



**HAL**  
open science

## Sur la naissance de la cavitation dans une conduite

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Sur la naissance de la cavitation dans une conduite. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1964, 259, pp.3948-3950. hal-01868117

**HAL Id: hal-01868117**

**<https://hal.science/hal-01868117>**

Submitted on 5 Sep 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

HYDRAULIQUE. — *Sur la naissance de la cavitation dans une conduite.*

Note (\*) de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Léopold Escande.

La naissance de la cavitation est étudiée comme problème d'accélération initiale dans un système matériel à liaisons unilatérales; une technique graphique en résulte pour déterminer les régions où la cavitation apparaît.

1. Soit un fluide parfait incompressible, en écoulement laminaire dans une conduite à parois rigides. On suppose légitime l'approximation de l'hydrodynamique unidimensionnelle : la vitesse  $v$  du fluide, sa pression  $p$  dépendent du temps  $t$  et de la seule variable d'espace  $x$ , abscisse curviligne le long de la conduite.

Pour abrégier le présent exposé on suppose la section  $S$  constante; le cas général se ramènerait, par changement de variable et transformation des données, à la même formulation mathématique.

On donne  $F(x)$ , composante longitudinale de la densité de force extérieure et l'on pose  $\int F(x) dx = U(x)$  [dans le cas usuel où  $F$  provient de la pesanteur, en notant  $h(x)$  la cote du point  $x$  de la conduite, on a  $U(x) = -\rho gh(x)$ ].

2. Le problème posé est le suivant :

A l'instant  $0$ , on donne la *configuration initiale* d'une colonne fluide  $AB$  : elle s'étend sans cavitation entre les points  $x = a$  et  $x = b > a$  de la conduite.

A ce même instant on donne la *répartition initiale des vitesses*, par hypothèse compatible avec la non-cavitation (conservation du débit), c'est-à-dire que, pour tout  $x \in [a, b]$ , on a  $v(x, 0) = v_0$  donné.

Les *conditions aux limites* sont, pour fixer les idées, celles-ci : les extrémités  $A$  et  $B$  de la colonne fluide sont soumises respectivement à des pressions imposées  $p_a$  et  $p_b$  (on étudierait aussi bien le cas où l'une de ces extrémités est confinée par un « piston » de mouvement imposé).

*On demande quelle est la répartition initiale des pressions et celle des accélérations dans la colonne fluide.*

3. Si l'on postule *a priori* l'absence de cavitation durant un intervalle de temps  $[0, \varepsilon]$ , la solution du problème est immédiate : en vertu de la conservation du débit, l'accélération  $\gamma$  (composante longitudinale) est constante tout le long de la colonne fluide et l'équation de l'hydrodynamique s'intègre en

$$p(x) = U(x) - \rho\gamma x + C,$$

où les constantes  $\gamma$  et  $C$  seront fixées par ajustement aux données  $p_a$  et  $p_b$ .

Si, pour tout  $x \in ]a, b]$ , la pression ainsi calculée est supérieure ou égale à la *pression de vapeur du liquide* — soit ici pour simplifier l'exposé, zéro — l'hypothèse de non-cavitation est retenue et le problème résolu.

Si, au contraire, l'expression précédente prend des valeurs strictement négatives dans une région de la colonne fluide, on doit conclure à la naissance de cavitation. *Mais il est incorrect d'inférer*, comme on le fait souvent, *que la cavitation apparaît exactement sur cette région*; on va voir en effet que l'éventualité de cavitation modifie globalement la prévision des pressions.

4. Considérons la portion de fluide occupant à l'instant 0 un arc  $[x_1, x_2]$  de la conduite. Comme le fluide est incompressible et, à cet instant initial, sans cavitation, le volume de conduite occupé par cette portion de fluide ne peut ultérieurement décroître. La dérivée de ce volume par rapport au temps, à savoir  $[\nu(x_2) - \nu(x_1)] S$ , est nulle à l'instant 0, d'après l'hypothèse faite sur la répartition initiale des vitesses. Donc, la dérivée seconde du volume en question, à savoir  $[\gamma(x_2) - \gamma(x_1)] S$ , est non négative, ce qui signifie que  $\gamma(x)$  est *une fonction non décroissante de  $x$* . Toute région où  $d\gamma/dx > 0$  est une région de cavitation naissante : en cette région on a nécessairement  $p = 0$ , donc

$$(1) \quad p \frac{d\gamma}{dx} = 0 \quad \text{pour tout } x \in [a, b].$$

On va voir que cette condition jointe à

$$(2) \quad p \geq 0, \quad \frac{d\gamma}{dx} \geq 0,$$

à l'équation de l'hydrodynamique

$$(3) \quad \rho \gamma = - \frac{dp}{dx} + \frac{dU}{dx}$$

et aux conditions aux limites, détermine la solution. En prenant comme nouvelle fonction inconnue  $W = U - p$ , les conditions (1), (2), (3) se transforment en

$$(4) \quad \frac{d^2 W}{dx^2} \geq 0,$$

$$(5) \quad W \leq U,$$

$$(6) \quad (U - W) \frac{d^2 W}{dx^2} = 0,$$

avec les conditions aux limites

$$(7) \quad W(a) = U(a) - p_a, \quad W(b) = U(b) - p_b.$$

La résolution graphique est évidente : on trace la courbe représentative de la fonction donnée  $U(x)$ . D'après (6), la courbe de la fonction inconnue  $W(x)$  est rectiligne partout où elle diffère de la précédente; elle est partout en dessous d'après (5), *convexe* d'après (4) et ses extrémités  $\alpha$  et  $\beta$  sont fixées par (7).

Si,  $p_a$  et  $p_b$  étant assez grands, le segment de droite  $\alpha\beta$  est partout en dessous de la courbe  $U(x)$ , ce segment fournit la solution, laquelle correspond au calcul du paragraphe 3 : il n'apparaît pas alors de cavitation.

Si, par contre, le segment  $\alpha\beta$  coupe la courbe  $U(x)$ , la courbe  $W(x)$  affecte la forme d'un fil qui serait tendu entre les points  $\alpha$  et  $\beta$  en épousant par en dessous la courbe  $U(x)$ ; elle est donc constituée par des arcs de la courbe  $U(x)$  et par des portions de tangentes faciles à tracer avec précision. Partout où les deux courbes sont distinctes il n'y a pas naissance de cavitation. *On voit que les régions de cavitation naissante sont strictement plus petites que celles où, le segment  $\alpha\beta$  passant en dessus de la courbe  $U(x)$ , le calcul du paragraphe 3 aurait fourni une pression négative.*

5. Pour prévenir toute utilisation abusive de la présente théorie, insistons sur les hypothèses faites. D'abord, on néglige viscosité et turbulence : ce sera assez souvent légitime; au moins, en particulier, si l'état initial est le repos ( $v_0 = 0$ ). D'autre part, dans le cadre de l'hydrodynamique unidimensionnelle où nous nous sommes placé, nous n'avons pas cherché à préciser si la cavitation naissante était *diffuse dans la masse fluide* (développement de bulles) ou si elle consistait en un *décollement de la paroi*; dans ce dernier cas, l'étirement longitudinal du fluide ( $d\gamma/dx > 0$ ) résulte d'un rétrécissement de la veine. Dans un cas comme dans l'autre, il semble *a priori* que la *tension superficielle* sur les interfaces liquide-vapeur ou liquide-paroi doive jouer un rôle, de même que la statistique des germes de vaporisation. Ces éléments ne peuvent être négligeables que pour des phénomènes d'assez grande échelle. On se heurte alors à une autre sorte de limitation : pour l'étude des phénomènes transitoires se déroulant dans les grandes conduites des installations hydroélectriques on ne peut généralement négliger ni la compressibilité de l'eau, ni l'élasticité des parois <sup>(1)</sup>. Des méthodes plus élaborées sont alors nécessaires; notons que la technique graphique d'*enveloppe convexe*, ici employée, n'est qu'un cas particulier de *méthode variationnelle* : comme nous l'avons précédemment montré <sup>(2)</sup>, les problèmes de *liaisons unilatérales*, dont nous venons ici de traiter un exemple, sont dominés par un « principe de Gauss généralisé » ou *principe de moindre accélération* ainsi que par le principe dual <sup>(3)</sup>, que nous appelons *principe de moindre réaction*.

(\*) Séance du 23 novembre 1964.

<sup>(1)</sup> Voir L. ESCANDE, *Comptes rendus*, 240, 1955, p. 133; 244, 1957, p. 2665 et 245, 1957, p. 5; ainsi que L. ESCANDE, *Arrêt instantané du débit d'une conduite forcée avec cavitations* (*Proc. of I. A. H. R.*, Symposium, Sendai, Japon, 1962, p. 113-124).

<sup>(2)</sup> J.-J. MOREAU, *Comptes rendus*, 255, 1962, p. 238 et 256, 1963, p. 871. L'introduction des mêmes idées dans le problème de la naissance de la cavitation en trois dimensions a fait l'objet d'une communication de l'auteur au *Congrès international des Mathématiciens*, Stockholm, 1962.

<sup>(3)</sup> Pour la théorie mathématique précise de cette dualité, voir J.-J. MOREAU, *Applications « prox »*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaire de Mathématiques, 1936 (multigraphié 20 pages) ainsi que J.-J. MOREAU, *Comptes rendus*, 255, 1962, p. 2897.