Intersection de deux convexes mobiles dans un espace normé

Jean Jacques Moreau

▶ **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Intersection de deux convexes mobiles dans un espace normé. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1973, 276, pp.1505-1508. hal-01868148

HAL Id: hal-01868148
https://hal.science/hal-01868148

Submitted on 5 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Intersection de deux convexes mobiles dans un espace normé.* Note (*) de M. **Jean Jacques Moreau**, présentée par M. Jean Leray.

1. Soit $A : t \mapsto A_t$ une *multiapplication* d'un intervalle T de **R** dans un espace métrique (E, d). En interprétant la variable t comme le temps, on peut dire que A est un *ensemble mobile* dans E. Cela peut enfin se décrire aussi comme une application, au sens ordinaire, de T dans l'ensemble des parties de E; en invoquant au sein de ce dernier ensemble la *distance de Hausdorff* h, on définit de la manière traditionnelle la *variation* de A sur tout sous-intervalle I de T (noter qu'il est indifférent à cet égard de remplacer les A_t par leurs adhérences). Si cette variation est finie pour tout I compact, on dit que A est à *variation finie* sur T et on construit (au choix près d'une constante additive) une fonction numérique croissante $v : T \to \mathbf{R}$, dite *variation indéfinie* de A, de sorte que

$$\forall\, [s, t] \subset T : \quad \mathrm{Var}\,(A; s, t) = v\,(t) - v\,(s).$$

Les éventualités suivantes jouent un rôle essentiel dans plusieurs travaux récents [(1), (2), (3)] :

On dit que A *est à variation finie continue si la fonction finie v est continue.*

On dit que A *est absolument continue (resp. lipschitzienne) si tel est le cas pour v; cela se traduit par des inégalités de forme classique, concernant les distances de Hausdorff entre les valeurs que prend* A *en des points de subdivision de l'intervalle.*

L'objet de la présente Note est d'établir le fait que voici, techniquement utile pour l'exploitation des travaux précités :

Théorème. — *Soit* T *un intervalle compact de* **R**; *soit* $t \mapsto A_t$ *et* $t \mapsto B_t$ *deux multiapplications de* T *dans un espace vectoriel normé, à valeurs convexes; on suppose que, pour tout t dans* T, *l'ensemble* A_t *rencontre l'intérieur* $\mathring{B}_t$ *de* B_t *et que* $\mathrm{diam}\, A_t \cap B_t < +\infty$.

Alors, si les deux multiapplications sont à variation finie continue sur T (*resp. absolument continues, resp. lipschitziennes*), *il en est de même de* $t \mapsto A_t \cap B_t$.

En particulier, si B désigne une boule ouverte fixe telle que $A_t \cap B \neq \emptyset$ pour tout $t \in T$, la multiapplication $t \mapsto A_t \cap B$ est à variation finie continue (resp. absolument continue, resp. lipschitzienne) dès qu'il en est ainsi pour la multiapplication à valeurs convexes $t \mapsto A_t$.

La démonstration repose sur des propositions préliminaires, ayant elles-mêmes leur utilité.

2. Pour deux parties quelconques A et B d'un espace métrique (E, d), on note [*cf.* ([3])] :

$$e(A, B) = \sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y),$$

écart dissymétrique, vérifiant l'inégalité triangulaire; « sup » et « inf » sont pris au sens de l'ensemble ordonné $\overline{\mathbf{R}}_+ = [0, +\infty]$. Cela donne en particulier l'équivalence

$$A \cap \mathring{B} \neq \emptyset \iff e(A, E \setminus B) > 0.$$

Par ailleurs $h(A, B) = \max\{ e(A, B), e(B, A) \}$.

Proposition 1. — *Soit* B_1 *et* B_2 *deux convexes de l'espace normé* E *et soit* A_1 *et* A_2 *des parties quelconques de* E; *alors*

$$e(A_1, E \setminus B_1) \leq e(A_2, E \setminus B_2) + e(A_1, A_2) + e(B_1, B_2). \tag{1}$$

Démonstration. — Prouvons d'abord que, pour tout $a \in E$,

$$d(a, E \setminus B_1) \leq d(a, E \setminus B_2) + e(B_1, B_2). \tag{2}$$

On simplifie les calculs en se ramenant par translation au cas $a = 0$. Soit g_1 et g_2 les *fonctions d'appui* respectives des convexes B_1 et B_2, définies sur le dual F de E, et soit $\rho > 0$. L'inégalité $\rho \leq d(0, E \setminus B_1)$ signifie que la boule ouverte de centre 0, de rayon ρ, est contenue dans B_1; en termes de fonctions d'appui, cela s'écrit $\rho \leq g_1(y)$ pour tout y appartenant à Σ, sphère unité de F. Or (utiliser, par exemple, comme plus loin, la théorie de la dualité des fonctions convexes) :

$$\forall\, y \in \Sigma : \quad g_1(y) \leq g_2(y) + e(B_1, B_2).$$

Donc $\rho - e(B_1, B_2) \leq g_2(y)$; l'inégalité (2) [banale si $e(B_1, B_2) = +\infty$] en résulte. On obtient ensuite (1) en passant au « sup » relativement à $a \in A_1$ puis en invoquant l'inégalité triangulaire pour e.

3. Proposition 2. — *Soit* A *et* B *deux parties convexes de l'espace normé* E; *on suppose qu'il existe une boule ouverte, de centre* $a \in A$, *de rayon* $\rho > 0$, *contenue dans* B; *alors*

$$\forall x \in E : \quad d(x, A \cap B) \leq \left(1 + \frac{\| x - a \|}{\rho}\right)(d(x, A) + d(x, B)). \tag{3}$$

Démonstration. — Pour les éléments de la théorie de la dualité des fonctions convexes employés dans ce qui suit, *voir*, par exemple, ([4]) ou ([5]); cette théorie fournit d'abord (f et g fonctions d'appui de A et B) :

$$d(x, A) = \sup\{ \langle x, u \rangle - f(u) : u \in F, \| u \| \leq 1 \}$$

et expression analogue pour $d(x, B)$. Notons φ la fonction positivement homogène sur $F \times F$:

$$\varphi(u, v) = \langle x, u + v \rangle - f(u) - g(v).$$

Pour $k > 0$ choisi arbitrairement, cela donne

$$k\,(d\,(x, \mathrm{A}) + d\,(x, \mathrm{B})) = \sup\{\varphi\,(u, v) : \|u\| \leq k, \|v\| \leq k\}. \tag{4}$$

Vu les hypothèses, la fonction d'appui de $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ est égale à l'*inf-convolution* $f \nabla g$, d'où comme ci-dessus

$$d\,(x, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \sup\{\varphi\,(u, v) : \|u + v\| \leq 1\}. \tag{5}$$

Allégeons les calculs en supposant faite une translation telle que $a = 0$; dans ce cas les hypothèses concernant A et B se traduisent par $f \geqq 0$ et $g \geqq \rho\,\|.\|$, d'où l'implication

$$\|u + v\| \leq 1 \;\Rightarrow\; \varphi\,(u, v) \leq \|x\| - \rho\,\|v\|,$$

Comme $\varphi\,(0, 0) = 0$, cela fait que (5) entraîne

$$d\,(x, \mathrm{A} \cap \mathrm{B} \leq \sup\left\{\varphi\,(u, v) : \|v\| \leq \frac{\|x\|}{\rho}, \|u\| \leq 1 + \frac{\|x\|}{\rho}\right\}.$$

Alors si, en (4), on prend $k = 1 + \|x\|/\rho$, la comparaison des ensembles sur lesquels on prend le « sup » de $\varphi\,(u, v)$ fournit (3).

Corollaire. — *Soit* A *et* B *deux parties convexes de* E; *soit* α *et* ρ *dans* $]0, +\infty[$ *tels que* $\alpha < \rho < e\,(\mathrm{A}, \mathrm{E} \setminus \mathrm{B})$. *Alors pour tout* $x \in \mathrm{E}$ *tel que* $d\,(x, \mathrm{A}) + d\,(x, \mathrm{B}) \leq \alpha$ *on a*

$$d\,(x, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \leq \frac{\rho + \operatorname{diam} \mathrm{A} \cap \mathrm{B}}{\rho - \alpha}\,(d\,(x, \mathrm{A}) + d\,(x, \mathrm{B})). \tag{6}$$

Cela résulte de (3) et de l'inégalité

$$\|x - a\| \leq \operatorname{diam}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) + d\,(x, \mathrm{A} \cap \mathrm{B}).$$

Remarque. — Pour des inégalités un peu plus précises, dans le cas où E est hilbertien ou préhilbertien, *voir* (6).

4. Le rapprochement de toutes ces inégalités fournit aisément :

Proposition 3. — *Soit* T *un espace topologique et soit* $t \mapsto \mathrm{A}_t$ *et* $t \mapsto \mathrm{B}_t$ *deux multiapplications de* T *dans l'espace normé* E, *à valeurs convexes. Soit* $s \in \mathrm{T}$ *tel que*

$$\operatorname{diam}(\mathrm{A}_s \cap \mathrm{B}_s) < +\infty,$$
$$\mathrm{A}_s \cap \mathring{\mathrm{B}}_s \neq \emptyset,$$
$$\lim_{t \to s} e\,(\mathrm{A}_t, \mathrm{A}_s) = 0 \quad \left[\text{resp. } \lim_{t \to s} e\,(\mathrm{A}_s, \mathrm{A}_t) = 0\right],$$
$$\lim_{t \to s} e\,(\mathrm{B}_t, \mathrm{B}_s) = 0 \quad \left[\text{resp. } \lim_{t \to s} e\,(\mathrm{B}_s, \mathrm{B}_t) = 0\right].$$

Alors :

$$\lim_{t \to s} e\,(\mathrm{A}_t \cap \mathrm{B}_t, \mathrm{A}_s \cap \mathrm{B}_s) = 0 \quad \left[\text{resp. } \lim_{t \to s} e\,(\mathrm{A}_s \cap \mathrm{B}_s, \mathrm{A}_t \cap \mathrm{B}_t = 0\right]$$

et les deux fonctions numériques $t \mapsto \operatorname{diam} \mathrm{A}_t \cap \mathrm{B}_t$ *et* $t \mapsto e\,(\mathrm{A}_t, \mathrm{E} \setminus \mathrm{B}_t)$ *sont s. c. s. (resp. s. c. i.) au point s.*

5. La démonstration du théorème du début en découle : les hypothèses de ce théorème font que les multiapplications $t \mapsto A_t$ et $t \mapsto B_t$ sont continues au sens de la distance de Hausdorff. Comme T est, dans ce cas, compact, la proposition 3 fait que, pour tout $t \in T$, l'expression diam $A_t \cap B_t$ est majorée par un $R < +\infty$ et l'expression $e(A_t, E \setminus B_t)$ minorée par un $\rho > 0$; choisissons $\alpha \in]0, \rho[$, Les fonctions « variation indéfinie » des deux multiapplications étant finies et continues, il existe $\delta > 0$ tel que pour σ et τ dans T, la condition $|\sigma - \tau| \leq \delta$ assure que $h(A_\sigma, A_\tau)$ et $h(B_\sigma, B_\tau)$ sont majorées par $\alpha/2$. Alors l'inégalité (6) donne

$$h(A_\sigma \cap B_\sigma, A_\tau \cap B_\tau) \leq \frac{\rho + R}{\rho - \alpha}(h(A_\sigma, A_\tau) + h(B_\sigma, B_\tau)),$$

ce qui fournit les majorations souhaitées pour la variation de la multiapplication $t \mapsto A_t \cap B_t$.

Résumé d'un texte qui sera conservé cinq ans par les Archives de l'Académie et dont la copie peut être obtenue à l'Académie.

(*) Séance du 9 mai 1973.

(1) H. Hermès, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 29, 1971, p. 535-542.

(2) N. Kikuchi et Y. Tomita, *On the absolute continuity of multifunctions and orientor fields* (à paraître dans *Funkcialaj Ekvacioj*).

(3) J. J. Moreau, *Comptes rendus*, 276, série A,1973, p. 265 et 791.

(4) J. J. Moreau, *Fonctionnelles convexes* (*Séminaire sur les Équations aux dérivées partielles*, Collège de France, Paris, 1967; multigraphié, 108 pages).

(5) P. J. Laurent, *Approximation et optimisation*, Hermann, Paris, 1972, chap. VI.

(6) J. J. Moreau, *Intersection de deux convexes mobiles* (*Séminaire d'Analyse convexe*, Montpellier, 1973, exposé n° 1; multigraphié, 26 pages).

Institut de Mathématiques,
Université des Sciences et Techniques
du Languedoc,
place Eugène-Bataillon,
34060 *Montpellier-Cedex.*