HAL open science

Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien

Jean Jacques Moreau

To cite this version:

Jean Jacques Moreau. Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1962, 255, pp.2897-2899. hal-01867195

HAL Id: hal-01867195

https://hal.science/hal-01867195v1

Submitted on 4 Sep 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ANALYSE FONCTIONNELLE. — *Fonctions convexes duales et points proximaux dans un espace hilbertien.* Note (*) de M. **Jean-Jacques Moreau**, présentée par M. Jean Leray.

f étant une fonction numérique (finie ou non) convexe et semi-continue inférieurement sur un espace hilbertien réel H, pour tout $z \in H$, la fonction

$$u \to \| u - z \|^2 + 2f(u)$$

atteint un minimum strict en un point noté $\text{prox}_f z$. Soit $g(y) = \sup_{u \in H} [(u \mid y) - f(u)]$ *la fonction convexe duale* de f. On montre que $z = \text{prox}_f z + \text{prox}_g z$ et l'on donne une caractérisation simple de cette décomposition.

Soit H un espace hilbertien réel; soit f une fonction définie sur H, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, *convexe et semi-continue inférieurement* (cette semi-continuité signifiant que, pour tout k, l'ensemble *convexe* $\{x \in H / f(x) \leqq k\}$ est fermé, il est indifférent de considérer sur H la topologie forte ou la topologie faible). On suppose que f n'est pas partout égale à $+\infty$.

Quel que soit $z \in H$, la fonction $\Phi(u) = \| u - z \|^2 + 2f(u)$ atteint un minimum strict en un point que nous noterons $\text{prox}_f z$: *point proximal* de z relativement à f. L'existence de ce minimum (strict car Φ est strictement convexe) résulte de la possibilité de minorer f par une fonction affine continue (1) : cela permet de construire une boule fermée B et un point $b \in B$ tels que $\Phi(u) > \Phi(b)$ pour tout $u \notin B$. Comme B est faiblement compacte et Φ semi-continue inférieurement, cette fonction possède un minimum sur B, qui est aussi son minimum sur H.

Exemple. — Soit P un ensemble convexe fermé non vide dans H; la fonction

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in P, \\ +\infty & \text{si } x \notin P \end{cases}$$

ou *fonction indicatrice* de l'ensemble P, est convexe et semi-continue inférieurement. Alors, pour tout $z \in H$, le point $\text{prox}_f z$ n'est autre que la *projection* de z sur le convexe fermé P.

Soit g la *fonction convexe duale* (2) de f :

$$g(y) = \sup_{u \in H} [(u \mid y) - f(u)],$$

g est, comme f, une fonction convexe semi-continue inférieurement de H (fort ou faible) dans $]-\infty, +\infty]$. *Il y a d'ailleurs réciprocité entre f et g* (1).

Proposition. — *Si f et g sont deux fonctions convexes duales sur l'espace hilbertien réel* H *et x, y, z trois éléments de* H, *les propriétés* (I) *et* (II) *suivantes sont équivalentes :*

$$\text{(I)} \qquad z = x + y, \qquad f(x) + g(y) = (x \mid y);$$

$$\text{(II)} \qquad x = \text{prox}_f x, \qquad y = \text{prox}_g z.$$

Démonstration. — 1° Soient x, y, z possédant la propriété (I) [cela implique $f(x) \neq +\infty$]. Il résulte de la définition de g que, pour tout $u \in H$:

$$g(y) \geqq (u|y) - f(u),$$

donc

$$(x|y) - f(x) \geqq (u|y) - f(u).$$

On écrit alors

$$\begin{aligned}\Phi(u) - \Phi(x) &= \|u - x - y\|^2 + 2f(u) - \|y\|^2 - 2f(x)\\ &\geqq \|u - x - y\|^2 - \|y\|^2 + 2(u|y) - 2(x|y),\end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|x - u\|^2$, qui est $\geqq 0$; donc $x = \text{prox}_f z$. Raisonnement semblable pour y, lequel est donc égal à $\text{prox}_g z$.

2° Réciproquement, soit $z \in H$, $x = \text{prox}_f z$ [cela implique $f(x) \neq +\infty$] et $y' = z - x$. Pour tout $u \in H$ et tout $\lambda \in]0, 1[$, la convexité de f donne

$$f[\lambda u + (1 - \lambda)x] \leqq \lambda f(u) + (1 - \lambda) f(x)$$

et, comme la fonction Φ est minimum au point x :

$$\|\lambda u + (1 - \lambda)x - z\|^2 + 2f[\lambda u + (1 - \lambda)x] \geqq \|x - z\|^2 + 2f(x).$$

En rapprochant ces deux inégalités, on obtient

$$\frac{1}{2}\|y'\|^2 - \frac{1}{2}\|\lambda(u - x) - y'\|^2 + f(x) \leqq \lambda f(u) + (1 - \lambda) f(x)$$

ou, toutes réductions faites :

$$(u|y') - f(u) - (x|y') + f(x) \leqq \frac{1}{2}\lambda\|u - x\|^2.$$

Comme λ peut être arbitrairement voisin de zéro, il en résulte

$$(x|y') - f(x) = \sup_{u \in H}[(u|y') - f(u)] = g(y').$$

Donc x, y' et z possèdent la propriété (I); le 1° implique alors que $y' = \text{prox}_g z$, ce qui achève la démonstration.

Exemple. — Soit P un cône convexe fermé (de sommet O), f sa fonction indicatrice; la fonction duale de f est la fonction indicatrice g du cône convexe fermé Q, *cône polaire* de P. La propriété (I) implique que $f(x)$ et $g(y)$ sont finis, donc que $x \in P$, $y \in Q$ et, par suite, que $(x|y) = 0$. On retrouve ainsi un résultat publié précédemment [3] :

Tout $z \in H$ se décompose de manière unique en somme de deux termes $x \in P$ et $y \in Q$ *orthogonaux*; x et y sont respectivement, les projections de z sur P et Q.

(*) Séance du 19 novembre 1962.

(1) Pour la démonstration de ces points, *voir* J.-J. Moreau, *Fonctions convexes en dualité*, Faculté des Sciences de Montpellier, Séminaires de Mathématiques, 1962 (multigraphié).

(2) L'idée d'associer de cette manière deux fonctions convexes se trouve déjà, pour $H=R$, dans : S. MANDELBROJT, *Comptes rendus*, 209, 1939, p. 977 et pour $H = R^n$ dans : W. FENCHEL, *Canad. J. Math.*, 1, 1949, p. 73-77. Dans la théorie de la *programmation non linéaire*, on considère, sur R^n également, des *fonctions concaves conjuguées*, de définition analogue (*cf.* C. BERGE et A. GHOUILA-HOURI, *Programmes, jeux et réseaux de transport*, Dunod, Paris, 1962, chap. 5).

(3) *Cf.* J.-J. MOREAU, *Comptes rendus*, 255, 1962, p. 238, où l'on trouvera un exemple fonctionnel emprunté à l'hydrodynamique. La présente théorie est également destinée à la résolution de problèmes de mécanique des milieux continus.

(*Faculté des Sciences, Montpellier.*)