



Un cas de convergence des itérées d'une contraction d'un espace hilbertien

Jean Jacques Moreau

► To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Un cas de convergence des itérées d'une contraction d'un espace hilbertien. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1978, 286, pp.143-144. hal-01868178

HAL Id: hal-01868178

<https://hal.science/hal-01868178>

Submitted on 5 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE MATHÉMATIQUE. — *Un cas de convergence des itérées d'une contraction d'un espace hilbertien.* Note (*) de **Jean Jacques Moreau**, présentée par M. Jean Leray.

Soit D une partie d'un espace hilbertien réel et soit $S : D \rightarrow D$ contractante. Si l'ensemble des points fixes de S possède un intérieur non vide, pour chaque $u_0 \in D$ la suite $S^n u_0$ converge vers un de ces points fixes. Application à certains problèmes d'évolution périodique.

Let D be a subset of a real Hilbert space and $S : D \rightarrow D$ be a nonexpanding mapping. If the set of the fixed points of S has a nonempty interior, for every $u_0 \in D$ the sequence $S^n u_0$ converges to a fixed point of S . Application to some periodic evolution problems.

Soit H un espace hilbertien réel et soit S une application d'une partie D de H dans elle-même, telle que, pour tout x et tout x' dans D , on ait

$$\|Sx - Sx'\| \leq \|x - x'\|.$$

PROPOSITION. — *Si l'ensemble des points fixes de S possède un intérieur non vide, pour tout $u_0 \in D$ la suite des $S^n u_0$, $n \in \mathbb{N}$, converge vers un point fixe de S .*

On va fonder la démonstration sur :

LEMME. — *Soit b le centre d'une boule fermée, de rayon $\rho > 0$, contenue dans l'ensemble des points fixes de S ; alors pour tout $u \in D$ on a*

$$(1) \quad \|u - Su\| \leq \frac{1}{2\rho} (\|b - u\|^2 - \|b - Su\|^2).$$

En effet, en supposant $Su \neq u$, sans quoi l'inégalité est triviale, posons

$$u - Su = \|u - Su\| a,$$

ce qui fait $\|a\| = 1$. Le point $b + \rho a$ est, d'après l'hypothèse, un point fixe de S , d'où :

$$\|b + \rho a - u\|^2 \geq \|b + \rho a - Su\|^2.$$

Un calcul immédiat donne (1).

Preuve de la proposition. — Il existe par hypothèse une boule vérifiant les conditions du lemme. Posons $u_n = S^n u_0$ et soit $p \geq 1$ un entier

$$\begin{aligned} \|u_n - u_{n+p}\| &\leq \sum_{i=0}^{p-1} \|u_{n+i} - Su_{n+i}\| \\ &\leq \frac{1}{2\rho} \sum_{i=0}^{p-1} (\|b - u_{n+i}\|^2 - \|b - u_{n+i+1}\|^2) \\ &\leq \frac{1}{2\rho} (\|b - u_n\|^2 - \|b - u_{n+p}\|^2). \end{aligned}$$

Comme b est un point fixe de S , la suite des réels positifs $\|b - u_n\|^2$ est décroissante donc de Cauchy dans $\mathbb{R}$. Alors cette inégalité montre que la suite u_n est de Cauchy dans H , d'où convergence. Vu la continuité de S , la limite est nécessairement un de ses points fixes.

Remarque 1. — Lorsque H est de *dimension finie*, la proposition se démontre sans calculs. La suite u_n est contenue dans la boule fermée de centre b , de rayon $\|b - u_0\|$, laquelle est compacte. Il reste à prouver que cette suite ne peut pas posséder deux valeurs d'adhérence distinctes, notons-les x et x' . De fait, pour tout point fixe b' de S , la suite des réels $\|b' - u_n\|$ converge; par la continuité de la fonction distance on en conclut $\|b' - x\| = \|b' - x'\|$. L'ensemble des points fixes de S serait donc contenu dans l'hyperplan médiateur des deux points x et x' , ce qui est contradictoire.

Remarque 2. — Soit une « équation » d'évolution

$$(2) \quad -\frac{du}{dt} \in A(t, u),$$

à la fonction inconnue $u : [0, +\infty[\rightarrow H$, localement absolument continue, où $A(t, \cdot)$ désigne pour chaque t une multifonction monotone, au sens de G. J. Minty, de H dans lui-même. On sait que le flot des solutions éventuelles de (2) est contractant. Le même type d'argument que ci-dessus permet de montrer que, si (2) possède une famille de solutions constantes dont l'ensemble des valeurs présente un intérieur non vide, toute solution de (2) tend vers une de ces valeurs lorsque t tend vers $+\infty$. En effet, soit b le centre d'une boule fermée de rayon $\rho > 0$ contenue dans l'ensemble en question. Si u est une solution de (2), la dérivée du/dt existe pour presque tout t ⁽¹⁾; de ce que A est monotone on conclut l'inégalité analogue à (1) :

$$\left\| \frac{du}{dt} \right\| \leq -\frac{1}{2\rho} \frac{d}{dt} \|b - u\|^2.$$

On en tire par intégration que la fonction $t \mapsto u(t)$ possède la propriété de Cauchy pour $t \rightarrow +\infty$. Le même type de raisonnement était employé dans ⁽²⁾ pour le cas d'un processus de rafle, éventuellement discontinu ⁽³⁾ : on désigne ainsi le cas $A = \partial\psi$ où ψ est la fonction indicatrice d'un ensemble convexe fermé mobile $t \mapsto C(t)$; l'ensemble des valeurs des solutions constantes est l'intersection des $C(t)$.

APPLICATION. — Considérons l'équation (2) dans le cas où la donnée $t \mapsto A(t, \cdot)$ est périodique de période T . Pour $x \in H$, notons Sx la valeur au point $t = T$ de la solution de (2) prenant la valeur x au point $t = 0$, si cette solution existe.

Une solution u de (2) est périodique si et seulement si $u(0)$ est un point fixe de S . Comme S est une contraction, la proposition précédente donne :

Si l'ensemble des points fixes de S possède un intérieur non vide, pour toute solution u de (2) il existe une solution périodique $\tilde{u}$ telle que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{u}(t) - u(t)\| = 0.$$

(*) Séance du 12 décembre 1977.

⁽¹⁾ Y. KOMURA, *J. Math. Soc. Japan*, 19, 1967, p. 493-507.

⁽²⁾ J. J. MOREAU, *Rafle par un convexe variable* (2^e partie). (Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 2, 1972, Exposé n° 3, 36 p.).

⁽³⁾ J. J. MOREAU, *Evolution Problem Associated with a Moving Convex set in a Hilbert Space*, *J. Differential Equations*, 26, 1977, p. 347-374.