorem 3.2, p. 274 de [8] montre que l'hypothèse de stricte positivité des déterminants D_n équivaut à la stricte positivité des déterminants $\Delta_k(p)$ (notés $\det T_k(\widehat{f_p})$ par Hilberdink). Ensuite, la proposition 8 s'applique en particulier au cas, également considéré par Hilberdink, où la fonction σ est complètement multiplicative. Dans ce cas, les matrices M_n sont définies positives si, et seulement si $|\sigma(p)|<1$ pour tout nombre premier p. Le Corollary 5.1, p. 283 de [8], montre alors que

$$D_n^{1/n} \to \prod_p \big(1-|\sigma(p)|^2\big)^{1/p} \quad (n\to\infty).$$

Remerciements

La recherche ayant conduit à ces résultats a été subventionnée par le Conseil Européen de la Recherche (ERC), dans le Septième Programme-Cadre de l'Union Européenne (FP7/2007-2013), accord de subvention ERC n° 670239.

L'article a été, en partie, élaboré au printemps 2017, lors d'un séjour au département de mathématiques de l'University College de Londres. Je remercie Andrew Granville et cette institution pour les conditions de travail idéales dont j'ai alors bénéficié.

Références

[1] A. Besicovitch – « On the density of certain sequences of integers. », *Math. Ann.* **110** (1934), p. 336–341.

[2] N. V. Bougaïef – « Théorie des dérivées numériques », *Bull. Sci. Math. Astron. (2e série)* **10** (1876), p. 13–32.

[3] H. Daboussi – « On the density of direct factors of the set of positive integers. », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **19** (1979), p. 21–24.

[4] H. Davenport et P. Erdős – « On sequences of positive integers. », *Acta Arith.* **2** (1936), p. 147–151.

[5] — , « On sequences of positive integers. », *J. Indian Math. Soc., New Ser.* **15** (1951), p. 19–24.

[6] P. Erdős – « On the density of some sequences of integers. », *Bull. Am. Math. Soc.* **54** (1948), p. 685–692.

[7] P. Erdős, B. Saffari et R. Vaughan – « On the asymptotic density of sets of integers. II. », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **19** (1979), p. 17–20.

[8] T. Hilberdink – « Determinants of multiplicative Toeplitz matrices. », *Acta Arith.* **125** (2006), p. 265–284.

[9] N. Nikolski – *Matrices et opérateurs de Toeplitz*, Calvage et Mounet, Paris, 2017.

[10] B. Saffari – « On the asymptotic density of sets of integers. », *J. Lond. Math. Soc., II. Ser.* **13** (1976), p. 475–485.

[11] G. Szegő – « Ein Grenzwertsatz über die *Toeplitz*schen Determinanten einer reellen positiven Funktion. », *Math. Ann.* **76** (1915), p. 490–503.

BALAZARD, Michel
Aix Marseille Université, CNRS, Centrale Marseille, I2M UMR 7373
13453 Marseille
FRANCE
Adresse électronique : `balazard@math.cnrs.fr`