HAL
open science

Lo Stosszahlansatz, la sua storia ed il suo ruolo in alcuni lavori di Einstein

Giuseppe Iurato, Paolo Rossi

To cite this version:

Giuseppe Iurato, Paolo Rossi. Lo Stosszahlansatz, la sua storia ed il suo ruolo in alcuni lavori di Einstein. 104° Congresso Nazionale della Società Italiana di Fisica, SIF - Università della Calabria (IT), Sep 2018, Arcavacata di Rende (CS), Italy. hal-01875354

HAL Id: hal-01875354

https://hal.science/hal-01875354

Submitted on 17 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Lo *Stosszahlansatz*, la sua storia ed il suo ruolo in alcuni lavori di Einstein

G. Iurato, P. Rossi[1]

Lo *Stosszahlansatz*[2] (o *Stosszahl-Ansatz* o anche *ipotesi del caos molecolare*) è un'ipotesi statistica sulla possibile forma matematica di certe funzioni di distribuzione della termodinamica statistica, fattorizzabili[3], con cui si suppone che non vi sia alcuna correlazione tra le velocità e le posizioni delle diverse molecole di un gas[4], ipotesi di cui prime formulazioni, poi rese sempre più esplicite,

---

[1] Dipartimento di Fisica "Enrico Fermi", Università di Pisa, Pisa (IT).

[2] La sua traduzione è all'incirca "assunto [Ansatz], o ipotesi o assunzione, sul numero di urti [Stosszahl]". Si dimostra, inoltre, come essa abbia diverse formulazioni equivalenti, così come numerose implicazioni, fra cui, intesa come ipotesi del caos molecolare, quella dell'isotropia spaziale, ovvero l'invarianza rispetto al gruppo $SO(3)$. Boltzmann dimostrò come la distribuzione oggi detta di Maxwell-Boltzmann sia l'unica a rispettare questa simmetria, chiarendo quali strette relazioni sussistano fra il punto di vista microscopico (proprio della meccanica statistica) e quello fenomenologico (della termodinamica) – cfr. (Pathria 1996, Historical Introduction), (Gruber et al., 1977). Non si suppone, invece, come si vedrà meglio in seguito, l'invarianza temporale; cfr. (Caldirola & Loinger 1979, Articoli VI, VII). Questo assunto, o ipotesi, del caos molecolare, venne introdotto da Boltzmann per la prima volta in (Boltzmann, 1872), per essere ancora utilizzato come tale in (Boltzmann, 1896-98; 1964) ma stavolta denominandolo *molecular Unordnung* (i.e., disordine, o caos, molecolare) – cfr. (Mehra 2001, Vol. I, Ch. 2, Sect. 3, p. 31).

[3] Quindi, esprimente l'indipendenza statistica delle collisioni fra le particelle del sistema gassoso in esame; cfr. (Mayer & Goeppert Mayer 1940, Ch. 10, Sect. 10c). Esistono poi altre formulazioni equivalenti a questa ipotesi o strettamente correlate ad essa; cfr. pure (Pauli, 1964a,b), (Dell'Antonio 1996, Cap. XVII), (Pathria, 1996). Inoltre, stante questa ipotesi di indipendenza statistica delle particelle componenti un certo sistema fisico, si dimostra come l'hamiltoniana di tale sistema è additiva, cioè essa può scindersi nella somma di hamiltoniane, funzioni solo delle coordinate e degli impulsi, di sottosistemi fisici aventi un numero finito di gradi di libertà, molto inferiore di quelli del sistema iniziale, cosicché avendo a che fare con particelle mutuamente indipendenti fra loro, la dinamica di un sistema fisico a N corpi può ridursi, con buona approssimazione, alla dinamica di N punti materiali. Questi sistemi vengono detti *ideali* e, nel caso essi schematizzino sistemi gassosi, allora si parla più propriamente di *gas di Boltzmann*; si ha che un sistema gassoso rarefatto approssima molto bene un tale sistema ideale (i.e., un gas di Boltzmann). Questo modello formale, introdotto da Boltzmann in teoria cinetica dei gas nella seconda metà del XIX secolo, rappresenta un modello tipico della meccanica statistica classica (Balescu 1985, Part 2, Ch. 5, Sects. 5.1-5.2; Part 3, Ch. 17; Ch. 19, Sect. 19.1). In meccanica statistica quantistica, poi, sussiste un stretta correlazione fra lo *Stosszahlansatz* di Boltzmann e la cosiddetta approssimazione di scattering secondo Born, detta semplicemente *approssimazione di Born*, che descrive l'urto di due particelle che si propagano l'una indipendentemente dall'altra e possono, al più, sottostare a urti binari. In ciò, Born riprende, a partire dagli anni 20', proprio i lavori di Einstein sull'effetto fotoelettrico (che discuteremo appresso) i quali gli suggeriranno, poi, la ben nota interpretazione statistica dell'ampiezza della funzione d'onda ψ; cfr. (Born, 1926a,b,c; 1927), (Kadanoff & Baym 1962, Ch. 4, Sect. 4.2, p. 32, Sect. 4.5; Ch. 7; Ch. 9, Sect. 9.2). Questi risultati di Born, poi, conseguiti in teoria dello scattering, possono riconnettersi al lavoro di Boltzmann in meccanica statistica (del 1872 e di cui sopra detto) attraverso i metodi formali basati sulla funzione di Green; cfr. (Kadanoff & Baym, 1962).

[4] Cfr. (Hollinger 1960, Ch. V), (Boltzmann, 1964), (Pauli 1964b, Cap. 1), (Penrose 1970, Ch. V, Sect. 8), (Thompson 1972, Ch. 1), (Balescu 1975, Part 3, Ch. 11, Sect. 11.5), (Born 1976, Cap. 1, § 2), (McQuarrie 1976, Ch. 18, Sect. 18-4), (Molinari & Montagnini 1978, Cap. III, § 3.2, p. 41), (Pescetti 1975, Cap. 6, § 6.3), (Ellis 1985, Ch. III), (Kubo et al. 1985, Ch. 2, Sect. 2.8), (Grandy 1987-88, Vol. I, Ch. 1, Sect. B), (Gallavotti 1982; 1999, Ch. I, Sect. 1.8; 2014), (Falcioni & Vulpiani 2015, Capp. 4, 5). Quest'ipotesi è ancor oggi molto discussa, soprattutto a livello logico e fisico-matematico – cfr. (Emch 1984, Ch. 2, Sect. 2.2, p. 53), (Bellomo 1987, p. 143), (Dobrushin et al. 1989, § 6.1), (Ageno, 1992), (Pathria 1996, Historical Introduction), (Fasano & Marmi 2002, Cap. 14, § 14.2), (Presutti 2009, Chs. 1, 2, Sect. 2.3), (Falcioni & Vulpiani 2015, Cap. 4) –, come lo fu allorché venne introdotta dallo stesso Boltzmann, in quanto implicante dei paradossi – alcuni rilevati da Johan J. Loschmidt (in merito alla reversibilità) ed Ernst Zermelo (riguardo alla ricorrenza di Poincaré); cfr. (Zermelo 2013, pp. 197-214) – nonché, per l'irreversibilità temporale che comporta, delle evidenti incompatibilità con la reversibilità della meccanica classica (Schrödinger 1961, pp. 146-151), (Sakurai 1964, Ch. 4, Sect. 4.1), (Guerra 1980, § 5), (Carrà 1990, p. 13), (Balin 2007, Vol. II, Sect. 15.4). Successivamente, altri autori hanno lavorato su quest'ipotesi, fornendo varie argomentazioni molte delle quali si possono trovar menzionate in (McQuarrie 1976, Ch. 18, Sects. 18-4/5; Problems 18-28/29, pp. 422-425); cfr. pure (Falcioni & Vulpiani 2015, Cap. 4). Dal punto di vista formale, poi, di questa ipotesi è stata fornita una deduzione meramente fisico-matematica da parte di Oscar E. Lanford III nel 1975 – cfr. per esempio (Ellis, 1985), (Fasano & Marmi 2002, Cap. 14, § 14.2) e referenze ivi citate –, così come un'approfondita disamina, a livello formale, che ha inquadrato l'intera teoria dell'equazione di Boltzmann entro un schema fisico-matematico che ne chiarisce gli aspetti formali e dissipa le apparenti contraddizioni

furono avanzate da Rudolf J.E. Clausius nel 1857, da James C. Maxwell nei suoi primi lavori sulla teoria cinetica dei gas del 1860, quindi ripresa ed esplicitamente applicata[5] da Ludwig E. Boltzmann a partire dal[6] 1872, che la pose a base sia dell'equazione[7] sia del *teorema H* (da lui formulato nel

---

logiche cui questa teoria ha dato luogo, guardando allo *Stosszahlanzatz* come a un assunto riguardante solamente il comportamento statistico di un sistema fisico e non come un assioma della meccanica; cfr. (Falcioni & Vulpiani 2015, Cap. 4), (Barberousse 2018, Part II, Ch. 11, Sect. 3.1). D'altronde, lo stesso Boltzmann chiarì, già negli ultimi anni dell'Ottocento, i termini delle questioni sollevate da Loschmidt e Zermelo, puntualizzando sulla necessità logica di distinguere fra la reversibilità meccanica (microscopica) del moto delle particelle di un sistema fisico e l'irreversibilità (macroscopica) di altri fenomeni fisici che lo caratterizzano; cfr. (Gallavotti 1997, Cap. IV, § 31-(A)). Peraltro, già il semplice confronto fra il punto di vista macroscopico (quindi statistico) e quello microscopico – che porterà, tra l'altro, all'introduzione della cosiddetta *ipotesi ergodica*; cfr. (Arnold & Avez, 1968), (Caldirola, 1974), (Gallavotti, 1982) – è di per sé sufficiente a chiarire le eventuali discrepanze cui può dar luogo quest'ipotesi, se si considerano gli opportuni fattori di scala rispetto a cui i relativi fenomeni vengono indagati (Kac 1957, Appendix I), (Guerra 1980, § 5), (Emch 1984, Ch. 2, Sect. 2.2, p. 66).

[5] Cfr. (Boltzmann 1872, p. 323; 1877; 1896-98; 1964), (Brush, 1966), (Bellone, 1972), (Guerra 1980, § 5), (Cercignani 1988, 1997, 2003), (Pathria 1996, Historical Introduction).

[6] In (Boltzmann, 1872), l'autore delinea, per la prima volta, i metodi formali necessari per una trattazione teorica dei sistemi fisici in equilibrio termodinamico, partendo dal modello fisico di un gas rarefatto (nell'ipotesi di urti binari) che tende all'equilibrio, il cui approccio teorico è per l'appunto reso formalmente possibile tramite un'opportuna equazione integro-differenziale non lineare, oggi detta *equazione di Boltzmann*, che costituì la base formale primaria per la teoria cinetica dei gas, nonché di molti altri ambiti della fisica teorica (meccanica quantistica, meccanica statistica, teoria dei campi) ed applicata (astrofisica, struttura della materia, fisica dello stato condensato, etc.) e della fisica matematica (fluidodinamica, teoria dei sistemi dinamici, elettrodinamica e meccanica dei continui, etc.); cfr. (Cohen & Thirring, 1973), (Balescu, 1975), (Boccara 2004, Ch. 8).

[7] Cfr. (Chapman & Cowling, 1939), (Jeans, 1948), (Pierucci 1960, Cap. III), (Kadanoff & Baym, 1962), (Bellone, 1972), (Balescu 1975, Part 3, Ch. 11, Sect. 11.4; Part 3, Ch. 20, Sect. 20.3), (Cercignani, 1969; 1975; 1987; 1988; 1994; 1997; 2000; 2002), (Cohen & Thirring, 1973), (Dobrushin et al. 1989, § 6), (Maslova, 1989), (Carrà 1990, Cap. 14, § 14.5), (Gutzwiller 1990, Ch. 15, Sect. 15.4), (Huang 1997, Capp. 3, 4). Sia l'*equazione di Boltzmann* che l'omonima distribuzione (spesso detta anche *distribuzione di Maxwell-Boltzmann*) – cfr. (Mayer & Goeppert Mayer 1940, Ch. 1, Sects. 1e,f; Ch. 5), (Chandler 1987, Ch. 3, Sect. 3.3; Ch. 4, Introduction, Sect. 4.6) –, sono fondamentali per lo studio di numerosi sistemi fisici (classici) a molte particelle che evolvono verso l'equilibrio termodinamico per interazione (binaria) delle particelle loro componenti. La distribuzione di Boltzmann, che generalizza ed estende quella di Maxwell per la distribuzione del campo delle velocità, è stata posta a principio base della meccanica statistica e del suo impianto formale basato sulla *funzione di partizione*, a sua volta legata al famoso *fattore di Boltzmann* $e^{-\beta\varepsilon}$, con ε energia totale del componente elementare del dato sistema fisico in esame, ad esempio un atomo o una molecola, che ha un intrinseco significato probabilistico – cfr. (Feynman 1990, Ch. 1, Sect. 1.1), (Jimbo & Miwa 1995, Ch. 0, Sect. 0.1; Ch. 2, Sects. 2.1-2.2), (Pathria 1996, Historical Introduction), (Tosi 1997, Cap. 1, § 1.1), (Tosi & Vignolo 2005, Ch. 1, § 1.1), (Altland & Simons 2010, Ch. 1, Sect. 1.1). Gli elementi di base del metodo di Maxwell e Boltzmann adottato nella teoria cinetica dei gas, sono anzitutto la presupposizione di urti binari e l'ipotesi che la velocità di evoluzione dei processi fisici è proporzionale alla concentrazione di massa dei singoli componenti; esempi di applicazione di questa potente metodologia si ebbero subito in cinetica chimica e nello studio di base del decadimento radioattivo (Chiorboli 1980, Parte I, Cap. II; Parte II, Cap. XI). Inoltre, i molti risultati conseguiti da Boltzmann in meccanica statistica classica, oltre ad aver dato luogo tra l'altro ai metodi della cosiddetta *matrice densità* in meccanica quantistica – cfr. (D'Espagnat 1977, Parte II, Cap. VI), (Schulman 1981, Ch. 26), (Chandler 1987, Ch. 3, Sect. 3.3, p. 64; Ch. 5, Sect. 5.8), (Feynman 1990, Ch. 2), (Sakurai 1990, Cap. 3, § 3.4) –, sono stati centrali nella teoria del trasporto e nella fisica dei sistemi a molti corpi – cfr. (Kadanoff & Baym 1962, Ch. 5), (Forster, 1975), (Lifšits & Pitaevskij, 1981; 1984), (Strocchi, 1985), (Kittel & Kroemer 1985, Cap. 14, § 14.4), (Sewell, 1986), (Chandler 1987, Ch. 7), (Goldenfeld, 1992), (Tosi, 1997), (Polini & Tosi, 2006), (Ziman, 1960) –, nella teoria della diffusione di neutroni – cfr. (Pignedoli 1969b, Cap. X), (Boffi, 1969), (Castagnoli 1975, Cap. 6, § 6.3.1), (Reed & Simon 1975-80, Vol. III, Appendix XI.12), (Molinari & Montagnini, 1978), (Spiga et al. 1985, Cap. II), (Chiavassa et al., 1991), (Bassani & Grassano 2000, Cap. 10) –, così come nella dinamica di particelle cariche – cfr. (Golant et al. 1983, Cap. III, § 3.2) –, in fisica nucleare – cfr. (Eisenbud & Wigner, 1960), (Davydov, 1966), (Villi et al., 1971), (Villi & Zardi, 1975), (Bohr & Mottelson 1969-75, Vol. I, Ch. 2, Appendix 2B), (Barrow 1976, Cap. 13, § 13.7), (Ring & Schuck 1980, Ch. 13, Sect. 13.3), (Sitenko & Tartakovskij, 1981), (Spiga et al., 1985), (Alberico, 1992), (Povh et al. 1992, Cap. 19) –, in fisica dello stato solido – cfr. (Ziman, 1960), (Kubo, 1973), (Seeger & Pötzl, 1973), (Ashcroft & Mermin, 1976), (Davydov, 1984), (Colombo, 2002), (Fujita & Godoy, 2002), (Guzzi, 2004) – nonché, in ambito astrofisico, nella dinamica degli ammassi stellari e dei sistemi gravitanti, nella struttura e spettroscopia stellare – cfr. (Dirac 1924, § 6), (Gratton 1977, Vol. I, Cap. IV, § 4.5; Vol. II, Cap. XIV, § 14.5), (Kirillin et al. 1980, Cap. XV, § 91, pp. 584-587), (Zeldovič & Novikov, 1982), (Masani, 1980), (Masani & Gallino, 1980-83), (Masani, 1984), (Fridman & Polyachenko, 1984), (Collins 1989, Part I,

1877) che oggi portano il suo nome[8]. Questa basilare ipotesi[9] fondamentalmente sostiene, fra l'altro, l'indipendenza statistica (spesso, detta anche *indipendenza stocastica*) iniziale delle parti elementari (particelle) componenti un dato sistema fisico[10], ed è un'ipotesi cruciale per la termodinamica e la meccanica statistica[11].

Boltzmann la utilizzò come ipotesi iniziale di base nel dedurre – nel limite termodinamico di *Boltzmann-Grad* – l'equazione che porta il suo nome, ammettendo appunto, a $t = 0$, l'ipotesi di *caos molecolare* (*Stosszahlansatz*), cioè l'indipendenza statistica delle particelle (del dato sistema fisico in esame) solo nell'incipienza dell'urto e non dopo[12]. Per Paul e Tatiana Eherenfest[13], questa

---

Ch. 1; Part II, Ch. 11), (Padmanabhan 2000-02, Vol. I, Ch. 10), (Ciotti, 2000) –, in fluidodinamica astrofisica – cfr. (Collins, 1973), (Anile, 1989), (Kippenhahn & Weigert 1990, Ch. 13), (Battaner 1996, Ch. 3), (Nobili, 2002; 2003, Cap. 3), (Shore, 2007) – e, in cosmologia, nei modelli di universo a materia oscura non barionica – cfr. (Lucchin 1990, Cap. XIV, § 14.2) –, quindi, in teoria delle comunicazioni – cfr. (Shannon & Weaver, 1971), (Tartara 1986, Cap. 8), (Jaynes, 1986) –, in chimica fisica applicata – cfr. (Simonetta, 1966-67), (Astarita, 1967), (Carrà & Forni, 1974), (Carrà & Morbidelli, 1983), (Cervellati, 1995) –, in fisica dei plasmi – cfr. (Cabannes 1962, §§ 1, 2), (Lehnert 1964, Ch. 5, Sect. 1), (Artsimovič, 1975), (Golant et al. 1983, Capp. III-VI), (Pozzoli, 1984) – e nella fisica computazionale – cfr. (Dubin, 1974), (Gruber et al., 1977), (Baxter, 1982), (Chandler 1987, Ch. 6), (Succi, 2002; 2003), (Minguzzi et al., 2004), (Reza Bakhtiari, 2007), (McCoy 2010, Parts II, III). L'equazione di Boltzmann è poi strettamente correlata a notevoli equazioni della fisica matematica, quali le *equazioni di Navier-Stokes*, le *equazioni di Eulero*, le *equazioni di Hartree-Fock*, l'*equazione di Vlasov*, l'*equazione di Fokker-Planck*, l'*equazione di Landau*, etc. – cfr. (Kadanoff & Baym, 1962), (Balescu 1975, Part 3, Ch. 11, Sects. 11.6-7), (Cercignani, 1975; 1987; 1988), (Minelli 1984, Parte III, pp. III/138-III/141), (Lions, 1996-98; 1999) –, mentre la distribuzione di Boltzmann, nella sua versione quantistica, che è anche connessa alla cosiddetta formulazione della meccanica quantistica nell'approccio dello spazio delle fasi (*Phase Space formulation* of quantum mechanics), originariamente dovuta a Hermann Weyl e Eugene P. Wigner – cfr. (Weyl, 1927), (Wigner, 1932) – con i successivi contributi, tra gli altri, di Josè E. Moyal e Hilbrand J. Groenewold – cfr. (Groenewold, 1946), (Moyal, 1949), (Dubin et al., 2000); cfr. pure (Cercignani & Kremer, 2002), (de Groot & Suttorp, 1972) –, conduce, come si è già detto, al formalismo della *matrice densità* le cui previsioni statistiche su un dato stato quantistico si riducono, nel limite classico, a quelle fornite dalla funzione di distribuzione nello spazio delle fasi della meccanica statistica classica, corrispondente all'insieme completo delle osservabili fisiche che appunto definiscono tale stato quantico (Cini, 1991). Per i vari indirizzi, poi, della meccanica quantistica, cfr. (Gudder, 1988) e (Strocchi, 2008a).

[8] Cfr. (Castelfranchi 1959, Cap. III, §§ 25-27; Cap. XIX, §§ 212-213), (Kadanoff & Baym, 1962), (AA.VV., 1962-1979), (Balescu 1975, Part 3, Ch. 12, Sect. 12.2), (Jaynes, 1965), (Reatto 1976, Cap. 5.7), (Toraldo di Francia 1976, Cap. III, § 15), (Landau et al. 1978, Cap. IV), (Caldirola & Loinger 1979, Art. VI, § 5), (Guerra 1980, § 5), (Reichl 1980, Ch. 13, Sect. C, NN. 2, 3), (Toda et al. 1983, Ch. 2, Sect. 2.1), (Emch 1984, Ch. 2, Sect. 2.2), (Lifšits & Pitaevskij 1984, Cap. I), (Prigogine 1986, Cap. VII), (Evans & Morriss, 1990), (Prigogine & Stengers 1993, Cap. VII), (Presutti 1995, Introduzione), (Tosi 1997, Ch. 1, § 1.6), (Peliti 2003, Cap. 3, § 3.3), (Tosi & Vignolo 2005, Ch. 1, § 1.6; Ch. 7, § 7.1).

[9] Cfr. (Castelfranchi 1959, Cap. I, § 3), (Balescu 1975, Part 3, Ch. 19, Sect. 19.1), (Guerra 1980, § 5, p. 1094), (Lestienne 1980, § V, pp. 365-367), (Reatto 1976, Cap. 5.7, § 5.7.2, p. 85), (Turchetti 1998, Cap. 25, § 25.5), (Peliti 2003, Cap. 3, § 3.3).

[10] Cfr. (Thompson 1972, Ch. 1), (Resibois & de Leener, 1977), (Bellomo 1987, Cap. IX, § 9.2).

[11] Cfr. (Sommerfeld 1956, Ch. V, Sect. 41-E.), (Wu 1966, Introduction), (Born, 1967), (Born 1976, Cap. 8, §§ 57-59). Nel tentativo di dedurre tale ipotesi da altre più elementari riguardanti la dinamica microscopica del sistema fisico in esame, è stato possibile ricavare – ad opportuni limiti termodinamici – l'equazione di Boltzmann da altre equazioni riguardanti sistemi fisici più generali e complessivamente formanti la cosiddetta *gerarchia di equazioni di BBGKY* (come acronimo di Bogoliubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon); cfr. (Kac, 1957), (McQuarrie 1976, Ch. 18), (Molinari & Montagnini 1978, Capp. II, III), (Kubo et al. 1985, Ch. 2, Sect. 2.8), (Dobrushin et al. 1989, Ch. 10, § 3.3), (De Masi & Presutti, 1991), (Fabrizio 1993, Cap. 7), gerarchia che, inversamente, si riduce appunto alla singola equazione di Boltzmann proprio in forza dello *Stosszahlansatz* (Balescu 1975, Part 3, Ch. 11, Sect. 11.5, p. 394). Infine, in (Landau et al. 1978, Cap. I, § 2), l'ipotesi del caos molecolare è posta a base dell'intero impianto teorico della termodinamica statistica, appunto come un suo principio fondamentale.

[12] Da qui, la basilare irreversibilità temporale macroscopica (per rottura di simmetria) che quest'ipotesi comporta a livello statistico, partendo proprio dalla reversibilità temporale meccanica (microscopica); cfr. (Davies 1974, Ch. 2, 3), (Prigogine 1986, Cap. VII, § 2), (Zeh 2001, Ch. 3, Sect. 3.1.1), (Barberousse 2003, Sect. 4.3), (Gemmer et al. 2009, Sect. 17.2.1). Sull'inversione temporale microscopica della meccanica classica (reversibilità) e la conseguente (e solo in apparenza) contraddittoria irreversibilità macroscopica che la prima comporta a livello statistico, cfr. (Sakurai 1964, Ch. 4, Sect. 4.1). Infine, sulla necessità di considerare a priori il punto di vista statistico nel trattare di fenomeni comportanti rotture di simmetria, cfr. (Forster, 1975), (Pescetti, 1985a,b), (Sewell, 1986), (Bratteli & Robinson, 1987-97), (Parisi,

ipotesi è giustificabile dal fatto che è fisicamente impossibile predisporre macroscopicamente un sistema fisico in un stato iniziale che non sia tale[14].

Storicamente, indubbia è stata l'influenza dell'opera di Boltzmann nella fisica moderna del '900, sebbene in parte mediata attraverso i lavori di altri autori, quali Josiah W. Gibbs[15], Max Planck e Albert Einstein che, ai primi anni del Novecento, era già un esperto in meccanica statistica[16] e Boltzmann uno dei suoi punti di riferimento primari. La nuova teoria della radiazione di corpo nero di Planck, poi accettata da Boltzmann dopo alcune prime critiche che egli mosse al lavoro iniziale di Planck, costituirà, come noto, il punto d'inizio delle nuove teorie quantistiche[17]. E l'opera di Boltzmann, fin dal XIX secolo, preparò le basi concettuali della fisica quantistica[18], soprattutto attraverso l'opera di Planck[19].

L'opera di Planck sulla radiazione del corpo nero[20], degli ultimi anni dell'Ottocento, è il principale tramite che riconnette – storicamente – quella di Boltzmann in teoria cinetica dei gas alla nascente

---

1988), (Itzykson & Drouffe, 1989), (Zinn-Justin, 1990), (Haag 1992, Ch. V), (Strocchi, 2008b), (Altland & Simons 2010, Ch. 6).

[13] Cfr. (Klein, 1970).

[14] Cfr. (Carrà 1990, Introduzione). Si veda pure un modello di sistema dinamico costruito dai coniugi Ehrenfest per chiarire i principali risultati conseguiti da Boltzmann in teoria cinetica dei gas, ed esposto in (Guerra 1980, § 6).

[15] Il termine "meccanica statistica" venne ufficialmente dato da Gibbs quando pubblicò il primo testo sull'argomento, i suoi famosi *Elementary Principles of Statistical Mechanics* del 1902, prendendo le mosse dai lavori di Clausius, Maxwell e, soprattutto, Boltzmann; cfr. pure (Mayer 1980, Preface). Fondatori della meccanica statistica classica sono comunque considerati Maxwell, Gibbs, Boltzmann e Max Planck, mentre, di quella quantistica, oltre Planck, pure Einstein, Fermi, Satiendra Nath Bose, Dirac e Pauli; cfr. (Pathria 1996, Historical Introduction), (Dorlas 1999, Introduction). Per la nascita, poi, della teoria degli insiemi statistici – della meccanica statistica – dai lavori originari di Maxwell, Boltzmann e Gibbs, cfr. (McCoy 2010, Part I, Ch. 1).

[16] Cfr. (Schlipp, 1958), (Pauli, 1964c).

[17] Cfr. (Schlipp, 1958), (Pauli, 1964c), (Jammer, 1966), (ter Haar, 1967), (van der Waerden, 1967), (Pignedoli 1969a, Capp. I, V, VII), (Hund, 1980), (Mehra & Rechenberg, 1982; 2001), (Tagliaferri, 1985), (Kuhn, 1987).

[18] Cfr. le affermazioni di Leon Rosenfeld in (Born et al. 1980, p. 70). Cfr. pure (Heisenberg 1976, Appendice, § 7.). Sulla rilevanza della distribuzione statistica di Boltzmann, cfr. (Guggenheim 1952, Cap. II, § 75). In (Boltzmann, 1872), poi, Boltzmann introdusse la nozione sia di "quanto di energia molecolare" – cfr. (Bellone 1976, p. 206), (Lindley, 2002) – che di "probabilità di uno stato" a sua volta, in relazione a quella di entropia (Pauli 1964a, Cap. 5, p. 95) .

[19] Cfr. (Corinaldesi & Strocchi 1963, Introduction, § 1), (Healy 1982, Ch. 1, Sect. 1.2), (Flamm, 1997), (Gallavotti et al., 2008), (Jungnickel & McCormmach 2017, Ch. 12). È importante osservare qui (e per il seguito) come la legge di distribuzione di Boltzmann della meccanica statistica classica (all'equilibrio termodinamico) sia la stessa di quella ad essa corrispondente della meccanica statistica quantistica quando si tratta di sistemi fisici composti da particelle indistinguibili, come per esempio nel caso dell'equilibrio statistico delle popolazioni degli stati quantistici interni di un atomo o di una molecola, giustificando così la correttezza a priori di tutti quei calcoli effettuati nei lavori di Einstein e Planck (ed altri) che gettarono le basi della nuova teoria quantistica – cfr. (Caldirola 1974, Cap. III, p. 139) –, e che discuteremo qui di seguito. Per una sintesi completa degli aspetti formali delle statistiche classiche e quantistiche della fisica statistica, cfr. (Khinchin, 1961), dove, tra l'altro, al § 44 v'è una trattazione rigorosa della statistica dei fotoni.

[20] Storicamente, nell'Ottobre del 1900, Planck pervenne dapprima alla formula sulla radiazione di corpo nero (che poi verrà comunemente detta *formula di Planck*) per interpolazione fra la distribuzione spettrale del corpo nero a basse frequenze – a cui pervennero Heinrich Rubens e Ferdinand Kurlbaum all'inizio del 1900 e correttamente descritta dalla formula di Rayleigh-Jeans – e quella proposta da Wilhelm Wien, la quale risultava in accordo coi dati sperimentali nella regione delle alte frequenze ottenuti da Friedrich Paschen, Otto Lummer e Ernst Pringsheim; solo nel Dicembre del 1900, sulla base di argomentazioni di termodinamica statistica (Schwabl 1995, Cap. 1, § 1.2.1.1), Planck diede della sua formula l'interpretazione teorica usuale basata su un dato sistema di oscillatori armonici indipendenti (detto, *gas di oscillatori*), che, tuttavia, non venne considerato equivalente al campo di radiazione del corpo nero – come farà invece Einstein nel suo lavoro del 1917, che considerò invece un *gas di fotoni* interno alla cavità del corpo nero e ad esso applicò le leggi della meccanica statistica – ma solo una sua approssimazione statistica; anche la formula di Planck venne sottoposta a verifica sperimentalmente da Lummer e Pringsheim; cfr. (Persico 1978, Cap. II, § 7), (Hill 1970, Parte IV, Cap. 22, § 22-4), (Moore 1979, Cap. 13, § 5), (Hund 1980, Cap. 2), (Caldirola et al. 1982, Cap. IV, § 2-c)), (Lavenda & Santamato 1989, Cap. 1, §§ 1.4-5), (de Alfaro 1994, Introduzione, § 10), (Mehra 2001, Vol. I, Ch. 3), (Singh 2002, Ch.2, Sect. 2.3). La liceità formale di considerare un insieme di fotoni alla stessa stregua di un gas ideale della teoria cinetica dei gas, come fece ad esempio Maxwell nel derivare la sua ben nota distribuzione del campo delle

meccanica quantistica[21]. Un perno di congiunzione, sebbene alquanto indiretto, è dato dai cruciali quanto delicati rapporti fra reversibilità e irreversibilità, che furono sempre al centro dell'attenzione di Boltzmann, i quali – assieme ad altri risultati della termodinamica statistica – intervengono nella deduzione da parte di Planck della sua legge radiativa[22]. A tal proposito, la critica maggiore mossa da Boltzmann al lavoro di Planck riguardò la mancanza di chiare ipotesi circa le condizioni fisiche iniziali del sistema termodinamico in esame, di cui appunto Boltzmann ne rivendicava la necessità logico-formale.

Nel corso d'opera del lavoro di Planck, quindi, si assistette invero, negli ultimi suoi lavori, ad una presa di coscienza di tale problematica, Planck stesso considerando verosimile la circostanza che il processo radiativo in questione potesse inizialmente essere del tutto disordinato – e che quindi fosse lecito assumere l'ipotesi iniziale dello *Stosszahlansatz*[23] – per poi acquisire man mano ordine lungo l'evoluzione fisica del dato processo. Planck, dunque, nel suo ultimo lavoro del 1900, accettate le critiche di Boltzmann, e quindi d'accordo con le sue teorie[24] (in particolare, assumendo un'ipotesi di irreversibilità per la radiazione di corpo nero sulla base di altre ipotesi di irreversibilità assegnate ai processi radiativi da lui trattati in precedenti lavori[25]), pervenne a una formula radiativa per il

---

velocità delle molecole di un gas, venne poi affrontata più approfonditamente sia da Satyendranath Bose che da Einstein nei primi anni '20; cfr. (Pathria 1996, Historical Introduction; Ch. 6, Sect. 6.1; Ch. 7, Sect. 7.2).

[21] Cfr. (Slater 1980, Cap. 1, §§ 1.3, 1.5), (Lavenda & Santamato 1989, Cap. 1, §§ 1.4-5; Cap. 11, § 11.8), (Mehra 2001, Vol. I).

[22] Cfr. (Slater 1980, Cap. 13, § 13.5).

[23] Peraltro anche matematicamente giustificata da alcune considerazioni critiche di Jacques Hadamard, in (Hadamard, 1906), in cui si ribadisce, in merito all'irreversibilità, la necessità fisico-matematica di una sensibile dipendenza dai dati iniziali.

[24] Cfr. (Born 1927, Introduction, §§ 1, 2), (Mayer & Goeppert Mayer 1940, Ch. 6, Sects. 16d,e), (Weyl 1950, Ch. II, § 1), (Glasstone 1956, pp. 33-36), (Born 1958, p. 113), (Tolansky 1966, Vol. I, pp. 97-99), (Dallaporta 1971, Parte III, Cap. XI, § 75, p. 314), (Caglioti 1974, Cap. I, § I.2.2), (Harvey & Porter 1976, Cap. 3, § 3.2, pp. 51-52), (Adamson 1976, Cap. 16, § 16-AP-1), (Iori 1976, Cap. 6.2, § 6.2.1, p. 15), (Kastler 1979, pp. 799-800), (Moore 1979, Cap. 13, § 7), (Gudder 1979, Ch. 1, Sect. 1.1), (Caldirola & Loinger 1979, Art. VII, § 6), (Ferretti 1980, Cap. 4, § 4.1), (Corinaldesi & Messina 1980, Cap. 1, § 1.12), (Orzalesi 1981, Cap. II, E.4), (Emch 1984, Ch. 7, Synopsis, p. 209; Sect. 7.1, p. 217), (Lavenda & Santamato 1989, Cap. 1, §§ 1.4-5; Cap. 11, § 11.8), (Rossetti 1990, Cap. I, § 2), (Pathria 1996, Ch. 6, Sect. 6.1; Ch. 7, Sect. 7.2), (Anselmino et al. 1999, Parte D, Cap. XVIII, § XVIII.2-a), b)), (Walecka, 2000), (Mehra 2001, Vol. I, Sect. 5, pp. 41-42), (Nardulli 2001a, Cap. 2, § 2.2, p. 46), (Picasso 2009, Cap. 13, § 13.4). Fu peraltro in questo lavoro di Planck che la cosiddetta *costante k di Boltzmann* venne così nominata e numericamente stimata; cfr. (Kastler 1979, p. 802).

[25] Già in (Mehra 2001, Vol. I, Ch. 2, Sect. 3), Jagdish Mehra puntualizza sul ruolo cruciale svolto da questo assunto di Planck sull'irreversibilità dei processi radiativi da lui studiati, in particolare sulla isotropia della radiazione coinvolta in tali fenomeni radiativi (che egli denomina *radiazione naturale*), cioè sulla $SO(3)$-invarianza – diretta conseguenza, come già detto, dello *Stosszahlanzatz* a sua volta relato con la cosiddetta misura di permutazione o *Permutationsmaß*, sempre introdotta da Boltzmann in (Boltzmann, 1877), che è invariante al permutare degli elementi dell'insieme, detto *complessione*, delle entità elementari costituenti, ciascuna detta *monade* (per esempio, ogni atomo o molecola), senza che lo stato fisico del sistema gassoso in esame cambi; cfr. (Finzi 1958, Cap. XIII, § 2), (Mehra 2001, Vol. I, Ch. 2, Sect. 5, p. 42) –, ipotesi di simmetria che sarà pure alla base del cruciale lavoro di Einstein del 1917, di cui ora discuteremo. Planck, poi, esplicitamente collegò tale ipotesi alla seconda legge della termodinamica, così come studiata da Boltzmann nel 1872, nel tentativo di dedurne una versione elettromagnetica (sempre sulla base del modello seguito da Boltzmann e Wien, incentrato sul geniale quanto innovativo metodo deduttivo basato sull'uso combinato di tecniche dell'elettromagnetismo e della termodinamica, nel dedurre, anche sulla base dei precedenti lavori di Adolfo Bartoli sulla pressione di radiazione e di Heirich Hertz sul risonatore, la ben nota formula radiativa di Boltzmann-Wien) del secondo principio della termodinamica, al punto che egli stesso parlò di una *entropia elettromagnetica* (della radiazione) in analogia all'entropia termodinamica secondo Boltzmann. In parole povere, Planck cercò di trasporre i metodi di analisi formale della teoria cinetica dei gas trattata da Boltzmann – con particolare attenzione al lavoro (Boltzmann, 1872) – al caso del *gas di oscillatori* [formato dall'insieme dei risonatori interni alla cavità del radiatore approssimante un corpo nero; cfr. (Chiorboli 1980, Cap. III, § 3.1) ed anche (Syčev 1985, Cap. IX)] che egli assunse come modello formale rappresentante il sistema radiativo (corpo nero) sotto esame; in particolare, Planck fece esplicito riferimento proprio allo *Stosszahlansatz* di Boltzmann nell'ipotizzare l'esistenza di una "radiazione naturale" verificante in principio una legge

corpo nero – coerente con i precedenti risultati conseguiti sia da lui, nei suoi lavori degli ultimi anni dell'800, che da Wien, già sperimentalmente appurati – la quale era strettamente dipendente da una definizione di entropia formalmente simile a quella boltzmanniana fornita dal[26] *teorema H*.

Già da qui si evince quale ruolo fondamentale svolse l'ipotesi boltzmanniana del caos molecolare, ovvero lo *Stosszahlansatz*, nella nascita della nuova teoria quantistica, precisamente nella scoperta del concetto di *quanto di luce* (o *fotone*) sia da parte di Planck che da parte di Einstein, quindi alla discretizzazione intera dello spettro energetico che già Boltzmann stesso aveva comunque utilizzato in precedenza, facilitando così il lavoro a Planck la cui opera complessiva, sebbene di portata rivoluzionaria, venne tuttavia elusa fino ai primi lavori di Einstein del 1905, in cui esplicitamente si evidenziarono le contraddizioni della nuova teoria quantistica rispetto alle concezioni della fisica d'allora, introducendo quindi, per la prima volta in modo esplicito[27], la nozione di "quanto di luce" (poi detto *fotone*), concetto che, nonostante tutto, venne anch'esso ignorato praticamente fino al 1922, quando apparvero i lavori di Arthur H. Compton e Peter Debye, di cui parleremo più avanti.

Fu, dunque, Einstein, nel 1905(a), sulla base dei suoi precedenti lavori sui principi della meccanica statistica del 1902-04 – cfr. (Einstein 1902, 1903, 1904) – a richiamare l'attenzione[28] sul lavoro di Planck sulla radiazione di corpo nero, mettendo in evidenza la rilevanza delle nuove concezioni[29]

---

elettromagnetica formalmente simile alla seconda legge della termodinamica nell'interpretazione datane da Boltzmann, definendo una funzione *entropia elettromagnetica* per il dato risonatore in esame, basandosi proprio sul lavoro di Boltzmann sulla seconda legge della termodinamica, il quale risulterà centrale per tutto il successivo lavoro sulla radiazione del corpo nero (Mehra 2001, Vol. I, Ch. 2, Sects. 3, 4, 5, pp. 31-32, 41-42). Per l'appunto, Planck, sulla base delle sopracitate critiche mossagli da Boltzmann, cercò l'analogo – per il campo elettromagnetico della cavità radiante approssimante un corpo nero – del postulato del caos molecolare mediante cui Boltzmann formulò il suo *teorema H*, pervenendo così alla nozione di "radiazione naturale" come caratterizzata da un completo disordine. Ciò perché, sulla base delle critiche di Boltzmann alla mancanza di attenzione da parte di Planck verso l'irreversibilità dei processi radiativi, quest'ultimo si volse di conseguenza alla meccanica statistica del secondo principio della termodinamica per poter formalmente dar conto dell'irreversibilità dello scambio di energia fra risonatore e radiazione, secondo quanto Boltzmann aveva prima suggerito. Dopo aver così dedotto per interpolazione la sua formula per la radiazione del corpo nero, nell'intenzione di darle un fondamento teorico Planck approfondì la termodinamica statistica secondo Boltzmann, ponendo ora attenzione alla relazione (boltzmanniana) che lega l'entropia statistica alla probabilità termodinamica Ω di una *complessione*, cioè di un insieme di *monadi* corrispondenti ad un certo stato fisico macroscopico, cosa che lo portò direttamente alla necessità logica di considerare l'energia della radiazione naturale scambiata non come continua bensì discretamente formata da quanti di energia, ottenendo così l'assenso di Boltzmann; cfr. (Caldirola & Loinger 1979, Art. VII, §§ 6, 9, Nota finale) più le referenze ivi citate a p. 112.

[26] Cfr. (Pauli 1958, pp. 101-102). A tal proposito, proprio in merito al suddetto *teorema H*, spesso si parla di *equazione di Planck-Boltzmann* per la relazione $S = k \ln \Omega$, dove S è l'entropia di un sistema termodinamico isolato, k la costante di Boltzmann e Ω il numero dei suoi stati quantici ammissibili (o accessibili); cfr. (Mayer & Goeppert Mayer 1940, Ch. 4, Sects. 4a,b,c,d,e), (Zemansky 1970, Cap. 9, § 9.11), (Fermi 1972, Cap. 8, § 30), (Carrà 1972, Cap. 3, § 3.4, p. 56), (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.1, p. 217). Fu tuttavia Ladislas Natanson, nel 1911, a chiarire per primo il significato fisico e statistico di Ω (che è correlato alla nozione di probabilità termodinamica di cui alla precedente nota; cfr. (Kirillin et al. 1980, Cap. III, § 21)) puntualizzando, fra l'altro, sulla necessità concettuale e fisica della distinzione fra *distinguibilità* e *indistinguibilità* in meccanica statistica, quindi sulla nozione di *individualità*. Quest'ultime problematiche saranno poi chiarite nei successivi lavori di meccanica statistica quantistica di Dirac, Fermi, Bose, Einstein e Pauli,; cfr. (Mayer & Goeppert Mayer, 1940), (Kastler 1979, pp. 800-801, 816), (Landau & Lifšits 1982, Cap. IX, § 61), (Pathria, 1996).

[27] Cfr. (Bohr 1965, Cap. 15, § 1, p. 196).

[28] Sulla rilevanza del lavoro di Einstein in meccanica quantistica, cfr. (Selleri 1989, Cap. IV, § 4; 1991, § 2), (Kastler, 1979), (Sciama, 1979), (Mehra 2001, Vol. I, Ch. 9).

[29] In modo esplicito, più di quanto lo stesso Planck fece nei suoi lavori sulla radiazione del corpo nero (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.1, p. 220; Sect. 7.2, p. 222), al punto che si parla anche di *teoria di Planck-Einstein* della radiazione del corpo nero (Cini 1968, Parte II, Cap. I, § 1.2), (Chiorboli 1980, Cap. III, § 3.1), (Umezawa & Vitiello 1985, Ch. 1, Sect. 1.6). Fu Einstein ad avere maggior fiducia nelle nuove idee di Planck, più di quanto quest'ultimo stesso ne riponeva nei sui lavori sull'ipotesi dei quanti di luce introdotta nei suoi studi sui processi radiativi del corpo nero (Wigner 1976, § 5-c)), (Meyer-Arendt 1976, Parte V, Cap. 5.1, pp. 368-369).

nonché il loro contrasto con quelle ufficiali della fisica di allora. Precisamente, in[30] (Einstein, 1905a), discutendo di una nuova teoria (quantistica) dell'effetto fotoelettrico[31], Einstein introdusse esplicitamente ed utilizzò, sulla base dei precedenti lavori di Planck, il concetto di *quanto di luce* – poi denominato *fotone*[32] – che, come già detto, rimase tuttavia negletto praticamente fino al 1922. In (Einstein, 1906a), come seguito al suo precedente appena menzionato lavoro del 1905(a), Einstein mise nuovamente in chiaro quali nuove concezioni la teoria planckiana poneva in contraddizione alle teorie classiche, già evidenziando la natura dualistica del quanto di luce, in un periodo della sua vita in cui certamente poteva già reputarsi un esperto nel campo della meccanica statistica, di cui, lo ripetiamo, l'opera di Boltzmann ne fu un punto di riferimento primario[33], opera che resistette anche dinanzi all'impeto delle nuove teorie che vennero man mano a erigersi su di esse[34] (come testimonia appunto l'opera sia di Planck[35] che di Einstein[36]).

In (Einstein, 1905b), la teoria delle fluttuazioni[37] termodinamiche veniva poi applicata allo studio del moto browniano[38], mentre in (Einstein, 1903) egli aveva già riottenuto, in altra maniera affatto originale, la teoria degli insiemi statistici di Gibbs. In (Einstein, 1907), poi, si utilizzò la nozione di quanto di energia – introdotta in (Einstein, 1905a) – per il calcolo dei calori specifici dei solidi[39],

---

[30] Fu questo, propriamente, il primo lavoro di Einstein in teoria dei quanti – peraltro pubblicato nello stesso volume degli *Annalen der Physik* in cui comparve quello sulla relatività ristretta – in cui si gettarono le basi sia concettuali che sperimentali di questa nuova teoria (Born 1973, Cap. 7, § 13, p. 433).

[31] Ancora una volta, basando il suo procedimento logico sui lavori di Boltzmann in meccanica statistica – cfr. (Weyl 1950, Ch. II, § 13), (Ferretti 1980, Cap. 3; Cap. 4, § 4.2), (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.2, p. 223). Questo lavoro di Einstein su una nuova teoria quantistica dell'effetto fotoelettrico [teoria poi sperimentalmente appurata da R.A. Millikan nel 1915 – (Millikan, 1916); cfr. anche (Castelfranchi 1959, Cap. XV, § 164) – e basata sull'ipotesi che le onde elettromagnetiche fossero costituite da insiemi di fotoni spazialmente distribuiti a caso – cfr. (Picasso 2009, Cap. 2, § 2.1); ciò è coerente con lo *Stosszahlansatz*, come visto all'inizio di questo lavoro – e, quindi, con distribuzione $SO(3)$-invariante], assunse un ruolo cruciale nella storia della fisica quantistica – anche in relazione al successivo lavoro di Niels H. Bohr; cfr. (Tolansky 1966, Vol. I, Cap. 7, p. 139) – proprio perché la verifica dell'effetto fotoelettrico costituì una conferma quanto mai specifica dell'ipotesi di Planck giacché esso è direttamente regolato e controllato dal meccanismo dello scambio di energia tra radiazione ed elettroni, e nessun'altra fenomenologia fisica viene al contempo coinvolta (Matthews 1978, Cap. 1, § 1.2-(a)). Sull'importanza dei lavori di Einstein per la nascita e lo sviluppo della meccanica quantistica, cfr. (Pauli 1964c, Capp. 7, 9), (Bohr 1965, Cap. 15, § 3, pp. 203-204).

[32] Il nome di *fotone*, assegnato al quanto di luce, fu esplicitamente dato da Gilbert N. Lewis in un lavoro del 1926. Ad ogni modo, come anche Arnold Sommerfeld evidenziò in (Sommerfeld, 1923), il lavoro di Boltzmann in meccanica statistica si rivelò cruciale anche per l'introduzione di questo nuovo concetto, cioè quello di "quanto di energia"; cfr. (Kastler 1979, p. 800), (Mehra 2001, Vol. I, Sect. 5, pp. 45-49).

[33] Che Einstein citava persino in merito ai suoi lavori sulla relatività, come modello di studioso e ricercatore da seguire (Cercignani, 1997). L'opera di Boltzmann in termodinamica e meccanica statistica ha costituito uno dei pilastri portanti dell'intero edificio della meccanica quantistica; cfr. soprattutto (Peebles 1992, Ch. 1, Sects. 1-3) e pure (de Alfaro 1994, Introduzione, §§ 10, 11). Per i risultati, poi, conseguiti da Einstein in termodinamica e meccanica statistica, cfr. (Born, 1958), (Callen 1972, Parte III, Cap. 15), (Mehra, 1975), (Navarro, 1998).

[34] Cfr. (Pauli 1958, p. 97).

[35] Cfr. (Planck, 1973).

[36] Cfr. (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.2).

[37] Cfr. (Schödinger 1961, Cap. 5).

[38] Rimandiamo a (Nelson 1967, §§ 1-4) per un resoconto storico del lavoro di Einstein sul moto browniano e la sua rilevanza per la meccanica quantistica stocastica e, assieme a molti altri risultati della meccanica statistica, per la teoria dei processi stocastici; cfr. (Feynman & Hibbs, 1965), (Papoulis, 1973), (Gudder, 1979), (Simon, 1979), (Kac, 1957; 1980), (Blanchard et al., 1987), (Bergia, 1991), (Martin 1993, Chs. 3, 5), (Roepstorff, 1994), (Da Prato, 1998; 2001; 2008), (Strocchi 2008a, Ch. 6). Peraltro, proprio in merito alla teoria stocastica del moto browniano, si ricorda come l'equazione di Boltzmann è stata una delle prime a possedere caratteri delle processi markoviani (Balescu 1975, Part 3, Ch. 11, Sect. 11.5).

[39] Facendo ancora riferimento ai risultati di Boltzmann in meccanica statistica; cfr. (Dekker 1965, Cap. 2, § 2-4), (Kittel 1971, Cap. 6, pp. 182-186), (Carrà 1978, Parte III, Cap. VI, § 6.8, p. 115), (Scatturin 1987, Cap. V), (Lavenda & Santamato 1989, Cap. 11, §11.9), (Bassani & Grassano 2000, Cap. 8, § 8.1.1), (Nardulli 2001b, Cap. 10, § 10.8, Problema 1), (Picasso 2009, Cap. 1, § 1.3).

dando così luogo alla prima applicazione di questo concetto in un ambito non riguardante processi radiativi[40]. In (Einstein, 1909a), nel calcolare le fluttuazioni della radiazione[41], Einstein rimarcava nuovamente la necessità logica di pervenire a un eventuale netto divario con le teorie classiche allorché venisse accettata la nuova teoria planckiana, difatti l'unica (allora) in accordo coi dati sperimentali inerenti la radiazione di corpo nero, evidenziando – stavolta esplicitamente – la natura dualistica del quanto di luce[42], per meglio dire, la sua natura corpuscolare[43]. Infatti, Einstein, pervenendo ad una stima della fluttuazione quadratica media[44]

$$\langle \Delta\varepsilon^2 \rangle \cong (h\nu)\varepsilon + \frac{c^3}{8\pi\nu^2\Delta\nu}\varepsilon^2 \stackrel{\text{def}}{=} \langle \Delta\varepsilon^2 \rangle_{corp} + \langle \Delta\varepsilon^2 \rangle_{ond}$$

con ε energia media della radiazione nell'unità di volume e nell'intervallo infinitesimo di frequenza $\Delta\nu$, si rese conto che, di quest'espressione, poteva interpretare fisicamente, tramite la teoria ondulatoria classica della radiazione, il secondo termine (cioè $\langle \Delta\varepsilon^2 \rangle_{ond}$) del secondo membro come dovuto all'interferenza fra le varie onde parziali[45] (natura ondulatoria della radiazione), ma non parimenti il primo $\langle \Delta\varepsilon^2 \rangle_{corp}$ se non ricorrendo all'ipotesi di Planck dei quanti di luce (natura corpuscolare della radiazione). Fu dunque Einstein, in questo suo lavoro del 1909(a), ad introdurre esplicitamente per primo il fondamentale dualismo onda-corpuscolo nella nuova fisica quantistica[46].

Sulla base di tutti questi lavori sulla meccanica statistica, in cui, fra l'altro, Einstein darà una sua interpretazione del *teorema H* di Boltzmann[47], si perverrà, per il tramite di opportune considerazioni probabilistiche e statistiche derivanti anche da questo teorema, alla teoria quantistica einsteiniana del[48] 1917 – cfr. (Einstein, 1916a,b, 1917) – dove, basandosi ancora sulla legge di distribuzione di Boltzmann[49], si dimostrerà, fra l'altro, come, all'equilibrio termodinamico, sia necessario che la

---

[40] E che è spesso considerato uno dei primi lavori in meccanica statistica quantistica (Emch 1984, Ch. 7, Synopsis, p. 210).

[41] Cfr. (Heisenberg 1976, Cap. 5, § 16). Il principio del ragionamento di Einstein consistette nel porre attenzione alle fluttuazioni dell'energia elettromagnetica, dimostrando come queste seguano delle leggi formalmente simili a quelle valide per un gas di particelle, come fornite dalla meccanica statistica secondo Boltzmann; cfr. (Caldirola et al. 1982, Cap. III, §§ 5, 6, 7), (Franchetti et al. 1986, Cap. 3, § 3.4).

[42] Cfr. (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.2, pp. 225-228).

[43] Difatti, ciò che differenziò, in linea di principio, il lavoro di Einstein del 1905 in merito ai risultati di Planck, fu l'aver considerato, nelle sue argomentazioni, non un insieme statistico di atomi e fotoni – come fece Planck – bensì un solo fotone coinvolto in processi elementari di assorbimento/emissione, ragion per cui fu inevitabile, per Einstein, l'adozione *ab initio* di un punto di vista corpuscolare (Ford 1965, Cap. V, pp. 133-134).

[44] (Pauli 1958, p. 99), (Kastler, 1979), (Sciama 1979, § 3-(i)). Il ragionamento logico di Einstein, seguito in questo lavoro del 1909, si basa fondamentalmente su un'esperienza concettuale (*Gedankenexperiment*) in cui viene stimata la pressione di radiazione esercitata, su un ipotetico specchio riflettente immerso nella cavità approssimante il corpo nero, dal fascio di fotoni emessi da quest'ultimo, il quale imprimerà un moto browniano a tale specchio, analizzato sulla base dei risultati conseguiti in (Einstein, 1906). Cfr. (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.2, p. 228), (Sciama 1979, § 3-(ii)).

[45] Cfr. (Lorentz 1916, Appendice 9), (Becker 1949-50, Vol. II, G), § 68), (Garelli 1973, Parte III, Cap. III), (Sciama 1979, §§ 3-(ii), 3-(iii), 3-(iv)). Il testo di Lorentz fu peraltro recensito, nel 1916 su *Naturwissenschaften*, dallo stesso Einstein.

[46] Cfr. (Hund 1980, Cap. 4), (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.2, p. 228), (Sciama, 1979). In questo lavoro, Einstein stimò pure l'impulso di un fotone, pervenendo ad una formula analoga a quella considerata poi da Louis De Broglie nel 1924 (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.2, p. 231). Cfr. pure (De Broglie, 1979).

[47] Cfr. (Pauli 1958, p. 98), (Sciama 1979, § 3-(ii)); cfr. pure (Prigogine & Kondepudi 2002, Cap. 14, § 14.2).

[48] Ma già noti fin dal 1916; cfr. (Einstein, 1916a,b).

[49] Cfr. (Born 1927, Introduction, §§ 1, 2), (Becker 1949-50, Vol. II, G), §§ 69-70), (Born 1958, pp. 113-119), (Fermi 1962, Lecture 24, p. 104), (Kastler 1979, p. 814), (Chiavassa & Sciuto 1979, Cap. XIV, § 14.1), (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.2, p. 222), (Kittel & Kroemer 1985, Cap. 4, § 4.1), (Lavenda & Santamato 1989, Cap. 1, §§ 1.4-6; Cap. 11, § 11.8), (Onofri & Destri 1996, Cap. 10, § 10.1.4), (Walecka, 2000), (Picasso 2009, Cap. 13, § 13.4). Einstein,

radiazione, in ogni singolo atto radiativo, abbia una direzione ben precisa[50] (natura corpuscolare dei quanti di luce). E sulla stessa linea possono pure collocarsi i lavori (Einstein 1905a, 1909b, 1911a,b,c) in cui, rispettivamente, si applicherà, in modo proficuo, la nuova teoria dei quanti di luce oltreché all'effetto fotoelettrico[51] (come già visto) anche, tra l'altro, alla legge di Stokes sulla fluorescenza, alla produzione di raggi catodici secondari da raggi Röntgen, nonché alla stima del limite di alta frequenza nella radiazione di frenamento (*Bremsstrahlung*)[52].

Già, dunque, sul finire del 1910, con questi lavori di Einstein, fu chiaro che l'esistenza del quanto di luce (o di radiazione) comportava un netto cambiamento radicale[53] dei paradigmi della fisica dei fenomeni microscopici, che, nella fattispecie, doveva tener conto di un inevitabile dualismo fra una rappresentazione ondulatoria e una rappresentazione corpuscolare della radiazione elettromagnetica. In (Einstein 1907, 1911a,b), Einstein approfondì lo studio della natura delle onde elastiche emesse dai solidi, in particolare i loro aspetti corpuscolari sulla base della dualità onda-corpuscolo[54]. In (Einstein, 1909b), poi, Einstein considerò un insieme di oscillatori armonici di frequenza propria ν a valori discreti per il calcolo dei calori specifici dei solidi, metodo che diverrà poi consolidato in meccanica statistica considerando la fisica di un campo lineare formalmente equivalente, per mezzo dell'analisi per serie di Fourier, ad un insieme discreto di oscillatori armonici indipendenti[55]. Negli anni successivi al 1910, Einstein scrisse (alcuni in collaborazione con Ludwig Hopf) una serie di pionieristici lavori in cui approfondì, ancora su base termodinamica, l'emissione e l'assorbimento di radiazione secondo la teoria dei quanti di Planck[56] e la nuova teoria spettroscopica di Niels H. Bohr (del 1913), fino alla stesura dei pionieristici lavori del 1916-17.

Nel frattempo, con i fondamentali lavori sia di Arthur H. Compton che di Peter Debye – condotti indipendentemente l'un l'altro, nei primi anni '20 – sulla cinematica relativistica della diffusione dei quanti di luce (o fotoni) con elettroni statici, quindi con la riuscita del successivo, cruciale esperimento di Compton sulla stima della differenza di lunghezza d'onda fra il fronte d'onda diffuso e quello incidente del fotone (*effetto Compton-Debye*) per cui questo trasferisce, in processi

---

presupponendo implicitamente un comportamento corpuscolare della luce, assume lecito ricorrere alla distribuzione di Boltzmann, sebbene nella equivalente forma di distribuzione probabilistica secondo Poisson – cfr. (Tarsitani 1983, § 4, p. 182), (Dalvit et al. 1999, Ch. 4, Problems 4.3-4.5). È sempre del 1917 un altro, fondamentale lavoro di Einstein sulla meccanica analitica ha miltoniana in cui si introdussero, storicamente per la prima volta, le prime basi per alcuni dei capitoli di quella che oggi è nota come teoria della *quantizzazione geometrica*; cfr. per esempio (Graffi, 1993) ed anche (Leray, 1977), (Śniaticki, 1980), (Woodhouse, 1992).

[50] Che Einstein fa coincidere con quella dell'impulso del fotone implicato in tale processo radiativo; cfr. (Ferretti 1980, Cap. 4, § 4.2).

[51] Nel 1905(a), dunque, Einstein spiegò la fenomenologia dell'effetto fotoelettrico ipotizzando come un fascio di luce monocromatico di frequenza ν possa essere pensato formato da "quanti di luce" di energia minima $\varepsilon = h\nu$ (dove h è una costante che Einstein considererà poi coincidente proprio con quella di Planck) che, interagendo con la materia, dà luogo a processi di emissione/assorbimento di un numero intero di quanti di luce ε. Così, Einstein forniva una spiegazione coerente sia teoricamente che con i dati sperimentali allora noti, elevando, dunque, l'ipotesi planckiana dei quanti di luce da semplice artifizio tecnico-formale, relativo al funzionamento del processo radiativo (come aveva fatto Planck nei suoi lavori), a fondamentale ipotesi fisica sulla natura della radiazione coinvolta in tale processo; inoltre, tale ipotesi quantistica vale non solo per i processi di emissione/assorbimento (come immaginò Planck) ma riguarda anche la propagazione della radiazione in essi coinvolta; cfr. (Predazzi 1984, Cap. II, § 2.1), (Sartori 1997, Parte A., Cap. I, § 1.3), (Anselmino et al. 1999, Parte D, Cap. XVIII, § XVIII.3).

[52] Cfr. (Pauli 1958, pp. 98-101), (Hund 1980, Capp. 1-4), (Lavenda & Santamato 1989, Cap. 2, §§ 2.1-2).

[53] Ovvero, uno *slittamento gestaltico*, secondo il punto di vista epistemologico di Thomas S. Kuhn; cfr. (Kuhn, 1962).

[54] Cfr. (Emch 1984, Ch. 7, Sect. 7.2, p. 228). Questi risultati di Einstein furono poi ripresi ed approfonditi, tra gli altri, da Max Born e Theodor von Karman nonché da Peter Debye, nel 1912.

[55] Cfr. (Touschek & Rossi 1970, Cap. 1).

[56] Molti di questi lavori, riguardarono questioni sui calori specifici dei solidi, la cui trattazione condusse Einstein ad ottenere notevoli risultati che, nelle loro grandi linee, vennero da lui esposti al primo congresso Solvay del 1911; cfr. (Einstein, 1911c), (Bohr 1965, Cap. 15, § 1).

di diffusione, sia quantità di moto che energia, si riuscì ad appurare sperimentalmente, quindi ad accettare, anche la natura fisica corpuscolare, oltreché ondulatoria, della luce, superando tutte quelle resistenze mentali che si opponevano ad una concezione corpuscolare della luce, nonostante le varie esperienze già condotte sull'effetto fotoelettrico.

Questi[57] lavori di Compton e Debye indussero poi Wolfgang Pauli ad estendere la teoria quantistica di Einstein del 1917, al caso in cui la radiazione è in equilibrio termodinamico con elettroni liberi (Pauli, 1923). Precisamente, Einstein – nel 1917 – anzitutto derivò, stavolta sostituendo, sulla scorta del lavoro di Bohr del 1913, gli oscillatori armonici classici con atomi ad almeno due livelli, la legge di distribuzione spettrale di Planck per la radiazione in equilibrio termodinamico a temperatura T (*radiazione di corpo nero*), cioè la formula

$$\rho_\nu = \frac{\alpha \nu^3}{e^{h\nu/kT} - 1} \qquad (1)$$

con $\alpha = 8\pi h/c^3$ e k costante di Boltzmann, nell'ipotesi di atomi o molecole ad almeno due livelli in processi radiativi di emissione/assorbimento spontanea di radiazione di frequenza ν tale che $E_i - E_f = h\nu$, relativamente alla transizione da un livello energetico i ad un altro f ($i \to f$), secondo una probabilità nell'unità di tempo A_f^i. D'altra parte, la presenza di radiazione da attività (radiativa) spontanea dà poi luogo a processi radiativi indotti con probabilità nell'unità di tempo pari a $B_f^i \rho_\nu$ (per transizioni del tipo $i \to f$) e $B_i^f \rho_\nu$ (per transizioni del tipo $f \to i$)[58]. Assumendo, ora, una

[57] Da questo punto in poi, seguiremo (Pauli 1958, pp. 103-107), (Sciama 1979, pp. 630-640), (Pais 1991, Capp. 17, 21, 29), (Enz 2002, Ch. 4).

[58] Cfr. (Schiff 1952, Cap. X, §§ 35, 36), (Pauli 1964b, Cap. 4, § 23), (Segrè 1976, Capp. IV, V), (Berestetskij et al. 1978, p. 195), (Slater 1980, Cap. 13, § 13.5), (Špolskij 1986, Vol. I, Cap. VII; Vol. II, Cap. VI), (Haken & Wolf 1990, Cap. 5). I coefficienti A_f^i e B_f^i sono anche noti come *probabilità di transizione di Einstein*. Essi, generalmente noti come *coefficienti di Einstein*, furono introdotti in (Einstein, 1917) e permettevano di stimare l'intensità dell'attività radiativa di un atomo la cui frequenza era già stata stabilita dai ben noti lavori di Niels H. Bohr. Questo lavoro di Einstein, dal punto di vista storico, fu uno dei primi a mettere in evidenza, tra l'altro, il fondamentale ruolo delle interpretazioni probabilistiche nella nuova teoria dei quanti, ancor prima dei ben noti lavori di Max Born, che – ironia della sorte – Einstein stesso, come noto, poi criticò; cfr. (Fock 2004, Articolo 57-1, § 10). Questi cruciali lavori di Einstein (dal 1905 al 1917 – esclusi quelli relativistici), dunque, segnarono delle tappe fondamentali per la nascita e lo sviluppo della meccanica quantistica (la meccanica delle matrici, in particolare) e la sua interpretazione statistica; cfr. (Fermi 1934, Parte. III, Cap. I, § 7), (Eyring et al. 1953, Cap. VIII, § 8d), (Kemble 1958, Ch. XII, Sect. 54), (van der Waerden, 1967), (ter Haar, 1967), (Pauling & Wilson 1968, Cap. XI, § 40, N. 40a), (Levich et al. 1973, Vol. 4, Ch. 1), (Giordano, 1974), (Born 1976, Appendici 27, 28), (Kastler 1979, p. 816), (de Alfaro 1994, Introduzione, § 11), (Fieschi & De Renzi 1995, Cap. 1, § 1.10.7), (Weinberg 1999, Cap. 1, § 1.2), (Atkins & Friedman 2000, Cap. 6, § 6.17). Il lavoro di Einstein del 1917, dove si utilizzò – correttamente – la legge di distribuzione di Boltzmann (la più importante della meccanica statistica classica) per l'equilibrio statistico delle popolazioni degli stati quantici interni di un atomo o una molecola, ebbe un'importanza storica eccezionale proprio perché Einstein in esso introdusse a priori, come già detto per la prima volta nella fisica quantistica, l'uso di metodi probabilistici di approccio e di risoluzione che doveva poi svolgere un ruolo fondamentale nell'interpretazione e nello sviluppo dell'intera teoria quantistica (Caldirola 1974, Cap. III, pp. 131, 139); ma dal punto di vista concettuale, fu Boltzmann a introdurre la probabilità nella spiegazione dei fenomeni fisici – cfr. (Gliozzi 1963-67, Vol. I, p. 253), (Straneo 1975, Parte I, § 5). Ancora in questo stesso lavoro, Einstein introdusse poi le nozioni di *assorbimento/emissione indotta* (o *stimolata*), che si riveleranno di fondamentale importanza per i successivi sviluppi dell'ottica quantistica (Levich et al. 1973, Vol. 3, Ch. 12, § 103), (Smith & Sorokin 1974, Cap. 1, § 1.2; Cap. 2, § 2.1), (Kastler 1977, Cap. V, pp. 173-182; 1979), (Bekefi & Barrett 1981, Cap. 7, § 7.6), (Fieschi & De Renzi 1995, Cap. 1, § 1.10.8), (Bertolotti 1999, Capp. 3, 5, 6). Il calcolo esplicito dei coefficienti di Einstein fu fatto da Paul Dirac nel 1927, ritenuto uno dei primi risultati dell'elettrodinamica quantistica non-relativistica e reso possibile considerando le cosiddette regole di commutazione degli operatori lineari associati alle relative grandezze fisiche coinvolte (Kemble 1958, Ch. XI, Sect. 54b), (Sakurai 1967, Ch. 2, Sect. 2.3, pp. 23-24), (Healy 1982, Ch. 1, Sect. 1.3; Ch. 6), (de Alfaro 1994, Introduzione, § 12). Già, comunque, dall'espressione quantistica del cosiddetto *coefficiente A*

densità atomica o molecolare n_i data da una distribuzione di Boltzmann, quindi con $n_{i,f} \approx \exp(-E_{i,f}/kT)$, la condizione di equilibrio è assicurata se e solo se[59]

$$e^{-E_f/kT} B_i^f \rho_\nu = e^{-E_i/kT}(A_f^i + B_f^i \rho_\nu) \qquad (2)$$

da cui segue la (1) ponendo $A_f^i/B_f^i = \alpha\nu^3$. Dopodiché, sempre in questo stesso lavoro del 1917, Einstein considerò pure lo scambio di impulso, associato a ciascuno di tali processi di assorbimento ed emissione, fra sistema radiante (e.g., atomo o molecola) e la radiazione, il quale comporta, per garantire lo stato di equilibrio termodinamico, un moto di traslazione del sistema radiativo. Ma, sia dall'esperienza fisica che dall'elettrodinamica classica, è noto che processi di assorbimento o di emissione connessi a pennelli di radiazione aventi direzioni distinte, sono indipendenti l'uno dall'altro, così che l'impulso, se si ammette che esso varia casualmente, ha valore medio nullo ma non il suo valore quadratico medio, per cui, nella necessità di bilanciare quest'ultimo effetto non nullo, sempre a garanzia della sussistenza dello stato di equilibrio termodinamico, Einstein suppose l'esistenza di un nuovo processo elementare (di emissione o assorbimento), detto appunto processo

---

di Einstein relativo alla probabilità di emissione spontanea, si può dimostrare che questo è non nullo per l'appunto solo nella trattazione quantistica del campo elettromagnetico, mentre risulta nullo nella trattazione classica. Questo risultato è considerato come uno dei principali risultati conseguiti dalla nuova teoria quantistica. Cfr. (Weyl 1950, Ch. II, § 13), (Friedrichs 1953, Part III, Ch. 15), (Sakurai 1967, Ch. 2, Sect. 2.3, p. 38), (Dirac 1968, Cap. 7, §§ 44-45; Cap. 10), (Battaglia et al. 1996, Cap. 11, § 11.2, Esempio 11.1, pp. 241-242), (Picasso 2009, Cap. 13, §§ 13.3-4). Inoltre, come si osserva in (Kastler 1979, pp. 811-812), sia Planck che Einstein sembra non abbiano avuto piena coscienza della potenziale utilità sia concettuale che metodica della trattazione di Lord Rayleigh del campo di oscillazione di un'onda elettromagnetica in una regione limitata, basata sulla decomposizione del campo in *modi normali* (o *modi propri*) di oscillazione, che diventerà un procedimento formale di base standard della teoria dei campi, e che avrebbe senz'altro reso più immediati, chiari e semplici i loro calcoli (Kastler, 1979), (de Alfaro 1994, Complemento A). Infine, per l'attualità di alcune idee e prospettive di Einstein in fisica delle particelle elementari, cfr. (Faddeev, 1979).

[59] L'equazione (2) è strettamente correlata al cosiddetto *principio del bilancio dettagliato* (in relazione a processi radiativi di assorbimento/emissione) secondo cui, all'equilibrio termodinamico, ogni processo fisico è bilanciato dal suo inverso temporale; cfr. (Einstein, 1917), (Touschek & Rossi 1970, Cap. 7, § 44), (Wataghin 1973, Cap. II, § 7.2), (Davydov 1981, Cap. XIV, § 119), (Kittel & Kroemer 1985, Cap. XIV, § 14.3), (Fieschi & De Renzi 1995, Cap. 1, § 1.10.7), (Vietri 2006, pp. 104, 178), (Dell'Antonio 2011-13, Vol. I, Cap. 1). Esso sembra in apparente contraddizione con le conseguenze dei risultati di Boltzmann, tra i quali l'irreversibilità (dall'ipotesi del *caos molecolare*) ovvero la rottura di simmetria per inversione temporale, per cui, se non si colloca l'intera discussione entro il più ampio quadro formale costruito su nozioni, risultati e metodi della moderna teoria quantistica e statistica dei campi – cfr. (Streater & Wightman, 1964), (Abrikosov et al., 1965), (Emch, 1972), (Ruelle, 1978; 1989), (Thirring 1978-83, Voll. 3, 4), (Chandler 1987, Ch. 5, Sects. 5.5-5.7), (Glimm & Jaffe, 1987), (Parisi, 1988), (Georgii, 1988), (Itzykson & Drouffe, 1989), (Zinn-Justin, 1990), (Haag, 1992), (Bratteli & Robinson, 1987-1997), (Souriau 1997, Part IV), (Mussardo, 2007) –, della teoria dei sistemi dinamici nonché della meccanica statistica del non equilibrio – cfr. (Prigogine, 1971; 1988), (Prigogine & Nicolis, 1982), (Evans & Morriss, 1990), (Prigogine & Stengers, 1993), (Dalvit et al. 1999, Ch. 6), (Altland & Simons 2010, Ch. 10) – e della moderna fluidodinamica, molti dei quali ottenuti, fra gli altri, da Wolfgang Pauli – che introdusse la cosiddetta *master equation*; cfr. (Caldirola 1974, Cap. IV, pp. 164-171) –, David Hilbert, Max Born, Harold Grad, Sydney Chapman, Herbert S. Green, David Enskog, Léon Van Hove, Nikolay Bogolyubov, Irwin Oppenheim, Kyozi Kawasaki, George E. Uhlenbeck, Soon-Tahk Choh, Arnold Siegert, Yoshiki Teramoto, Jerome Weinstock, Pierre Résibois, Anneke L. Sengers, John G. Kirkwood, Ilya Prigogine, Gregoire Nicolis, Isabelle Stengers, Jacques Yvon, Edwin T. Jaynes, John Orban, André Bellemans, Robert Zwanzig, Pierre-Louis Lions, Ezechiel G.D. Cohen, Robert J. Dorfman, Joel L. Lebowitz, Chen-Ning Yang, Tsung-Dao Lee, Helliott H. Lieb, Ronald J. Di Perna, Mario Pulvirenti, Giovanni Gallavotti, Giorgio Parisi, Roland L. Dobrushin, Yakov G. Sinai, Carlo Cercignani, Reinhard Illner, Oscar E. Landford, Mark Kac, Marvin Shinbrot, David Ruelle, dallo studio fisico-matematico dell'equazione di Boltzmann assieme ai suoi casi particolari ottenuti da determinati limiti termodinamici (di Grad-Boltzmann, di Van Hove, etc.), si rischia di pervenire ad apparenti contraddizioni formali; cfr. (van Hove, 1955), (Kac, 1957), (AA.VV., 1962-1979), (Orban & Bellemans, 1967), (Caldirola 1974, Cap. IV), (Balescu 1975, Part 3, Ch. 20, Sect. 20.4), (Presutti, 1979), (Lestienne 1980, V.), (Guerra 1980, § 5), (Sinai, 1982), (Prigogine 1986, Cap. VII), (De Masi & Presutti, 1991), (Simon, 1993), (Lions, 1996-98; 1998), (Gallavotti 1997, Cap. IV, §§ 27, 32-(D)), (Arnold & Khesin, 1998), (Giovannini 2000, Sect. 1.2.3b), (Zwanzig, 2001), (Falcioni & Vulpiani 2015, Cap. 4, § 4.5).

indotto (oppure di *assorbimento stimolato* o di *emissione stimolata*) avente però direzione del tutto casuale[60], che controbilanciasse il moto di traslazione del sistema materiale (atomo o molecola) in esame, il quale, di conseguenza, deve appunto traslare (in direzione opposta o meno alla direzione del pennello di radiazione in dipendenza del tipo di processo – di assorbimento od emissione – in questione), previsione, questa, che fu sperimentalmente appurata[61] da Rudolf O. Frisch nel 1933.

Perciò, per l'ipotesi del caos molecolare, una distribuzione di Planck per il campo di radiazione in interazione con il dato sistema materiale (approssimante un corpo nero) garantisce, per il principio di equipartizione dell'energia[62] (di traslazione, nella fattispecie), la condizione di isotropia per il relativo processo indotto, quindi l'equilibrio termodinamico. Einstein, dunque, considerando solo trasferimenti di energia lungo una ben precisa direzione (non ammettendo, quindi, l'ipotesi di onde sferiche) nei vari processi radiativi elementari in esame, ne inferì che solo un pennello di radiazione trasferirà energia lungo una ben precisa direzione (lungo la quale, in senso opposto o meno, traslerà poi il dato sistema materiale), tutte le altre direzioni (del processo indotto) rimanendo perciò casuali in modo da garantire – per equipartizione – l'equilibrio termodinamico secondo Boltzmann.

D'altronde Einstein osservò che questi impulsi, trasmessi al contempo dei trasferimenti d'energia, erano stati prima trascurati proprio in virtù della loro piccolezza, in modulo, rispetto ai quantitativi di energia trasferiti, ma che ora, in una trattazione quantistica (resa necessaria proprio in forza di questi bilanci di meccanica statistica dei fenomeni radiativi inerenti il corpo nero), non era più lecito sottovalutare anche per la stretta relazione fra impulso ed energia come grandezze fisiche. Tutto ciò comportava da un lato la necessità dell'ipotesi quantistica di Planck, proprio in merito alla suddetta questione degli impulsi, dall'altro rendeva la termodinamica statistica d'importanza fondamentale nel fornire i modelli teorici necessari alla schematizzazione formale dei relativi fenomeni coinvolti, in particolare la teoria cinetica dei gas secondo Boltzmann che, come appena vista sopra, si prestava a fornire modelli teorici esplicativi della fenomenologia del corpo nero, al punto che Einstein stesso, nel licenziare questo suo lavoro del 1917, riteneva come, a tal proposito, «[…] una teoria può essere considerata corretta solo quando si sia dimostrato che gli impulsi che, in base a questa teoria, sono trasferiti dalla radiazione alla materia, portano ai moti che richiedono la teoria del calore[63]».

Quest'ultima problematica[64] è stata storicamente importante[65] in quanto, in quel periodo, non si era nelle condizioni di poter dedurre classicamente l'esatta energia cinetica media di traslazione

---

[60] È questo il punto cruciale del ragionamento di Einstein, cioè la necessità, per garantire una condizione di equilibrio termodinamico, di presupporre – anche per il principio di ragion sufficiente – una casualità nella distribuzione delle direzioni di alcuni processi radiativi in questione, ovvero l'emissione stimolata o l'assorbimento stimolato nella fattispecie, quindi una invarianza spaziale rispetto al gruppo $SO(3)$, qual è, per esempio, quella implicata dall'ipotesi del *caos molecolare*, e ciò appunto perché, lo ripetiamo, non è nota, a priori, la direzione di emissione o di assorbimento del processo indotto che trasferisce impulso (oltre il trasferimento di energia dei processi elementari fondamentali di emissione/assorbimento principali, di direzioni note ed univocamente determinate).

[61] Cfr. (Frisch, 1933).

[62] Principio strettamente correlato con l'ipotesi del caos molecolare; cfr. (Pathria 1996, Historical Introduction).

[63] Cfr, (Bellone 1988, p. 360). Inoltre, riportando sue testuali parole, Pauli, in merito a questo lavoro di Einstein del 1917, dice che, a suo parere, «[…], non s'è data sufficiente attenzione al giudizio critico dello stesso Einstein sulla parte fondamentale attribuita al "caso" in questa descrizione dei processi di radiazione per mezzo di leggi statistiche, […]», citando poi altre testuali parole dello stesso Einstein secondo cui, «la debolezza della teoria sta nel fatto che da una parte essa non ci consente di fare alcun passo avanti verso la concezione ondulatoria, dall'altra si rimette al 'caso' per quanto concerne il tempo e la direzione dei processi elementari; ma, ciò nonostante, nutro piena fiducia nell'indefettibilità del cammino intrapreso» (Pauli 1958, p. 105).

[64] Ovverosia, il contrasto fra le proprietà d'interferenza della radiazione, per descrivere le quali è indispensabile il principio di sovrapposizione della teoria ondulatoria, e le proprietà dello scambio di energia e impulso fra radiazione e materia, che possono essere descritte solo mediante una rappresentazione corpuscolare (Pauli 1958, p. 105).

[65] Cfr. (Sciama 1979, p. 639).

degli elettroni coinvolti in tali fenomeni radiativi, come avevano già puntualizzato Lorentz e Adriaan D. Fokker, energia che veniva per l'appunto stimata, per quanto sopra detto, attraverso le fluttuazioni quadratiche medie del campo di radiazione, che risultavano non nulle. Solo nel 1923, durante un periodo di studio e di ricerca trascorso a Copenaghen con Bohr, Pauli, nell'osservare preliminarmente come la suddetta teoria di Einstein non poteva così com'era estendersi pure al caso dell'effetto Compton-Debye (in quanto gli elettroni liberi non sono soggetti a processi radiativi spontanei proprio perché un elettrone libero non può assorbire un fotone), riuscì a fornire una prima trattazione quantistica della questione. Ciononostante, si poteva procedere, secondo Pauli, nel modo seguente[66].

Imponendo, comunque, la condizione generale di equilibrio nei processi di scattering, richiedente l'uguaglianza del numero di particelle coinvolte, nell'unità di tempo, nei due processi fondamentali di emissione e di assorbimento, diciamo $i \to f$ e il suo inverso $f \to i$, Pauli riuscì a ristabilire la validità delle argomentazioni di Einstein pure nel caso dell'effetto Compton-Debye, considerandone la cinematica basata sulle leggi di conservazione dell'energia e del momento angolare totale, che, in questo caso, sono date da

$$U + h\nu = U_1 + h\nu_1, \quad \vec{G} + \vec{\Gamma} = \vec{G}_1 + \vec{\Gamma}_1$$

con $|\vec{\Gamma}| = \Gamma = h\nu/c$ momento angolare orbitale del fotone e $\vec{G}$ momento di spin. Da qui, in analogia al ragionamento seguito per ottenere la (2), considerando quindi i valori di queste grandezze fisiche relativamente ai volumi infinitesimi d^3G e $d^3\Gamma$, si ha la seguente condizione di equilibrio

$$Fe^{-U/kT} d^3G d^3\Gamma = F_1 e^{-U_1/kT} d^3G_1 d^3\Gamma_1 \qquad (3)$$

con F costante scelta in modo da garantire le necessarie condizioni di invarianza relativistica, correlata alla probabilità di scattering elettrone-fotone. Pauli, poi, pervenne alla conclusione che una condizione necessaria affinché la (3) sia soddisfatta, è che sia

$$F = A\rho_\nu + B\rho_\nu\rho_{\nu_1} \quad (4)$$

dove, ancora sulla falsariga del ragionamento di Einstein condotto per dedurre la legge di Planck sulla radiazione del corpo nero, è $A/B = \alpha\nu_1^3$. In particolare, poiché ora dunque intervengono pure termini quadratici nel campo di radiazione, oltre quelli lineari, nella probabilità di scattering, Pauli interpretò il secondo termine della (4), quello quadratico, come relativo all'interazione di due fasci di radiazione coinvolti nel dato processo radiativo (*Stosszahlansatz* di Pauli).

Subito dopo questo lavoro di Pauli, Einstein e Paul Ehrenfest pubblicarono in merito un articolo[67] in cui diedero, sulla base del principio del bilancio dettagliato, una differente interpretazione della (4) (detta ancora *Stosszahlansatz* di Pauli) ottenuta considerando il fattore F riscritto nella forma

$$F = b\rho_\nu\left(a_1 + b_1\rho_{\nu_1}\right) \quad (5)$$

[66] Cfr. (Pauli, 1923).
[67] Cfr. (Einstein & Ehrenfest, 1923).

la quale permette – o suggerisce – di pensare un processo di scattering come, ad esempio, composto da un primo processo elementare di assorbimento di un fotone ν seguito poi dall'emissione di un quanto ν_1. Dopodiché, Einstein e Ehrenfest nel 1923 misero a raffronto critico lo *Stosszahlansatz* di Pauli con quello di Einstein (*Stosszahlansatz* di Einstein) adoperato nel suo ben noto lavoro del 1917, giustificando l'introduzione del termine quadratico in (4), che tante polemiche aveva allora suscitato.

Come replica finale, poi, Pauli, facendo il punto della situazione sull'argomento nei suoi principi di meccanica quantistica del 1926 (poi ripubblicati nel 1933, in versione più estesa[68]), precisa che, se si vuol comunque mantenere una qualche connessione fra processi radiativi elementari – di emissione/assorbimento – da una parte e processi di scattering dall'altra, sembrava allora piuttosto naturale ipotizzare – nella nuova meccanica quantistica – che gli ultimi siano sempre composti da due processi parziali, più elementari, che hanno luogo al contempo, ma indipendenti l'un l'altro[69]. Precisamente, si immagini uno stato intermedio, "virtuale", che viene a formarsi e nella quale l'elettrone (appunto, virtualmente) assorbe il fotone, per cui la probabilità che ciò avvenga è ovviamente proporzionale alla densità di fotoni presenti nel campo di radiazione. Questo stato intermedio, poi, lo si pensi decadere in seguito all'emissione di un fotone, con una probabilità che è somma di due termini, uno corrispondente alla emissione spontanea e l'altro all'emissione stimolata, e poiché quest'ultima risulta proporzionale anch'essa alla densità dei fotoni presenti nel campo di radiazione, ne segue che la probabilità totale è la somma di un termine lineare e di uno quadratico, da cui la (4) o l'equivalente[70] (5).

Gli *Stosszahlansatz* di Pauli e di Einstein, comunque, furono entrambi alquanto criticati soprattutto per la presenza di un termine quadratico, ma Dirac , nel 1924, discusse in termini molto generali la questione, su un impianto formale generale della problematica, ancora centrato sul principio del bilancio dettagliato e sulla meccanica statistica secondo Boltzmann, riguardante l'interazione di sistemi materiali con campi di radiazione nonché le relative condizioni di equilibrio termodinamico a cui essa può tendere, confermando le deduzioni di Pauli.

Bibliografia

A.A. Abrikosov, L.P. Gor'kov, I.Ye. Dzyaloshinskii, *Quantum Field Theoretical Methods in Statistical Physics*, 2nd Edition, Pergamon Press, Ltd., Oxford (UK), 1965.

A.W. Adamson, *Trattato di Chimica Fisica*, a cura di G. Sartori, Piccin Nuova Libraria, Padova, 1976.

M. Ageno, *Le origini della irreversibilità*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1992.

W.M. Alberico, *Introduzione alla fisica nucleare*, La Scientifica Editrice, Torino, 1992.

A. Altland, B.D. Simons, *Condensed Matter Field Theory*, 2nd Edition, Cambridge University Press, Cambridge (UK), 2010.

A.M. Anile, *Relativistic Fluids and Magneto-Fluids with Applications in Astrophysics and Plasma Physics*, Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1989.

M. Anselmino, S. Costa, E. Predazzi, *Origine classica della fisica moderna*, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino, 1999.

[68] Cfr. (Pauli, 1980).

[69] Che, com'è immediato vedere, concettualmente riflette ancora l'essenza dello *Stosszahlansatz* di Boltzmann.

[70] Cfr. (Sciama 1979, pp. 639-640).

S. Antoci, *Quando la fisica parlava tedesco. Alcune memorie di un'epoca*, Quaderni del Gruppo Nazionale di Fisica Matematica (GNFM) – CNR, Firenze, 2004.
V.I. Arnold, A. Avez, *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1968.
V.I. Arnold, B.A. Khesin, *Topological Methods in Hydrodynamics*, Springer-Verlag, New York, 1998.
L. Artsimovič, *Fisica elementare del plasma*, Editori Riuniti, Roma, 1975.
N.W. Ashcroft, N.D. Mermin, *Solid State Physics*, Holt, Rinehart & Winston International Editions, New York, 1976.
G. Astarita, *Mass Transfer with Chemical Reaction*, Elsevier Publishing Company, Amsterdam (NL), 1967.
P.W. Atkins, R.S. Friedman, *Meccanica quantistica molecolare*, Zanichelli editore, Bologna, 2000.
AA.VV., *Studies in Statistical Mechanics*, 7 Vols., North-Holland Publishing Company, Amsterdam (NL), 1962-1979.
R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1975.
R. Balin, *From Microphysics to Macrophysics. Methods and Applications of Statistical Physics*, 2 Vols. Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2007.
A. Barberousse, "The Diversity of Models in Statistical Mechanics: Views about the Structure of Scientific Theories", in: B. Löwe, W. Malzkorn, T. Räsch (Eds.), *Foundations of the Formal Sciences*. Vol. II: *Applications of Mathematical Logic in Philosophy and Linguistics*, Springer Sciences + Business Media, Dordrecht (NL), 2003, pp. 1-24.
A. Barberousse, "Philosophy of Physics", in: A. Barberousse, D. Bonnay, M. Cozic (Eds.), *The Philosophy of Science. A Companion*, Oxford University Press, New York, 2018, Part II, Ch. 11, pp. 405-429.
G.M. Barrow, *Chimica Fisica*, Nicola Zanichelli Editore, 1976.
F. Bassani, U.M. Grassano, *Fisica dello stato solido*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 2000.
F. Battaglia, T.F. George, E. Gallicchio, *Lezioni di fisica classica e quantistica*, CEDAM, Padova, 1996.
F. Battaner, *Astrophysical Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1996.
R.J. Baxter, *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*, Academic Press, Ltd., London, 1982.
R. Becker, *Teoria della Elettricità*, 2 Voll., G.C. Sansoni Edizioni Scientifiche, Firenze, 1949-50.
G. Bekefi, A.H. Barrett, *Vibrazioni elettromagnetiche, onde e radiazione*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1981.
N. Bellomo, *Modelli e Metodi Matematici della Meccanica*, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino, 1987.
E. Bellone, *Aspetti dell'approccio statistico alla meccanica: 1849-1905*, G. Barbèra Editore, Firenze, 1972.
E. Bellone, *Il mondo di carta. Ricerche sulla seconda rivoluzione scientifica*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1976.
S. Bergia, "Fluttuazioni conformi di metrica, meccanica stocastica e meccanica quantistica: prospettive e problemi aperti", in: G. Cattaneo, A. Rossi (a cura di), *I fondamenti della meccanica quantistica. Analisi storica e problemi aperti*, EdiEl, Commenda di Rende (CS), IT, 1991, pp. 289-316.

M. Bertolotti, *Storia del laser*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1999.
P. Blanchard, P. Combe, W. Zheng, *Mathematical and Physical Aspects of Stochastic Mechanics*, LNP 281, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1987.
N. Boccara, *Modeling Complex Systems*, Springer-Verlag, Inc., New York, 2004.
V. Boffi, *Elementi di fisica e tecnologia del reattore nucleare*, Casa Editrice R. Pàtron, Bologna, 1969.
A. Bohr, B.R. Mottelson, *Nuclear Structure*, 2 Vols., W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969-75.
N. Bohr, *I quanti e la vita*, Editore Boringhieri, Torino, 1965.
L. Boltzmann, "Weitere Studien über das Wärmegleichgewicht unter Gasmolekülen", *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe*, 66 (1872) pp. 275-370.
L. Boltzmann, "Über die Beziehung zwischen dem zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie und der Wahrscheinlichkeitsrechnung respektive den Sätzen über das Wärmegleichgewicht", *Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Classe*, 76 (1877), pp. 373-435.
L. Boltzmann, *Vorlesungen über Gastheorie*, Band 1, 2, Verlag von J.A. Barth-A. Meiner, Leipzig, 1896-98.
L. Boltzmann, *Lectures on Gas Theory*, The University of California Press, Berkeley & Los Angeles (CA), 1964 (l'edizione originale tedesca risale agli anni 1896-98).
M. Born, "Zur Quantenmechanik der Stossvorgänge", *Zeitschrift für Physik*, 37 (12) (1926a) pp. 863-867.
M. Born, "Quantenmechanik der Stossvorgänge", *Zeitschrift für Physik*, 38 (11-12) (1926b) pp. 803-827.
M. Born, "Zur Wellenmechanik der Stossvorgänge", *Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-Physikalische*, (1926c) pp. 146-160.
M. Born, "Quantenmechanik und Statistik", *Die Naturwissenschaften*, 15 (1927) pp. 238-242.
M. Born, *The Mechanics of the Atom*, G. Bell & Sons, Ltd., 1927.
M. Born, "Le teorie statistiche di Einstein", in: P.A. Schlipp (a cura di), *Albert Einstein, scienziato e filosofo. Autobiografia di Einstein e saggi di vari autori*, Edizioni Scientifiche Einaudi-Editore Boringhieri, Torino, 1958, pp. 109-125.
M. Born, *Filosofia naturale della causalità e del caso*, Editore Boringhieri, Torino, 1967.
M. Born, *La sintesi einsteiniana*, Editore Boringhieri, Torino, 1973.
M. Born, *Fisica atomica*, II edizione riveduta e ampliata, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1976.
M. Born, E. Schrödinger, L. Rosenfeld, P. Auger, A.H. Compton, "Discussione sulla conferenza di E. Schröedinger «L'immagine attuale della materia»", in: W. Heisenberg, E. Schrödinger, M. Born, P. Auger, *Discussione sulla fisica moderna*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1980, pp. 58-75.
S.G. Brush (Ed.), *Kinetic Theory*, Pergamon Press, Oxford (UK), 1966.
O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*, 2 Vols., Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1987-1997.
H. Cabannes, "Theorié cinétique de la conductivité thermique et de la viscosité d'un courant ionique", in: *Atti del Simposio sulla Magnetofluidodinamica*, promosso dall'Università di Bari, Bari, 10-14 Gennaio 1961, editi dalla UMI con il contributo del CNR, Edizioni Cremonese, Roma, 1962, pp. 107-121.
G. Caglioti, *Introduzione alla fisica dei materiali*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1974.

P. Caldirola, *Dalla microfisica alla macrofisica*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1974.
P. Caldirola, A. Loinger, *Teoria fisica e realtà*, Liguori Editore, Napoli, 1979.
P. Caldirola, R. Cirelli, G.M. Prosperi, *Introduzione alla fisica teorica*, UTET, Torino, 1982.
H. Callen, *Termodinamica*, Tamburini Editore, Milano, 1972.
S. Carrà, *Introduzione alla termodinamica chimica*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1972.
S. Carrà, L. Forni, *Aspetti cinetici della teoria del reattore chimico*, Tamburini Editore, Milano, 1974.
S. Carrà, *Struttura e stabilità. Introduzione alla termodinamica dei materiali*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1978.
S. Carrà, M. Morbidelli, *Chimica fisica applicata. Principi di termodinamica e cinetica chimica e loro ruolo nella teoria del reattore chimico*, Ulrico Hoepli Editore, Milano, 1983.
S. Carrà, *Termodinamica. Aspetti recenti e applicazioni alla chimica e all'ingegneria*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1990.
C. Castagnoli, *Lezioni di struttura della materia*, II edizione riveduta e ampliata, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino, 1975.
G. Castelfranchi, *Fisica moderna, atomica e nucleare*, X^{a} edizione, Editore Ulrico Hoepli, Milano, 1959.
C. Cercignani, *Mathematical Methods in Kinetic Theory*, Plenum Press, New York, 1969.
C. Cercignani, *Theory and Application of the Boltzmann Equation*, Scottish Academic Press, Edinburgh (UK), 1975.
C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1987.
C. Cercignani, *Ludwig Boltzmann: the man who trusted atoms*, Oxford University Press, Oxford (UK), 1988.
C. Cercignani, R. Illner, M. Pulvirenti, *The Mathematical Theory of Dilute Gases*, Springer-Verlag, New York, 1994.
C. Cercignani, *Ludwig Boltzmann e la Meccanica Statistica*, La Goliardica Pavese, Pavia, 1997 (referenza principale).
C. Cercignani, G.M. Kremer, *The Relativistic Boltzmann Equation: Theory and Applications*, Birkhäuser, Basel (CH), 2002.
C. Cercignani, *Ludwig Boltzmann, un genio nell'Austria felix*, Le Scienze, Milano, 2003.
R. Cervellati, *Le reazioni chimiche oscillanti. Una introduzione*, Clueb, Bologna, 1995.
D. Chandler, *Introduction to modern statistical mechanics*, Oxford University Press, Inc., new York, 1987.
S. Chapman, T.G. Cowling, *The Mathematical Theory of Non-Uniform Gases*, Cambridge University Press, London, 1939.
E. Chiavassa, S. Sciuto, *Lezioni di termodinamica statistica*, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino, 1979.
P. Chiorboli, *Fondamenti di Chimica*, II edizione, UTET, Torino, 1980.
M. Cini, *Introduzione alla meccanica delle particelle*, UTET, Torino, 1968.
M. Cini, "Definizione di stato in meccanica quantistica e limite classico della matrice densità", in: G. Cattaneo, A. Rossi (a cura di), *I fondamenti della meccanica quantistica. Analisi storica e problemi aperti*, EdiEl, Commenda di Rende (CS), IT, 1991, pp. 277-287.
E. Chiavassa, L. Ramello, E. Vercellin, *Rivelatori di particelle. Appunti dalle lezioni di Fisica dei Neutroni*, La Scientifica Editrice, Torino, 1991.

L. Ciotti, *Lecture Notes on Stellar Dynamics*, Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 2000.
E.G.D. Cohen, W. Thirring (Eds.), *The Boltzmann Equation. Theory and Applications*, Springer-Verlag, Wien, 1973.
G.W. Collins, *The Virial Theorem in Stellar Astrophysics*, Pachart Publishing House, Tucson (AZ), 1973.
G.W. Collins, *The Fundamentals of Stellar Astrophysics*, W.H. Freeman & Co., New York, 1989.
L. Colombo, *Elementi di Struttura della Materia*, Ulrico Hoepli Editore, Milano, 2002.
E. Corinaldesi, F. Strocchi, *Relativistic Wave Mechanics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (NL), 1963.
E. Corinaldesi, A. Messina, *Introduzione alla Meccanica Quantistica*, Pitagora Editrice, Bologna, 1980.
N. Dallaporta, *Istituzioni di fisica teorica*, II edizione, Casa Editrice Pàtron, Bologna, 1971.
D.A.R. Dalvit, J. Frastai, I.D. Lawrie, *Problems on Statistical Mechanics*, IOP Publishing, Ltd., Bristol & Philadelphia, 1999.
G. Da Prato, *Introduction to differential stochastic equations*, Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 1998.
G. Da Prato, *An Introduction to Infinite Dimensional Analysis*, Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 2001.
G. Da Prato, *Introduction to Stochastic Analysis and Malliavin Calculus*, Edizioni della Normale, Pisa, 2008.
P.C.W. Davies, *The Physics of Time Asymmetry*, The University of California Press, Berkeley & Los Angeles (CA), 1974.
A.S. Davydov, *Teoria del nucleo atomico*, a cura di E. Clementel, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1966.
A.S. Davydov, *Meccanica quantistica*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.
A.S. Davydov, *Teoria del solido*, Edizioni Mir, Mosca, 1984.
P.A.M. Dirac, "The conditions for the statistical equilibrium between atoms, electrons and radiation", *Proceedings of the Royal Society, Series A*, 106 (739) (1924) pp. 581-596.
P.A.M. Dirac, *I Principi della Meccanica Quantistica*, Editore Boringhieri, Torino, 1968.
V. de Alfaro, *Introduzione alla teoria dei campi*, CLU, Torino, 1994.
L. De Broglie, "Il dualismo di onde e particelle nell'opera di Einstein", in: M. Pantaleo, F. De Finis (a cura di), *Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relatività negli sviluppi del pensiero scientifico di Einstein*, Giunti-Barbèra Editore, Firenze, 1979, pp. 729-762.
S.R. de Groot, L.G. Suttorp, *Foundations of Electrodynamics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (NL), 1972.
A.J. Dekker, *Fisica dello stato solido*, Casa Editrice Ambrosiana, Milano, 1965.
B. D'Espagnat, *I fondamenti concettuali della meccanica quantistica*, Bibliopolis, Napoli, 1977.
G. Dell'Antonio, *Elementi di meccanica. I: Meccanica Classica*, Liguori Editore, Napoli, 1996.
G. Dell'Antonio, *Aspetti matematici della meccanica quantistica*, 2 Voll., Bibliopolis, Napoli, 2011-13.
A. De Masi, E. Presutti, *Mathematical Methods for Hydrodynamic Limits*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1991.

R.I. Dobrushin, Ya.G. Sinai, Yu.M. Sukhov, “Dynamical Systems of Statistical Mechanics”, in: Ya.G. Sinai (Ed.), *Dynamical Systems*, Vol. II: *Ergodic Theory with Applications to Dynamical Systems and Statistical Mechanics*, EMS – Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1989, Ch. 10, pp. 208-254.

T.C. Dorlas, *Statistical Mechanics. Fundamentals and Model Solutions*, IOP Publishing, Ltd., Bristol & Philadelphia, 1999.

D.A. Dubin, *Solvable Models in Algebraic Statistical Mechanics*, Clarendon Press, Oxford (UK), 1974.

D.A. Dubin, M.A. Hennings, T.B. Smith, *Mathematical Aspects of Weyl Quantization and Phase*, World Scientific Publishing Company, Singapore (SG), 2000.

P. Ehrenfest, T. Ehrenfest, *The Conceptual Foundations of the Statistical Approach in Mechanics*, Cornell University Press, Ithaca, New York, 1959.

A. Einstein, “Kinetische Theorie des Wärmegleichgewicht und des zweiten Hauptsatzes der Thermodynamik”, *Annalen der Physik, IV*, 9 (1902) pp. 417-433.

A. Einstein, “Eine Theorie der Grundlagen der Thermodynamik”, *Annalen der Physik, IV*, 11 (1903) pp. 170-187.

A. Einstein, “Allgemeine molekulare Theorie der Wärme”, *Annalen der Physik, IV*, 14 (1904) pp. 354-362.

A. Einstein, “Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt”, *Annalen der Physik, IV*, 17 (1905a) pp. 132-148.

A. Einstein, “Über die von der molecular kinetische Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen”, *Annalen der Physik, IV*, 17 (1905b) pp. 549-560.

A. Einstein, “Zur Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption”, *Annalen der Physik, IV*, 19 (1906a) pp. 289-306.

A. Einstein, “Theorie der Lichterzeugung und Lichtabsorption”, *Annalen der Physik, IV*, 20 (1906b) pp. 199-206.

A. Einstein, “Die Plancksche Theorie der Strahlung und die Theorie der spezifischen Wärme”, *Annalen der Physik, IV*, 22 (1907) pp. 180-190.

A. Einstein, “Zur gegenwärtigen Stand der Strahlungsproblems”, *Physikalische Zeitschrift*, 10 (1909a) pp. 185-193.

A. Einstein, “Entwicklung unserer Anschauungen über das Wesen und die Konstitution der Strahlung”, *Physikalische Zeitschrift*, 10 (1909b) pp. 817-825.

A. Einstein, “Beziehung zwischen dem elastischen Verhalten und der Spezifischen Wärme mit einatomigem Molekül”, *Annalen der Physik, IV*, 34 (1911a) pp. 170-174.

A. Einstein, “Elementare Betrachtungen über die thermische Molekularbewegung in festen Körpern”, *Annalen der Physik, IV*, 35 (1911b) pp. 679-694.

A. Einstein, Communication à la première conference du *Congrès Solvay* intitulé “La théorie du rayonnement et les quanta”, qui eut lieu du 30 octobre au 3 novembre, 1911(c), à Bruxelles.

A. Einstein, “Strahlungs-emission und -absorption nach der Quantentheorie”, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft*, 18 (1916a) pp. 318-323.

A. Einstein, “Quantentheorie der Strahlung”, *Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft, Zürich*, 16 (1916b) pp. 47-62.

A. Einstein, “Zur Quantentheorie der Strahlung”, *Physikalische Zeitschrift*, 18 (1917) pp. 121-128.

A. Einstein, P. Ehrenfest, “Zur Quantentheorie des Strahlungsgleichgewichts”, *Zeitschrift für Physik*, 19 (1923) pp. 301-306.
A. Einstein, *Opere scelte*, a cura di E. Bellone, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1988 (Parte II, Capp. 1, 2, 3, 6, 7, 8, 10, 12).
A. Einstein, *La teoria dei quanti di luce*, Newton Compton Editori, Roma, 1973.
A. Einstein, P. Debye, M. Born, T. Von Karman, *La teoria quantistica del calore specifico*, Newton Compton Editori, Roma, 1974.
L. Eisenbud, E.P. Wigner, *La struttura del nucleo*, Editore Boringhieri, Torino, 1960.
R.S. Ellis, *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*, Springer-Verlag Inc., New York, 1985.
G.C. Emch, *Algebraic Methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.
G.G. Emch, *Mathematical and Conceptual Foundations of 20th-Century Physics*, North-Holland Publishing Company-Elsevier Science Publisher, Amsterdam (NL), 1984.
C.P. Enz, *No Time to be Brief. A scientific biography of Wolfgang Pauli*, Oxford University Press Inc., New York, 2002.
D.J. Evans, G.P. Morriss, *Statistical Mechanics of Nonequilibrium Liquids*, Academic Press, London, 1990.
H. Eyring, J. Walter, G.E. Kimball, *Chimica quantistica*, G.C. Sansoni Editore, Firenze, 1953.
M. Fabrizio, *Introduzione alla meccanica razionale e ai suoi metodi matematici*, Zanichelli Editore, Bologna, 1993.
L.D. Faddeev, “Le vedute di Einstein e talune vedute contemporanee sulle particelle elementari”, in: M. Pantaleo, F. De Finis (a cura di), *Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relatività negli sviluppi del pensiero scientifico di Einstein*, Giunti-Barbèra Editore, Firenze, 1979, pp. 763-793.
M. Falcioni, A. Vulpiani, *Meccanica Statistica Elementare. I fondamenti*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2015.
E. Fermi, *Introduzione alla fisica atomica*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1928 (Capp. I, IX, X).
E. Fermi, *Molecole e cristalli*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1934.
E. Fermi, *Notes on Quantum Mechanics*, Phoenix Books & The University of Chicago Press, New York & Chicago, 1962.
E. Fermi, *Termodinamica*, Editore Boringhieri, Torino, 1972.
B. Ferretti, *Le radici classiche della meccanica quantica*, Editore Boringhieri, Torino, 1980.
R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.
R.P. Feynman, *Statistical Mechanics. A Set of Lectures*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading (MA), 1990.
R. Fieschi, R. De Renzi, *Struttura della materia*, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1995.
B. Finzi, *Teoria dei campi. Lezioni di Fisica matematica tenute all’Università di Milano raccolte dal dott. Bartolomeo Todeschini*, II edizione, Libreria Editrice Politecnica Cesare Tamburini, Milano, 1958.
D. Flamm, “Ludwig Boltzmann – A Pioneer of Modern Physics”, preprint available at arXiv: physics/9710007v1 [physics.hist-ph], 7 October 1997.

V.A. Fock, “On the interpretation of quantum mechanics”, in: L.D. Faddeev, L.A. Khalfin, I.V. Komarov (Eds.), *Selected Works of V.A. Fock. Quantum Mechanics and Quantum Field Theory*, Chapman & Hall/CRC Press Company, Boca Raton (FL), 2004, pp. 539-556.
K.W. Ford, *La fisica delle particelle*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1965.
D. Forster, *Hydrodynamic Fluctuations, Broken Symmetry, and Correlation Functions*, W.A. Benjamin, Inc., Reading (MA), 1975.
S. Franchetti, A. Ranfagni, D. Mugnai, *Elementi di struttura della materia*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1986.
A.M. Fridman, V.L. Polyachenko, *Physics of Gravitating Systems*, 2 Vols., Springer-Verlag, New York, 1984.
K.O. Friedrichs, *Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1953.
O.R. Frisch, “Experimenteller Nachweis des Einsteinschen Strahlungsrückstoßes”, *Zeitschrift für Physik*, 86 (1-2) (1933) pp. 42-48.
S. Fujita, S. Godoy, *Quantum Statistical Theory of Superconductivity*, Kluwer Academic Publishers, New York, 2002.
G. Gallavotti, *Aspetti della teoria ergodica qualitativa e statistica del moto*, Quaderno UMI N. 21, Pitagora Editrice, Bologna, 1982.
G. Gallavotti, *Meccanica dei Fluidi*, Quaderni del Gruppo Nazionale di Fisica Matematica (GNFM) – (CNR), Vol. 52, Firenze, 1997.
G. Gallavotti, *Statistical Mechanics. A Short Treatise*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1999.
G. Gallavotti, W.L. Reiter, J. Yngvason, *Boltzmann’s Legacy*, European Mathematical Society Publishing House, Zürich (CH), 2008.
G. Gallavotti, *Nonequilibrium and Irreversibility*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2014.
C.M. Garelli, *Lezioni di fisica superiore*, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino, 1973.
J. Gemmer, M. Michel, G. Mahler, *Quantum Thermodynamics. Emergence of Thermodynamic Behaviour Within Composite Quantum System*, 2nd Edition, LNP 784, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2009.
H-O. Georgii, *Gibbs Measures and Phase Transitions*, Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1988.
E. Giordano, *Origini e Sviluppi della Meccanica Ondulatoria e della Meccanica delle Matrici*, Istituto di Fisica dell’Università degli Studi di Parma, Parma, 1974.
A. Giovannini (Ed.), *The Legacy of Léon Van Hove*, World Scientific Publishing Company, Singapore (SG), 2000.
S. Glasstone, *Trattato di Chimica Fisica*, C. Manfredi Editore, Milano, 1956.
J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics. A Functional Integral Point of View*, 2nd Edition, Springer-Verlag, Inc., New York, 1987.
M. Gliozzi, “Il principio di causalità nella storia della fisica”, in: AA.VV., *Conferenze di fisica*, 2 Voll., organizzate dal Ministero della Pubblica Istruzione e dal Museo della Scienza e della Tecnica di Milano, Giangiacomo Feltrinelli Editore, Milano, 1963-67.
V.E. Golant, A.P. Žilinskij, I.E. Sacharov, *Fondamenti di fisica dei plasmi*, Edizioni Mir, Mosca, 1983.
N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group*, Perseus Books Publishing, Reading (MA), 1992.

S. Graffi, *Le radici della quantizzazione*, Quaderni di Fisica Teorica (Collana curata da Sigfrido Boffi) N. 9, Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica dell'Università degli Studi di Pavia, Pavia, 1993.
W.T. Grandy, Jr., *Foundations of Statistical Mechanics*, Vol. I: *Equilibrium Theory*, Vol. II: *Nonequilibrium Phenomena*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht (NL), 1987-88.
L. Gratton, *Introduzione all'astrofisica. Stelle e galassie*, 2 Voll., Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1977.
H.J. Groenewold, "On the Principles of elementary quantum mechanics", *Physica*, 12 (1946) pp. 405-460.
C. Gruber, A. Hintermann, D. Merlini, *Group Analysis of Classical Lattice Systems*, LNP 60, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1977.
S.P. Gudder, *Stochastic Methods in Quantum Mechanics*, Elsevier North-Holland, Inc., New York, 1979.
S.P. Gudder, *Quantum Probability*, Academic Press, Inc., San Diego (CA), 1988.
F. Guerra, "Reversibilità/irreversibilità", *Enciclopedia Einaudi*, 16 Voll., Giulio Einaudi editore, Torino, 1977-1984, Vol. 11 (1980), pp. 1067-1106.
E.A. Guggenheim, *Termodinamica per fisici e chimici*, Edizioni Scientifiche Einaudi, Torino, 1952.
M.C. Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1990.
M. Guzzi, *Principi di fisica dei semiconduttori*, Ulrico Hoepli Editore, Milano, 2004.
R. Haag, *Local Quantum Physics. Fields, Particles, Algebras*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1992.
J. Hadamard, "La mécanique statistique", *Bulletin of the American Mathematical Society*, XII (1906) pp. 194-210.
H. Haken, H.C. Wolf, *Fisica atomica e quantistica. Introduzione ai fondamenti sperimentali e teorici*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1990.
K.B. Harvey, G.B. Porter, *Introduzione alla Chimica Fisica Inorganica*, Piccin Editore, Padova, 1976.
W.P. Healy, *Non-Relativistic Quantum Electrodynamics*, Accademic Press Inc., Ltd., London (UK), 1982.
W. Heisenberg, *I principi fisici della teoria dei quanti*, Editore Boringhieri, Torino, 1976.
T. L. Hill, *Introduzione alla termodinamica statistica*, Piccin Editore, Padova, 1970.
H.B. Hollinger, *The Boltzmann equation in non-equilibrium statistical mechanics*, The University of Wisconsin Press, Madison (WI), 1960.
K. Huang, *Meccanica statistica*, Zanichelli Editore, Bologna, 1997.
F. Hund, *Storia della teoria dei quanti*, Editore Boringhieri, Torino, 1980.
I. Iori, "Introduzione alla fisica moderna", in: R. Fieschi (a cura di), *Enciclopedia della Fisica*, 2 Voll., ISEDI-Istituto Editoriale Internazionale, Milano, 1976, Vol. I, Sezione 6, pp. 1-38.
C. Itzykson, J-M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, 2 Vols., Cambridge University Press, Cambridge (UK), 1989.
M. Jammer, *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1966.
E.T. Jaynes, "Gibbs vs. Boltzmann Entropies", *American Journal of Physics*, 33 (5) (1965) pp. 391-398.

E.T. Jaynes, “Predictive Statistical Mechanics”, in: G.T. Moore, M.O. Scully (Eds.), *Frontiers of Nonequilibrium Statistical Physics*, NATO-ASI Series (Series B: Physics), Vol. 135, Springer-Verlag, Inc., Boston (MA), 1986, pp. 33-55.
J. Jeans, *Introduction to the Kinetic Theory of Gases*, Cambridge University Press, London, 1948.
M. Jimbo, T. Miwa, *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models*, CBMS Number 85, American Mathematical Society, Providence (RI), 1995.
C. Jungnickel, R. McCormmach, *The Second Physicist. On the History of Theoretical Physics in Germany*, Springer International Publishing, Cham (CH), 2017.
M. Kac (Ed.), *Probability and Related Problems in Physical Sciences*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.
M. Kac, *Integration in Function Spaces and Some of Its Applications*, Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 1980.
L.P. Kadanoff, G. Baym, *Quantum Statistical Mechanics*, W.A. Benjamin, Inc., New York, 1962.
A. Kastler, *Questa strana materia*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1977.
A. Kastler, “Albert Einstein e il concetto di fotone”, in: M. Pantaleo, F. De Finis (a cura di), *Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relatività negli sviluppi del pensiero scientifico di Einstein*, Giunti-Barbèra Editore, Firenze, 1979, pp. 795-827.
E.C. Kemble, *The Fundamental Principles of Quantum Mechanics with Elementary Applications*, Dover Publications, Inc., New York, 1958.
A.I. Khinchin, *Analytical Foundations of Physical Statistics*, Hindustan Publishing Company, Delhi, 1961.
R. Kippenhahn, A. Weigert, *Stellar Structure and Evolution*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1990.
V.A. Kirillin, V.V. Syčev, A.E. Šejndlin, *Termodinamica tecnica*, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Roma-Mosca, 1980.
C. Kittel, *Introduzione alla fisica dello stato solido*, Editore Boringhieri, Torino, 1971.
C. Kittel, H. Kroemer, *Termodinamica statistica*, Editore Boringhieri, Torino, 1985.
M. Klein, *Paul Ehrenfest: the making of a theoretical physicist*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (NL), 1970.
R. Kubo, “The Boltzmann Equation in Solid State Physics”, *Acta Physica Austriaca*, Suppl. X, (1973) pp. 301-340.
T.S. Kuhn, *The Structure of Scientific Revolution*, The University of Chicago Press, Chicago (IL), 1962.
T.S. Kuhn, *Black-Body Theory and Quantum Discontinuity, 1894-1912*, 2nd Edition, The University of Chicago Press, Chicago (IL), 1987.
R. Kubo, M. Toda, N. Hashitsume, *Statistical Physics II. Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1985.
C. Lanczos, *The Einstein Decade (1905-1915)*, Paul Elek Science, London (UK), 1975.
L.D. Landau, E.M. Lifšits, *Fisica teorica 3. Meccanica quantistica. Teoria non relativistica*, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Roma-Mosca, 1982.
L.D. Landau, V.B. Berestetskij, E.M. Lifšits, L.P. Pitaevskij, *Fisica teorica 4. Teoria quantistica relativistica*, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Roma-Mosca, 1978.
L.D. Landau, E.M. Lifšits, L.P. Pitaevskij, *Fisica teorica 5. Fisica statistica. Parte I*, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Mosca-Roma, 1978.

L.D. Landau, E.M. Lifšits, L.P. Pitaevskij, *Fisica teorica 9. Fisica statistica. Parte II: Teoria dello stato condensato*, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Roma-Mosca, 1981.
L.D. Landau, E.M. Lifšits, L.P. Pitaevskij, *Fisica teorica 10. Fisica cinetica*, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Roma-Mosca, 1984.
B.H. Lavenda, E. Santamato, *Introduzione alla Fisica Atomica e Statistica*, Liguori Editore, Napoli, 1989.
B. Lehnert, *Dynamics of Charged Particles*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (NL), 1964.
J. Leray, *Analyse Lagrangienne et Mécanique Quantique*, Seminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, I, CNRS-Collège de France, Paris, 1977.
R. Lestienne, "L'entropia, il tempo della meccanica e la freccia cosmologica", *Scientia*, 74 (15) (1980) pp. 359-372.
B.G. Levich, V.A. Myamlin, Yu.A. Vdovin, *Theoretical Physics. An Advanced Text*, 4 Vols., North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1973.
D. Lindley, *L'atomo di Boltzmann*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 2002.
P-L. Lions, *Mathematical Topics of Fluid Mechanics*, 2 Vols., Oxford University Press, Inc., New York, 1996-98.
P-L. Lions, *On Euler Equations and Statistical Physics*, Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 1998.
H.A. Lorentz, *Les théories statistiques en Thermodinamique*, Conférences faites au Collège de France en Novembre 1912, édité par L. Dunoyer, B.G. Teubner Verlag, Leipzig, 1916.
F. Lucchin, *Introduzione alla cosmologia*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1990.
P.A. Martin, *Introduction à l'intégrale fonctionnelle en mécanique quantique et en mécanique statistique*, Notes des Cours donné pedant la *Semaine d'étude intensive* sur *L'intégrale fonctionnelle et ses applications*, organisée par le *Troisième Cycle de la Physique en Suisse Romande*, 21-25 Septembre 1993, Les Diablerets (CH).
A. Masani, *Storia della cosmologia*, Editori Riuniti, Roma, 1980.
A. Masani, R. Gallino, *Astrofisica*, 2 Voll., CLU, Torino, 1980-83.
A. Masani, *Astrofisica*, Editori Riuniti, Roma, 1984.
N.B. Maslova, "Existence and Uniqueness Theorems for the Boltzmann Equation", in: Ya.G. Sinai (Ed.), *Dynamical Systems*, Vol. II: *Ergodic Theory with Applications to Dynamical Systems and Statistical Mechanics*, EMS – Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1989, Ch. 11, pp. 254-278.
P.T. Matthews, *Introduzione alla meccanica quantistica*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1978.
J.E. Mayer, M. Goeppert Mayer, *Statistical Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1940.
D.H. Mayer, *The Ruelle-Araki Transfer Operator in Classical Statistical Mechanics*, LNP 123, Springer-Verlag, Berlin & New York, 1980.
B.M. McCoy, *Advanced Statistical Mechanics*, Oxford University Press, Inc., New York, 2010.
D.A. McQuarrie, *Statistical Mechanics*, Harper & Row Publishers, Inc., New York, 1976.
J. Mehra, "Einstein and the foundation of statistical mechanics", *Physica*, 79A (5) (1975) pp. 447-477.

J. Mehra, H. Rechenberg[71], *The Quantum Theory of Planck, Einstein, Bohr and Sommerfeld. Its Foundation and the Rise of Its Difficulties 1900-1925*, Springer-Verlag, Inc., New York, 1982.
J. Mehra, *The Golden Age of Theoretical Physics*, 2 Vols., World Scientific Publishing Company, Singapore (SG), 2001.
J.R. Meyer-Arendt, *Introduzione all'ottica classica e moderna*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1976.
R.A. Millikan, "A direct photoelectric determination of Planck's h", *Physical Review*, 7 (1916) pp. 355-388.
T.A. Minelli, *Appunti per una guida euristica ai metodi matematici della fisica*, Cleup, Padova, 1984.
A. Minguzzi, S. Succi, F. Toschi, M.P. Tosi, P. Vignolo, *Numerical methods for atomic quantum gases*, Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 2004.
V. Molinari, B. Montagnini, *Introduzione alla teoria del trasporto*, Quaderni del Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica (GNFM) – CNR, Pitagora Editrice, Bologna, 1978.
W.J. Moore, *Chimica Fisica*, II edizione, Piccin Nuova Libraria, Padova, 1979.
J.E. Moyal, "Quantum mechanics as a statistical theory", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 45 (1949) pp. 99-124.
G. Mussardo, *Il modello di Ising. Introduzione alla teoria dei campi e delle transizioni di fase*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 2007.
G. Nardulli, *Meccanica Quantistica I, Principi*, FrancoAngeli, Milano, 2001a.
G. Nardulli, *Meccanica Quantistica II, Applicazioni*, FrancoAngeli, Milano, 2001b.
L. Navarro, "Gibbs, Einstein and the Foundations of Statistical Mechanics", *Archive for History of Exact Sciences*, 53 (1998) pp. 147-180.
E. Nelson, *Dynamical Theories of Brownian Motion*, Princeton University Press, Princeton (NJ), 1967.
L. Nobili, *Processi radiativi ed equazione del trasporto nell'astrofisica delle alte energie*, Cleup Editrice, Padova, 2002.
L. Nobili, *Astrofisica relativistica. Fondamenti di relatività generale e fluidodinamica relativistica*, Cleup Editrice, Padova, 2003.
E. Onofri, C. Destri, *Istituzioni di fisica teorica*, La Nuova Italia Scientifica, Roma, 1996.
J. Orban, A. Bellemans, "Velocity-inversion and irreversibility in a dilute gas of hard disks", *Physics Letters A*, 24 (1) (1967) pp. 620-621.
C.A. Orzalesi, *Introduzione alla Fisica Teorica*, Vol. I: *Elettrodinamica Classica e Teoria della Relatività Ristretta*, Con Esercitazioni e Complementi a cura di V. Amar, Studium Parmense Editrice, Parma, 1981.
T. Padmanabhan, *Theoretical Astrophysics*, 3 Vols., Cambridge University Press, Cambridge (UK), 2000-02.
A. Pais, "*Sottile è il Signore …*" *La scienza e la vita di Albert Einstein*, Bollati Boringhieri, Torino, 1991 (Capp. 17, 21, 29).
A. Papoulis, *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici*, Editore Boringhieri, Torino, 1973.

[71] Questa referenza costituisce il primo volume di un trattato, in sei volumi (per un totale di otto tomi), sulla storia della meccanica quantistica dal titolo *The Historical Development of Quantum Theory*, edito dalla Springer-Verlag fra il 1982 e il 2001, redatto da Jagdish Mehra e Helmut Rechenberg.

G. Parisi, *Statistical Field Theory*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (MA), 1988.
R.K. Pathria, *Statistical Mechanics*, 2nd Edition, Butterworth-Heinemann, Oxford (UK), 1996.
W. Pauli, "Über das thermische Gleichgewicht zwischen Strahlung und freien Elektronen", *Zeitschrift für Physik*, 18 (1923) pp. 272-286.
W. Pauli, "Über das Wasserstoffspektrum vom Standpunkt der neuen Quantenmechanik", *Zeitschrift für Physik*, 36 (1926) pp. 336-363.
W. Pauli, "Il contributo di Einstein alla teoria dei quanti", in: P.A. Schlipp (a cura di), *Albert Einstein, scienziato e filosofo. Autobiografia di Einstein e saggi di vari autori*, Edizioni Scientifiche Einaudi-Editore Boringhieri, Torino, 1958, pp. 97-107.
W. Pauli, *Termodinamica e teoria cinetica dei gas*, Editore Boringhieri, Torino, 1964a.
W. Pauli, *Meccanica statistica*, Editore Boringhieri, Torino, 1964b.
W. Pauli, *Fisica e conoscenza*, Editore Boringhieri, Torino, 1964c.
W. Pauli, *General Principles of Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1980.
L.C. Pauling, E.B. Wilson, *Introduzione alla meccanica quantistica*, Piccin Editore, Padova, 1968.
P.J.E. Peebles, *Quantum Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (NJ), 1992.
L. Peliti, *Appunti di meccanica statistica*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 2003.
O. Penrose, *Foundations of Statistical Mechanics. A Deductive Treatment*, Pergamon Press, Oxford (UK), 1970.
E. Persico, *Fondamenti della meccanica atomica*, Ristampa anastatica dell'edizione del 1939, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1978.
D. Pescetti, *Termodinamica*, Piccin Editore, Padova, 1975.
D. Pescetti, *Elettromagnetismo*, Piccin Nuova Libraria, Padova, 1985a.
D. Pescetti, *Elettromagnetismo. Problemi interamente risolti*, Piccin Nuova Libraria, Padova, 1985b.
L.E. Picasso, *Lezioni di Meccanica Quantistica*, Edizioni ETS, Pisa, 2009.
M. Pierucci, *Complementi di Fisica*, Vol. I, CEDAM, Padova, 1960.
A. Pignedoli, *Alcune teorie meccaniche superiori*, CEDAM, Padova, 1969a.
A. Pignedoli, *Fondamenti della teoria matematica della diffusione dei neutroni*, Edizioni Cremonese, Roma, 1969b.
M. Planck, *La conoscenza del mondo fisico*, Editore Boringhieri, Torino, 1973.
M. Polini, M. Tosi, *Many-body physics in condensed matter systems*, Edizioni della Normale, Pisa, 2006.
B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Zetsche, *Particelle e nuclei. Un'introduzione ai concetti fisici*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 1998.
R. Pozzoli, *Fisica del plasma termonucleare e astrofisico*, Clued, Milano, 1984.
E. Predazzi, *Istituzioni di fisica teorica*, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino, 1984.
E. Presutti, *Introduzione alla meccanica statistica*, Quaderni del CNR – Gruppo Nazionale per la Fisica Matematica, Roma, 1979.
E. Presutti, *Lezioni di meccanica statistica*, Aracne Editrice, Roma, 1995.
E. Presutti, *Scaling Limits in Statistical Mechanics and Microstructures in Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2009.
I. Prigogine, *Introduzione alla termodinamica dei processi irreversibili*, Leonardo Edizioni Scientifiche, Roma, 1971.

I. Prigogine, *La nascita del tempo*, Edizioni Theoria, Roma-Napoli, 1988.
I. Prigogine, *Dall'essere al divenire. Tempo e complessità nelle scienze fisiche*, Giulio Einaudi editore, Torino, 1986.
I. Prigogine, D. Kondepudi, *Termodinamica. Dalle macchine termiche alle strutture dissipative*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 2002.
I. Prigogine, G. Nicolis, *Le strutture dissipative. Auto-organizzazione dei sistemi termodinamici in non-equilibrio*, edizione italiana a cura di A.M. Liquori, G.C. Sansoni Editore, Firenze, 1982.
I. Prigogine, I. Stengers, *La nuova alleanza. Metamorfosi della scienza*, Giulio Einaudi editore, Torino, 1993.
L. Reatto, "Meccanica statistica", in: R. Fieschi (a cura di), *Enciclopedia della Fisica*, 2 Voll., ISEDI-Istituto Editoriale Internazionale, Milano, 1976, Vol. I, Sezione 5, pp. 1-107.
M. Reed, B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics*, 4 Vols., Academic Press, Inc., San Diego (CA), 1975-1980.
L.E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Mechanics*, The University of Texas Press, Austin (TX), 1980.
P.M.V. Résibois, M. de Leener, *Classical Kinetic Theory of Fluids*, John Wiley & Sons, London (UK), 1977.
M. Reza Bakhtiari, *Quantum Gases in Quasi-One-Dimensional Array*, Edizioni della Normale, Pisa, 2007.
P. Ring, P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer-Verlag, New York, 1980.
G. Roepstorff, *Path Integral Approach to Quantum Physics. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1994.
C. Rossetti, *Istituzioni di Fisica Teorica. Introduzione alla Meccanica Quantistica*, II edizione, Libreria Editrice Universitaria Levrotto & Bella, Torino, 1990.
D. Ruelle, *Thermodynamic Formalism. The Mathematical Structure of Classical Equilibrium Statistical Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (MA), 1978.
D. Ruelle, *Statistical Mechanics: Rigorous Results*, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (MA), 1989.
J.J. Sakurai, *Invariance Principles and Elementary Particles*, Princeton University Press, Princeton (NJ), 1964.
J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mechanics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading (MA), 1967.
J.J. Sakurai, *Meccanica quantistica moderna*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1990.
G. Sartori, *Lezioni di meccanica quantistica*, II edizione, Edizioni Libreria Cortina, Padova, 1997.
V. Scatturin, *Chimica generale e inorganica. Proprietà atomiche e molecolari*, UTET, Torino, 1987.
F. Schwabl, *Meccanica quantistica*, Zanichelli Editore, Bologna, 1995.
L.I. Schiff, *Meccanica quantistica*, Edizioni Scientifiche Einaudi, Torino, 1952.
P.A. Schlipp (a cura di), *Albert Einstein, scienziato e filosofo. Autobiografia di Einstein e saggi di vari autori*, Edizioni Scientifiche Einaudi-Editore Boringhieri, Torino, 1958.
E. Schrödinger, *Termodinamica statistica*, Editore Boringhieri, Torino, 1961.
L.S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1981.

D. Sciama, “Buchi neri e fluttuazioni di particelle quantistiche: una sintesi di Einstein”, in: M. Pantaleo, F. De Finis (a cura di), *Astrofisica e Cosmologia, Gravitazione, Quanti e Relatività negli sviluppi del pensiero scientifico di Einstein*, Giunti-Barbèra Editore, Firenze, 1979, pp. 617-678.
K. Seeger, H. Pötzl, “Experimental and theoretical investigations in semiconductors concerning the Boltzmann Equation”, *Acta Physica Austriaca*, Suppl. X, (1973) pp. 341-378.
E. Segrè, *Personaggi e scoperte nella fisica contemporanea*, Arnoldo Mondadori Editore, Milano, 1976.
F. Selleri, *Fisica senza dogma. La conoscenza scientifica tra sviluppo e regressione*, Edizioni Dedalo, Bari, 1989.
F. Selleri, “Onde e corpuscoli causali nello spazio-tempo”, in: G. Cattaneo, A. Rossi (a cura di), *I fondamenti della meccanica quantistica. Analisi storica e problemi aperti*, EdiEl, Commenda di Rende (CS), IT, 1991, pp. 363-377.
G.L. Sewell, *Quantum Theory of Collective Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (UK), 1986.
C.E. Shannon, W. Weaver, *La teoria matematica delle comunicazioni*, ETAS, Milano, 1971.
S.N. Shore, *Astrophysical Hydrodynamics*, John Wiley & Sons, New York, 2007.
B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, Inc., New York, 1979.
B. Simon, *The Statistical Mechanics of Lattice Gases*, Volume I, Princeton University Press, Princeton (NJ), 1993.
M. Simonetta (a cura di), *Chimica Fisica*, 2 Voll., Carlo Manfredi Editore, Milano, 1966-67.
Ya.G. Sinai, *Theory of Phase Transitions: Rigorous Results*, Pergamon Press, Oxford (UK), 1982.
R.B. Singh, *Introduction to Modern Physics*, New Age International Publishers, New Delhi, 2002.
A.G. Sitenko, V.K. Tartakovskij, *Lezioni di teoria del nucleo*, Edizioni Mir, Mosca, 1981.
J.C. Slater, *Teoria quantistica della materia*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1980.
W.V. Smith, P.P. Sorokin, *Il laser*, Editore Boringhieri, Torino, 1974.
J. Śniaticky, *Geometric Quantization and Quantum Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1980.
A. Sommerfeld, *Atomic Structure and Spectral Lines*, Methuen & Company, Ltd., London, 1923.
A. Sommerfeld, *Lectures on Theoretical Physics*, Volume V: *Thermodynamics and Statistical Mechanics*, Academic Press Inc., Ltd., London (UK), 1956.
J-M. Souriau, *Structure of Dynamical Systems. A Symplectic View of Physics*, Birkhäuser, Boston (MA), 1997.
G. Spiga, P. Vestrucci, A. Magnavacca, *Problemi di Fisica del Reattore Nucleare*, Pitagora Editrice, Bologna, 1985.
E.V. Špolskij, *Fisica atomica*, 2 Voll., Edizioni Mir, Mosca, 1986.
P. Straneo, “Materia, irraggiamento e fisica quantica”, in: L. Berzolari (a cura di), *Enciclopedia delle matematiche elementari e complementi*, Vol. III, Parte I, Ulrico Hoepli Editore, Milano, 1975 (ristampa anastatica della prima edizione del 1947), Articolo LII, pp. 821-950.
R.F. Streater, A.S. Wightman, *PCT, Spin and Statistics, and all that*, W.A. Benjamin, Inc. New York, 1964.
F. Strocchi, *Elements of Quantum Mechanics of Infinite Systems*, World Scientific Publishing Company, Singapore (SG), 1985.
F. Strocchi, *An Introduction to the Mathematical Structure of Quantum Mechanics*. *A Short Course for Mathematicians*, 2nd Edition, World Scientific Publishing Company, Singapore (SG), 2008a.
F. Strocchi, *Symmetry Breaking*, 2nd Edition, LNP 732, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2008b.

S. Succi, *An Introduction to Computational Physics. Part I: Grid Methods*, Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 2002.
S. Succi, *An Introduction to Computational Physics. Part II: Particle Methods*, Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 2003.
V.V. Syčev, *Sistemi termodinamici complessi*, Editori Riuniti-Edizioni Mir, Roma-Mosca, 1985.
G. Tagliaferri, *Storia della fisica quantistica. Dalle origini alla meccanica ondulatoria*, Franco Angeli Editore, Milano, 1985.
C. Tarsitani, "L'effetto fotoelettrico e la natura «duale» della radiazione: aspetti storici, metodologici e didattici", in: F. Bevilacqua (a cura di), *Storia della fisica. Un contributo per l'insegnamento della fisica*, Franco Angeli Editore, Milano, 1983, Cap. 7, pp. 165-190.
G. Tartara, *Teoria dei sistemi di comunicazione*, Editore Boringhieri, Torino, 1986.
D. ter Haar, *The Old Quantum Theory*, Pergamon Press, Oxford (UK), 1967.
W. Thirring, *A Course in Mathematical Physics*, 4 Vols., Springer-Verlag, New York, 1978-1983.
C.J. Thompson, *Mathematical Statistical Mechanics*, Princeton University Press, Princeton (NJ), 1972.
M. Toda, R. Kubo, N. Saitô, *Statistical Physics I. Equilibrium Statistical Mechanics*, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 1983.
S. Tolansky, *Introduzione alla fisica atomica*, 2 Voll., Editore Boringhieri, Torino, 1966.
G. Toraldo di Francia, *L'indagine del mondo fisico*, Giulio Einaudi editore, Torino, 1976.
M. Tosi, *Introduction to Statistical Mechanics and Thermodynamics*, Pubblicazioni della Scuola Normale Superiore di Pisa, Pisa, 1997.
M. Tosi, P. Vignolo, *Statistical mechanics and the physics of fluids*, Edizioni della Normale, Pisa, 2005.
B. Touschek, G. Rossi, *Meccanica statistica*, Editore Boringhieri, Torino, 1970.
G. Turchetti, *Dinamica classica dei sistemi fisici*, Zanichelli Editore, Bologna, 1998.
H. Umezawa, G. Vitiello, *Quantum Mechanics*, Bibliopolis, Napoli, 1985.
B.L. van der Waerden, *Sources of Quantum Mechanics*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam (NL), 1967.
L. Van Hove, "Quantum-mechanical perturbations giving rise to a statistical transport equation", *Physica*, 21 (1955) pp. 517-540.
M. Vietri, *Astrofisica delle alte energie*, Bollati Boringhieri editore, Torino, 2006.
C. Villi, G. Pisent, V. Vanzani, *Lezioni di Istituzioni di Fisica Nucleare*, Cleup, Padova, 1971.
C. Villi, F. Zardi, *Appunti di lezioni di fisica nucleare*, Cleup, Padova, 1975.
J.D. Walecka, *Fundamentals of Statistical Mechanics. Manuscript and Notes of Felix Bloch*, World Scientific Publishing Company, Singapore (SG), 2000.
G. Wataghin, *Lezioni di spettroscopia*, Libreria Scientifica Cortina, Torino, 1973.
S. Weinberg, *La teoria quantistica dei campi*, Zanichelli editore, Bologna, 1999.
H.Weyl, "Quantenmechanik und Gruppentheorie", *Zeitschrift für Physik*, 46 (1927) pp. 1-46,
H. Weyl, *The Theory of Groups and Quantum Mechanics*, Dover Publications, Inc., New York, 1950 (edizione originale in tedesco del 1928).
E.P. Wigner, "On the quantum correction for thermodynamic equilibrium", *Physical Review*, 40 (1932) pp. 749-759.
E.P. Wigner, "Fisica matematica", *Enciclopedia del Novecento*, 13 Voll., Istituto dell'Enciclopedia Italiana, G. Gentile & G. Treccani, Roma, 1976, Vol. II, pp. 1050-1065.

N.M.J. Woodhouse, *Geometric Quantization*, 2nd Edition, Clarendon Press, Oxford (UK), 1992.
T.Y. Wu, *Kinetic Equations of Gases and Plasmas*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading (MA), 1966.
H.D, Zeh, *The Physical Basis of The Direction of Time*, 4th Edition, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2001.
J.B. Zeldovič, I.D. Novikov, *Struttura ed evoluzione dell'Universo*, 2 Voll., Editori Riuniti-Edizioni Mir, Roma-Mosca, 1982.
M.W. Zemansky, *Calore e termodinamica*, Nicola Zanichelli Editore, Bologna, 1970.
E. Zermelo, *Collected Works*, Volume II, edited by H-D. Ebbinghaus, A. Kanamori, Springer-Verlag, Berlin & Heidelberg, 2013.
J.M. Ziman, *Electrons and Phonons. The Theory of Transport Phenomena in Solids*, Oxford University Press, Oxford (UK), 1960.
J. Zinn-Justin, *Quantum Field Theory and Critical Phenomena*, Clarendon Press, Oxford (UK), 1990.
R. Zwanzig, *Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Oxford University Press, Inc., New York, 2001.