Une formulation de la dynamique classique

Jean Jacques Moreau

▶ **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Une formulation de la dynamique classique. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1987, 304, pp.191-194. hal-01868220

HAL Id: hal-01868220
https://hal.science/hal-01868220

Submitted on 5 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE ANALYTIQUE — *Une formulation de la Dynamique Classique* Note de **Jean Jacques Moreau,** présentée par Paul Germain

Une expression de la Dynamique Classique est donnée, ne nécessitant pas l existence des accélérations Elle s'applique aussi bien à un milieu tridimensionnel qu'à un système concentré tel qu'une simple particule ou à la Dynamique Analytique d'un système de liberté finie.

ANALYTICAL MECHANICS — A formulation of Classical Dynamics

An expression of Classical Dynamics is given, which does not require the existence of accelerations It applies to a three-dimensional medium as well as to a concentrated system such as a single particle or to the Analytical Dynamics of systems with finite number of degrees of freedom

1 INTRODUCTION — Considérons, à titre introductif, un milieu continu dont le mouvement, par rapport à des axes orthonormés galiléens $Ox^1 x^2 x^3$, est assez régulier pour que les composantes u^i du champ des vitesses et la masse spécifique ρ soient des fonctions $\mathscr{C}^1$ des x^i et du temps Notons x^0 cette dernière variable et convenons, pour toute la suite, que les indices *grecs* prennent leurs valeurs dans $\{0, 1, 2, \quad\}$, les indices *latins* dans $\{1, 2, \quad\}$ Il est connu qu'on peut rassembler les trois équations de la dynamique et l'équation de conservation de la masse dans l'écriture quadridimensionnelle

$$(\rho u^\alpha u^\beta)_{\ \beta} = e^\alpha \tag{1}$$

On note ici $_{\ \beta}$ la dérivée partielle par rapport à la variable x^β; par convention $u^0 \equiv 1$ Les e^i, pour $i>0$, sont les composantes de la densité volumique totale d'effort (en pratique densité volumique de force extérieure plus divergence du champ de contrainte de Cauchy), tandis que $e^0 \equiv 0$ (à moins qu'un apport de matière étrangère soit envisagé, à raison d'une masse e^0 par unité de temps et de volume)

Soit X l'espace euclidien dont les x^i sont des coordonnées cartésiennes orthonormées Les x^α constituent des coordonnées cartésiennes orthonormées de $\mathbb{R}\times X$ Au premier membre de (1) on reconnaît les quatre composantes, indexées par α, du champ vectoriel *divergence* du champ tensoriel sur $\mathbb{R}\times X$ admettant pour composantes $\rho u^\alpha u^\beta$

Si le mouvement n'est pas assez régulier pour qu'en (1) les dérivées partielles existent au sens élémentaire, il ne fait pas de doute qu'on exprime correctement la dynamique du milieu continu en entendant ces dérivées au sens des *distributions* Il s'agit là, rappelons-le, d'un abus de langage : une fonction n'est pas une distribution; en est une la *mesure* admettant pour densité, relativement à la mesure de Lebesgue des variables concernées, cette fonction, supposée localement intégrable

De façon générale, nous proposons de formuler comme suit la dynamique d'une matière occupant une partie M de $\mathbb{R}\times X$ Une mesure réelle $\geqq 0$ sur $\mathbb{R}\times X$, notée θ, portée par M, est introduite sous le nom de *mesure présence* de la matière étudiée Dans le cas ci-dessus, θ a pour densité, relativement à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}\times X$, la fonction ρ A la place de (1) nous écrirons

$$(u^\alpha u^\beta \theta)_{\ \beta} = f^\alpha \tag{2}$$

Au premier membre sont les composantes de la distribution vectorielle d'ordre $\leqq 1$ *divergence* de la mesure tensorielle symétrique de composantes $c^{\alpha\beta} = u^\alpha u^\beta \theta$; on appellera cette dernière *mesure cinétique* de la matière concernée Les f^α sont les composantes d'une distribution vectorielle d'ordre $\leqq 1$, représentant tout à la fois les impulsions, intérieures ou extérieures, subies par cette matière ainsi que les apports de masse (en particulier à la frontière de M)

0249-6305/87/03040191 $ 2 00 © Académie des Sciences

On fait voir au paragraphe 2 que la formulation (2), *qui ne nécessite pas l'existence de l'accélération*, s'applique notamment au cas traditionnel d'une simple particule ponctuelle. Le paragraphe 4 montre une écriture semblable pour la *Dynamique analytique d'un système de liberté finie*. Préalablement, au paragraphe 3, sera défini l'opérateur equ, agissant sur les distributions tensorielles deux fois contravariantes symétriques d'une variété : c'est le transposé négatif de l'opérateur def, familier en mécanique des milieux $\mathscr{C}^1$ (la notation equ fait allusion au traitement de la statique de ces milieux par la méthode des puissances virtuelles). Le paragraphe 5 explique la généralité de cette approche de la dynamique classique par son lien avec le principe de moindre action de Hamilton.

2. PARTICULE PONCTUELLE. — Soit une particule de masse μ; on note $p(t)$ sa position dans le repère galiléen X à l'instant t. On suppose $p \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, X)$; autrement dit la fonction vitesse $t \to \dot{p}(t)$ est un élément de $L^2_{loc}(\mathbb{R}, X)$. De façon équivalente, l'application $\pi : t \to (t, p(t))$ appartient à $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}, \mathbb{R} \times X)$; elle est donc continue.

Nous posons l'assertion suivante comme définition du modèle mécanique « particule ponctuelle » : *la mesure présence de cette matière est*, avec les notations de la théorie des distributions, un élément de $\mathscr{D}'^0(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R})$, à savoir *la fonctionnelle linéaire* θ *associant à tout* $\varphi \in \mathscr{D}^0(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R})$ (fonction réelle continue à support compact) *le réel* $\mu \int_{\mathbb{R}} \varphi(\pi(t))\, dt$. On constate que θ est une mesure de Radon $\geqq 0$ sur $\mathbb{R} \times X$, portée par la ligne $\pi(\mathbb{R})$ image du mouvement de la particule.

Vu les hypothèses faites, pour θ-presque tout point $x = \pi(t)$ de $\pi(\mathbb{R})$, il existe $u^\alpha(x) = \dot{\pi}^\alpha(t)$, à savoir 1 si $\alpha = 0$ et $\dot{p}^\alpha(t)$ si $\alpha > 0$. Alors les composantes $c^{\alpha\beta} = u^\alpha u^\beta \theta$ de la mesure cinétique sont les mesures réelles $c^{\alpha\beta} : \varphi \to \mu \int_{\mathbb{R}} \dot{\pi}^\alpha(t)\, \dot{\pi}^\beta(t)\, \varphi(\pi(t))\, dt$.

Vu la définition des dérivées partielles en théorie des distributions, le premier membre de (2) est, dans le cas présent, la fonctionnelle définie, pour $\varphi \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R} \times X, \mathbb{R})$, par $\langle c^{\alpha\beta}{}_{,\beta}, \varphi \rangle = -\langle c^{\alpha\beta}, \varphi_{,\beta} \rangle = -\mu \int_{\mathbb{R}} \dot{\pi}^\alpha(t)\, \dot{\pi}^\beta(t)\, \varphi_{,\beta}(\pi(t))\, dt$. Or $t \to \varphi(\pi(t))$ est une fonction absolument continue, de dérivée $\dot{\pi}^\beta(t)\, \varphi_{,\beta}(\pi(t))$ pour presque tout t. Dans le cas particulier $\pi \in W^{2,1}_{loc}$, il suffit d'effectuer sur l'intégrale ci-dessus une intégration par parties pour obtenir $\langle c^{\alpha\beta}{}_{,\beta}, \varphi \rangle = \mu \int_{\mathbb{R}} \ddot{\pi}^\alpha(t)\, \varphi(\pi(t))\, dt$. Autrement dit, $c^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ est alors la mesure admettant par rapport à θ une densité dont la valeur au point $x = \pi(t)$ égale $\ddot{\pi}^\alpha(t)$; cela vaut zéro si $\alpha = 0$ et sinon $\ddot{p}^\alpha(t)$, composante du vecteur *accélération* de la particule. En prenant t comme paramètre sur la ligne $\pi(\mathbb{R})$ on retrouve donc l'équation classique de la dynamique du point.

Si, plus généralement, la fonction vitesse $t \to \dot{p}(t)$ est à *variation localement bornée*, une intégration par parties de même forme montre que $c^{\alpha\beta}{}_{,\beta}$ est une mesure portée par $\pi(\mathbb{R})$. Cette mesure égale l'image par π d'une mesure sur $\mathbb{R}$, d'où une écriture de la dynamique de la particule en termes de *mesures différentielles* [1], contenant notamment le formalisme traditionnel des *percussions*.

3. OPÉRATEUR « EQU » SUR UNE VARIÉTÉ. — Soit $\mathscr{V}$ une variété $\mathscr{C}^k$ de dimension finie, munie d'une métrique riemannienne par la donnée de $g \in \mathscr{C}^{r+1}(\mathscr{V}, \mathscr{V}'^* \otimes_s \mathscr{V}'^*)$, i. e. g est un champ tensoriel deux fois covariant, symétrique, $r+1$ fois continûment différentiable ($0 \leqq r < k$ 1). Alors, pour tout champ de vecteurs $v \in \mathscr{C}^{r+1}(\mathscr{V}, \mathscr{V}')$ est définie la *dérivée de Lie* $L_v g$ (*cf.* par exemple [2]), champ tensoriel $\mathscr{C}^r$, de même type que g. Nous noterons

def l'opérateur v (1 $L_v g$ de $\mathscr{C}^{r+1}(\mathscr{V}, \mathscr{V}')$ dans $\mathscr{C}^r(\mathscr{V}, \mathscr{V}'^* \otimes_s \mathscr{V}'^*)$ Cette notation est suggeiee par la cinématique des milieux continus; en effet, si v est le champ des vitesses d'un milieu continu en mouvement dans $\mathscr{V}$, def v est le champ tensoriel *vitesse de déformation* de ce milieu, relativement à la métrique g

Si on utilise une carte locale de $\mathscr{V}$, l'expression classique des dérivées de Lie [2] donne les composantes de def v sous la forme

$$(3) \qquad (\operatorname{def} v)_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(g_{\alpha\beta\ \gamma} v^{\gamma} + g_{\gamma\beta} v^{\gamma}{}_{\alpha} + g_{\alpha\gamma} v^{\gamma}{}_{\beta})$$

Par définition, une *distribution tensorielle* T d'ordre $\leqq r$ sur $\mathscr{V}$, deux fois contravariante, symétrique, notation $T \in \mathscr{D}'^r(\mathscr{V}, \mathscr{V}' \otimes_s \mathscr{V}')$, est une fonctionnelle linéaire réelle continue sur l'espace $\mathscr{D}^r(\mathscr{V}, \mathscr{V}'^* \otimes_s \mathscr{V}'^*)$ des champs tensoriels $\mathscr{C}^r$, deux fois covariants, symétriques, à support compact; la continuité s'entend au sens classique de la théorie des distributions d'ordre $\leqq r$ En particulier, si $r=0$, T est une *mesure tensorielle* Dans toute carte locale de $\mathscr{V}$, T est décrite par ses *composantes* $T^{\alpha\beta}$ qui sont des distributions réelles d'ordre $\leqq r$

Définissons l'opérateur linéaire equ : $\mathscr{D}'^r(\mathscr{V}, \mathscr{V}' \otimes_s \mathscr{V}') \to \mathscr{D}'^{r+1}(\mathscr{V}, \mathscr{V}'^*)$ *comme l'application transposée négative de l'application* def

Vu la symétrie de T, on tire immédiatement de (3) l'expression suivante des distributions composantes de equ T

$$(4) \qquad (\operatorname{equ} T)_{\gamma} = g_{\beta\gamma} T^{\alpha\beta}{}_{\alpha} + \left(g_{\alpha\gamma\ \beta} - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta\ \gamma}\right) T^{\alpha\beta}$$

Dans le cas particulier où la métrique g est euclidienne, equ se réduit à l'opérateur div invoqué dans les paragraphes précédents.

4 Équations de Lagrange — Soit un système mécanique de liberté finie n, supposé pour simplifier scléronomique. Relativement à des coordonnées locales $(q^1, \ , q^n)$ de la variété $\mathscr{Q}$ des configurations, l'énergie cinétique du système s'exprime sous la forme $(1/2) g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j$ Pour un mouvement deux fois différentiable $t \to q^i = p^i(t)$, les équations de Lagrange se développent en

$$(5) \qquad g_{ij} \ddot{p}^j + \left(g_{ij\ k} - \frac{1}{2} g_{jk\ i}\right) \dot{p}^j \dot{p}^k = e_i,$$

où le covecteur de composantes e_i représente à chaque instant les efforts subis par le système On va montrer que ces équations sont, comme au paragraphe 2, impliquées par une formulation plus générale, utilisable dès que les fonctions p^i appartiennent à $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$

Si un point q de $\mathscr{Q}$ a pour coordonnées locales $(q^1, \ , q^n)$, repérons le point (r, q) de la variété produit $\mathbb{R} \times \mathscr{Q}$ par $(q^0, q^1, \ , q^n)$, avec $q^0 = r$ On définit une métrique riemannienne sur $\mathbb{R} \times \mathscr{Q}$ en bordant la matrice g_{ij} comme suit : $g_{\alpha 0} = g_{0\alpha} = 0$ si $\alpha > 0$ et $g_{00} = 1$

Comme au paragraphe 2, posons $\pi^{\alpha}(t) = t$ si $\alpha = 0$ et $\pi^{\alpha}(t) = p^{\alpha}(t)$ si $\alpha > 0$, ce qui définit une application π de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \times \mathscr{Q}$ Appelons *mesure présence* du mouvement p la fonctionnelle $\theta : \varphi \to \int_{\mathbb{R}} \varphi(\pi(t))\, dt$, mesure le Radon $\geqq 0$ sur $\mathbb{R} \times \mathscr{Q}$, portée par la ligne $\pi(\mathbb{R})$ Si les p^i, ou de façon équivalente les π^{α}, appartiennent à $W^{1,2}_{\mathrm{loc}}$, alors en θ-presque tout point $\pi(t)$ de $\pi(\mathbb{R})$ il existe $u^{\alpha} = \dot{\pi}^{\alpha}(t)$ On définit c, mesure tensorielle sur $\mathbb{R} \times \mathscr{Q}$, deux fois contravariante et symétrique, par ses composantes $c^{\alpha\beta} = u^{\alpha} u^{\beta} \theta$ En exprimant

par (4) les composantes $(\text{equ}\, c)_\beta$, on trouve zéro pour $\beta=0$ et, pour $\beta=i>0$,

$$(\text{equ}\, c)_i = g_{ij}\, c^{jk}{}_{k} + \left(g_{ij\ k} - \frac{1}{2} g_{jk\ i} \right) u^j u^k \theta$$

Dans le cas où $p^i \in W^{2,1}_{loc}$, la même intégration par parties qu'au paragraphe 2 donne $c^{jk}{}_{k} = \dot{p}^j \theta$. Alors l'équation de Lagrange (5) est un corollaire de l'écriture

$$\text{equ}\, c = f, \tag{6}$$

pourvu que f, distribution covectorielle sur $\mathbb{R}\times\mathcal{Q}$ représentant l'impulsion subie par le système, ait pour composantes $f_i = e_i \theta$ si $i>0$ et $f_0 = 0$.

Plus généralement, dès que f est une *mesure* covectorielle sur $\mathbb{R}\times\mathcal{Q}$, à support dans la ligne $\pi(\mathbb{R})$, (6) entraîne que les fonctions p^i sont à variation localement bornée et vérifient les équations de Lagrange au sens des mesures différentielles; cela contient le traitement traditionnel des *percussions* en Dynamique Analytique.

5. Conclusion. — Appliquer l'opérateur equ à la mesure cinétique c, mesure tensorielle deux fois contravariante sur la variété temps × espace, ressort de ce qui précède comme un moyen très général d'exprimer la dynamique classique.

Outre sa validité pour des mouvements peu réguliers, une source d'intérêt de cette formulation réside dans la signification *variationnelle* de l'opérateur equ. C'est ce qui apparaît dans la *méthode de transport* (ou des « variations horizontales »), présentée antérieurement ([3], [4]). Cette méthode, dont l'usage en mécanique prolonge la technique des puissances virtuelles, repose comme cette dernière sur l'emploi d'un champ vectoriel test, soit $v \in \mathcal{D}^1(\mathcal{V}, \mathcal{V}')$ (dans le contexte des paragraphes 1 et 2, la variété $\mathcal{V}$ serait le produit $\mathbb{R}\times X$). On visualise v comme le champ des vitesses d'un milieu continu Λ, appelé *porteur*, en mouvement sur $\mathcal{V}$. Cela pour bénéficier du langage familier de la Cinématique des Milieux Continus : Λ n'est pas le système matériel étudié et la variable τ indexant son évolution doit être distinguée du temps t de la Dynamique.

L'opérateur equ a été défini au paragraphe 3 comme transposé négatif de def. Or 2 def v exprime la dérivée de Lie L_v du tenseur métrique g de la variété $\mathcal{V}$. Il en découle directement que si la mesure tensorielle symétrique deux fois contravariante c est, en un sens évident, *transportée par* Λ, la dérivée par rapport à τ de l'intégrale $(1/2)\int g_{\alpha\beta}\, dc^{\alpha\beta}$ égale $-\langle \text{equ}\, c, v \rangle$. Le cas particulier des fluides non visqueux barotropes, traité dans [3], fait suffisamment comprendre que, si les efforts subis par le système dérivent d'une fonctionnelle énergie, on retrouve par là le principe de moindre action de Hamilton.

Reçue le 8 décembre 1986

Références bibliographiques

[1] J. J. Moreau, Sur les mesures différentielles de fonctions vectorielles et certains problèmes d'évolution, *Comptes rendus*, 282, série A, 1976, p. 837-840.

[2] J. E. Marsden et T. J. R. Hugues, *Mathematical foundations of elasticity*, Prentice-Hall, 1983.

[3] J. J. Moreau, Fluid dynamics and the calculus of horizontal variations, *Int. J. Engng. Sci.*, 20, 1982, p. 389-411.

[4] J. J. Moreau, Free boundaries and non-smooth solutions to some field equations: variational characterization through the transport method, *Proceedings of the IFIP W.G. 7.2 Working Conference on Boundary Control and Boundary Variations*, J. P. Zolésio éd. Optimization Software, Inc., New York, 1987 (à paraître).

Laboratoire de Mécanique générale des Milieux Continus,
Université des Sciences et Techniques du Languedoc, 34060 Montpellier Cedex