



HAL
open science

Théorèmes "inf-sup"

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Théorèmes "inf-sup". Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1964, 258, pp.2720-2722. hal-01868120

HAL Id: hal-01868120

<https://hal.science/hal-01868120>

Submitted on 5 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Théorèmes « inf-sup ».*

Note (*) de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Jean Leray.

Le *théorème minimax* de von Neumann a donné lieu à de larges généralisations, dans plusieurs directions (1). Nous montrons dans cette Note comment la théorie des *fonctions convexes duales* fournit d'autres cas simples de commutativité des symboles *inf* (ou *min*) et *sup* (ou *max*).

Rappelons (2) que, si E est un espace vectoriel topologique sur \mathbf{R} , nous notons $\Gamma(E)$ l'ensemble des fonctions définies sur E , à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$, qui sont des enveloppes supérieures de familles de fonctions affines continues. Dans le cas particulier usuel où E est *localement convexe séparé*, nous montrons (3) que $\Gamma(E)$ est constitué des fonctions suivantes : les deux constantes $+\infty$ et $-\infty$ (cette dernière est l'enveloppe supérieure de la famille vide), puis toutes les fonctions à valeurs dans $] -\infty, +\infty]$ qui sont *convexes et semi-continues inférieurement*.

Pour toute la suite, posons :

HYPOTHÈSES. — Soient, sur le corps des réels, un *espace vectoriel* F et un *espace vectoriel topologique localement convexe séparé* G . Le dual topologique G' de G est muni d'une topologie (localement convexe séparée) compatible avec la dualité. Soit $(x, y) \rightarrow f(x, y)$ une application de $F \times G$ dans $\bar{\mathbf{R}}$ possédant les propriétés suivantes :

1° Pour chaque $y \in G$, la fonction $x \rightarrow f(x, y)$ est *concave* [à valeurs dans $\bar{\mathbf{R}}$, c'est-à-dire conformément à une théorie développée ailleurs (4), que cette fonction vérifie l'inégalité habituelle de la concavité toutes les fois que celle-ci ne comporte pas l'indétermination $\infty - \infty$].

2° Pour chaque $x \in F$, la fonction $y \rightarrow f(x, y)$ appartient à $\Gamma(G)$. On note $y' \rightarrow g(x, y')$ la duale de cette fonction, c'est-à-dire

$$(1) \quad g(x, y') = \sup_{y \in G} [\langle y, y' \rangle - f(x, y)].$$

Enfin, on pose

$$\alpha = \inf_{y \in G} \sup_{x \in F} f(x, y),$$

$$\beta = \sup_{x \in F} \inf_{y \in G} f(x, y).$$

PROPOSITION 1. — L'égalité $\alpha = \beta$ implique la *semi-continuité inférieure* de la fonction

$$\gamma(y') = \inf_{x \in F} g(x, y')$$

au point O' , origine de G' . Réciproquement, cette *semi-continuité* implique $\alpha = \beta$, à moins qu'on ait $\alpha = -\beta = +\infty$.

Démonstration. — Il résulte de (1) que $\beta = -\gamma(O')$. Par ailleurs, la fonction $y \rightarrow \sup_{x \in F} f(x, y)$ appartient à $\Gamma(G)$, puisque enveloppe supérieure d'une famille de fonctions de $\Gamma(G)$. La dualité définissant une bijection décrois-

sante de $\Gamma(G)$ sur $\Gamma(G')$, la duale de cette enveloppe supérieure est le plus grand élément de $\Gamma(G')$ minorant toutes les fonctions $y' \rightarrow g(x, y')$, c'est-à-dire la fonction γ^{**} , plus grand élément de $\Gamma(G')$ minorant γ . La définition des fonctions duales entraîne alors $\alpha = -\gamma^{**}(O')$. Comme la fonction γ^{**} est semi-continue inférieurement, l'égalité $\alpha = \beta$, c'est-à-dire $\gamma(O') = \gamma^{**}(O')$ implique la semi-continuité inférieure de γ au point O' .

Il reste à prouver la réciproque, sous la réserve

$$\alpha \neq +\infty \quad \text{ou} \quad \beta \neq -\infty.$$

Il découle des hypothèses que, pour chaque $y \in G$, la fonction

$$(x, y') \rightarrow \langle y, y' \rangle - f(x, y)$$

est convexe sur l'espace vectoriel $F \times G'$; il en est donc de même de g qui est l'enveloppe supérieure de cette famille de fonctions convexes. Par suite, la fonction γ qui est un « contour apparent » de g est une fonction, à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$, convexe sur G' ; il en est classiquement de même de sa *régularisée s. c. i.*

$$y' \rightarrow \liminf_{y'' \rightarrow y'} \gamma(y'') = \hat{\gamma}(y')$$

plus grande fonction semi-continue inférieurement sur G' minorant γ . Et l'on a

$$(2) \quad \gamma^{**} \leq \hat{\gamma} \leq \gamma.$$

Les fonctions telles que $\hat{\gamma}$, convexes et semi-continues inférieurement, sont de deux sortes : les unes prennent leurs valeurs dans $] -\infty, +\infty]$ et appartiennent donc à $\Gamma(G')$; les autres ne prennent que les deux seules valeurs $+\infty$ et $-\infty$.

L'hypothèse de semi-continuité inférieure de γ au point O' signifie que $\hat{\gamma}(O') = \gamma(O')$. Si $\alpha \neq +\infty$, la fonction $\gamma^{**} \in \Gamma(G')$ ne peut pas être la constante $-\infty$, donc elle prend ses valeurs dans $] -\infty, +\infty]$. D'après (2), il en est de même de $\hat{\gamma}$, d'où $\hat{\gamma} \in \Gamma(G')$, d'où $\hat{\gamma} = \gamma^{**}$, ce qui achève la démonstration dans ce cas. Si $\beta \neq -\infty$, toujours avec l'hypothèse de semi-continuité inférieure de γ au point O' ; on a

$$\gamma(O') < -\infty, \quad \text{d'où} \quad \hat{\gamma}(O') < +\infty.$$

Cela ne permet que les éventualités $\hat{\gamma} \in \Gamma(G')$ ou $\hat{\gamma}(O') = -\infty$: l'une et l'autre donnent

$$\gamma^{**}(O') = \hat{\gamma}(O') = \gamma(O'), \quad \text{d'où} \quad \alpha = \beta.$$

Remarque. — Le contre-exemple $f(x, y) = a(x) + b(y)$, où a est une fonction linéaire sur F et b une fonction linéaire continue sur G permet de voir que si $\alpha = -\beta = +\infty$, la semi-continuité inférieure de γ n'implique plus $\alpha = \beta$.

PROPOSITION 2. — S'il existe $x_0 \in F$ et $k_0 > \inf_{y \in G} f(x_0, y)$ tels que l'ensemble (convexe fermé) $\{y \in G : f(x_0, y) \leq k_0\}$ soit compact pour la topologie faible $\sigma(G, G')$ (donc, a fortiori, si cet ensemble est compact pour la topologie initiale de G), on a $\alpha = \beta$.

Démonstration. — D'après un résultat établi dans une Note précédente (*), la fonction $y' \rightarrow g(x_0, y')$ est alors finie au point O' et continue en ce point pour la topologie de Mackey $\tau(G', G)$. Cela prouve d'abord que $\gamma(O') = -\beta < +\infty$. En outre, la fonction γ est continue au point O' pour la topologie $\tau(G', G)$, puisque convexe et majorée par une fonction finie et continue en ce point. L'égalité $\alpha = \beta$ en résulte par la proposition 1.

Remarque. — Moyennant les hypothèses de la proposition 2, on peut, en outre, établir les faits suivants : Il existe une partie convexe A de G , contenant x_0 , telle que, pour tout $x \in A$ et tout $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{y \in G : f(x, y) \leq k\}$ est faiblement compact (éventuellement vide) et l'on a

$$\beta = \sup_{x \in A} \min_{y \in G} f(x, y).$$

En outre, dans la définition de α , l'inf est un minimum et l'on a

$$\alpha = \min_{y \in G} \sup_{x \in F} f(x, y) = \min_{y \in G} \sup_{x \in A} f(x, y).$$

A titre d'illustration, on peut tirer de la proposition 2 un théorème minimax classique :

COROLLAIRE. — Soit C une partie convexe de F ; soit D une partie convexe faiblement compacte de G . Soit φ une application de $C \times D$ dans $]-\infty, +\infty]$ possédant les propriétés suivantes :

- pour tout $y \in D$, la fonction $x \rightarrow \varphi(x, y)$ est concave sur C ;
- pour tout $x \in C$, la fonction $y \rightarrow \varphi(x, y)$ est convexe et semi-continue inférieurement sur D .

Alors

$$\min_{y \in D} \sup_{x \in C} \varphi(x, y) = \sup_{x \in C} \min_{y \in D} \varphi(x, y).$$

Il suffit, en effet, d'invoquer la proposition 2 en prenant

$$f(x, y) = \begin{cases} \varphi(x, y) & \text{si } x \in C \text{ et } y \in D, \\ +\infty & \text{si } x \in C \text{ et } y \notin D, \\ -\infty & \text{si } x \notin C. \end{cases}$$

(*) Séance du 2 mars 1964.

(¹) On en trouvera une synthèse dans : M. SION, *Pac. J. Math.*, 8, 1958, p. 171-176.

(²) *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 5047 et 257, 1963, p. 4117.

(³) J.-J. MOREAU, *Fonctions convexes en dualité*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1962 (multigraphié, 18 pages).

(⁴) J.-J. MOREAU, *Fonctions à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$: notions algébriques*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1963 (multigraphié, 37 pages), partiellement résumé dans *Comptes rendus*, 257, 1963, p. 3107.

(⁵) *Comptes rendus*, 258, 1964, p. 1128.