



HAL
open science

Semi-continuité du sous-gradient d'une fonctionnelle

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Semi-continuité du sous-gradient d'une fonctionnelle. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1965, 260, pp.1067-1070. hal-01868123

HAL Id: hal-01868123

<https://hal.science/hal-01868123>

Submitted on 5 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Semi-continuité du sous-gradient d'une fonctionnelle.* Note (*) de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Jean Leray.

1. On invoque dans cette Note la notion de *semi-continuité supérieure d'une application multivoque*, telle qu'elle est exposée par C. Berge (1) selon les idées de G. Bouligand et G. Kuratowski. Soit Γ une telle application, associant à tout point x d'un espace topologique X une partie $\Gamma(x)$ (éventuellement vide) d'un espace topologique Y . On dira que Γ est *semi-continue supérieurement* au point x_0 de X si à tout Ω , ouvert dans Y contenant $\Gamma(x_0)$, on peut associer un voisinage V de x_0 dans X tel que, pour tout $x \in V$, on ait $\Gamma(x) \subset \Omega$. Si Γ est une application univoque, cette notion se réduit à la continuité usuelle.

PROPOSITION 1. — Soit Y un espace topologique séparé et soit f une fonction numérique inf-compacte (2), c'est-à-dire une application de Y dans $\bar{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$ telle que, pour tout $r \in \mathbf{R}$, l'ensemble

$$f^{\leq}(r) = \{y \in Y : f(y) \leq r\}$$

soit compact dans Y . Alors l'application multivoque $r \mapsto f^{\leq}(r)$ de \mathbf{R} dans Y est semi-continue supérieurement en tout point de \mathbf{R} .

Démonstration. — On remarque d'abord que f est une fonction numérique semi-continue inférieurement sur Y , puisque, pour tout $r \in \mathbf{R}$, l'ensemble $f^{\geq}(r)$ est fermé.

Soit $r_0 \in \mathbf{R}$ et soit Ω un ouvert de Y contenant l'ensemble (éventuellement vide) $f^{\leq}(r_0)$. Il faut montrer l'existence d'un voisinage I_0 de r_0 dans \mathbf{R} tel que $f^{\leq}(r) \subset \Omega$ pour tout $r \in I_0$. Choisissons $r_1 > r_0$ et notons

$$K = f^{\leq}(r_1) \cap \bigcap_Y \Omega.$$

Si K est vide, l'assertion est triviale, avec $I_0 =]-\infty, r_1]$, puisque alors

$$r \leq r_1 \Rightarrow f^{\leq}(r) \subset f^{\leq}(r_1) \subset \Omega.$$

Si K n'est pas vide, il est, tout au moins, compact et ne rencontre pas $f^{\leq}(r_0)$. A chaque point $y \in K$, donc tel que $f(y) > r_0$, associons un réel $\lambda(y) \in]r_0, f(y)[$; en vertu de la semi-continuité inférieure de f , il s'y associe $\omega(y)$, ouvert dans Y contenant y , tel que

$$f[\omega(y)] \subset]\lambda(y), +\infty[.$$

La compacité de K implique l'existence d'une famille finie y_1, y_2, \dots, y_n telle que les $\omega(y_i)$ recouvrent K . Notons

$$r_2 = \min \{r_1, \lambda(y_1), \dots, \lambda(y_n)\} > r_0.$$

Appelant η un élément de Y , on voit que l'hypothèse $f(\eta) \leq r_2$ entraîne $\eta \in f^{\leq}(r_1)$ et $\eta \notin K$, donc entraîne $\eta \in \Omega$; bref $f^{\leq}(r_2) \subset \Omega$, ce qui légitime notre assertion avec $I_0 =]-\infty, r_2]$.

2. Soit maintenant E un espace vectoriel topologique quelconque sur le corps des réels et soit E' son dual topologique muni de la topologie faible.

PROPOSITION 2. — Soit f une fonction définie sur E , à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}}$, bornée supérieurement sur un ouvert O de E . Soit f^* la fonction polaire ⁽³⁾ de f :

$$f^*(x') = \sup_{x \in E} [\langle x, x' \rangle - f(x)].$$

A tout $x \in E$ et tout $\xi \in \mathbf{R}$, on associe l'ensemble (convexe fermé dans E' , éventuellement vide) :

$$S(x, \xi) = \{x' \in E' : f^*(x') - \langle x, x' \rangle + \xi \leq 0\},$$

ce qui définit une application multivoque de l'espace topologique $E \times \mathbf{R}$ dans E' . Quels que soient $x_0 \in O$ et $\xi_0 \in \mathbf{R}$, cette application est semi-continue supérieurement au point (x_0, ξ_0) et l'ensemble $S(x_0, \xi_0)$ est équicontinu (donc compact dans E').

Démonstration. — Par une translation dans E et une translation dans \mathbf{R} , ramenons-nous au cas où x_0 est l'origine de E et où $\xi_0 = 0$. Les raisonnements utilisés dans une précédente Note ⁽⁴⁾ montrent que la fonction f^* est inf-équicontinue ⁽⁵⁾, c'est-à-dire que, pour tout $r \in \mathbf{R}$, l'ensemble $f^{*\leq}(r)$ est une partie équicontinue de E' ; en outre sa fonction polaire $f^{**} \leq f$ est continue à l'origine de E , puisque convexe et majorée sur O .

Premier cas : $S(O, 0) = \emptyset$, c'est-à-dire

$$\min_{x' \in E'} f^*(x') = -f^{**}(0) > 0.$$

Choisissons $\nu \in]f^{**}(0), 0[$; en vertu de la continuité de f^{**} , l'ensemble

$$V = \{x \in E : f^{**}(x) < \nu\}$$

est un voisinage de zéro dans E . Par addition avec

$$\begin{aligned} f^{**}(x) + f^*(x') - \langle x, x' \rangle &\geq 0 \quad (\text{définition de } f^{**}), \\ \nu &> f^{**}(x) \quad (\text{c'est-à-dire } x \in V), \end{aligned}$$

l'inégalité $\xi > \nu$ implique

$$f^*(x') - \langle x, x' \rangle + \xi > 0.$$

Donc,

$$x \in V, \quad \xi > \nu \Rightarrow S(x, \xi) = \emptyset,$$

ce qui achève la démonstration dans ce cas.

Deuxième cas : $S(O, 0) \neq \emptyset$, c'est-à-dire

$$\min_{x' \in E'} f^*(x') \leq 0.$$

Par translation dans E' (ce qui ajoute à f^{**} une fonction linéaire continue), faisons en sorte que $S(O, O)$ contienne l'origine de E' . Soit Ω un ouvert de E' contenant $S(O, O)$; d'après la proposition 1, il existe $\mu > 0$ tel que l'ensemble équicontinu

$$K = S(o, -\mu) = \{x' \in E' : f^*(x') \leq \mu\}$$

soit contenu dans Ω . L'ensemble

$$W = \left\{x \in E : \max_{x' \in K} \langle x, x' \rangle \leq \frac{\mu}{2}\right\}$$

est un voisinage de zéro dans E .

Démontrons la proposition en établissant l'implication

$$(1) \quad x \in W, \quad \xi > -\frac{\mu}{2} \Rightarrow S(x, \xi) \subset K \subset \Omega.$$

Comme l'ensemble $S(x, \xi)$ est fonction décroissante de ξ , il suffit de raisonner dans l'hypothèse $\xi < 0$.

Supposons donc $\xi \in]-\mu/2, 0[$; alors $S(x, \xi)$ contient l'origine de E' , laquelle appartient aussi au demi-espace ouvert

$$\Delta = \{x' \in E' : \langle x, x' \rangle - \xi - \mu < 0\}.$$

Si $x \in W$, l'hyperplan frontière de ce demi-espace ne rencontre pas $S(x, \xi)$; en effet l'équation de cet hyperplan

$$(2) \quad \langle x, x' \rangle - \xi - \mu = 0$$

conjointe à la définition de $S(x, \xi)$,

$$f^*(x') - \langle x, x' \rangle + \xi \leq 0$$

entraîne $f^*(x') - \mu \leq 0$, c'est-à-dire $x' \in K$, d'où selon la définition de W ,

$$\langle x, x' \rangle \leq \frac{\mu}{2}$$

et, en rapprochant de (2), l'inégalité $\xi \leq -\mu/2$ qui contredit l'hypothèse faite sur ξ .

Comme l'ensemble $S(x, \xi)$ est convexe, il doit être contenu dans le demi-espace Δ . Pour tout x' appartenant à cet ensemble, on a donc les inégalités

$$\begin{aligned} \langle x, x' \rangle - \xi - \mu &< 0, \\ f^*(x') - \langle x, x' \rangle + \xi &\leq 0 \end{aligned}$$

qui entraînent $f^*(x') - \mu < 0$, d'où $x' \in K$. Cela établit l'implication (1).

3. Tirons maintenant des corollaires de la proposition 2. Conformément à de précédentes publications⁽⁶⁾, nous disons que $x' \in E'$ est un sous-gradient de f au point x si la fonction affine continue

$$u \rightarrow \langle u - x, x' \rangle + f(x),$$

laquelle prend la même valeur que f au point x , minore f partout sur E . Nous notons $\partial f(x)$ l'ensemble (convexe, fermé, éventuellement vide) des sous-gradients de f au point x , ce qui définit une application multivoque de E dans E' . On tire de la définition de f^* que x' appartient à $\partial f(x)$ si et seulement si

$$f(x) + f^*(x') - \langle x, x' \rangle \leq 0,$$

de sorte que $\partial f(x) = S[x, f(x)]$.

On obtient ainsi :

PROPOSITION 3. — *Si la fonction numérique f est finie et continue au point x_0 de E , l'application multivoque $x \rightarrow \partial f(x)$ de E dans E' est semi-continue supérieurement en ce point; en outre, pour tout x dans un certain voisinage de x_0 l'ensemble $\partial f(x)$ équicontinu.*

Passons enfin au cas particulier où, la fonction f étant convexe et faiblement différentiable (c'est-à-dire différentiable « au sens de Gâteaux », ce qui a lieu en particulier, lorsque, E étant un Banach, f est différentiable « au sens de Fréchet »), l'ensemble $\partial f(x)$ est constitué du seul élément $\text{grad } f(x) \in E'$ (gradient de f au point x). L'application $x \rightarrow \partial f(x)$ est ainsi univoque et sa semi-continuité supérieure se réduit à la continuité usuelle, d'où le résultat (qu'on peut d'ailleurs obtenir de façon plus directe) :

PROPOSITION 4. — *Si la fonction numérique convexe f est continue et faiblement différentiable sur un ouvert de E , l'application univoque $x \rightarrow \text{grad } f(x)$ est continue de E dans E' en tout point de cet ouvert.*

(*) Séance du 18 janvier 1965.

(¹) C. BERGE, *Espaces topologiques, fonctions multivoques*, Dunod, Paris, 1959.

(²) J.-J. MOREAU, *Inf-convolution*, Faculté des Sciences de Montpellier, *Séminaires de Mathématiques*, 1963 (multigraphié 48 pages), résumé partiellement dans *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 5047.

(³) J.-J. MOREAU, *Fonctions convexes en dualité*, Faculté des Sciences de Montpellier, *Séminaires de Mathématiques*, 1962 (multigraphié 18 pages).

(⁴) *Comptes rendus*, 258, 1964, p. 1128.

(⁵) Cette locution a été introduite par P. KREE, *Séminaire Schwartz-Lions*, novembre 1964.

(⁶) J.-J. MOREAU, *Étude locale d'une fonctionnelle convexe*, Faculté des Sciences de Montpellier, *Séminaires de Mathématiques*, 1963 (multigraphié 25 pages), résumé partiellement dans *Comptes rendus*, 257, 1963, p. 4117.

(Faculté des Sciences de Montpellier.)