Stabilité des écoulements de convection thermosolutale en cavité carrée

Gérald Bardan, Abdelkader Mojtabi

▶ **To cite this version:**

Gérald Bardan, Abdelkader Mojtabi. Stabilité des écoulements de convection thermosolutale en cavité carrée. Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série IIb, Mécanique, physique, astronomie, 1998, 326 (12), pp.851-857. 10.1016/S1251-8069(99)80039-8 . hal-01868111

HAL Id: hal-01868111
https://hal.science/hal-01868111

Submitted on 5 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Open Archive Toulouse Archive Ouverte

OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible

This is an author's version published in: http://oatao.univ-toulouse.fr/20615

Official URL:

http://dx.doi.org/10.1016/S1251-8069(99)80039-8

To cite this version:

Bardan, Gérald and Mojtabi, Abdelkader *Stabilité des écoulements de convection thermosolutale en cavité carrée.* (1998) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy, 07. pp. 851 - 857. ISSN 1287-4620

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: tech-oatao@listes-diff.inp-toulouse.fr

Stabilité des écoulements de convection thermosolutale en cavité carrée

Gérald BARDAN, Abdelkader MOJTABI

Institut de mécanique des fluides de Toulouse, UMR INPT–UPS, UFR MIG, université Paul-Sabatier, 118, route de Narbonne, 31062 Toulouse cedex, France

E-mail : mojtabi@lm2f.ups-tlse.fr

Résumé. On étudie analytiquement la stabilité linéaire, faiblement non linéaire et non linéaire (méthode de l'énergie) de la solution de double diffusion pure dans le cas où les forces d'origine thermique et massique sont égales et opposées. Les parois horizontales de la cellule carrée sont parfaitement isolées et les parois verticales sont maintenues à une température et à une concentration uniformes. Nous mettons en évidence l'existence de deux types de solutions convectives stationnaires sous-critique et supercritique, et déterminons les nombres de Rayleigh donnant naissance à ces deux régimes. © Académie des Sciences/Elsevier, Paris

stabilité linéaire / stabilité faiblement non linéaire / méthode de l'énergie / double diffusion

Theoretical stability study of double-diffusive convection in a square cavity

Abstract. *Bifurcation phenomena in a square enclosure, submitted to horizontal temperature and concentration gradients, is studied when the opposing buoyancy forces due to horizontal thermal and concentration gradients are equal. We perform the linear, weakly non-linear and finite amplitude stability analysis of the equilibrium solution. We verify that the onset of double diffusive convection corresponds to a transcritical bifurcation point. The subcritical solutions are strong attractors beyond a particular value of the thermal Rayleigh number which corresponds to the location of turning point. The structure of subcritical and transcritical steady solutions has been studied.* © *Académie des Sciences/Elsevier, Paris*

linear stability / weakly non-linear stability / energy method / double-diffusive convection

Abridged English Version

Recently, double-diffusive convection in fluid enclosures has received much attention. The interest in this class of flows has been motivated by engineering problems such as crystal growth [1]. During the growth of a crystal, the influence of the transport process in the fluid phase on the quality of solid phase requires a good understanding of the buoyancy convective flows. We study the same problem

Note présentée par René MOREAU.

previously investigated numerically by Krishnan [2], Gobin and Bennacer [3] and Ghorayeb and Mojtabi [4]. Depending on the parameters involved, experimental observations and numerical investigations show the existence of one-cell or multicell regimes.

The problem of thermosolutal convection in a square enclosure depends on four nondimensional numbers (the thermal and solutal Grashof numbers, Gr_T and Gr_C, the Prandtl number, Pr, and the Schmidt number, Sc). The problem is formulated using the Boussinesq approximation. The dimensionless equations for mass, momentum, energy and chemical species, where the Soret effect is neglected, are given by equations (2)-(5) and the corresponding boundary conditions by equations (6)-(8).

We consider the global stability analysis of the equilibrium solution when $Gr_T/Gr_C = -1$. In the first section, we formulate an energy stability theory for basic solution. These methods lead to a criterion which is sufficient for the global stability of the basic flow. In this context the energy functional is typically a linear combination of the kinetic and thermal energy [equation (15)]. To study the stability problem, we first fix the coupling constants in the linear combination and find a critical stability number for global stability. This critical value of energy theory is again defined by a variational calculus problem. Each choice of coupling constants gives a different 'energy' and leads to a different critical stability number. The coupling constants which lead to the largest stability number are called 'optimal'.

To draw a fuller picture of the stability properties of fluid motions, one has to develop procedures to deduce exact criteria for instability and to describe the transition from one stable kind of flow to another. The second and third sections give a local analysis using disturbances of infinitely small amplitude. We give critical values of the Rayleigh number by analysing the linearized equations for the steady or time-periodic disturbance of the basic solution. The flow which is then judged stable by linear theory may be unstable to disturbance of finite size. In this sense, linear and energy theory complement each other with the former leading to sufficient conditions for instability and the latter sufficient conditions for stability.

1. Introduction

Les écoulements de convection thermosolutale en milieu fluide ont été largement étudiés ces dix dernières années, comme en témoigne l'abondance des résultats publiés [1]. On s'intéresse, dans cette étude, aux écoulements prenant naissance dans une cavité carrée après la perte de stabilité de la solution d'équilibre mécanique. Pour une cavité rectangulaire chauffée différentiellement et isolée au niveau des parois horizontales [2], la solution d'équilibre est obtenue uniquement lorsque les forces de gravité d'origine thermique sont égales et opposées à celles d'origine solutale. Gobin et Bennacer [3] ont analysé la stabilité linéaire de cette solution d'équilibre en considérant le cas de la cellule verticale infinie avec des conditions aux limites correspondant à un fluide parfait. Ghorayeb et Mojtabi [4] ont étudié la stabilité linéaire de la solution d'équilibre en admettant le principe d'échange de stabilité et ont également analysé numériquement l'écoulement convectif obtenu. L'étude a permis de mettre en évidence une bifurcation supercritique stationnaire pour $Ra_{T_c}(Le - 1) = 17\,172$, relation confirmée par Xin et al. [5]. L'écoulement établi est constitué d'une cellule principale à fonction de courant positive, et de deux cellules localisées dans les coins supérieur droit et inférieur gauche. Les simulations numériques ont confirmé ces résultats et ont établi la présence d'une branche subcritique pour laquelle l'écoulement est monocellulaire et contrarotatif.

On se propose de développer une étude théorique globale (méthode de l'énergie), linéaire (vérification de l'échange de stabilité) et faiblement non linéaire de stabilité de la solution d'équilibre.

2. Formulation mathématique

Il s'agit de l'étude des écoulements bidimensionnels de convection thermosolutale dans une cavité carrée remplie d'un fluide binaire. Les parois verticales de la cellule sont maintenues à des températures (T_1 et T_2) et des concentrations (C_1 et C_2) constantes. Les parois horizontales sont parfaitement isolées. Les équations régissant ces écoulements sont basées sur l'hypothèse de Boussinesq. Les équations adimensionnelles de conservation (masse, quantité de mouvement, énergie et espèces), en l'absence d'effet Soret, s'écrivent :

$$\nabla . \vec{u} = 0 \tag{1}$$

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} . \nabla) \vec{u} = -\nabla p + \Delta \vec{u} + (Gr_T T + Gr_C C) \vec{z} \tag{2}$$

$$\partial_t T + \vec{u} . \nabla T = \Delta T/Pr \tag{3}$$

$$\partial_t C + \vec{u} . \nabla C = \Delta C/Sc \tag{4}$$

Le problème de la convection thermosolutale dans une cavité carrée dépend donc de quatre paramètres : $Gr_T = a^3 \beta_T (T_1 - T_2)\, g/\nu^2$ et $Gr_C = a^3 \beta_C (C_1 - C_2)\, g/\nu^2$, respectivement les nombres de Grashof thermique et solutal ainsi que de $Pr = \nu/\chi$, le nombre de Prandtl et de $Sc = \nu/D$, le nombre de Schmidt. Les conditions aux limites sont données par :

$$\vec{u}\,|_{\partial\Omega} = \vec{0} \text{ où } \partial\Omega \text{ désigne la frontière du domaine,} \tag{5}$$

$$T|_{x=0} - 1 = C|_{x=0} - 1 = C|_{x=1} = 0, \quad \forall z \tag{6}$$

$$\partial_z T|_{z=0} = \partial_z T|_{z=1} = \partial_z C|_{z=0} = \partial_z C|_{z=1} = 0, \quad \forall x \tag{7}$$

Dans l'hypothèse ($N = Gr_T/Gr_C = -1$), ce problème admet la solution de double diffusion pure $\vec{u} = \vec{0}$ et $T = C = 1 - x$. On se propose, dans un premier temps, de déterminer la condition suffisante de stabilité globale de cette solution, puis d'analyser le nombre et l'allure de l'ensemble des solutions convectives en fonction du nombre de Rayleigh thermique. Dans toute la suite, les grandeurs T, C et $\vec{u}$ désignent les perturbations superposées à la solution de base.

3. Approche globale

Il s'agit de démontrer l'existence d'un nombre de Grashof critique séparant les perturbations dont l'énergie peut croître initialement de celles dont l'énergie décroît de façon monotone. Pour cela, on effectue le changement de variable suivant, $T \to T/\sqrt{\lambda Gr_T}$, $C \to C/\sqrt{\mu Gr_T}$ et $R = \sqrt{Gr_T}$ dans le système aux perturbations qui s'écrit alors :

$$\nabla . \vec{u} = 0 \tag{8}$$

$$d_t \vec{u} = -\nabla P + \Delta \vec{u} + R(T/\sqrt{\lambda} - C/\sqrt{\mu})\, \vec{z} \tag{9}$$

$$d_t T = -R\sqrt{\lambda}\, \vec{u} . \nabla(1 - x) + \Delta T/Pr \tag{10}$$

$$d_t C = -R\sqrt{\mu}\, \vec{u} . \nabla(1 - x) + \Delta C/Sc \tag{11}$$

avec les conditions aux limites :

$$\vec{u}\,|_{\partial\Omega} = \vec{0} \tag{12}$$

$$T|_{x=0 \text{ et } x=1} = C|_{x=0 \text{ et } x=1} = 0, \quad \forall z \tag{13}$$

$$\partial_z T|_{z=0 \text{ et } z=1} = \partial_z C|_{z=0 \text{ et } z=1} = 0, \quad \forall x \tag{14}$$

λ et μ sont des paramètres positifs utilisés pour l'optimisation de la condition suffisante de stabilité ci-après. Ce système permet en effet de définir une énergie des perturbations E par la fonctionnelle définie positive suivante :

$$E = \iint_{\Omega} (|\vec{v}|^2 + T^2 + C^2)/2 \, d\Omega \tag{15}$$

Les variations temporelles de cette énergie sont alors données par l'équation d'évolution :

$$d_t E = -A_1^2 (1 - RA_2/A_1^2) \tag{16}$$

avec :

$$A_1^2 = \iint_{\Omega} (|\nabla \vec{u}|^2 + |\nabla T|^2/Pr + |\nabla C|^2/Sc) \, d\Omega \tag{17}$$

$$A_2 = \iint_{\Omega} \left((T/\sqrt{\lambda} - C/\sqrt{\mu}) \vec{z} \cdot \vec{u} - \sqrt{\lambda} T \vec{u} \cdot \nabla(1-x) - \sqrt{\mu} C \vec{u} \cdot \nabla(1-x) \right) d\Omega \tag{18}$$

Il existe donc un nombre de Grashof critique en deçà duquel la solution de double diffusion est unique. Ce nombre de Grashof critique énergétique est défini par :

$$1/R_c = \max(A_2) \text{ avec les contraintes } A_1^2 = 1 \text{ et } \nabla \cdot \vec{u} = 0 \text{ sur } \Omega.$$

Pour tout nombre de Grashof inférieur à R_c^2, l'énergie E décroît monotoniquement vers zéro [6]. Les équations d'Euler–Lagrange associées s'écrivent en variables perturbées ψ (fonction de courant), T et C comme suit :

$$2\Delta T - R_c Pr\left(\sqrt{\lambda}\, \partial_z \psi - 1/\sqrt{\lambda}\, \partial_x \psi\right) = 0 \tag{19}$$

$$2\Delta C - R_c Sc\left(\sqrt{\mu}\, \partial_z \psi + 1/\sqrt{\mu}\, \partial_x \psi\right) = 0 \tag{20}$$

$$2\Delta^2 \psi - R_c\left(\sqrt{\lambda}\, \partial_z T - 1/\sqrt{\lambda}\, \partial_x T + \sqrt{\mu}\, \partial_z C + 1/\sqrt{\mu}\, \partial_x C\right) = 0 \tag{21}$$

La non-pénétration et l'adhérence aux parois se traduit par :

$$\partial_n \psi|_{\partial O} = \psi|_{\partial \Omega} = 0 \tag{22}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal à la paroi.

On développe les fonctions inconnues sur une famille de fonctions vérifiant les conditions aux limites du problème. On a choisi les développements suivants :

$$\psi(x, z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} \sin(\pi x) \sin(i\pi x) \sin(\pi z) \sin(j\pi z) \tag{23}$$

$$T(x, z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} b_{ij} \sin(i\pi x) \cos(j\pi z) \; ; \quad C(x, z) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} \sin(i\pi x) \cos(j\pi z) \tag{24}$$

La méthode de Galerkin à l'ordre $n = m = 3$ montre que le Grashof critique énergétique est maximal pour $\lambda = \mu = 0{,}938$. En réduisant le système (19)–(21) à une unique équation portant sur une des perturbations d'amplitudes finies, on peut remarquer que seuls les nombres de Rayleigh thermique

et de Lewis interviennent. Les différentes valeurs du nombre de Rayleigh critique correspondant au nœud–col sont données dans le *tableau I*. Lorsque le nombre de Lewis tend vers l'infini, le groupement $Ra_{T_{cE}}\ Le$, où $Ra_{T_{cE}}$ désigne le nombre de Rayleigh critique énergétique, tend asymptotiquement vers une valeur constante égale à 6900. Les isovaleurs du vecteur propre, et donc la configuration de l'écoulement ainsi obtenue dans un voisinage du point tournant, est conforme à celle reportée numériquement par [4].

Tableau I. Valeurs théoriques des nombres de Rayleigh correspondant au point tournant et des nombres de Rayleigh critiques en fonction de différents nombres de Lewis.

Table I. *Theoretical values of the turning point Rayleigh number and critical Rayleigh number for different values of the Lewis number.*

Lewis	$Ra_{T_{cE}}$	Ra_{T_c}	Lewis	$Ra_{T_{cE}}$	Ra_{T_c}
0,1	6384,4	19 080,0	16,0	411,3	1144,8
0,5	4790,7	34 344,0	20,0	332,5	903,8
1,0	3610,2	∞	28,0	240,3	636,0
1,5	2883,2	34 344,0	35,0	193,4	505,1
2,0	2395,4	17 172,0	45,0	151,2	390,3
4,0	1422,3	5 724,0	60,0	113,9	291,1
6,0	1009,7	3 434,4	80,0	85,8	217,4
8,0	782,3	2 453,1	100,0	68,7	173,5
10,0	638,4	1 908,0	150,0	46,0	115,2
11,0	584,7	1 717,2	200,0	34,5	86,3
12,0	539,2	1 561,1	300,0	23,0	57,4

4. Étude de stabilité linéaire

Pour cette étude, les perturbations de la fonction de courant, de la température et de la concentration sont développées en doubles séries de Fourier, et contrairement aux études précédentes, nous prenons en compte la possibilité de perturbations instationnaires sous la forme $e^{i\omega t}$. Le système aux perturbations infinitésimales s'écrit alors sous la forme :

$$\Delta(\Delta - i\omega)\,\psi = Gr_T\,\partial_x(C - T), \quad (\Delta - Pri\omega)\,T = Pr\,\partial_z\,\psi, \quad (\Delta - Sci\omega)\,C = Sc\,\partial_z\,\psi \qquad (25)$$

avec les conditions aux limites homogènes définies précédemment. Ce problème différentiel devient singulier pour plusieurs couples (ω, Gr_T). Quels que soient les nombres de Prandtl et de Schmidt choisis numériquement, nous avons vérifié que la valeur minimale du nombre de Grashof est obtenue pour $\omega = 0$. La première bifurcation est donc stationnaire et l'on retrouve aussi de nombreuses bifurcations instationnaires mais pour des nombres de Grashof supérieurs au nombre de Grashof critique.

En pratique, si dans le développement (23)–(24) i + j est pair (respectivement impair), alors la solution recherchée est centrosymétrique (respectivement antisymétrique). Pour $n = m = 3$, la solution dont la fonction de courant est centrosymétrique conduit à la plus petite valeur du groupement critique :

$$Ra_{T_c}|Le - 1| = 19\,031 \qquad (26)$$

La valeur ainsi obtenue du groupement précédent diffère de moins 10 % de celle reportée par [4] et [5].

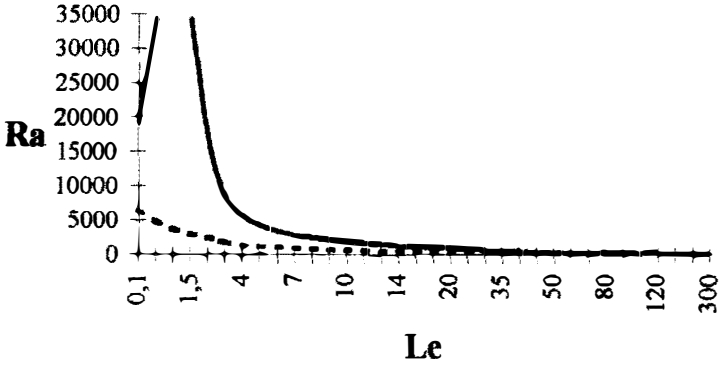

Figure 1. Nombre de Rayleigh thermique critique, en fonction du nombre de Lewis, déterminé par la méthode de l'énergie et par la stabilité linéaire.

Figure 1. *Critical thermal Rayleigh number as a function of the Lewis number obtained by energy method and by linear stability.*

Pour résumer, nous représentons sur la *figure 1*, dans le plan (Ra_T, Le), l'ensemble des résultats de stabilité obtenus dans le *tableau I*. On peut distinguer trois domaines. Le premier domaine, situé sous la courbe en pointillés, correspond à la stabilité de la solution de double diffusion pure quelle que soit l'amplitude de la perturbation. Le domaine entre les deux courbes correspond à la possibilité d'existence de solutions sous-critiques et enfin le domaine au-dessus de la courbe continue à l'instabilité de la solution de base par rapport à toutes les perturbations.

5. Étude faiblement non linéaire

Nous développons une étude faiblement non linéaire pour préciser la nature de cette bifurcation localisée analytiquement. Cette analyse est basée sur la méthode de Lyapounov–Schmidt [7]. On développe les perturbations ainsi que le nombre de Grashof thermique sous forme de séries entières du paramètre $\varepsilon > 0$:

$$\psi = \varepsilon\psi^{(1)} + \varepsilon^2\,\psi^{(2)} + \cdots ; \quad T = \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2\,T^{(2)} + \cdots ; \quad C = \varepsilon C^{(1)} + \varepsilon^2\,C^{(2)} + \cdots \tag{27}$$

$$Gr_T = Gr^{(0)} + \varepsilon Gr^{(1)} + \varepsilon^2\,Gr^{(2)} + \cdots ; \quad \partial_t = \varepsilon\,\partial_{t^{(1)}} \tag{28}$$

À l'ordre ε, on retrouve le problème de stabilité linéaire précédent. Le sous-espace propre associé est de dimension 1 :

$$(\psi^{(1)}, T^{(1)}, C^{(1)}) = A(f_1(x,z), Pr\,f_2(x,z), Sc(x,z)) \tag{29}$$

où A correspond à l'amplitude de la perturbation et f_i ($i = 1$ ou 2) sont des fonctions des variables d'espace et seront évaluées par la méthode de Galerkin. L'amplitude A est déterminée en utilisant l'alternative de Fredholm ou condition de solvabilité. Il est alors nécessaire de déterminer le sous-espace propre du problème adjoint pour lequel les conditions aux limites sont conservées.

$$\begin{pmatrix} \Delta^2 & \partial_z & \partial_z \\ -Gr^{(1)}\,\partial_x & \Delta/Pr & 0 \\ Gr^{(1)}\,\partial_x & 0 & \Delta/Sc \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi^{*(1)} \\ T^{*(1)} \\ C^{*(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{30}$$

Ce problème est singulier pour la même valeur du groupement critique du problème direct. Le sous-espace propre est différent mais reste de dimension 1. Un vecteur propre générateur est donné ci-après :

$$(\psi^{*(1)}, T^{*(1)}, C^{*(1)}) = ((Pr - Sc)\,f_1^*(x,z), Pr\,f_2^*(x,z), -Sc\,f_2^*(x,z)) \tag{31}$$

À l'ordre ε^2, la condition de solvabilité (second membre orthogonal au noyau de l'adjoint) conduit à l'équation d'amplitude :

$$(a + (Pr + Sc)\,b)\,\partial_{t^{(1)}}A = A(Gr^{(1)}|Sc - Pr|\,c + A(d + (Pr + Sc)\,e)) \tag{32}$$

avec :

$$a = \langle \Delta f_1, f_1^* \rangle, \quad b = \langle f_2, f_2^* \rangle, \quad c = \langle \partial_x f_2, f_1^* \rangle \tag{33}$$

$$d = \langle \partial_z f(\partial^3_{xzz} f_1 + \partial^3_{xxx} f_1) - \partial_x f_1 (\partial^3_{zxx} f_1 + \partial^3_{zzz} f_1), f_1^* \rangle, \quad e = \langle \partial_z f_1 \, \partial_x f_2 - \partial_x f_1 \, \partial_z f_2, f_2^* \rangle \tag{34}$$

L'opérateur $\langle X, Y \rangle$ est le produit scalaire $\langle X, Y \rangle = \iint_\Omega XY \, dx \, dz$. $Gr^{(1)}$ est un paramètre de supercriticité, sa valeur dépend de ε. Les valeurs obtenues pour une troncature $n = m = 3$ sont les suivantes :

$$a = 674{,}4, \quad b = 2059, \quad c = 2{,}3, \quad d = -2587{,}7, \quad e = 3\,004\,402 \tag{35}$$

L'équation d'amplitude montre que la solution de double diffusion est stable vis-à-vis des perturbations infinitésimales si et seulement si $Gr^{(1)} < 0$, c'est-à-dire $Gr_T < Gr^{(0)}$. Le régime convectif supercritique est stable si le nombre de Grashof est supérieur au nombre de Grashof critique linéaire. La bifurcation est transcritique. L'équation de la branche supercritique s'écrit dans un plan ($\psi - Ra_T$) comme suit :

$$\psi \approx \varepsilon \psi^{(1)} = -(Ra_T - Ra_T^{(0)}) (Le - 1) f_1(x, z) \, c / (d + Pr(1 + Le) e) \tag{36}$$

ce qui signifie que la fonction de courant est une fonction linéaire du nombre de Rayleigh et la pente de cette bifurcation transcritique dépend du nombre de Prandtl quand le nombre de Lewis est fixé. De plus, au voisinage de cette transition, on montre analytiquement et l'on vérifie numériquement que le nombre de Sherwood et le nombre de Nusselt sont reliés par :

$$Sh - 1 = (Sc/Pr)^2 (Nu - 1) = Le^2 (Nu - 1) \tag{37}$$

6. Conclusion

Notre étude analytique (stabilité linéaire et faiblement non linéaire) nous a permis de préciser, d'une part, que la première bifurcation rencontrée est stationnaire et, d'autre part, la nature transcritique de cette bifurcation et son caractère centrosymétrique. L'écoulement s'établit sous forme d'une cellule centrale tournant dans le sens trigonométrique si $Le > 1$ et dans le sens opposé si $Le < 1$, bordée par deux petites cellules de recirculation. L'étude énergétique nous a permis de prouver l'existence d'un régime sous-critique correspondant à une cellule unique tournant en sens inverse de la cellule principale de la branche transcritique. Les seuils d'apparitions de ces deux solutions convectives transcritiques et sous-critiques dépendent uniquement de groupements différents des nombres de Rayleigh et de Lewis.

Références bibliographiques

[1] Wilcox W.R., Transport phenomena in crystal growth from solution, Prog. Cryst. Growth Ch. 26 (1993) 153–194.

[2] Krishnan R., A numerical study of the instability of double diffusive convection in a square enclosure with a horizontal temperature and concentration gradients, Proc. of ASME Nat. Heat Transfer Conf., Philadelphia 1989, ASME, New York, 1989, pp. 357–368.

[3] Gobin D., Bennacer R., Double diffusion in a vertical fluid layer: onset of the convective regime, Phys. Fluids 6 (1) (1994) 59–67.

[4] Ghorayeb K., Mojtabi A., Double diffusive convection in a vertical rectangular cavity, Phys. Fluids 9 (8) (1997) 2339–2348.

[5] Xin S., Le Quéré P., Tuckerman S., Bifurcation analysis of double-diffusive convection with opposing horizontal thermal and solutal gradients, Phys. Fluids 10 (4) (1998) 850–857.

[6] Straughan B., The Energy Method, Stability, and Nonlinear Convection, Springer-Verlag, New York, 1992, vol. 91, pp. 38–105.

[7] Golubitsky M., Schaeffer D.G., Singularities and Groups in Bifurcation Theory, I, Springer Verlag, New York, 1984, vol. 51.