



HAL
open science

Le si du mathématicien

Eric Morvan

► **To cite this version:**

Eric Morvan. Le si du mathématicien. Bulletin de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques, 2016, Bulletin vert, 255, pp.69. hal-01876879

HAL Id: hal-01876879

<https://hal.science/hal-01876879>

Submitted on 19 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Le *si* du mathématicien

par **Éric MORVAN**

Lycée Bertran-de-Born, Périgueux

Résumé

Cet article, placé dans le cadre de la linguistique de l'énonciation et s'appuyant sur des exemples authentiques et inventés, a pour objet l'étude dans le discours mathématique en français des énoncés utilisant la structure *si p, q*, où *p* et *q* sont deux propositions. Nous nous intéressons aux possibilités et aux problèmes de la transcription de ces énoncés en langage logique, plus particulièrement ceux qui n'expriment pas une implication de *p* vers *q*. Nous utilisons un modèle descriptif de *si* pour expliquer certains effets de sens rencontrés, qui entrent parfois en conflit avec les règles du raisonnement déductif que doit respecter le discours mathématique.

Summary

We intend in this article to study utterances in French mathematical discourse using the *si p, q* [*if p, q*] structure, where *p* and *q* are two propositions. We use both invented and original examples, and work within the framework of utterance linguistics. We investigate the possibilities and problems of the transcription of those utterances in logical language, more specifically when no implication from *p* to *q* is expressed. We use a descriptive model to explain some meanings induced by the use of *si* [*if*] which sometimes conflict with the rules of deductive reasoning whom mathematical discourse must comply with.

Mots-clés

Discours mathématique, si, implication, condition nécessaire, condition suffisante.

Keywords

Mathematical discourse, if, implication, necessary condition, sufficient condition.

Introduction

Depuis les travaux d'Émile Benveniste dans les années 60, les linguistes distinguent phrase et énoncé. Une *phrase* est « une entité linguistique abstraite, purement théorique, en l'occurrence un ensemble de mots combinés selon les règles de la syntaxe, ensemble pris hors de toute situation de discours ; ce que produit un locuteur, ce qu'entend un auditeur, ce n'est [...] pas une phrase, mais un *énoncé* particulier d'une phrase » (Ducrot 1980 : 7). Tout *discours* est une succession d'énoncés, chaque énoncé étant le résultat de l'écriture ou de la prononciation d'une phrase dans une certaine situation de communication, appelée *situation d'énonciation*¹. Les éléments essentiels de cette situation sont d'une part le couple auteur/lecteur ou locuteur/interlocuteur et d'autre part les conditions matérielles de la production — par exemple le moment et le lieu pour un discours oral, la date d'édition et l'objectif affiché pour un texte.

Dans cet article nous appelons *discours mathématique* toute production écrite ou orale dans une langue naturelle ayant pour objectif de transmettre des connaissances mathématiques. Nous nous intéresserons aux énoncés employant des structures phrastiques du type *si p, q* (ou *si p, alors q*), où *p* et *q* sont deux propositions². Nous chercherons à mettre en évidence un certain nombre de fonctions de cette structure et donc de la particule *si*, dont certaines surprendront peut-être les lecteurs mathématiciens.

I. *Si p, q* dans le discours mathématique

Le discours mathématique utilise des symboles spécifiques aux mathématiques et présente des opérations effectuées sur ces symboles mais les discours mathématiques ne peuvent être produits oralement ou par écrit que dans une langue naturelle. La nécessité de procéder dans l'exposition de résultats mathématiques par déductions successives respectant les règles de la logique formelle entraîne l'emploi fréquent de propositions du type *si p, q*.

I.1 Utilisation de *si p, q* pour exprimer une implication

Les mathématiciens ont tendance à considérer que la caractéristique des énoncés utilisant la structure *si p, q* est d'exprimer une relation d'implication de *p* vers *q* ou — ce qui revient au même en logique formelle — d'exprimer que *p* est une condition suffisante de *q*.

Effectivement, *si p, q* remplit cette fonction dans un grand nombre d'énoncés tels que :

- (1) Si la série $\sum a_n$ est convergente, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.³
- (2) Si *A* est une partie compacte d'un espace métrique *E*, toute suite de points de *A* n'admet de valeurs d'accumulation que dans *A*, et si elle n'en a qu'une, c'est sa limite.⁴

1. Une même phrase peut engendrer différents énoncés. Ainsi, la phrase « Je ne sais pas » a des significations fort différentes selon qu'elle est prononcée par un accusé devant un tribunal, par un candidat à un jeu télévisé, par une maman répondant distraitemment à son enfant, etc. De manière générale, « les formes linguistiques doivent être mises en relation avec la situation d'énonciation pour être complètement interprétées » (Riegel, Pellat & Rioul 1994 : 970).

2. On peut définir les propositions en langue naturelle comme des unités syntaxiques contenant au moins un sujet et un verbe. Comme ce sont des phrases ou des éléments de phrase, elles sont définies avant toute énonciation.

3. Lussier, F. & al. (2008). *Mathématiques tout-en-un. BCPST 2^e année*. Paris : Dunod, p. 84.

4. Descombes, R. (1962). *Cours d'analyse pour le Certificat de Mathématiques I*. Paris : Vuibert, p. 40.

Considérons maintenant deux exemples inventés :

(3) Si la fonction f est dérivable, elle est continue.

(4) Si un nombre premier est parfait, il est au moins égal à 6.

On peut déjà noter sur (3) et (4) que les deux propositions p et q n'ont pas le même statut déclaratif : p n'est pas assertée⁵ (on **suppose** dans (3) que f est dérivable), alors que q est assertée (on **affirme** que f est continue). De ce fait un énoncé tel que

(5) * Si $15 = 3 \times 5$, alors 15 n'est pas un nombre premier⁶

semble inutilement précautionneux : le lecteur sait bien que la proposition $p = \ll 15 = 3 \times 5 \gg$ est vraie et il s'étonnerait qu'on ait besoin d'en faire l'hypothèse pour affirmer $q = \ll 15 \text{ n'est pas un nombre premier} \gg$. L'énoncé (6) est plus naturel :

(6) $15 = 3 \times 5$ donc 15 n'est pas un nombre premier.

Notons que les énoncés (3) et (4) peuvent être paraphrasés par

(3') Toute fonction dérivable est continue.

(4') Tout nombre parfait est au moins égal à 6.

où ce qui est asserté n'est ni p ni q , mais la relation d'implication de p vers q , relation qu'on peut ici transcrire par $p \Rightarrow q$ en langage logique⁷ sans perte d'information. De tels exemples peuvent conduire à penser qu'une telle transcription est toujours possible, du moins pour les énoncés des discours mathématiques utilisant *si* p , q , et donc que l'étude de ces énoncés pourrait se faire avec les seuls outils de la logique propositionnelle. Les propositions étant des éléments de phrases, cela impliquerait que ces énoncés sont finalement indépendants de leur situation d'énonciation ! En effet,

« la création de la logique — comme étude du raisonnement — implique [...] une annulation du discours. Elle suppose que l'on puisse isoler des phrases ayant une valeur sémantique complète, indépendamment de tout contexte discursif, pour s'interroger ensuite sur leurs possibilités inférentielles [...]. C'est alors une hypothèse, certes intéressante, mais hardie, que de vouloir rendre compte des enchaînements discursifs effectifs à l'aide de concepts constitués précisément par négation du discursif. »
(Anscombe & Ducrot 1983 : 112)

Nous verrons aux § II, III et IV suffisamment d'exemples pour nous convaincre qu'une transcription systématique de langue naturelle en langage logique est au mieux réductrice, au pire impossible, et ce parfois même pour les énoncés des discours mathématiques.

I.2 Véracité et pertinence de l'implication de p vers q

Comparons les deux énoncés

(7) Si $2^{127} - 1$ est un nombre premier, $2^{126} \cdot (2^{127} - 1)$ est un nombre parfait.

5. Toutefois, le locuteur ou auteur, même s'il n'affirme pas que p est vraie, n'envisage pas qu'elle puisse être fausse.

6. Les énoncés précédés de * sont ceux qui sont considérés comme peu naturels, problématiques, voire inacceptables.

7. Dans cet article nous n'utilisons que la logique propositionnelle et nous appelons langage logique l'ensemble des moyens lexicaux et syntaxiques dont dispose l'utilisateur de cette logique formelle. Nous évitons de parler de langue logique pour rappeler que « [la] logique a créé son propre langage, mais il faut être attentif à ce que ce langage ne se parle pas. Certes le logicien prononce les signes qu'il écrit, mais ceci est bien loin de suffire à faire une langue, au sens des langues naturelles » (Grize 1997 : 19).

(8) * Si $3 + 3 = 6$, 6 est un nombre parfait.

Malgré leur similitude formelle, (7) et (8) seront accueillis très différemment par tout lecteur ayant des connaissances d'arithmétique : la déduction exprimée dans (7) s'appuie sur une formule connue depuis Euclide, alors que l'énonciation de (8) provoquerait vraisemblablement comme réplique : — Je ne vois pas le rapport ! Pourtant la transcription de (8) en langage logique est $Vrai \Rightarrow Vrai$, qui est une implication vraie.

De même l'énoncé également inacceptable

(9) * Si $3+3=5$, 6 est un nombre parfait.

se transcrit par $Faux \Rightarrow Vrai$, et cette implication est vraie aussi.

C'est parce qu'ils énoncent une proposition *si p, q* dans laquelle il n'y a aucun lien sémantique entre *p* et *q* que les énoncés (8) et (9) sont inacceptables. Or l'existence ou l'absence d'un tel lien et donc la pertinence de l'assertion d'une relation d'implication de *p* vers *q* s'évalue par référence à la situation d'énonciation qui est extra-linguistique, Cette référence est inévitable pour un énoncé en langue naturelle, alors qu'elle ne joue aucun rôle dans sa transcription en langage logique, où seules comptent les valeurs de vérité de *p* et *q*. D'où la possibilité qu'un énoncé inacceptable de structure *si p, q* produise en langage logique une implication vraie $p \Rightarrow q$.

Autre exemple, cette fois-ci authentique : dans (10), on comprend bien que le préambule « Carleson a démontré que » est indispensable pour justifier auprès du lecteur l'implication présentée.

(10) En 1966, Carleson a démontré que si $f \in L^2([0, 1], dt)$, alors

$$f(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=-N}^N c_n e^{2i\pi n x} \quad \text{pour presque tout } x.^8$$

Ceci dit, à condition de construire une situation d'énonciation *ad hoc*, tout énoncé exprimant une implication est envisageable. Ainsi, à un étudiant qui lui demandait : « — Prétendez-vous que de « $2 + 2 = 5$ », il s'ensuit que vous êtes le pape ? », Bertrand Russell proposa la démonstration suivante :

« (i) Supposons que $2 + 2 = 5$.

(ii) Soustrayons 2 de chaque membre de l'identité, nous obtenons $2 = 3$.

(iii) Par symétrie, $3 = 2$.

(iv) Soustrayons 1 de chaque côté, il vient $2 = 1$.

Maintenant le Pape et moi sommes deux. Puisque $2 = 1$, le Pape et moi sommes un. Par suite je suis le Pape »⁹.

De même, chacun pourra identifier une situation où l'énoncé

(11) S'il y a un restaurant dans cette rue, je veux bien être pendu !

est acceptable, bien que l'implication logique correspondant à l'intention du locuteur soit $Faux \Rightarrow Faux$.

8. Samuelides, M. & Touziller, L. (1990). *Analyse harmonique*. Toulouse : Cepadues, p. 25.

9. <http://therese.eveilleau.pagesperso-orange.fr/pages/paradoxe/textes/logique.htm>.

II. Dans *si p, q*, la proposition *p* n'est pas forcément une condition suffisante de *q*

Dans ce paragraphe, on passe en revue des énoncés utilisant la structure *si p, q* mais n'exprimant pas une relation d'implication de *p* vers *q*.

II.1 *p* seule peut ne pas être une condition suffisante de *q*

Dans un énoncé en *si p, q*, il arrive que *p* implique *q* **sous réserve que soient vérifiées certaines conditions supplémentaires**, qui restent implicites ou sont explicitées dans une autre partie du discours. Exemple :

(12) Attention, si tu joues avec les allumettes, tu vas mettre le feu.

En effet, pour que les allumettes prennent feu, encore faut-il qu'elles ne soient pas mouillées, qu'on les frotte sur le côté rugueux de la boîte, qu'il n'y ait pas trop de vent, etc. De Vogüé (1987 : 14) propose de considérer *p* comme une condition « minimale » de *q*, « *p* constituant alors ce que l'on peut appeler un « premier point » dans le domaine de ce qui permettrait d'atteindre *q* » : la proposition *p* seule est insuffisante à entraîner *q*, mais elle devient suffisante grâce à l'ajout de conditions supplémentaires. La relation d'implication de *p* vers *q* n'est donc validée que par référence à la situation d'énonciation. Or l'implication logique $p \Rightarrow q$ relie les deux propositions *p* et *q* en dehors de toute situation d'énonciation. Elle ne peut donc ici être considérée comme vraie.

Autre exemple, où l'on décrit un visiteur barbu à une personne qui ne l'a pas vu et qui s'exclame :

(13) S'il est barbu, c'est Georges !

On comprend bien que l'auteur de cette exclamation possède des informations supplémentaires lui permettant de faire cette déduction.

De tels énoncés peuvent se rencontrer dans le discours mathématique :

(14) THÉORÈME. S'il en est ainsi, la série de terme général u_n est convergente.¹⁰

(15) Si, de plus, tous ses éléments sont des vecteurs unitaires, alors la famille est orthonormale.¹¹

(16) Par exemple, si $G = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ muni de la mesure de Lebesgue, il est clair qu'on peut prendre le noyau de Poisson.

(17) Si nous cherchons à généraliser les résultats du chapitre I à des groupes non compacts comme l'ensemble des réels \mathbb{R} , des problèmes surgissent.¹²

Dans (14), pour que le lecteur valide l'implication de *p* = « il en est ainsi » vers *q*, il ne lui manque que d'identifier la propriété à laquelle renvoie *ainsi*, ce qui n'est pas très difficile puisqu'elle est présentée juste avant. (15) est un exemple analogue. En revanche, dans (16), un lecteur ne pourra valider *q* que si ses connaissances lui permettent d'approuver l'affirmation de l'auteur selon laquelle l'implication est « claire »¹³. Donc *q* ne peut en aucun cas

10. Cartan, H. (1967). *Cours de calcul différentiel*. Paris : Hermann, p. 14.

11. Goumi, M. & al. (2014). *PC-PC*. Maths*. Paris : Ellipses, p. 142.

12. Samuelides, M. & Touziller, L. (1990). *Analyse harmonique*. Toulouse : Cepadues, pp. 126 et 123.

13. L'utilisation d'une structure extraposée telle que *il est clair* que signale une prise en charge de l'assertion de *q* par l'auteur dans le but d'inciter le lecteur à lui faire confiance et à valider *q* malgré l'absence d'une chaîne de déductions explicites.

être validée indépendamment de la situation d'énonciation. Il en va de même pour (17) où il n'est pas sûr que tout lecteur sache à l'avance quels problèmes vont surgir.

II.2 *p* peut être une condition nécessaire et non suffisante de *q*

Considérons l'énoncé :

(18) S'il s'excuse, je suis prêt à lui pardonner.

L'intention du locuteur n'est pas ici de dire que la présentation d'excuses entraînera automatiquement le pardon. En revanche, l'absence d'excuses entraînera certainement l'absence de pardon. Et donc la proposition $p =$ « il s'excuse » est présentée plutôt comme une condition **nécessaire** de $q =$ « je suis prêt à lui pardonner ». Comparons les deux énoncés suivants :

(19) Si elle m'invite je viendrai volontiers.

(20) Je n'ai pas très envie de bouger mais, si elle m'invite, je viendrai.

Dans (19), l'adverbe « volontiers » indique que $p =$ « elle m'invite » suffit à $q =$ « je viendrai », donc $p \Rightarrow q$. Par contre, dans (20), le préambule « je n'ai pas très envie de bouger » oriente l'énoncé vers la conclusion $non-q =$ « je ne viendrai pas ». Puis, dans la deuxième partie de l'énoncé, le locuteur exprime que q est possible, à condition (nécessaire !) que p soit vérifiée. On peut d'ailleurs paraphraser (20) par (20') mais pas par (20'') :

(20') Je n'ai pas très envie de bouger ; pour que je vienne il va falloir qu'elle m'invite.

(20'') * Je n'ai pas très envie de bouger ; pour que je vienne, il suffit qu'elle m'invite.

III. Une description de *si* et ce qu'elle permet d'expliquer

III.1 *si* modifie le cadre du discours

Pour trouver un point commun aux nombreuses fonctions de *si*, Oswald Ducrot a proposé de considérer que, dans un énoncé utilisant la structure *si p, q*, l'auteur du discours demande au destinataire

« d'accepter pour un temps une certaine proposition p qui devient, provisoirement, le cadre du discours, et notamment de la proposition principale q . [...] Une proposition du type *si p, q* n'a pas pour signification première « p est cause de q » ni « p est condition de q » [...]. Sa valeur fondamentale est de permettre la réalisation de deux actes illocutoires : 1° demander à l'auditeur d'imaginer p , 2° une fois le dialogue introduit dans cette situation imaginaire, y affirmer q . » (Ducrot 1991 : 167-168)

Les deux actes décrits par Ducrot apparaissent clairement dans le dialogue suivant (de Vogüé 1987 : 16) :

(21) — S'il y a du verglas, comment est-ce que tu rentres ?

— Je prends la voiture, je n'ai pas le choix !

Ici, la prise en compte de la situation définie par $p =$ « il y a du verglas » modifie considérablement le sens de $q =$ « je prends la voiture ». L'assertion de q est surprenante compte tenu du fait que p est vraie, d'où la nécessité de la justifier par l'absence de choix.

Une autre illustration de la pertinence de cette description de *si* se trouve dans les énoncés où *si* introduit non pas une hypothèse, mais une éventualité (de Vogüé 2004 : 91-92), comme

(22) S'il entre, tu te tais.

qui est paraphrasable par

(22') Dans l'éventualité où il entre, tu te tais.

plutôt que par

(22'') * Dans l'hypothèse où il entre, tu te tais.

L'assertion de $p = \text{« il entre »}$ a ici pour effet de contraindre l'interlocuteur à envisager la situation où une troisième personne est entrée. Ce qui entraîne $q = \text{« tu te tais »}$, ce n'est pas à proprement parler p , mais **la situation** créée par p . D'ailleurs, l'interlocuteur peut répondre :

(23) Non, s'il entre, je vais lui dire ses quatre vérités,

où il énonce la proposition *si p, non-q*. Si on les transcrit en langage logique, les deux énoncés (22) et (23) donnent $p \Rightarrow q$ et $p \Rightarrow \text{non} - q$ qui sont deux implications contradictoires. Cela ne les empêche pas d'être tous deux acceptables dans la situation d'énonciation définie par *si p*.

Même dans les discours mathématiques, on rencontre de nombreux énoncés où *si p* a pour seul effet de poser un cadre où q est ensuite assertée. Il s'agit en premier lieu d'énoncés où p introduit une ou plusieurs notations, comme

(24) Si E, F sont deux K -espaces vectoriels de dimension finie et $f \in L(E, F)$, alors

$$\dim E = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f. \text{ }^{14}$$

Parfois, *si p* a le double effet d'introduire des notations et de poser des hypothèses :

(25) Si V est un sous-espace fermé de H , si $y \in H$, $y \notin V$, et si V^* est l'espace engendré par V et y , alors V^* est fermé. ¹⁵

En second lieu on a des énoncés où q est un commentaire sur la situation créée par p :

(26) Si cette tentative de majoration échoue, il se peut que $f(x, y)$ ne tende pas vers 0 en $(0, 0)$.

(27) Si la série $\sum \int_I |f_n|$ diverge, on ne peut pas utiliser le théorème d'intégration terme à terme sur un intervalle. ¹⁶

III.2 Le problème de la contraposition

La description de Ducrot permet d'expliquer pourquoi il est parfois possible et parfois impossible de contraposer des énoncés en *si p, q*. Ainsi, l'énoncé

(28) S'il m'interroge, je lui répondrai

a pour contraposé

(29) Si je ne lui ai pas répondu c'est parce qu'il ne m'a pas interrogé

qui est tout à fait cohérent avec l'énoncé initial. Par contre, l'énoncé

(30) S'il m'interroge, je ne lui répondrai pas

14. Cabane, R. & Leboeuf, C. (1987). *Espaces vectoriels et polynômes*. Paris : Ellipses, p. 97.

15. Rudin, W. (1978). *Analyse réelle et complexe*. Paris : Masson, p. 79.

16. Goumi, M. & al. (2014). *PC-PC*. Maths*. Paris : Ellipses, pp. 149 et 400.

a pour contraposé

(31) * Si je lui ai répondu c'est parce qu'il ne m'a pas interrogé

qui est absurde.

Dans (28) et (30), p = « il m'interroge » ; donc, dans les énoncés contraposés (29) et (31) la conclusion est $non-p$ = « il ne m'interroge pas ». Dans (28), la conclusion est q = « je lui réponds », d'où $non-q$ = « je ne lui réponds pas ». Or $non-q$ est compatible avec les situations définies par p et $non-p$, ce qui rend possible l'énoncé contraposé (29). En revanche, dans (30), la conclusion est q = « je ne lui réponds pas », d'où $non-q$ = « je lui réponds ». Ici, $non-q$ est compatible avec la situation définie par p mais incompatible avec celle définie par $non-p$, ce qui interdit l'énoncé contraposé (31)¹⁷.

Le modèle de Ducrot permet également de démontrer le mécanisme faussement implicatif de sophismes tels que celui-ci (Ducrot 1991 : 184) :

(32) Si tu désires la Légion d'honneur, il faut la demander. Or il est faux que tu doives la demander. Donc tu ne la désires pas.

En effet l'utilisation de *si p* a pour effet de placer le discours dans une situation d'énonciation où p est vraie, donc la proposition q n'est pas considérée indépendamment de p ; il s'agit en fait de « **q sachant que p est vraie** ». De ce fait, la première phrase de (32) peut être transcrite en langage logique par p = « tu désires la Légion d'Honneur » \Rightarrow q = « sachant que tu la désires, il faut la demander ». On en déduit par contraposition $non-q \Rightarrow non-p$. Mais, dans la deuxième phrase, q a été subrepticement remplacée par q' = « il faut la demander », qui est une proposition fautive. Donc la transcription logique des 2^e et 3^e phrases est $non-q' \Rightarrow non-p$, qui n'a aucune raison d'être vraie, contrairement à ce que l'énoncé affirme.

III.3 Le glissement de la condition suffisante à la condition nécessaire

L'énonciation d'une proposition *si p, q* suggère l'existence d'une relation de dépendance entre p et q ; sinon, à quoi bon poser p avant d'affirmer q ? De ce fait le destinataire du discours est tenté de penser que p est non seulement une condition suffisante d'énonciation de q , mais aussi une condition nécessaire. Ainsi, l'enfant qui entend *Si tu fais tes devoirs avant le dîner, tu auras un bon dessert* comprend aussi (et à juste titre) que, pour avoir un bon dessert, il lui faut faire ses devoirs. Ducrot (1991 : 169-170) explique ce phénomène de glissement sémantique (bien connu de tous les enseignants de mathématiques !) par l'existence de la **loi linguistique d'exhaustivité** : « cette loi exige que le locuteur [ou l'auteur] donne, sur le thème dont il parle, les renseignements les plus forts qu'il possède, et qui sont susceptibles d'intéresser le destinataire » (Ducrot 1991 : 134). Il s'agit en quelque sorte d'un

17. Autre exemple de contraposition impossible, où le mécanisme explicatif est toutefois différent (Ducrot 1991 : 176) : *Si tu as soif il y a de la bière au frigo* a pour énoncé contraposé * *Si il n'y a pas de bière au frigo, c'est que tu n'as pas soif*, ce qui est absurde. Il faut ici remarquer que p = « tu as soif » n'a aucune raison d'entraîner q = « il y a de la bière au frigo » : il n'y a même aucun lien a priori entre p et q . Ce que p justifie, c'est l'action d'énoncer q . On pourrait paraphraser par : *Si tu as soif, cela t'intéressera que je te dise qu'il y a de la bière au frigo*. L'énoncé contraposé devient alors tout à fait acceptable : *Si cela ne t'intéresse pas que je te dise qu'il y a de la bière au frigo, c'est parce que tu n'as pas soif*. « Que conclure de ces [échecs de contraposition] ? Ils montrent à coup sûr que nous n'avons pas trouvé, dans le langage logique dont nous disposons, une transcription qui convienne à tous les *si* du français [...]. Cependant, cet échec lui-même n'est pas sans intérêt car il permet de faire éclater les catégories, en montrant la grande diversité des emplois [de *si*] » (Ducrot 1973 : 77), dont nous verrons quelques autres exemples au § IV.

contrat implicite entre l'auteur et le destinataire du discours qui, lorsqu'il n'est pas respecté, induit le destinataire en erreur¹⁸.

La loi d'exhaustivité explique bien le glissement de la condition suffisante à la condition nécessaire. En effet l'énoncé en *si p, q* affirme la véracité de « *q* sachant que *p* est vraie ». Or la véracité de *q* seule serait une affirmation plus forte puisqu'elle implique la véracité de « *q* sachant que *p* est vraie ». Cette affirmation n'ayant pas été faite, le destinataire du discours en conclut d'après la loi d'exhaustivité qu'elle ne pouvait pas être faite, donc que « *q* sans *p* » est impossible et donc que *p* est une condition nécessaire de *q*¹⁹.

Notons que, si on n'accepte pas l'hypothèse que l'utilisation de *si p* modifie le cadre du discours, la loi d'exhaustivité ne permet plus d'expliquer le glissement de la condition suffisante à la condition nécessaire. En effet, si la situation d'énonciation ne fait pas référence à *p*, il n'y a aucune raison de considérer que « *p* est condition nécessaire de *q* » est une affirmation plus forte que « *p* est condition suffisante de *q* ».

Il est intéressant de remarquer que même le lecteur mathématicien d'un texte mathématique considère parfois qu'une proposition *si p, q* exprime que *p* est une condition nécessaire **et suffisante** de *q*. On peut observer ce phénomène dans les énoncés posant une définition ou introduisant une notation :

(33) Si *f* est une fonction complexe définie presque partout et intégrable sur un intervalle *I* pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , on appelle intégrale indéfinie de *f* la fonction complexe définie sur *I* par $x \mapsto F(x) = \int_a^x f(u) du + C$.²⁰

(34) Si $t_0 \in I$, le point $\gamma(t_0)$ s'appelle le point de paramètre t_0 sur la courbe γ .²¹

(35) Si $x \in \Delta$, on pose $f_n(x) = n^{-\alpha} x^2 e^{-nx}$ pour $n \geq 1$.²²

(36) Si la fonction $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue ainsi que toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre *p*, on notera $g \in \mathcal{C}^p([a, b], \mathbb{R}^n)$.²³

Ainsi, dans (35) le lecteur comprend (à juste raison) que la notation $f_n(x)$ ne doit être utilisée que si *x* appartient à Δ , alors que l'énoncé implicite n'interdit pas *stricto sensu* d'utiliser cette notation pour *x* n'appartenant pas à Δ . Dans (36) l'auteur veut dire — et le lecteur comprend — que la notation $\mathcal{C}^p([a, b], \mathbb{R}^n)$ est utilisable si et seulement si *g* et ses dérivées jusqu'à l'ordre *p* sont continues. Dans ces énoncés, c'est l'action de la loi d'exhaustivité qui permet à l'auteur et au lecteur de s'accorder sur la signification de l'énoncé.

18. Ainsi, afficher *Magasin ouvert du mardi au samedi* sous-entend, en vertu de la loi d'exhaustivité, qu'on ne peut pas afficher *Magasin ouvert du lundi au samedi* et donc que le magasin est fermé le lundi. C'est d'ailleurs ainsi que l'affiche est communément comprise ; le lecteur s'estimerait trompé s'il découvrait que le magasin est aussi ouvert le lundi. En vertu de la loi d'exhaustivité, l'affiche est comprise (à juste titre) comme : *Magasin ouvert du mardi au samedi, fermé dimanche et lundi*. Autre exemple : l'information *Pour postuler à cette école, un niveau bac+2 suffit* serait trompeuse si un niveau bac permettait aussi de postuler.

19. La loi d'exhaustivité permet aussi expliquer les glissements de la condition nécessaire à la condition suffisante. Ainsi l'information *Un passeport valide est exigé pour passer la frontière* sous-entend, en l'absence d'autres précisions, qu'un passeport valide suffit.

20. Descombes, R. (1962). *Cours d'analyse pour le Certificat de Mathématiques I*. Paris : Vuibert, p. 273. Notons que cet ouvrage, comme beaucoup d'autres, utilise plus souvent dans les définitions la structure *q, si p*. Par exemple : *L'application f de K = [a, b] \subset \mathbb{R} dans un espace métrique (E, d) est dite À VARIATION BORNÉE SUR K si V_f(a, b) est fini*.

21. Lehmann, D. & Sacré, C. (1982). *Géométrie et topologie des surfaces*. Paris : PUF, p. 86.

22. Bouvier, A. (1971). *Théorie élémentaire des séries*. Paris : Hermann, p. 214.

23. Sibony, M. & Mardon, J.-Cl. (1984). *Approximations et équations différentielles*. Paris : Hermann, p. V.1.

IV. Autres emplois de *si p, q*

Dans les discours non mathématiques, il existe des énoncés en *si p, q* où *p* ne peut pas « être interprétée comme figurant une condition de *q* » (de Vogüé 2004 : 105) comme aux § I et II, et où *q* est utilisée pour faire une « évaluation » de *p*. Le lien entre *p* et *q* n'étant pas d'ordre implicatif, l'évaluation ne consiste pas à décider de la vérité ou de la fausseté de *p* et elle peut d'ailleurs être de nature assez variable comme le montrent les quelques exemples qui suivent²⁴.

L'énoncé peut simplement établir un commentaire « contrastif » de *p* par *q* :

(37) Si la Cité est le cœur de Paris, le Quartier Latin en est l'âme.

L'énoncé peut être « concessif » comme dans

(38) Si je suis ta femme, je ne suis pas ton esclave

où, en utilisant *si p, non-q*, l'énonciateur concède la vérité de *p* tout en la relativisant par rejet de l'implication $p \Rightarrow q$: *Je suis ta femme mais je ne suis pas ton esclave*.

La vérité de *p* peut être fortement mise en doute par l'affirmation de *q* :

(39) S'il l'aime, cela ne se voit pas

ou au contraire renforcée par l'affirmation de *q* :

(40) Si la fortune l'avait fait naître un grand roi, la nature lui en avait aussi donné l'apparence.

Tous ces emplois de *si p, q* résultent d'« effets de sens produits par les formes verbales et les contenus propositionnels de *p* et de *q* [...] à partir de la fonction commune à tous les emplois de *si* : poser ou plutôt présupposer le cadre situationnel, sans l'asserter comme fait particulier. C'est le contexte qui permet d'interpréter ce cadre comme conditionnel, implicatif ou contrastif [entre autres] ». (Riegel, Pellat & Rioul 1994 : 853).

Enfin, en utilisant le conditionnel dans *q*, on arrive aux énoncés « contrefactuels » où l'énonciateur nie la vérité ou du moins la vraisemblance de *p* en exposant des conséquences fausses ou invraisemblables : *Si j'avais gagné au loto, je ne continuerais pas à travailler!* Cette démarche est similaire à celle du raisonnement par l'absurde du discours mathématique, où *p* est supposée vraie dans le seul but d'en déduire une proposition *q* qui soit fausse :

(41) Si la série harmonique converge, de somme *S*, on aurait, par passage à la limite dans les inégalités, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_{2n} - S_n = S - S = 0 \geq \frac{1}{2}$.²⁵

Conclusion

Après avoir rappelé au § I qu'un énoncé utilisant la structure *si p, q* est susceptible (sous certaines conditions) d'exprimer une relation d'implication de *p* vers *q*, nous avons constaté au § II que la validité de cette relation d'implication peut être indissociable de la situation d'énonciation et que la transcription en une implication logique $p \Rightarrow q$ est dans ce cas impossible, parfois même pour des énoncés extraits de discours mathématiques.

24. Pour une classification plus complète, voir Ducrot (1991 : 175-178) et de Vogüé (2004 : 102-105).

25. Lussier, F. & al. (2008). Mathématiques tout-en-un. BCPST 2^e année. Paris : Dunod, p. 85.

Au § §III, le modèle descriptif de Ducrot qui nous a permis d'expliquer certains effets de sens dus à l'utilisation de *si* et certains problèmes qui surgissent lors de la transcription d'un énoncé de langue naturelle en langage logique. Bien entendu, l'explication de ces problèmes passe par la considération de la situation d'énonciation. De nouveau, des exemples extraits de discours mathématiques ont pu être présentés.

Enfin, les quelques exemples donnés au §IV, hors discours mathématique, servent à rappeler que la structure *si p, q* permet aussi d'exprimer des relations entre *p* et *q* qui ne sont pas d'ordre logique.

Il est donc confirmé qu'on ne peut pas rendre compte de la richesse d'un discours, même mathématique, en n'utilisant que le vocabulaire du langage logique. Toutefois, « il arrive que les opérateurs logiques aient entre eux des rapports analogues à ceux que les entités linguistiques ont entre elles » (Ducrot 1973 : 69) et il est toujours intéressant de mettre en évidence les situations où les énoncés en langue naturelle se conforment aux règles logiques et les situations où ils s'en écartent, voire les contredisent. Dans ce but, le discours mathématique fournit évidemment un terrain fertile d'étude, puisque les auteurs ou locuteurs doivent présenter dans une langue naturelle des raisonnements déductifs, et en même temps ont à leur disposition les ressources argumentatives de la langue naturelle dont les règles d'utilisation diffèrent des règles de la logique formelle, voire les contredisent. Pensons par exemple aux « opérations du genre *or, car, comme, parce que, puisque* [...] qui émaillent les démonstrations mathématiques et que l'algèbre de Boole ignore » (Grize 1997 : 76-77). Mais ceci est un autre sujet...

Bibliographie

- Anscombre, Jean-Claude & Ducrot, Oswald (1983). *L'argumentation dans la langue*. Bruxelles : Pierre Mardaga.
- Ducrot, Oswald (1973). *La preuve et le dire*. Paris : Mame.
- Ducrot, Oswald (1980). *Les mots du discours*. Paris : Éditions de minuit.
- Ducrot, Oswald (1991). *Dire et ne pas dire*. Paris : Hermann.
- Grize, Jean-Blaise (1997). *Logique et langage*. Gap : Ophrys.
- Riegel, Martin, Pellat, Jean-Christophe & Rioul, René (1994). *Grammaire méthodique du français*. Paris : Presses Universitaires de France.
- Vogüé, Sarah (de) (1987). « *Si*, la condition nécessaire et la condition suffisante » in Riegel, Martin et Tamba, Irène (éds). *L'implication dans les langues naturelles et dans les langages artificiels*. Paris : Klincksieck. 9-21.
- Vogüé, Sarah (de) (2004). « *Si*, au centre et aux marges de la condition » in Hare, Cecilia (éd). *L'hypothèse au miroir des langues*. Paris : L'Harmattan. 85-117.