



HAL
open science

RBD-FAST : une méthode d'analyse de sensibilité rapide et rigoureuse pour la garantie de performance énergétique

Jeanne Goffart, Monika Woloszyn

► To cite this version:

Jeanne Goffart, Monika Woloszyn. RBD-FAST : une méthode d'analyse de sensibilité rapide et rigoureuse pour la garantie de performance énergétique. Conférence Francophone de l'International Building Performance Simulation Association IBPSA, May 2018, Bordeaux, France. hal-01873694

HAL Id: hal-01873694

<https://hal.science/hal-01873694>

Submitted on 13 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

RBD-FAST : une méthode d'analyse de sensibilité rapide et rigoureuse pour la garantie de performance énergétique

Jeanne Goffart*¹, Monika Woloszyn¹

¹ Univ. Grenoble Alpes, Univ. Savoie Mont Blanc, CNRS, LOCIE, 73000 Chambéry

***jeanne.goffart@univ-smb.fr**

RESUME. L'article présente la méthode RBD-FAST basée sur la variance, qui couple analyse de sensibilité et analyse d'incertitude. Ces deux types d'analyses sont des outils indispensables pour la garantie de performance énergétique. Les informations obtenues sont de même qualité que la méthode de SOBOL, mais avec un nombre réduit de simulation et du même ordre de grandeur que le criblage de Morris. Ainsi la rapidité d'évaluation de la sensibilité des différents paramètres n'a plus à se faire au détriment de la qualité de l'information extraite par analyse de sensibilité. Avec le même nombre de simulation, la comparaison entre RBD-FAST et Morris est réalisée sur l'étude des besoins de chauffage d'une maison individuelle BEPOS avec 50 paramètres incertains. Les résultats illustrent la richesse et la qualité des informations extraites en une analyse avec RBD-FAST : quantification de la part d'influence de chaque entrée sur la dispersion de sortie, analyse d'incertitude rigoureuse, analyse graphique des tendances. Ces atouts en font donc une méthode privilégiée pour la garantie de performance énergétique.

MOTS-CLÉS : Analyse de sensibilité, garantie de performance, bonne pratique

ABSTRACT. The paper presents the variance-based method RBD-FAST which combines sensitivity and uncertainty analysis. These two kind of analysis are essential tools for the energy performance guarantee. The information obtained is of the same quality as the SOBOL method, but with a reduced number of simulations and of the same order of magnitude as the Morris screening. Thus, the speed of evaluation of the sensitivity of the various parameters no longer has to do to the detriment of the quality of the information extracted by sensitivity analysis. With the same number of simulations, the comparison between RBD-FAST and Morris is made on the study of the need for heating of a BEPOS individual house with 50 uncertain parameters. The results illustrate the richness and quality of the information extracted in an analysis with RBD-FAST: quantification on the part of the influence of each input on the output dispersion, rigorous uncertainty analysis, graphical analysis of trends. These strengths make it a preferred method for the energy performance guarantee.

KEYWORDS : sensitivity analysis, energy performance guarantee, good practice

1. INTRODUCTION : ANALYSE DE SENSIBILITE ET D'INCERTITUDE POUR LA GARANTIE DE PERFORMANCE

La garantie de performance énergétique (GPE) est un enjeu majeur et les méthodes statistiques couplées à la simulation thermique dynamique (STD) deviennent des outils incontournables pour sa mise en place. Ainsi, l'analyse d'incertitude et l'analyse de sensibilité (AS) interviennent à différentes étapes du processus de garantie de résultat énergétique. Par perturbation des entrées incertaines, l'analyse d'incertitude évalue l'intervalle de confiance sur les performances du bâtiment de manière à maîtriser la marge d'erreur sur l'engagement de la garantie. En complément, l'analyse de sensibilité identifie les paramètres les plus influents sur la variabilité des performances du bâti modélisé. Cette quête des paramètres les plus influents guident et/ou justifient la mise en place d'un protocole de mesures prioritaires ponctuelles sur le bâtiment livré et/ou la définition du plan de mesure et de vérification en

phase d'exploitation. Cela permet également, dans la phase conception, d'identifier les éléments clés dans le bâti pour l'optimisation des performances. Ainsi le laboratoire numérique qu'est la STD couplée aux analyses d'incertitude et de sensibilité permet de tester un grand nombre de configurations sur le modèle afin d'évaluer la réponse du bâti et donc d'extraire les dépendances des variables les plus influentes sur les consommations.

Les méthodes d'analyse de sensibilité dites globales et notamment celles basées sur la variance dites ANOVA sont tout indiquées pour répondre aux enjeux et aux objectifs de la GPE. En effet la STD requiert une méthode d'AS indépendante de la complexité du modèle et qui évalue le modèle de bâtiment sur la globalité des plages de variation des paramètres en prenant en compte leurs interactions. L'estimation des indices de sensibilité est robuste, l'interprétation intuitive et les informations sur la sensibilité et l'incertitude sont extraites avec les mêmes simulations. Cependant les méthodes ANOVA sont souvent associées à des temps de calcul prohibitifs, notamment les méthodes basées sur la décomposition fonctionnelle de la variance telle que la méthode de Sobol (Sobol' 2001). Bien que moins fine et dépendante de la régularité du modèle, la méthode de criblage de Morris est alors préférée, car avec un nombre drastiquement plus limité d'évaluations (de 10 à 100 fois inférieur), elle permet d'obtenir une information pertinente sur les paramètres influents.

L'enjeu de l'article est d'illustrer les performances de la méthode RBD-FAST. Basée sur la décomposition de la variance fréquentielle, elle estime les paramètres influents en STD avec une qualité d'informations sur les indices de sensibilité similaire à la méthode de Sobol, et ce avec un nombre réduit de simulations. Ce nombre d'évaluations est du même ordre de grandeur, voire inférieur au nombre nécessaire pour le criblage de Morris. Ainsi la rapidité d'évaluation de la sensibilité des différents paramètres n'a plus à se faire au détriment de la qualité et la quantité des informations extraites par AS. Pour appuyer ce discours, l'article présente une analyse de sensibilité avec un grand nombre de paramètres sur un cas d'étude de bâtiment BEPOS avec les deux méthodes : Morris et RBD-FAST. Le fonctionnement des deux méthodes est tout d'abord présenté.

2. DESCRIPTION DES METHODES : MORRIS ET RBD-FAST

Diverses méthodes d'AS existent et le choix dépend de la problématique (Saltelli et al. 2008). Il est déconseillé en STD d'utiliser des méthodes dites « un facteur à la fois » *i.e.* « One-at-a-time » (OAT) ou locale, car l'exploration de l'espace des paramètres n'étant pas optimal, les valeurs de sensibilité peuvent être biaisées, d'autant plus si le modèle physique évalué est non linéaire, non monotone et comportant des interactions.

2.1. LE CRIBLAGE DE MORRIS : UNE METHODE « UN FACTEUR A LA FOIS » AMELIOREE

Le principe de la méthode de Morris est d'effectuer une estimation de la sensibilité un paramètre à la fois (OAT), appelée trajectoire, et de répéter cette évaluation dans plusieurs points de l'espace des paramètres. La méthode combine ainsi la rapidité des méthodes types OAT tout en explorant un maillage sur une échelle globale et limite ainsi le risque de manquer des zones de l'espace des paramètres déterminantes. Cependant seuls peuvent être évalués les points appartenant à la grille multidimensionnelle construite par la méthode, l'information extraite est donc dépendante du maillage mis en place et du nombre de trajectoires. Ainsi il s'agit d'une méthode efficace et robuste tant que le modèle sondé est régulier. L'information extraite reste cependant qualitative et seule une hiérarchisation des effets est possible.

Le principe du maillage est le suivant : la plage de variation des k paramètres est discrétisée en Q niveaux, le croisement de ces Q niveaux définit un ensemble de nœuds Q^k . La méthode de Morris consiste à l'échantillonnage de ces nœuds par un ensemble de r trajectoires aléatoires dont chacune passe par $k + 1$ nœuds de manière à ce que chaque facteur ne varie qu'une seule fois par trajectoire. Aucune zone de l'espace ne peut être privilégiée, la méthode de Morris n'autorise donc que l'évaluation de loi uniforme sur une plage de variation initiale de 0 à 1 qui est ensuite transposée aux plages de variations attendues. L'influence de chaque facteur X_i est évaluée en comparant des simulations d'une trajectoire entre lesquelles seul le facteur X_i a varié. Il s'agit de l'effet élémentaire, effet seul de X_i que l'on estime à un point de l'espace. L'analyse de chaque trajectoire permet d'extraire les influences sur la sortie par la moyenne de la valeur absolue des effets (μ^*) et la variabilité des effets par l'écart type (σ). Ce dernier qualifie un niveau d'interaction et/ou de non linéarité du paramètre dans le modèle.

Le nombre de simulations dépend du nombre k des paramètres pris en compte dans l'analyse et du nombre de trajectoire r tel que $N = r(k + 1)$. Afin de réduire ce nombre de simulations, l'échantillonnage est optimisé par une sélection des trajectoires évaluant au mieux l'espace (Campolongo et al. 2007).

2.2. LA METHODE RBD-FAST POUR L'ESTIMATION DES INDICES DE SENSIBILITE DE SOBOL

Les indices de sensibilité de Sobol reposent sur la décomposition complète de la variabilité du modèle. Ils estiment la part de variance (dispersion) de la sortie du modèle induite par chaque entrée perturbée. Les indices sont compris entre 0 et 1. Un indice élevé indique une relation forte entre la variation de X_i et celle de la sortie Y . Un indicateur des interactions entre effets seuls est une somme des indices significativement inférieure à 1.

La méthode RBD-FAST (Random Balance Design – Fourier Amplitude Sensitivity Test) (Tarantola et al. 2006) estime des indices de Sobol de premier ordre robustes et précis avec seulement un jeu d'échantillons de N simulations de l'ordre de quelques centaines d'évaluations, quel que soit le nombre de paramètres. Pour cela la méthode évalue la variance partielle à partir de l'analyse des premières fréquences de la décomposition d' Y par transformée de Fourier. L'originalité de RBD-FAST est l'utilisation de randomisation par permutation qui permet de faire apparaître une seule et même fréquence ω_0 pour chaque variable aléatoire X_i . La procédure est la suivante : (1) permutation aléatoire R_i de l'ensemble des échantillons pour chaque variable d'entrée X_i échantillonnée au préalable avec la même fréquence ω_0 ; (2) simulation du modèle en utilisant les ensembles permutés de variables d'entrée; (3) réorganisation des N valeurs de sortie selon les vecteurs de permutation R_i pour chaque variable d'entrée X_i , afin de ramener la fréquence initiale (ω_0). Pour chaque ensemble réorganisé la fréquence ω_0 est reconstituée pour une unique entrée, les autres restants aléatoires. Une analyse fréquentielle des N évaluations de la sortie du modèle Y ainsi réorganisée montrera l'effet de l'entrée X_i dans les fréquences ω_0 et leurs harmoniques $\{2\omega_0, 4\omega_0, 6\omega_0, \dots\}$ et l'effet de toutes les autres variables sera un bruit blanc étalé sur toutes les fréquences. Afin de généraliser la méthode, l'algorithme de prétraitement EASI (Effective Algorithm for variance-based Sensitivity Indices) transforme un échantillon aléatoire de N simulations en un signal de forme triangulaire de fréquence $\omega_0=1$. Pour optimiser la convergence et minimiser le nombre d'évaluation du modèle, une méthode d'échantillonnage avancée est employée : LHS Maximin. Plus d'informations sur RBD-FAST avec EASI et son application en STD sont disponibles dans (Goffart et al. 2015).

3. CAS D'ETUDE

L'objectif de l'étude est avant tout de comparer les capacités de RBD-FAST et du criblage de Morris sur un modèle cohérent de maison optimisée énergétiquement avec un nombre important de paramètres pour l'analyse de sensibilité. Ainsi les conclusions et la démarche de l'étude se focaliseront sur les performances des méthodes respectives plutôt qu'à l'interprétation et la performance du bâtiment évalué.

3.1. MODELE NUMERIQUE

Le modèle numérique utilisé pour l'étude est un modèle EnergyPlus d'une maison individuelle dite BEPOS construite dans le cadre du projet COMEPOS¹. La maison a une superficie de 137 m² habitables répartie sur deux niveaux. La perméabilité à l'air est de 0,4 m³/(h.m²) et la résistance thermique des murs extérieurs isolés par l'intérieur est de 6 m².K/W. La modélisation est faite sur l'année pour le climat type de Strasbourg. Le détail ainsi que la validation du modèle sont disponibles dans (Josse 2017).

3.2. CONDITIONS DE L'ANALYSE

L'enjeu principal de l'étude porte sur l'illustration des capacités de RBD FAST et de Morris afin de comparer des indicateurs clés entre les deux méthodes : le temps de calcul, la qualité de l'information extraite, la convergence des résultats, mais aussi la quantité des informations. Ainsi il est choisi d'évaluer sur 50 entrées du modèle l'impact de leurs variations sur la variabilité du besoin de chauffage annuel avec d'une part la méthode de Morris et d'autre part la méthode RBD-FAST. Sachant que la méthode de Morris impose des lois uniformes, ce type de loi est choisie afin de comparer au mieux les deux méthodes. Ce type de loi impose une équiprobabilité d'évènement entre les valeurs possibles du paramètre ce qui est une contrainte forte sur la représentation des incertitudes. Les gammes de variations sont en accord avec une variabilité cohérente dans la vie d'un bâtiment et sont renseignées entre parenthèses dans la suite du texte.

Les paramètres pris en compte dans l'analyse de sensibilité sont associés : aux usages du bâtiment, tels que les charges internes des occupants et des usagers, des ouvertures de fenêtres, certains usages sont fragmentés en plusieurs paramètres pour évaluer leur impact à différente période de la journée ; aux paramètres thermophysiques ($\pm 10\%$) tels que la conduction, chaleur spécifique et densité de chaque matériau de construction ainsi que le facteur solaire et la résistance thermique des fenêtres ; aux conditions limites du bâti, telles que l'albédo (0.3 ± 0.1), la température du sol ($\pm 10\%$), l'infiltration ($\pm 20\%$) et l'orientation ($\pm 5^\circ$) ; à la gestion du bâtiment, telle que la ventilation ($\pm 10\%$) et la température de consigne ($\pm 1^\circ\text{C}$). Le choix des plages de variations est important et est une étape délicate de l'analyse de sensibilité. Dans le cadre de l'étude les variations correspondent à la phase d'exploitation du bâtiment, elles sont raisonnables avec un maximum de 33 % pour l'albédo et en accord avec les valeurs des grandeurs physiques observées en littérature. L'analyse fine de l'impact des paramètres d'usage et le détail de leur variation notamment pour le confort estival de la maison étudiée font l'objet d'une autre étude présentée à IBPSA France 2018 (Gondian et al. 2018).

L'analyse est faite avec 306 simulations pour chaque méthode. Pour Morris cela correspond à 6 trajectoires de 51 simulations, préalablement optimisées sur 10 fois plus de trajectoires

¹ www.comepos.fr

(Campolongo et al. 2007). Le maillage est fait avec une valeur usuelle de $Q = 4$. Les résultats exposent la convergence de chaque méthode ainsi que les informations extraites et leur qualité.

4. COMPARAISON DES PERFORMANCES DE MORRIS ET RBD-FAST

4.1. CONVERGENCE DE L'ANALYSE POUR CHAQUE METHODE

Après une analyse, le premier indicateur qui doit être vérifié est la convergence, *i.e.* si le nombre de simulation est suffisant pour obtenir des résultats de sensibilité stables. La Figure 1 présente, pour les deux méthodes, la convergence de la variance et de la moyenne de la sortie du modèle (besoins de chauffage) pour l'échantillon statistique. Ce sont des grandeurs statistiques importantes pour le calcul de la sensibilité pour les deux méthodes. On observe que RBD-FAST est plus rapidement stable, en effet 150 simulations auraient été suffisantes pour l'analyse. Pour la méthode de Morris, la variance s'écarte de 10 à 15 % de la variance finale. Afin de compléter l'étude de convergence de la méthode de Morris avec plus de trajectoires, 1020 simulations ont été faites *i.e.* 20 trajectoires. La méthode atteint une variance finale inférieure à 5 % pour 16 trajectoires, *i.e.* 816 simulations, elle n'est plus que de 2 %. On observe un facteur 5 en nombre de simulation pour obtenir la même stabilité de l'échantillon entre RBD-FAST et Morris.

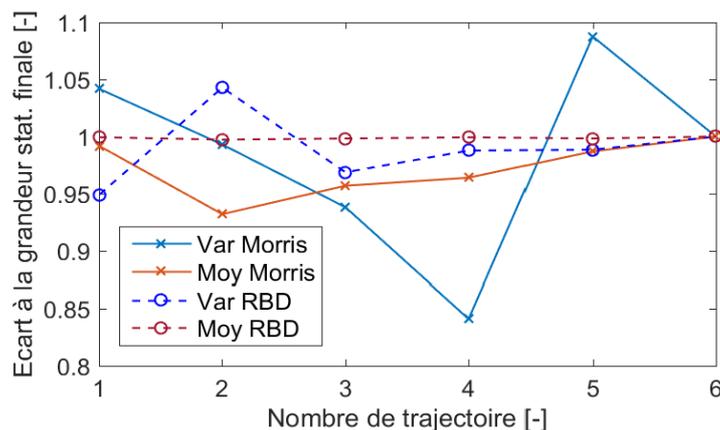


Figure 1 : Convergence de la variance et de la moyenne pour chaque méthode (N=306)

4.2. DISPERSION DE LA SORTIE D'INTERET : LE BESOIN DE CHAUFFAGE ANNUEL

De manière générale, il est toujours important de vérifier que la dispersion de sortie est significative pour justifier d'en estimer les paramètres les plus influents et donc l'analyse de sensibilité. Contrairement à la méthode de Morris, RBD-FAST permet de coupler à l'analyse de sensibilité une analyse d'incertitude. En effet la méthode de Morris ne prend en compte que les distributions uniformes et la méthode de maillage et de nœud implique que le modèle est souvent évalué aux bornes des plages de variations. Ceci biaise la dispersion de sortie en surévaluant les valeurs max et min des paramètres tel qu'illustré en Figure 2. Les distributions cumulées du besoin de chauffage pour les 306 simulations, pour chaque méthode y sont représentées. On observe bien le décalage entre les méthodes et la surestimation de la dispersion des consommations avec la méthode de Morris. Cet écart est lié à la méthode elle-même et non au nombre de simulation, il est en effet également observé le même écart avec les 1020 simulations, *i.e.* les 20 trajectoires.

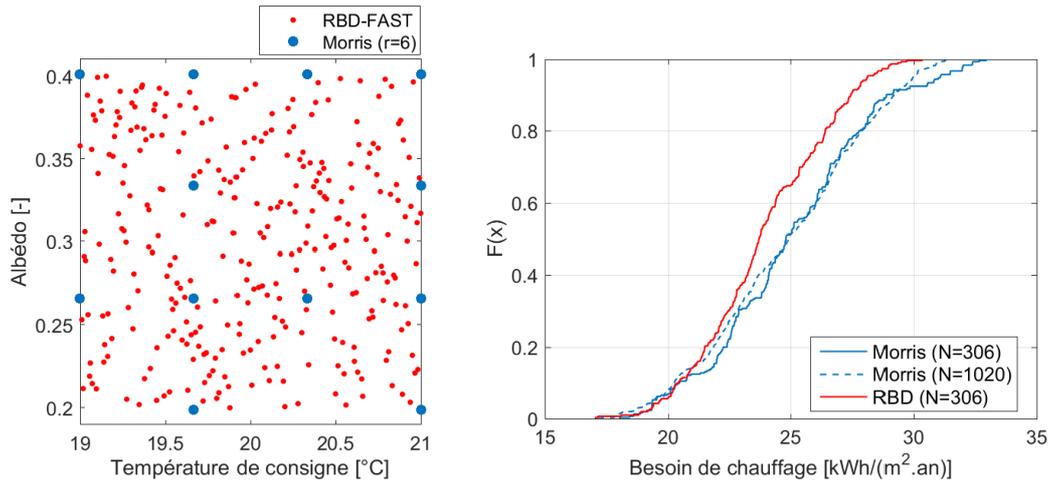


Figure 2 : Pour chaque méthode : (gauche) exploration de l'espace pour 2 paramètres (droite) distribution cumulée du besoin de chauffage.

4.3. ESTIMATION DES PARAMETRES LES PLUS INFLUENTS

En fonction de la méthode utilisée, l'indicateur de la sensibilité est assez différent. Dans le cas de RBD-FAST, les indices de sensibilité sont calculés et quantifient la part de variance de chaque paramètre d'entrée sur la variance totale *i.e.* la dispersion de la sortie. Dans le cadre de Morris l'indicateur est qualitatif et permet de classer les paramètres par ordre d'influence et de visualiser leur placement les uns par rapport aux autres. La Figure 3 montre le graphe de Morris : ainsi on voit qu'un paramètre se détache, il s'agit de la température de consigne. Il est possible de classer selon $d^* = \sqrt{\mu^{*2} + \sigma^2}$. Le Tableau 1 regroupe les paramètres par ordre décroissant d'influence selon RBD-FAST avec les variations d'entrées, les indices de sensibilité selon RBD-FAST et la distance d^* selon Morris ($r=6$) et le rang obtenu avec la méthode de Morris ; les rangs sont conservés entre $r=6$ et $r=20$.

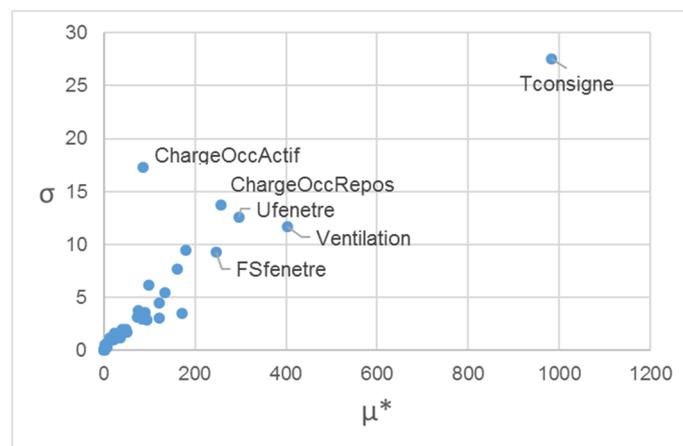


Figure 3 : Graphe de Morris : moyenne μ^* de la valeur absolue des effets en fonction de l'écart type σ des effets pour chaque paramètre ($r=6$).

Paramètres	Variation du paramètre dans l'AS	Indice RBD-FAST	Distance d^* Morris	Rang Morris
Température de consigne [°C]	20 ± 1	60 %	984	1
Ventilation [$\text{m}^3/(\text{s} \cdot \text{m}^2)$]	$2,05 \cdot 10^{-4} \pm 10 \%$	11 %	404	2
Charge interne occupant au Repos [W]	63 ± 20	8 %	257	4
Conductance Fenêtre [$\text{W}/(\text{m}^2 \cdot \text{K})$]	$1,3 \pm 10 \%$	7 %	298	3
Albédo [-]	$0,3 \pm 0,1$	7 %	179	6
Puissance équipement le matin de 6 h à 8 h [W]	200 ± 200	5 %	162	8
Facteur solaire Fenêtre [-]	$0,49 \pm 10 \%$	< 4 %	246	5
Puissance équipement continue [W]	100 ± 20	< 4 %	172	7
Puissance équipement le soir de 20 h à 22 h [W]	200 ± 200	< 4 %	135	9

Tableau 1 : Sensibilité et variations des paramètres les plus influents avec RBD-FAST et Morris

On remarque que les jeux de paramètre identifiés comme étant les plus influents sont les mêmes avec les deux méthodes. La température de consigne est particulièrement influente et les autres variables sont toutes dans une zone de moindre influence, ce que l'on retrouve avec RBD-FAST et la méthode de Morris. Quelques permutations sont observées dans le classement mais pour des variables d'influence similaire. RBD-FAST permet en complément de quantifier ; ainsi 60 % de la dispersion est due à la température de consigne. Une information supplémentaire sur le niveau d'interaction est donnée par la somme des indices. Celle-ci étant proche de 1, il n'y a pas d'interaction entre paramètres dans le modèle.

Un des atouts majeurs de RBD-FAST est également de pouvoir obtenir la tendance, i.e. l'évolution des besoins en fonction du ou des paramètre(s) influent(s). Dans notre étude il s'agit du besoin de chauffage en fonction de la température de consigne. La Figure 4 représente cette tendance. En moyenne une augmentation de 1 °C augmente le besoin de 3,5 kWh/(m².an). Cette approche permet d'aller vers les polynômes d'ajustement en garantie de performance. Pour cela, les consommations et non les besoins doivent être considérées ainsi que la prise en compte de l'ensemble des tendances des entrées influentes pour obtenir des polynômes multifactoriels.

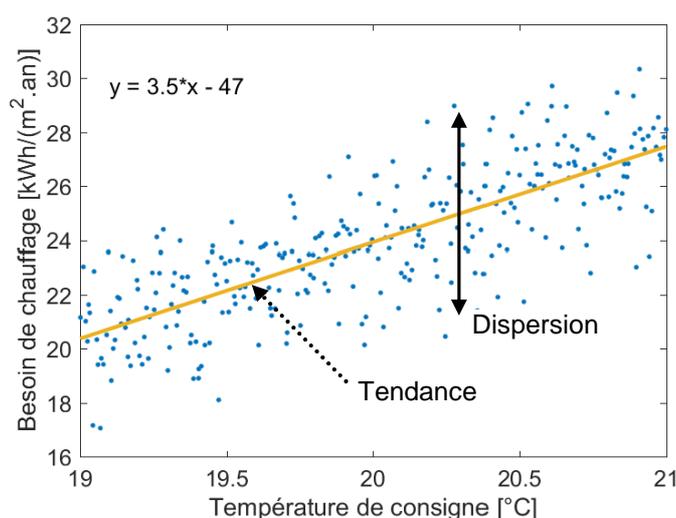


Figure 4 : Evolution de la valeur du besoin de chauffage en fonction de la température de consigne

5. CONCLUSION

Sur un cas pertinent de bâtiment réel optimisé, il a été montré que la méthode RBD-FAST est un outil décisif dans la mise en place de la GPE. Les méthodes de Morris et RBD-FAST arrivent aux mêmes niveaux de précision sur l'ordre des paramètres influents mais la méthode RBD-FAST permet avec le même nombre de simulation, voire moins, d'extraire plus d'informations. En effet, les effets de chaque paramètre sont quantifiés en un indice de sensibilité simple et clair. De plus, l'exploration de l'espace est maximisée et est compatible avec toutes les lois de distribution (discrète également) ce qui permet, de coupler à l'analyse de sensibilité, une analyse d'incertitude mais aussi une analyse graphique des résultats (interaction, régression, etc.). Par ailleurs, RBD-FAST fait partie des méthodes indépendantes de la complexité du modèle ce qui donne une liberté d'exploration pour différentes configurations d'études en STD (étude d'indice de sensibilité temporelle, étude de seuil d'inconfort thermique, etc.).

L'enjeu de l'article est d'avoir illustré les capacités de RBD-FAST afin d'en encourager son utilisation. Dans cette démarche la méthode complète a été ajoutée à la librairie d'analyse de sensibilité sous Python 3 : SALib (Herman et Usher 2017).

Remerciements

Ces travaux ont été menés dans le cadre du projet COMEPOS accompagné par l'ADEME (programme Énergies Décarbonées des Investissements d'Avenir).

6. BIBLIOGRAPHIE

- Campolongo, Francesca, Jessica Cariboni, and Andrea Saltelli. 2007. "An Effective Screening Design for Sensitivity Analysis of Large Models." *Environmental Modelling and Software* 22 (10): 1509–18. doi:10.1016/j.envsoft.2006.10.004.
- Goffart, Jeanne, Mickael Rabouille, and Nathan Mendes. 2015. "Uncertainty and Sensitivity Analysis Applied to Hygrothermal Simulation of a Brick Building in a Hot and Humid Climate." *Journal of Building Performance Simulation* 10 (1) 2017. Taylor & Francis: 37–57. doi:10.1080/19401493.2015.1112430 (online 2015).
- Gondian Léa, Jeanne Goffart, Monika Woloszyn, Etienne Wurtz, Catherine Buhé, Philippe Maréchal. 2018 "Evaluation de l'influence des occupants sur le confort estival : utilisation des analyses d'incertitude et de sensibilité", Conférence IBPSA France, 15-16 mai 2018, Bordeaux.
- Herman, Jon, Will Usher. 2017. "SALib: An open-source Python library for Sensitivity Analysis", *Journal of Open Source Software*, 2(9), 97, doi:10.21105/joss.00097
- Josse, Rozenn. 2017. "Méthode et outils pour l'identification de défauts des bâtiments connectés performants. Energie électrique". Université Grenoble Alpes. Français.
- Saltelli, Andrea, Marco Ratto, Terry Andres, Francesca Campolongo, Jessica Cariboni, Debora Gatelli, Michaela Saisana, and Stefano Tarantola. 2008. "Introduction to Sensitivity Analysis." In *Global Sensitivity Analysis. The Primer*, 1–51. John Wiley & Sons, Ltd. doi:10.1002/9780470725184.ch1.
- Sobol', I. M. 2001. "Global Sensitivity Indices for Nonlinear Mathematical Models and Their Monte Carlo Estimates." *Mathematics and Computers in Simulation* 55 (1–3): 271–80. doi:10.1016/S0378-4754(00)00270-6.
- Tarantola, Stefano, D Gatelli, and Thierry Mara. 2006. "Random Balance Designs for the Estimation of First Order Global Sensitivity Indices." *Reliability Engineering & System Safety* 91 (6): 717–27. doi:10.1016/j.ress.2005.06.003.