



**HAL**  
open science

# Remarques sur les fonctions à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$ définies sur un demi-groupe

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Remarques sur les fonctions à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$  définies sur un demi-groupe. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1963, 257, pp.3107-3109. hal-01868113

**HAL Id: hal-01868113**

**<https://hal.science/hal-01868113>**

Submitted on 5 Sep 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Remarques sur les fonctions à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$  définies sur un demi-groupe.* Note (\*) de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Jean Leray.

1. La somme  $x + y$  n'étant pas classiquement définie pour  $x = +\infty$ ,  $y = -\infty$  (resp.  $x = -\infty$ ,  $y = +\infty$ ), notons  $\dot{+}$  la loi de composition partout définie dans  $\bar{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$  par

$$x \dot{+} y = \begin{cases} x + y & \text{si cette somme ordinaire est définie,} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette loi de composition est commutative, associative, isotone et possède encore certaines des propriétés de l'addition classique : par exemple, si  $f$  et  $g$  sont respectivement des applications de deux ensembles quelconques  $F$  et  $G$  dans  $\bar{\mathbf{R}}$ , on a

$$\inf_{(x,y) \in F \times G} |f(x) \dot{+} g(y)| = \inf_{x \in F} f(x) \dot{+} \inf_{y \in G} g(y),$$

mais l'égalité analogue pour les sup n'est pas vraie (1).

2. Dans tout ce qui suit,  $D$  désigne un *demi-groupe commutatif* (c'est-à-dire un ensemble muni d'une loi de composition commutative et associative, notée  $+$ ; on ne suppose pas de « règle de simplification » ni, pour l'instant, l'existence d'un élément neutre).

La notion de *sous-additivité*, classique pour les fonctions à valeurs dans  $]-\infty, +\infty]$  se prolonge comme suit : une fonction  $f \in \bar{\mathbf{R}}^D$  est dite sous-additive si pour tout  $x$  et tout  $y$  dans  $D$  on a

$$f(x + y) \leq f(x) \dot{+} f(y)$$

[cela équivaut à dire que  $f(x + y)$  est majoré par la somme classique  $f(x) + f(y)$  toutes les fois que celle-ci est définie]. Si  $f$  et  $g$  sont deux telles fonctions, il en est de même de  $f \dot{+} g$ ; l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions sous-additives est sous-additive.

Une partie  $A$  de  $D$  est stable pour l'addition (c'est-à-dire constitue un sous-demi-groupe de  $D$ ) si et seulement si est sous-additive sa *fonction indicatrice*, notée  $\psi_A$

$$\psi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A. \\ -\infty & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

3. A deux fonctions  $f$  et  $g$ , définies sur  $D$ , à valeurs dans  $\bar{\mathbf{R}}$ , associons la fonction, notée  $f \nabla g$ ,

$$x \rightarrow (f \nabla g)(x) = \inf_{u+v=x} |f(u) \dot{+} g(v)|$$

et appelons *inf-convolution* la loi de composition commutative, associative,

isotone, ainsi définies dans  $\bar{\mathbf{R}}^D$ ; notons  $(\bar{\mathbf{R}}^D, \nabla)$  la structure de demi-groupe dont cet ensemble est muni par là.

Si A et B sont deux parties quelconques de D, la fonction  $\psi_A \nabla \psi_B$  est la fonction indicatrice de l'ensemble somme A + B. En particulier, les fonctions indicatrices de points constituent un sous-demi-groupe de  $(\bar{\mathbf{R}}^D, \nabla)$ , isomorphe à D.

4. Une fonction  $f \in \bar{\mathbf{R}}^D$  est sous-additive si et seulement si  $f \leq f \nabla f$ , c'est-à-dire encore si la suite des  $f^{\nabla n}$  (inf-convolution de  $n$  fonctions égales à  $f$ ) est croissante. Il en résulte que l'ensemble des fonctions sous-additives est stable pour l'inf-convolution.

Soit  $g$  quelconque dans  $\bar{\mathbf{R}}^D$ ; la fonction

$$\gamma = \inf_{n \geq 1} g^{\nabla n}$$

est la *régularisée sous-additive* de  $g$ , c'est-à-dire la plus grande minorante sous-additive de cette fonction.

5. On suppose dans ce paragraphe que le demi-groupe D possède un élément neutre, noté 0. Soit P, contenant 0, un sous-demi-groupe de D; la relation binaire  $\prec$  définie dans D par

$$x \prec y \iff \exists z \in P \text{ tel que } y = x + z$$

est un *préordre* sur D. Une fonction  $f \in \bar{\mathbf{R}}^D$  est *décroissante* pour ce préordre si et seulement si  $f \nabla \psi_P = f$  (ce qui équivaut d'ailleurs à  $f \nabla \psi_P \geq f$ ).

Soit  $g$  quelconque dans  $\bar{\mathbf{R}}^D$ ; la fonction  $g \nabla \psi_P$  est la plus grande fonction décroissante minorant  $g$  ou *régularisée décroissante* de  $g$ . Cette opération de régularisation commute avec la régularisation sous-additive considérée au paragraphe 4.

6. Une fonction  $f \in \bar{\mathbf{R}}^D$  est complètement décrite par la donnée de l'ensemble

$$\mathcal{E}(f) = \{ (x, k) \in D \times \mathbf{R} / k > f(x) \}$$

(« épigraphe strict » de  $f$ ). Techniquement, la considération de cet ensemble est en général plus utile que celle de la partie qu'on définirait de même dans  $D \times \bar{\mathbf{R}}$ .

On prend l'addition ordinaire comme loi de composition dans  $\mathbf{R}$  et l'on munit l'ensemble produit  $D \times \mathbf{R}$  de la loi de demi-groupe produit, encore notée +. Soient  $f$  et  $g$  quelconques dans  $\bar{\mathbf{R}}^D$ ; on trouve

$$\mathcal{E}(f \nabla g) = \mathcal{E}(f) + \mathcal{E}(g).$$

Il résulte donc du paragraphe 4 que  $f$  est sous-additive si et seulement si  $\mathcal{E}(f)$  est sous-demi-groupe de  $D \times \mathbf{R}$ .

8. L'addition dans un *cône convexe* C étant une loi de demi-groupe, prenons  $D = C$ . Notons  $\text{Conv } C$  l'ensemble des  $f \in \bar{\mathbf{R}}^C$  qui sont *convexes*

c'est-à-dire telles que

$$(1) \quad f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha f(x) + \beta f(y)$$

quels que soient  $x$  et  $y$  dans  $C$ , quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $]0, 1[$  avec  $\alpha + \beta = 1$  [il serait équivalent d'écrire le second membre de (1) avec une addition ordinaire et d'imposer à  $f$  de vérifier l'inégalité lorsque cette addition est définie]. Les fonctions convexes prenant la valeur  $-\infty$  sont assez spéciales : si  $f \in \text{Conv } C$  prend la valeur  $-\infty$  au point  $x_0$ , il existe sur tout segment d'origine  $x_0$  au plus un point où  $f$  prenne une valeur finie; au-delà de ce point,  $f$  a la valeur  $+\infty$ .

Soit  $\lambda \in ]0, +\infty[$ ; on note  $f^{(\lambda)}$  la fonction

$$x \rightarrow f^{(\lambda)}(x) = \lambda f\left(\frac{1}{\lambda}x\right).$$

Nous montrons que, par la loi de composition interne  $(f, g) \rightarrow f \nabla g$  et la loi externe  $(\lambda, f) \rightarrow f^{(\lambda)}$ , l'ensemble  $\text{Conv } C$  est muni d'une structure de cône convexe, notée  $(\text{Conv } C, \nabla)$ .

La loi interne  $+$  et la multiplication ordinaire par  $\lambda \in ]0, +\infty[$  munissent, d'autre part,  $\overline{\mathbf{R}}^c$  d'une structure de cône convexe notée  $(\overline{\mathbf{R}}^c, +)$ . On constate que l'application canonique de  $(\text{Conv } C, \nabla)$  dans  $(\overline{\mathbf{R}}^c, +)$  est *convexe*, c'est-à-dire que, quels que soient  $f$  et  $g$  dans  $\text{Conv } C$ , quels que soient  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $]0, 1[$  avec  $\alpha + \beta = 1$ , on a

$$f^{(\alpha)} \nabla g^{(\beta)} \leq \alpha f + \beta g.$$

(\*) Séance du 28 octobre 1963.

(1) Pour la démonstration des faits énoncés ici et divers développements du même esprit, voir : J.-J. MOREAU, *Fonctions à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$ , notions algébriques*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1963 (multigraphié v + 37 pages).

L'inf-convolution sur  $\mathbf{R}^n$  de fonctions convexes à valeurs finies apparaît dans : W. FENCHEL, *Convex cones, sets and functions (Lecture Notes, 1953, Dept. of Math., Princeton University)*.

L'opération analogue de sup-convolution de fonction continues finies sur la demi-droite  $[0, +\infty[$ , puis sur le coin positif de  $\mathbf{R}^n$  (c'est alors une « maximum convolution ») est envisagée dans : R. E. BELLMAN, W. KARUSH, *On a new functional transform in analysis; the maximum transform (Bull. Amer. Math. Soc., 67, 1961, p. 501-503)* suivi de plusieurs publications de ces derniers auteurs; la plus récente est, sans doute : *Functional equations in the theory of dynamic programming. XII. An application of the maximum transform (J. Math. Anal. Appl., 6, 1963, p. 155-157)*.

L'inf-convolution sur  $\mathbf{R}^n$  de fonctions convexes à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$  joue un grand rôle dans : T. ROCKAFELLAR, *Convex functions and dual extremum problems*, Thesis, 1963, Dept. of Math., Harvard University.

Des propriétés topologiques de l'inf-convolution sur un espace vectoriel topologique sont étudiées dans : J.-J. MOREAU, *Inf-convolution*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1963 (multigraphié, vi + 42 pages), partiellement résumé dans : *Comptes rendus*, 256, 1963, p. 5047-5049, où apparaît l'inf-convolution de fonctions à valeurs dans  $[-\infty, +\infty]$ , extension indispensable pour que l'opération soit associative.

(Faculté des Sciences, Montpellier.)