



# Sur la fonction polaire d'une fonction semi-continue supérieurement

Jean Jacques Moreau

## ► To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Sur la fonction polaire d'une fonction semi-continue supérieurement. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1964, 258, pp.1128-1130. hal-01868116

**HAL Id: hal-01868116**

**<https://hal.science/hal-01868116>**

Submitted on 5 Sep 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Sur la fonction polaire d'une fonction semi-continue supérieurement.* Note (\*) de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Jean Leray.

Soient  $E$  et  $E'$  deux espaces vectoriels sur  $\mathbf{R}$ , en dualité, munis de topologies (localement convexes séparées) compatibles avec la dualité. Dans une précédente Note (<sup>1</sup>), consacrée à la « sous-différentiabilité » des fonctionnelles, nous invoquions, en des énoncés à première vue indépendants, deux sortes d'hypothèses concernant une fonction  $f \in \Gamma_0(E)$  (c'est-à-dire une fonction définie sur  $E$ , à valeurs dans  $] -\infty, +\infty]$ , convexe, semi-continue inférieurement, non partout égale à  $+\infty$ ) :

1° continuité de la fonction  $f$  à l'origine  $O$  de  $E$ ;

2° *inf-compactité* de la fonction polaire

$$f^*(x') = \sup_{x \in E} [\langle x, x' \rangle - f(x)]$$

[appelée aussi *fonction duale*, si  $f \in \Gamma_0(E)$ , en raison de la réciprocité], ce qui signifie que, pour tout  $k \in \mathbf{R}$ , l'ensemble  $\{x' \in E' : f^*(x') \leq k\}$  est compact, éventuellement vide.

L'objet de la présente Note est de montrer que si l'on affaiblit au maximum chacune de ces deux hypothèses en prenant sur  $E$  la topologie la plus fine, c'est-à-dire la topologie de Mackey  $\tau(E, E')$ , et sur  $E'$  la topologie la moins fine, c'est-à-dire la topologie faible  $\sigma(E', E)$ , lesdites hypothèses se trouvent être équivalentes. Plus généralement, les faits peuvent se présenter comme suit :

PROPOSITION 1. — *Si une fonction  $f \in \overline{\mathbf{R}}^E$  est finie et semi-continue supérieurement à l'origine  $O$  de  $E$  pour une topologie compatible avec la dualité [donc, a fortiori, pour la topologie de Mackey  $\tau(E, E')$ ], sa fonction polaire  $f^*$  est faiblement inf-compacte sur  $E'$ .*

En effet, il existe en ce cas un voisinage  $V$  de  $O$  sur lequel  $f$  est majorée par une constante  $b \in \mathbf{R}$ . En introduisant la *fonction indicatrice*  $\psi_V$  (nulle sur  $V$ , égale à  $+\infty$  hors de  $V$ ), cela s'écrit

$$f \leq b + \psi_V,$$

d'où, le passage aux fonctions polaires inversant l'ordre,

$$f^* \geq -b + \psi_V^*.$$

D'après la définition de la topologie de Mackey, on peut prendre pour  $V$  l'ensemble polaire d'une partie  $K$ , convexe, équilibrée et faiblement compacte dans  $E'$ . Alors  $\psi_V^*$  est la *jauge* de  $K$ , fonction à valeurs dans  $[0, +\infty]$  visiblement inf-compacte;  $f^*$  est donc inf-compacte puisque semi-continue inférieurement et minorée par une fonction inf-compacte.

PROPOSITION 2. — Si une fonction  $g$ , à valeurs dans  $]-\infty, +\infty]$ , est convexe sur  $E'$  et inf-compacte sur cet espace pour une topologie compatible avec la dualité, donc, a fortiori, pour la topologie faible  $\tau(E', E)$ , sa fonction polaire  $g^*$  est continue à l'origine  $O$  de  $E$  pour la topologie de Mackey  $\tau(E, E')$ .

En effet, l'inf-compacité de  $g$  implique la semi-continuité inférieure de cette fonction sur un quelconque des ensembles compacts de la forme

$$K = \{x' \in E' : g(x') \leq k\} \quad (k \in \mathbf{R}),$$

d'où l'existence d'une valeur minimale  $m = -g^*(O) \in \mathbf{R}$  (dans cette démonstration, nous laissons de côté le cas trivial où  $g$  serait la constante  $+\infty$ ). Prenons  $k > m$ ; il existe  $x'_0 \in K$  tel que  $m \leq g(x'_0) < k$ . Remplacer la fonction  $g$  par une de ses translatées, puis lui ajouter une constante, équivaut à ajouter à la fonction polaire  $g^*$  une fonction affine continue. Ramenons-nous donc par une telle transformation au cas plus simple où  $x'_0 = O'$  et où  $g(x'_0)$  est nul. L'ensemble  $K$  est alors un convexe contenant l'origine; soit  $\gamma$  sa fonction *jauge*, à valeurs dans  $[0, +\infty]$ . La restriction de  $\gamma$  à toute demi-droite d'origine  $O'$  est linéaire ou infinie, tandis que la restriction de  $g$  est une fonction convexe unidimensionnelle, nulle en  $O'$  : on en tire aisément que la fonction  $k\gamma$  minore  $g$  en tout point hors de  $K$ . En retranchant de cette minorante la constante positive  $k - m$ , on obtient une fonction minorant  $g$  partout sur  $E'$ , d'où, en passant aux fonctions polaires,

$$g^*(x) \leq k - m + k\gamma^*\left(\frac{1}{k}x\right).$$

Or  $\gamma^*$  est la fonction indicatrice de  $K^*$ , ensemble polaire de  $K$ ; on trouve donc que la fonction  $g$  est majorée sur l'ensemble  $kK^*$ , lequel est un voisinage de  $O$  pour la topologie  $\tau(E, E')$ ; cette fonction étant convexe, cela prouve sa continuité en ce point.

Naturellement, on pourra invoquer maintenant une translation dans  $E$  pour mettre, de façon plus générale, la semi-continuité supérieure de  $f$  (resp. la continuité de  $g^*$ ) en un point quelconque  $a \in E$  en corrélation avec la compacité faible dans  $E'$  des *sections obliques*, de pente  $a$ , de  $f^*$  (resp.  $g$ ), c'est-à-dire des ensembles  $\{x' \in E' : f^*(x') - \langle a, x' \rangle \leq k\}$  <sup>(2)</sup>.

Ces résultats permettent de simplifier les conclusions de notre étude sur la *sous-différentiabilité*. Reprenons les notions introduites dans la Note citée : l'ensemble des *sous-gradients* de  $f \in \overline{\mathbf{R}}^E$  au point  $x \in E$  est une partie de  $E'$  notée  $\partial f(x)$ ; on énonce :

PROPOSITION 3. — Si  $f \in \overline{\mathbf{R}}^E$ , convexe, est majorée sur un voisinage de  $x_0$  (donc continue sur l'intérieur non vide de l'ensemble  $\{x \in E : f(x) < +\infty\}$ ), elle est sous-différentiable en ce point et l'ensemble  $\partial f(x_0)$  est faiblement compact dans  $E'$ .

PROPOSITION 4. — Soient  $f$  et  $g$  appartenant à  $\Gamma_0(E)$ . S'il existe  $x_0 \in E$  tel que  $f$  soit finie et continue en ce point et que  $g(x_0)$  soit fini, on a, quel que soit  $x$  dans  $E$ , l'égalité d'ensembles :

$$\partial(f+g)(x) = \partial f(x) + \partial g(x).$$

En ce qui concerne la relation entre sous-différentiabilité et différentiabilité faible (ou « de Gateaux »), on doit simplement retenir :

PROPOSITION 5. — Si  $f \in \Gamma_0(E)$  est finie et continue au point  $x_0 \in E$  et si l'ensemble  $\partial f(x_0)$  (certainement non vide) est réduit à un seul élément  $y_0 \in E'$ , la fonction  $f$  est faiblement différentiable au point  $x_0$  et son gradient faible est  $y_0$ .

Plus généralement, si  $f \in \Gamma_0(E)$  est finie et continue au point  $x_0$  et si  $u \in E$ , la fonction  $t \rightarrow f(x_0 + tu)$  admet pour dérivée à droite de zéro

$$\left. \frac{d}{dt} f(x_0 + tu) \right|_{t=+0} = \max_{y \in \partial f(x_0)} \langle u, y \rangle.$$

(\*) Séance du 20 janvier 1964.

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus*, 257, 1963, p. 4117, où l'on corrigera l'erreur d'écriture suivante (8<sup>e</sup> ligne du paragraphe 1) : au lieu de  $x \rightarrow \langle x, a' \rangle + f(x_0)$  (fonction affine continue de « pente »  $a'$  prenant au point  $x_0$  la même valeur que  $f$ ), il faut évidemment lire  $x \rightarrow \langle x - x_0, a' \rangle + f(x_0)$ ...

(<sup>2</sup>) Des raisonnements tout à fait similaires mettraient en corrélation le cas où ces ensembles sont bornés avec celui où  $f$  est semi-continue supérieurement au point  $a$  (resp.  $g^*$  continue au point  $a$ ) pour  $E$  muni de la topologie forte de dual de  $E'$ . Nous rejoignons là des résultats obtenus indépendamment par R. T. ROCKAFELLAR, *Level sets and continuity of conjugate convex functions*, à paraître dans *Trans. Amer. Math. Soc.* Cet auteur envisage également la compacité faible des ensembles en question, dans le cas particulier où  $E$  est tonnelé.

(Faculté des Sciences, Montpellier.)