HAL
open science

# Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel

Jean Jacques Moreau

## To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1963, 256, pp.5047-5049. hal-01867213

**HAL Id: hal-01867213**

**https://hal.science/hal-01867213**

Submitted on 4 Sep 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Inf-convolution des fonctions numériques sur un espace vectoriel* (¹). Note (*) de M. **Jean-Jacques Moreau**, présentée par M. Jean Leray.

1. Soit E un espace vectoriel sur le corps des réels; soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur E, à valeurs dans $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, +\infty]$. Pour tout $x \in E$ on construit la fonction

$$x \to (f \square g)(x) = \inf_{u+v=x} [f(u) + g(v)].$$

L'inf est pris sur l'ensemble des couples $(u, v) \in E \times E$ tels que $u + v = x$ *et tels que la somme* $f(u) + g(v)$ *soit définie*, c'est-à-dire n'affecte pas la forme $\infty - \infty$ (si cet ensemble est vide, l'inf vaut $+\infty$). Nous appelons *inf-convolution* la loi de composition $(f, g) \to f \square g$, visiblement commutative, ainsi définie dans $\overline{\mathbf{R}}^E$; cette loi est *associative*. Si, pour un $x$, l'inf de la définition ci-dessus est un *minimum*, nous disons que l'inf-convolution est *exacte* au point $x$.

*Exemple* 1. — Soit A une partie de E; notons $\psi_A$ *la fonction indicatrice* de A [c'est-à-dire $\psi_A(x) = 0$ si $x \in A$, $\psi_A(x) = +\infty$ si $x \notin A$]. B étant de même une partie de E, la fonction $\psi_A \square \psi_B$ est la fonction indicatrice de l'ensemble somme A + B.

*Exemple* 2. — Si E est muni d'une distance invariante par translation, notons $\delta(x)$ la distance de $x$ à l'origine. Alors $(\psi_A \square \delta)(x)$ est la distance de $x$ à l'ensemble A.

*Exemple* 3. — Soit $a \in E$; on note $\psi_a$ la fonction indicatrice de l'ensemble $\{a\}$. Alors, pour toute $f \in \overline{\mathbf{R}}^E$, la fonction $f \square \psi_a$ est la fonction $x \to f(x - a)$, translatée de $f$. En particulier, $\psi_0$, fonction indicatrice de l'origine, est *élément neutre* pour l'inf-convolution.

2. Nous disons qu'une fonction $f \in \overline{\mathbf{R}}^E$ est convexe (resp. *concave*) si elle vérifie l'inégalité classique de la convexité (resp. l'inégalité inverse) *toutes les fois que celle-ci a un sens*, c'est-à-dire ne comporte pas l'indétermination $\infty - \infty$.

Si $f$ ou $g$ est concave, la fonction $f \square g$ est aussi concave.

Si les deux fonctions $f$ et $g$ sont convexes, $f \square g$ est convexe.

Soit $\lambda > 0$ une constante; notons $f^{(\lambda)}$ la fonction $x \to \lambda f(x/\lambda)$. L'opération $^{(\lambda)}$ est distributive par rapport à l'inf-convolution. En outre, si $\mu > 0$ est une autre constante et *si $f$ est convexe*,

$$f^{(\lambda)} \square f^{(\mu)} = f^{(\lambda+\mu)}.$$

Ainsi la loi de composition interne $(f, g) \to f \square g$ et la loi externe $(\lambda, f) \to f^{(\lambda)}$ munissent l'ensemble des fonctions numériques convexes sur E d'une structure de *cône convexe abstrait*.

Source gallica.bnf.fr / Bibliothèque nationale de France

3. On suppose maintenant que E est *un espace vectoriel topologique*. Si l'une des fonctions $f$ et $g$ est semi-continue supérieurement, il en est de même de la fonction $f \square g$.

Pour obtenir des cas usuels de semi-continuité inférieure, nous devons introduire la notion suivante : on dira qu'une fonction $f \in \overline{\mathbf{R}}^{E}$ est *inf-compacte* si, pour tout nombre fini $k$, l'ensemble $\{x \in E / f(x) \leq k\}$ est compact (éventuellement vide).

Alors, si $f$ est inf-compacte, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ et si $g$ est semi-continue inférieurement, bornée inférieurement, la fonction $f \square g$ est semi-continue inférieurement, bornée inférieurement et l'inf-convolution est *exacte* en tout point.

Si la topologie de E est séparée, l'ensemble des fonctions inf-compactes sur E, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, est stable par inf-convolution et pour ces fonctions l'inf-convolution est *exacte* en tout point.

4. Soit C une partie conique convexe de E (de sommet o, non nécessairement pointée). L'ensemble des fonctions numériques ayant la valeur $+\infty$ hors de C est stable par inf-convolution. A chacune des ces fonctions s'associe biunivoquement sa restriction à C : l'inf-convolution définit ainsi une loi de composition dans $\overline{\mathbf{R}}^{C}$. On munit C de la topologie induite par E et l'on trouve :

Si le cône C est à *base compacte* et pointé, l'inf-convolution dans $\overline{\mathbf{R}}^{C}$ laisse stable l'ensemble des fonctions à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$ semi-continues inférieurement par rapport à C; elle est, pour ces fonctions, *exacte* en tout point.

L'inf-convolution dans $\overline{\mathbf{R}}^{C}$ laisse stable l'ensemble des fonctions semi-continues supérieurement par rapport à C si et seulement si C possède l'*additivité des ouverts* : « Quels que soient $\Omega$ et $\Omega'$, ouverts par rapport à C, l'ensemble $\Omega + \Omega'$ est ouvert par rapport à C ».

En particulier, si C est le *coin positif fermé* de $\mathbf{R}^{n}$, l'inf-convolution sur ce cône laisse stable l'ensemble des fonctions continues; elle est, pour ces fonctions, *exacte* en tout point.

5. L'espace vectoriel topologique réel E est maintenant supposé *localement convexe séparé*. Notons $\Gamma(E)$ l'ensemble (ordonné par l'ordre habituel de $\overline{\mathbf{R}}^{E}$) des fonctions numériques sur E qui sont *enveloppes supérieures de familles de fonctions affines continues*. On montre que cet ensemble est constitué des parties suivantes : 1° l'ensemble $\Gamma_0(E)$ des fonctions à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, convexes, semi-continues inférieurement, non partout égales à $+\infty$; 2° la fonction constante $\omega_E = +\infty$; 3° la fonction constante $-\omega_E = -\infty$ (enveloppe supérieure de la famille vide).

Notons $f \odot g$ la $\Gamma$-*régularisée* de $f \square g$, c'est-à-dire *la plus grande fonction de* $\Gamma(E)$ *minorant* $f \square g$ (les paragraphes précédents fournissent des cas utiles où $f \odot g = f \square g$). On montre que la loi de composition interne,

$(f, g) \to f \odot g$, dite $\Gamma$-*convolution* et la loi externe $(\lambda, f) \to f^{(\lambda)}$ munissent $\Gamma(E)$ d'une structure de cône convexe abstrait que nous notons $[\Gamma(E), \odot]$. Si l'on pose la convention $\omega_E + (-\omega_E) = -\omega_E$, l'addition ordinaire définit sur ce même ensemble, avec la multiplication ordinaire par les constantes positives, une autre structure de cône convexe abstrait, notée $[\Gamma(E), +]$.

6. Soient alors F et G deux espaces vectoriels topologiques réels, localement convexes séparés, *en dualité*. A toute $f \in \Gamma(F)$ on associe $f^* \in \Gamma(G)$, dite *fonction duale* de $f$,

$$f^*(y) = \sup_{x \in F} [\langle x, y \rangle - f(x)].$$

La fonction duale de $f^*$ est $f$; cela définit une application bijective décroissante de $\Gamma(F)$ sur $\Gamma(G)$. Nous montrons que cette application est *linéaire* entre $[\Gamma(F), \odot]$ et $[\Gamma(G), +]$ (ou entre $[\Gamma(F), +]$ et $[\Gamma(G), \odot]$) : autrement dit, la dualité transmue l'opération $^{(\lambda)}$ en multiplication ordinaire et l'opération $\odot$ en addition. L'ensemble $\Gamma_0(F) \cup \{\omega_F\}$ est un sous-cône convexe de $[\Gamma(F), +]$; son application $^*$ dans le cône convexe ordonné $[\Gamma(G), +]$ est *convexe*. L'ensemble $\Gamma_0(F) \cup \{-\omega_F\}$ est un sous-cône convexe de $[\Gamma(F), \odot]$; son application $^*$ dans $[\Gamma(G), \odot]$ est *concave*.

7. La donnée d'un *préordre* sur F, cohérent avec la structure d'espace vectoriel, équivaut à celle de la partie conique convexe $P \subset F$, ensemble des éléments de F plus grands que o pour ce préordre. Une fonction $f \in \overline{\mathbf{R}}^E$ est *décroissante* pour le préordre en question si et seulement si $f \square \psi_P = f$. Supposons, en outre, que le cône convexe P soit fermé et soit $Q \subset G$ son *cône polaire* : une fonction $f \in \Gamma(F)$ est décroissante si et seulement si sa duale $f^* \in \Gamma(G)$ prend la valeur $+\infty$ hors de Q (*cf.* § 4).

(*) Séance du 5 juin 1963.

([1]) Pour la démonstration de la plupart des résultats énoncés ici et diverses autres propriétés, nous renvoyons à : J.-J. MOREAU, *Inf-convolution*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1963 (multigraphié, VI + 42 pages). Notre opération $\odot$ apparaît, sous un autre formalisme, dans : W. FENCHEL, *Convex cones, sets and functions* (*Lecture Notes*, 1953, Dept. of Math., Princeton University). Par ailleurs, l'inf-convolution de fonctions continues sur le coin positif de $\mathbf{R}^n$ (ou plutôt, en passant aux fonctions opposées, la « maximum convolution ») est envisagée dans : R. E. BELLMAN et W. KARUSH, *On a new functional transform in analysis; the maximum transform* (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 67, 1961, p. 501-503), suivi de plusieurs publications de ces derniers auteurs; la plus récente est, sans doute : *On the maximum transform* (*J. Math. Anal. Appl.*, 6, 1963, p. 67-74). Ces divers travaux ne concernant que des fonctions à valeurs finies, sur des espaces de dimension finie, les questions de domaine de définition et de continuité ne s'y présentent pas de la même manière qu'ici. La considération de valeurs infinies est, dans notre perspective, indispensable.

(*Faculté des Sciences, Montpellier.*)