



HAL
open science

La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1968, 267, pp.954-957. hal-01868127

HAL Id: hal-01868127

<https://hal.science/hal-01868127>

Submitted on 5 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Comptes rendus
hebdomadaires des séances
de l'Académie des sciences.
Séries A et B, Sciences
mathématiques et Sciences
[...]

Académie des sciences (France). Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences. Séries A et B, Sciences mathématiques et Sciences physiques. 1968-07.

1/ Les contenus accessibles sur le site Gallica sont pour la plupart des reproductions numériques d'oeuvres tombées dans le domaine public provenant des collections de la BnF. Leur réutilisation s'inscrit dans le cadre de la loi n°78-753 du 17 juillet 1978 :

- La réutilisation non commerciale de ces contenus est libre et gratuite dans le respect de la législation en vigueur et notamment du maintien de la mention de source.

- La réutilisation commerciale de ces contenus est payante et fait l'objet d'une licence. Est entendue par réutilisation commerciale la revente de contenus sous forme de produits élaborés ou de fourniture de service.

[CLIQUER ICI POUR ACCÉDER AUX TARIFS ET À LA LICENCE](#)

2/ Les contenus de Gallica sont la propriété de la BnF au sens de l'article L.2112-1 du code général de la propriété des personnes publiques.

3/ Quelques contenus sont soumis à un régime de réutilisation particulier. Il s'agit :

- des reproductions de documents protégés par un droit d'auteur appartenant à un tiers. Ces documents ne peuvent être réutilisés, sauf dans le cadre de la copie privée, sans l'autorisation préalable du titulaire des droits.

- des reproductions de documents conservés dans les bibliothèques ou autres institutions partenaires. Ceux-ci sont signalés par la mention Source gallica.BnF.fr / Bibliothèque municipale de ... (ou autre partenaire). L'utilisateur est invité à s'informer auprès de ces bibliothèques de leurs conditions de réutilisation.

4/ Gallica constitue une base de données, dont la BnF est le producteur, protégée au sens des articles L341-1 et suivants du code de la propriété intellectuelle.

5/ Les présentes conditions d'utilisation des contenus de Gallica sont régies par la loi française. En cas de réutilisation prévue dans un autre pays, il appartient à chaque utilisateur de vérifier la conformité de son projet avec le droit de ce pays.

6/ L'utilisateur s'engage à respecter les présentes conditions d'utilisation ainsi que la législation en vigueur, notamment en matière de propriété intellectuelle. En cas de non respect de ces dispositions, il est notamment passible d'une amende prévue par la loi du 17 juillet 1978.

7/ Pour obtenir un document de Gallica en haute définition, contacter utilisationcommerciale@bnf.fr.

ÉLASTICITÉ. — *La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique.* Note (*) de M. JEAN JACQUES MOREAU, présentée par M. Jean Leray.

Les notions récentes de sous-différentiabilité et de dualité des fonctionnelles convexes sont appliquées à la statique d'un système matériel soumis à des lois de force non nécessairement linéaires et à des liaisons unilatérales. On en tire un procédé unifié pour la construction des diverses propriétés extrémales caractérisant la configuration d'équilibre ou les valeurs des forces à l'équilibre.

1. Soit S un système matériel dont l'ensemble E des configurations éventuelles est muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels ⁽¹⁾. Tel est le cas, par exemple, pour un milieu continu supposé s'écarter « infiniment peu » d'une configuration de référence, laquelle constitue le zéro de E .

Par la forme bilinéaire *travail virtuel*, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$, l'espace vectoriel E est mis en dualité avec un espace vectoriel F , espace des forces.

Une loi de force est une relation entre la configuration éventuelle $e \in E$ du système et l'une, soit $f \in F$, parmi les forces qu'il subit dans ladite configuration.

Le cas le plus simple est celui où f est explicitement définie comme fonction de la configuration. Si, dans ce cas, il existe une fonction numérique W , définie dans E , telle que la loi de force s'écrive $f = -\text{grad } W(e)$ (gradient faible ou différentielle de Gâteaux de W au point e), on dit classiquement que cette loi de force admet la fonction W pour *potentiel*.

2. Une liaison est une loi de force ayant pour effet de maintenir la configuration e du système dans une certaine partie C de E , cela par l'intervention d'une force de liaison ou réaction $r \in F$, a priori inconnue.

Nous dirons que la liaison est convexe si C est convexe; nous dirons qu'elle est parfaite si e et r sont liés par la relation

$$(1) \quad \forall u \in C : \langle u - e, r \rangle \geq 0$$

(ce qui implique, en particulier, $r = 0$ lorsque e est point interne de l'ensemble convexe C). Dans le cas des liaisons bilatérales traditionnelles, C est une variété affine de E et la condition (1) équivaut à l'orthogonalité de r à cette variété, ce qui est l'hypothèse classique de *non-frottement*. L'intérêt du présent concept est d'englober le cas de liaisons unilatérales.

EXEMPLE 1. — Prenons pour S un milieu continu occupant, dans la configuration de référence, un domaine Ω (de frontière $\partial\Omega$ supposée ici être une surface régulière) de l'espace physique. Un élément e de l'espace vectoriel E sera alors un champ de vecteurs déplacement $x \mapsto \vec{e}(x)$ défini et continu dans $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Avec A. Signorini ⁽²⁾, supposons que, sur une partie L de $\partial\Omega$, le milieu continu est confiné unilatéralement par un

massif étranger; les déplacements étant traités comme infiniment petits, cela s'écrit $\vec{v}(x) \cdot \vec{e}(x) \leq n(x)$, pour tout $x \in L$ (\vec{v} , vecteur unité normal sortant; n , fonction numérique donnée sur L), condition qui définit l'ensemble convexe $C \subset E$. Le contact est sans frottement, c'est-à-dire qu'en chaque $x \in L$, la densité de réaction exercée par le massif étranger est de la forme $t(x) \vec{v}(x)$; cette réaction a nécessairement le sens d'une pression, c'est-à-dire $t \leq 0$, et ne diffère de zéro que si le contact est effectif, d'où $(n - \vec{v} \cdot \vec{e})t = 0$. On en tirera aisément que l'élément $r \in F$ défini par cette répartition superficielle de forces de contact vérifie la condition (1).

3. Soit h une fonction définie sur E , à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$. On dit ⁽³⁾ que $\nu \in F$ est un *sous-gradient de h* au point $e \in E$ si la valeur $h(e)$ est finie et si la fonction affine $u \mapsto \langle u - e, \nu \rangle + h(e)$ (qui prend la même valeur que h au point e) minore h partout dans E . L'ensemble des sous-gradients de h au point e est une partie convexe (éventuellement vide) de F ; cet ensemble, noté $\partial h(e)$, est appelé *sous-différentiel de h* au point e .

Nous dirons alors qu'une loi de force possède h comme *sur-potentiel* si cette loi s'écrit $-f \in \partial h(e)$.

EXEMPLE 2. — Un potentiel au sens classique est un sur-potentiel de la loi de force qu'il définit si et seulement si cette fonction est *convexe* sur l'espace E ; c'est usuellement le cas pour la loi contrainte-déformation en élastostatique, linéaire ou non.

EXEMPLE 3. — Une liaison *convexe parfaite*, telle qu'on l'a définie plus haut est une loi de force admettant pour sur-potentiel la *fonction indicatrice* ψ_C de l'ensemble C , c'est-à-dire

$$\psi_C(e) = \begin{cases} 0 & \text{si } e \in C, \\ +\infty & \text{si } e \notin C. \end{cases}$$

En effet, la condition (1), conjointe avec $e \in C$, équivaut à

$$\forall u \in E: \langle u - e, -r \rangle + \psi_C(e) \leq \psi_C(u).$$

4. Si le système est soumis, à l'exclusion de toute autre, à des lois de forces en nombre fini possédant les sur-potentiels respectifs h_1, h_2, h_3, \dots , l'inclusion évidente

$$(2) \quad \partial h_1(e) + \partial h_2(e) + \partial h_3(e) + \dots \subset \partial (h_1 + h_2 + h_3 + \dots)(e)$$

entraîne que toute *position d'équilibre* confère sa valeur minimale à la somme $h_1 + h_2 + h_3 + \dots$.

CAS PARTICULIER. — Si $h_1 = \psi_C$, sur-potentiel d'une *liaison parfaite*, toute position d'équilibre confère à la somme $h_2 + h_3 + \dots$ son *minimum relatif* à C .

Les liaisons parfaites et les lois de force à potentiel de type traditionnel sont ainsi englobées dans un formalisme unique.

L'assurance que, réciproquement, toute configuration dans laquelle $h_1 + h_2 + h_3 + \dots$ atteint son minimum soit une configuration d'équilibre est subordonnée à des conditions assurant que l'inclusion (2) est une égalité d'ensembles (*).

5. La fonction h^* définie sur F par

$$h^*(f) = \sup_{e \in E} [\langle e, f \rangle - h(e)]$$

est appelée *fonction polaire* de h . Dans des cas usuels (exigeant, notamment, que h soit convexe) h est, inversement, la fonction polaire de h^* : on dit alors que h et h^* forment un couple de *fonctions duales*.

Cette notion fournit un instrument universel pour la mise en œuvre de la *dualité* dans les problèmes d'analyse convexe (5).

En particulier, si $h = \psi_C$, fonction indicatrice d'une partie C de E , la fonction polaire

$$\psi_C^*(f) = \sup_{e \in E} [\langle e, f \rangle - \psi_C(e)] = \sup_{e \in C} \langle e, f \rangle$$

est classiquement appelée *fonction d'appui* de l'ensemble C .

EXEMPLE 4. — Soit C la partie de E définie par la liaison unilatérale de Signorini (exemple 1 ci-dessus); appelons C' l'ensemble des $f \in F$ qui sont réalisées par des répartitions de forces sur L ayant une densité de la forme $t(x) \vec{v}(x)$ avec $t(x) \geq 0$. On trouve alors

$$\psi_C^*(f) = \begin{cases} \iint_L t(x) n(x) d\sigma(x) & \text{si } f \in C', \\ +\infty & \text{si } f \notin C'. \end{cases}$$

6. On construit par là des caractérisations extrémales pour les valeurs des forces à l'équilibre : Supposons le système soumis seulement à deux lois de forces admettant les sur-potentiels respectifs h_1 et h_2 . Soit $f_1 \in F$ vérifiant la première de ces lois de force dans une configuration d'équilibre. On trouve que f_1 confère sa valeur minimale à la fonction $\nu \mapsto h_1^*(-\nu) + h_2^*(\nu)$. Ce résultat contient notamment la théorie de l'« énergie complémentaire » en élastostatique linéaire.

La réciproque est subordonnée à des conditions de régularité usuellement vérifiées.

La démonstration peut être basée sur la propriété préalable que voici, laquelle possède un intérêt propre en caractérisant simultanément la configuration d'équilibre $e \in E$ et la force $f_1 \in F$: Dans l'espace produit $E \times F$, la fonction

$$(u, \nu) \mapsto \langle u, \nu \rangle + h_1^*(-\nu) - h_2(u),$$

notée $\Phi(u, \nu)$, présente au point (e, f_1) un col (ou « point selle ») maximal pour u , minimal pour ν , c'est-à-dire

$$\forall u, \forall \nu : \Phi(u, f_1) \leq \Phi(e, f_1) \leq \Phi(e, \nu).$$

Dans le cas de liaisons toutes bilatérales, avec des hypothèses convenables de différentiabilité, le calcul des variations traditionnel (algorithme des δ) fournit, classiquement, une dualité entre propriétés extrémales dans E et dans F et leur équivalence à des propriétés variationnelles dans $E \times F$ (forme dite « canonique ») ⁽⁶⁾. L'essentiel ici est la possibilité d'appliquer la théorie précédente aux systèmes présentant des *liaisons unilatérales*, auquel cas l'ensemble des configurations possibles n'est pas une variété différentiable de E . Dans ce cadre entre notamment la théorie des milieux élastiques de compressibilité limitée (caoutchouc-mousse) de W. Prager ⁽⁷⁾.

(*) Séance du 4 décembre 1968.

(1) Les notions qui font l'objet de cette Note ont été présentées dans une Communication de l'auteur au 12^e Congrès international de Mécanique appliquée, Stanford, 1968.

(2) A. SIGNORINI, *Rendic. Mat.*, 18, 1959, p. 95-139. En fait, le souci d'existence des solutions conduit à admettre l'éventualité de réactions sur L qui ne sont plus représentables par une densité t , mais par une mesure : cf. G. FICHERA, *Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. sci. fis. mat. nat., Memorie, Ser. VIII, vol. VII, fasc. 5*, 1964. Cela rentre dans le cadre de la présente théorie, moyennant l'adoption d'un espace F suffisamment large.

(3) Cf. J. J. MOREAU, *Comptes rendus*, 257, 1963, p. 4117. C'est la notion de base de l'« analyse unilatérale »; pour des exposés de synthèse et une bibliographie, voir les contributions de l'auteur à *Proc. of the Colloquium on Convexity*, Copenhagen, 1965, p. 183-201, ou à *Séminaire sur les Équations aux Dérivées partielles*, 1966-1967, Collège de France, Paris (multigraphié, 108 pages).

(4) Cf., outre les publications citées de l'auteur, R. T. ROCKAFELLAR, *Duke Math. J.*, 33, 1966, p. 81-90.

(5) Cf. la contribution de l'auteur dans : E. R. CAIANIELLO, editor, *Functional Analysis and Optimization*, Academic Press, New York, 1966, p. 145-166.

(6) Cf. E. REISSNER, in : *Problems of Continuum Mechanics* (N. I. Muskhelishvili Anniversary Volume), S. I. A. M., Philadelphia, 1961, p. 370-381.

(7) Cf. W. PRAGER, in : *Atti del Convegno Lagrangiano*, Torino, 1964, p. 181-190.

(Faculté des Sciences,
place Eugène-Bataillon, 34-Montpellier, Hérault.)