HAL
open science

Propriétés des applications “ prox ”

Jean Jacques Moreau

To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Propriétés des applications “ prox ”. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l’Académie des sciences, 1963, 256, pp.1069-1071. hal-01867221

HAL Id: hal-01867221

https://hal.science/hal-01867221

Submitted on 4 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L’archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d’enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Propriétés des applications « prox ».* Note (*) de M. **Jean-Jacques Moreau**, présentée par M. Jean Leray.

1. Dans une Note précédente [1], nous avons considéré, définie sur un espace hilbertien réel H, une fonction f, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ *convexe et semi-continue inférieurement*, non partout égale à $+\infty$ (en abrégé : *fonction* csci). Quel que soit $z \in H$, la fonction $u \to (1/2)\|u-z\|^2 + f(u)$ présente un minimum strict en un point noté $\text{prox}_f z$. On obtient ainsi un type usuel d'applications de H dans lui-même; exemples d'applications prox : l'application identique, toute application constante, toute homothétie de centre quelconque et de rapport $\leqq 1$ ou, plus généralement, toute application linéaire autoadjointe de norme $\leqq 1$, enfin la *projection* sur tout ensemble fermé convexe (en particulier la projection orthogonale sur une variété linéaire fermée). Deux fonctions csci engendrent la même application prox si et seulement si elles diffèrent par une constante.

2. La clef de la théorie est le *théorème des fonctions duales*, démontré dans la même Note. On considère la fonction csci

$$y \to g(y) = \sup_{x \in H} [(x|y) - f(x)]$$

dite *fonction duale* [2] de f (il y a réciprocité entre f et g). Deux points $x \in H$ et $y \in H$ sont dits *conjugués* par rapport au couple (f, g) si $f(x) + g(y) = (x|y)$ et l'on énonce :

Tout $z \in H$ est égal à la somme de $x = \text{prox}_f z$ et de $y = \text{prox}_g z$; x et y sont conjugués par rapport à (f, g) et c'est là l'unique décomposition de z en somme de deux termes conjugués par rapport à (f, g).

Nous passons ici en revue, sans démonstration, quelques faits notables de la théorie des applications prox [3].

3. Une application prox *contracte les distances*, c'est-à-dire que, quels que soient $z \in H$ et $z' \in H$,

$$\|\text{prox}_f z - \text{prox}_f z'\| \leqq \|z - z'\|.$$

Il en résulte que l'application est continue de H fort dans H fort. L'image réciproque d'un point est un ensemble fermé *convexe* (éventuellement vide).

Les *points fixes* de l'application prox_f sont les points de H où la fonction f atteint son éventuelle borne inférieure : l'ensemble de ces points est fermé convexe (éventuellement vide).

4. Si la valeur minimale de la fonction $u \to (1/2)\|u-z\|^2 + f(u)$ est étudiée comme fonction de z, à savoir

$$z \to \varphi(z) = \frac{1}{2}\|y\|^2 + f(x)$$

(où $x = \text{prox}_f z$ et $y = z - x = \text{prox}_g z$), on trouve que cette fonction numérique finie est *convexe et différentiable au sens de Fréchet* (donc continue

sur H fort) : son *gradient* au point z n'est autre que $y = \text{prox}_g z$; nous disons que φ est une *fonction primitive* de l'application prox_g.

La duale de φ est la fonction

$$v \to \theta(v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 + g(v). \tag{1}$$

Deux points $z \in H$ et $v \in H$ sont conjugués par rapport au couple (φ, θ) si et seulement si $v = \text{prox}_g z$.

Dans le cas particulier où f est la *fonction indicatrice* d'un ensemble fermé convexe C (c'est-à-dire $f = 0$ sur C et $f = +\infty$ hors de C), de sorte que $x = \text{prox}_f z$ est la *projection* de z sur C, on retrouve un résultat classique : la fonction numérique finie $z \to 2\varphi(z)$, carré de la distance de z à C, est convexe, différentiable et son gradient est $2y = 2(z - x)$.

5. Nous disons qu'une application $z \to p(z)$ de H dans lui-même est un *sous-gradient* d'une fonction numérique (finie) φ si, quel que soit $z \in H$, la fonction affine continue de « pente » $p(z)$, égale à φ au point z, c'est-à-dire la fonction

$$\zeta \to (\zeta - z \mid p(z)) + \varphi(z)$$

est minorante de φ sur H (cela implique que φ est csci, puisque enveloppe supérieure de cette famille de fonctions affines continues).

Si une application p est un sous-gradient d'une fonction numérique φ et si cette application contracte les distances, c'est une application prox [la fonction φ est alors différentiable au sens de Fréchet et admet p comme gradient proprement dit; sa duale θ permet de construire, par la relation (1), la fonction g telle que $p = \text{prox}_g$].

De là résulte immédiatement que si α_i est une famille finie de nombres positifs tels que $\sum \alpha_i \leqq 1$ et p_i une famille d'applications prox, la combinaison $p = \sum \alpha_i p_i$ est une application prox.

6. A la théorie des applications prox se rattachent encore les propriétés suivantes :

La fonction numérique $z \to \mathcal{Q}(z) = (1/2)\|z\|^2$ est l'unique fonction csci *égale à sa duale.*

Nous disons qu'une fonction numérique convexe φ est *moins convexe* que $\mathcal{Q}$ s'il existe une fonction numérique convexe γ telle que $\varphi + \gamma = \mathcal{Q}$; on montre alors :

Pour qu'une fonction csci *soit moins convexe que $\mathcal{Q}$, il faut et il suffit qu'elle soit fonction primitive d'une application* prox.

De même, nous disons qu'une fonction θ est *plus convexe* que $\mathcal{Q}$ s'il existe g, fonction convexe à valeurs dans $]-\infty\ +\infty]$, telle que $\theta = \mathcal{Q} + g$ et l'on a l'énoncé :

Pour qu'une fonction csci *soit plus convexe que $\mathcal{Q}$, il faut et il suffit que sa duale soit moins convexe que $\mathcal{Q}$.*

7. Soit f une fonction csci, g sa duale et soit $x \in H$. Pour qu'il existe une fonction affine continue (notons-la : $z \to (y \mid z) - \alpha$, où $y \in H$ et $\alpha \in \mathbf{R}$) *minorante de f exacte au point x* [c'est-à-dire telle que $f(x) = (y \mid x) - \alpha$], il faut et il suffit que x possède un conjugué (à savoir : y) relativement au couple (f, g). Nous appelons *assise* de la fonction f l'ensemble A des x possédant cette propriété. Il résulte du théorème des fonctions duales que cet ensemble est l'image de H par l'application prox_f; donc A n'est pas vide.

On montre que f est déterminée par les valeurs qu'elle prend sur son assise A : cette fonction est égale à la *régularisée* csci de sa restriction à A (c'est-à-dire la plus grande fonction csci sur H qui soit majorée par cette restriction; elle a la valeur $+\infty$ hors de l'enveloppe fermée convexe de A). Il en résulte aussi que f est égale à l'enveloppe supérieure de la famille de ses minorantes affines continues *exactes*. Pour tout dire ces deux propriétés s'étendent au-delà du cas des espaces hilbertiens, mais elles ne sont pas vraies sur un espace vectoriel topologique localement convexe séparé quelconque. Sur un tel espace une fonction csci est toujours l'enveloppe supérieure de la famille (certainement non vide) de ses minorantes affines continues : pour construire cette enveloppe on peut évidemment se restreindre aux minorantes *maximales* (c'est-à-dire aux minorantes affines continues non majorées par une autre minorante affine de même pente), mais il peut arriver qu'aucune de ces minorantes maximales ne soit *exacte*.

(*) Séance du 21 janvier 1963.

(1) *Comptes rendus*, 255, 1962, p. 2897.

(2) Pour l'étude générale de cette notion, sur un couple d'espaces vectoriels topologiques F et G en dualité (ici F = G = H), *cf.* : J.-J. Moreau, *Fonctions convexes en dualité*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1962 (multigraphié, 18 pages).

(3) Nous renvoyons, pour les démonstrations à J.-J. Moreau, *Applications « prox »*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1963 (multigraphié, 20 pages).

(*Faculté des Sciences, Montpellier.*)