



**HAL**  
open science

# Recalage d'Images Radiographiques de Véhicules : Un Problème d'Optimisation Unidimensionnel

Abraham Marciano, Laurent D. Cohen

► **To cite this version:**

Abraham Marciano, Laurent D. Cohen. Recalage d'Images Radiographiques de Véhicules : Un Problème d'Optimisation Unidimensionnel. ORASIS 2017, GREYC, Jun 2017, Colleville-sur-Mer, France. hal-01866714

**HAL Id: hal-01866714**

**<https://hal.science/hal-01866714>**

Submitted on 3 Sep 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Recalage d'Images Radiographiques de Véhicules : Un Problème d'Optimisation Unidimensionnel

A. Marciano<sup>1,2</sup> L.D Cohen<sup>1</sup> N. Gadi<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université Paris-Dauphine, PSL Research University, CNRS, UMR [7534], CEREMADE, 75016 PARIS, FRANCE

<sup>2</sup>Smiths Detection, 94405 VITRY, FRANCE

Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, 75016 Paris, France  
marciano@ceremade.dauphine.fr

## Résumé

*Largement employées dans le civil, les techniques de recalage attirent aussi l'attention du secteur de la sécurité en vue d'automatiser la détection de menaces spécifiques. Cet article présente une brève revue des méthodes mathématiques relatives au recalage d'image, avec un accent sur les approches variationnelles. Dans un second temps, une problématique particulière est introduite : l'alignement optimal d'images radiographiques d'un véhicule scanné et d'une référence du même modèle. Lors du processus d'acquisition par un système dédié, des fluctuations de vitesse du véhicule sont susceptibles d'entraîner des déformations non rigides au niveau de l'image résultante. Ce problème est résolu simplement via la composition d'un recalage rigide suivi d'un schéma d'optimisation en une dimension. Des méthodes de recherche linéaire et une approche à multi-niveaux sont utilisées pour assurer une convergence rapide vers un minimum global.*

## Mots Clef

Recalage d'images, approche variationnelle, optimisation unidimensionnelle.

## Abstract

*Over the years, image registration has been largely employed in medical applications, robotics and geophysics. More recently, it has increasingly drawn attention of security and defense industries, particularly aiming at threat detection automation. This paper first introduces a short overview of mathematical methods for image registration, with a focus on variational approaches. In a second part, a specific registration task is presented: the optimal alignment between X-ray scans of an inspected vehicle and an empty reference of the same car model. Indeed, while being scanned by dedicated imaging systems, the car speed is not necessarily constant which may entail non-rigid deformations in the resulting image. The paper simply addresses this issue by applying a rigid registration before using the variational framework solved in one dimension. For convergence and speed purposes, line-search techniques and a multiscale approach are used.*

## Keywords

Image registration, variational approach, one-dimensional optimization

## 1 Introduction

En raison du contexte géopolitique actuel, la sécurité s'est imposée comme une priorité de premier plan pour les agences et gouvernements de la planète. Parallèlement, une quantité grandissante de données doit être traitée dans des temps de plus en plus limités, rendant inévitable le recours à des processus d'automatisation. L'industrie de la vision par ordinateur est significativement impactée par cet aspect et aborde souvent de nouvelles problématiques via des méthodes connues telles que le recalage d'image. Comme défini par Modersitzki et al. [9], [10], [15], il s'agit de trouver une transformation « plausible » appliquée sur une image  $T$  afin d'obtenir un alignement optimal avec une référence  $R$ .

Cet article présente la résolution d'une problématique précise : aligner des images radiographiques (vue de haut) d'une voiture inspectée et d'une référence vide du même modèle. Le but étant de détecter automatiquement la présence d'objets ajoutés et d'identifier des menaces ou autres marchandises de contrebande. Pour un système d'imagerie radioscopique tel que le HCVL de Smiths Detection, le véhicule est remorqué par un mécanisme poussant sur ses roues arrière, susceptible d'occasionner des fluctuations de vitesse. Ce défaut engendre des déformations non rigides au niveau de l'image obtenue (**Fig. 1.**) du fait d'un éventuel sur-échantillonnage (ralentissement) ou sous-échantillonnage (accélération). La littérature scientifique traitant de ce problème spécifique étant quasi-inexistante, nous nous appuyerons essentiellement sur des méthodes développées en imagerie médicale.

Déformer des objets potentiellement suspects lors du processus de recalage n'est pas idéal, c'est pourquoi nous considérerons le scan à analyser comme l'image statique  $R$  et la référence associée comme l'image en mouvement  $T$ .

Cet article donne tout d'abord un aperçu du problème général de recalage non-rigide formulé dans le cadre des

méthodes variationnelles. Les approches paramétriques et non-paramétriques sont décrites ainsi que leur résolution numérique. Nous montrerons aussi que l'application de ces techniques à notre problématique de recalage ne permet pas d'obtenir de résultats satisfaisants en termes d'alignement et de conservation de la rigidité des structures.

Enfin, nous montrerons que la composition d'une transformation rigide suivie d'un processus de minimisation unidimensionnel appliquée à  $T$  donne une solution valide. Une formulation explicite du problème ainsi que sa méthode de résolution sont détaillés.

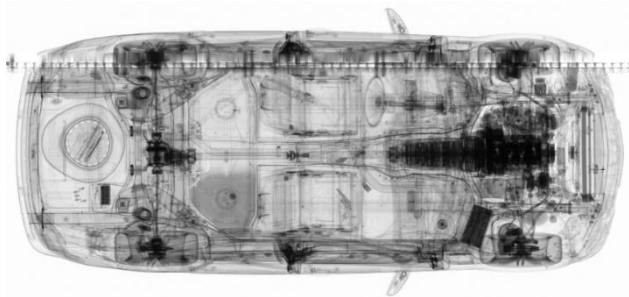


Fig. 1. Vue de haut d'un véhicule scanné. La roue de secours montre une déformation non-rigide due au ralentissement de la voiture durant l'acquisition.

## 2 Description du Problème et Rappel des Méthodes Non-Linéaires

### 2.1 Description du Problème

Considérons  $R$  et  $T$  respectivement l'image statique et en mouvement, le but est de trouver une transformation sur  $T$  de telle sorte que l'image déformée corresponde le mieux possible à  $R$  ([9], [10], [15]). Généralement,  $R$  et  $T$  sont des images de dimension  $d$ ,  $R, T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Omega \in ]0,1[^d$ . La transformation est exprimée par  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ , le champ de déplacement appliqué à chaque position  $x \in \Omega$  dans  $T$ . Ainsi, pour un  $x \in \Omega$  donné,  $T(x)$  correspond à la valeur de niveau de gris de  $T$  en  $x$  et l'on cherche à trouver  $u$  tel que  $T(x + u)$  soit similaire à  $R(x)$  (voir [8], [7] par exemple). Nos images étant en deux dimensions, nous prendrons  $d = 2$ .

Le problème de recalage non-linéaire est formulé comme suit [2] : trouver une transformation  $u$  minimisant l'énergie :

$$J(u) = D(T(u), R) + \alpha S(u) \quad (1)$$

Où  $T(u)$  représente l'image transformée ayant pour valeur  $T(x + u)$  en  $x$ , et  $D$  représente le terme de fidélité aux données, quantifiant la similarité entre  $T(u)$  et  $R$  (force externe). La minimisation de  $D$  étant un problème

typiquement mal posé, un terme de régularisation  $S$  est introduit. Celui-ci se rapporte à l'aspect "plausible" de la transformation comme défini dans l'introduction. Le paramètre de lissage  $\alpha$  contrôle l'intensité de la régularisation du champ de déplacement  $u$ , assurant le maintien de sa régularité durant le processus de déformation (force interne) ([10], [15], [8], [7]). De nombreuses méthodes ont été développées pour déterminer automatiquement  $\alpha$  (voir [10], [13]), mais dans la plupart des cas, le paramètre dépend de l'application considérée et de l'évaluation de l'opérateur.

Différentes distances/mesures de similarité sont employées: la plus populaire est la somme des distances aux carrés (*sum of squared differences* - SSD) alors que la corrélation croisée normalisée (*normalized-cross-correlation* - NCC) est aussi largement utilisée pour des problèmes de recalage monomodal. L'Information Mutuelle (*mutual information* - MI) s'applique surtout au recalage d'images obtenues par des modalités d'acquisition différentes (par exemple recalage CT-IRM) [15], [16]. Des mesures plus sophistiquées ont été développées lors de la dernière décennie, à l'image des Champs de Gradients Normalisés (*normalized gradient fields* - NGF) (voir [16], [11]). Dans cet article, nous utiliserons la mesure SSD pour sa simplicité et son efficacité à résoudre notre problème monomodal.

De même, différents types de termes régularisants sont mentionnés dans l'état de l'art. La prochaine sous-partie donne plus de précisions sur les différentes méthodes de lissage.

Il est important de noter que la contrainte principale dans la sélection des mesures de similarité ou des termes régularisants est l'existence de la dérivée de Gâteaux [8].

### 2.2 Rappel des Méthodes Non-Linéaires

Le recalage basé sur des points de repère (*landmarks*) est très utilisé, notamment pour des applications médicales ([5]). Le champ de déplacement est d'abord calculé sur des *landmarks*, puis une interpolation TPS (*thin-plate-spline*) permet d'obtenir une estimation dense de  $u$  (cf. [15]) pour le cas non linéaire.

Cependant, il n'est pas simple de déterminer ces points caractéristiques de façon automatique (voir [5] par exemple). Dans cet article, l'accent sera surtout mis sur des méthodes basées sur l'intensité de l'image ; celles-ci se scindent en deux catégories:

- Les méthodes dites paramétriques: la transformation est restreinte à un modèle paramétrique connu. Le processus d'optimisation cherche à identifier les paramètres optimaux de  $u$ . Les approches non-linéaires font appel à une combinaison linéaire d'un ensemble de

fonctions de base (B-spline, *free-form deformations* – FFD méthodes). Cf. [15], [16] pour une revue détaillée des méthodes PIR (*Parametric Image Registration*). Le plus souvent, ces techniques intègrent implicitement un terme régularisant, notamment pour des espaces de transformation de petite dimension ( $S(\mathbf{u}) = 0$ ). Cependant, un terme de lissage de Tychonov peut aussi être utilisé [15].

- Les méthodes non-paramétriques: L'optimisation s'effectue sur le champ de déplacement  $\mathbf{u}$  lui-même rendant l'intervention du terme de lissage  $S(\mathbf{u})$  indispensable. Les modèles basés sur des normes  $L2$  tels que le lissage fluide [4], élastique [2] ou par courbure [7], sont les plus répandus (cf. [15] ou [16] pour une revue complète). Pour les méthodes NPIR (*Non-Parametric Image Registration*) la discrétisation dépend du terme régularisant utilisé. Différents schémas peuvent être adoptés tels que le type nodal, centré ou encore le modèle décalé. Voir [15], [16] pour d'avantage de détails sur les problématiques de discrétisation et d'interpolation.

La méthode des démons élaborée par Thirion [19] dérive des techniques de flux optique avec un terme régularisant s'apparentant au modèle de diffusion ([7], [9]). Cette méthode est souvent employée pour des problèmes non-linéaires à dimension élevée avec un coût computationnel important [7].

Les modèles assurant la conservation de la rigidité ou des volumes ont aussi largement prouvé leur efficacité. Ils dépassent toutefois la portée de cet article. Voir [12], [14] ou [18] pour davantage de précisions.

### 2.3 Résolution Numérique

Modersitzki ([15], [16]) propose un schéma d'optimisation numérique pour résoudre (1). Les méthodes NPIR comme PIR sont résolues via une approximation de la méthode de descente de Gauss-Newton ([17]). Le gradient  $\nabla J(\mathbf{u})$  et l'Hessienne  $H(\mathbf{u})$  de  $J(\mathbf{u})$  sont calculés (l'Hessienne est souvent approximée). La direction de descente  $dd = H(\mathbf{u})^{-1}\nabla J(\mathbf{u})$  est ainsi calculée à chaque itération. Par ailleurs, la technique de recherche linéaire d'Armijo est employée afin d'obtenir un pas optimal pour chaque actualisation de  $\mathbf{u}$  ([15], [17]). En général, la minimisation est arrêtée dès que la variation de la transformation  $\|\nabla \mathbf{u}\|_2$  tombe en dessous d'un seuil de tolérance prédéfini  $\epsilon$ . Voir [15] pour plus de détails sur les critères d'arrêt.

Aussi, une stratégie à multi-niveaux est adoptée, permettant d'obtenir une fonction de coût plus lisse à des niveaux grossiers, donc plus simple à minimiser. Le champ de déplacement qui en résulte constitue une bonne initialisation pour la résolution supérieure, palliant ainsi les problèmes de convergence en minima locaux ([10], [15]).

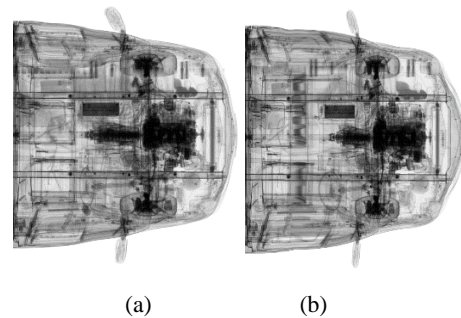
Des schémas d'optimisation alternatifs ont aussi été proposés pour des cas couteux en termes de calcul. Le *l*-BFGS approche l'inverse de l'Hessienne via une estimation initiale  $H_0$  et une suite composée de directions de descente et de gradients [17]. Les algorithmes à régions de confiance sont aussi populaires de par leur convergence quadratique [17]. Cf. [15] pour plus de détails et [3] pour une étude plus élaborée des méthodes variationnelles et leur résolution numérique.

### 2.4 Tests sur nos Images

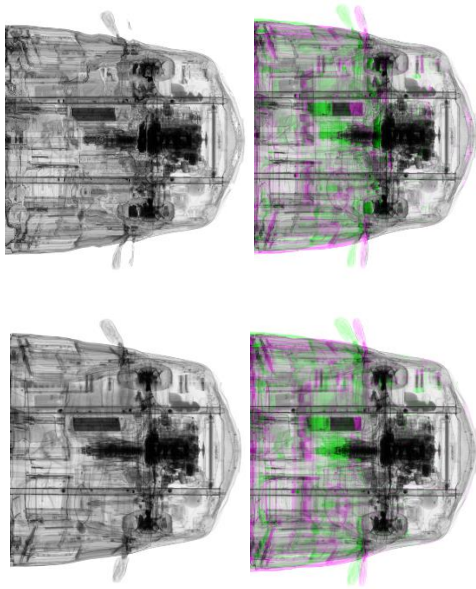
Cet exemple se focalise sur l'analyse de la partie avant d'un véhicule (**Fig. 2.** (a)). Une image radioscopique de référence du même modèle est utilisée pour le recalage (provenant d'une autre voiture, **Fig. 2.** (b)). Des différences majeures sont aisément identifiables au niveau des rétroviseurs, les roues avant, la boîte à vitesse, le volant, différents réservoirs ainsi que la batterie. La **Fig. 2.** Représente les images  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$  après une estimation de pose (recalage rigide, cf. paragraphe 3.4 pour plus de précisions).

Deux méthodes sont testées: le recalage paramétrique B-spline ainsi que la méthode des démons de Thirion.

La **Fig. 3.** Montre des résultats obtenus par la méthode des démons avec deux paramètres de lissage différents et une approche multi-niveaux. Notons que les couleurs vertes et roses décrivent respectivement les différences émanant de l'image en mouvement  $\mathbf{T}$  et de l'image statique à inspecter  $\mathbf{R}$ .

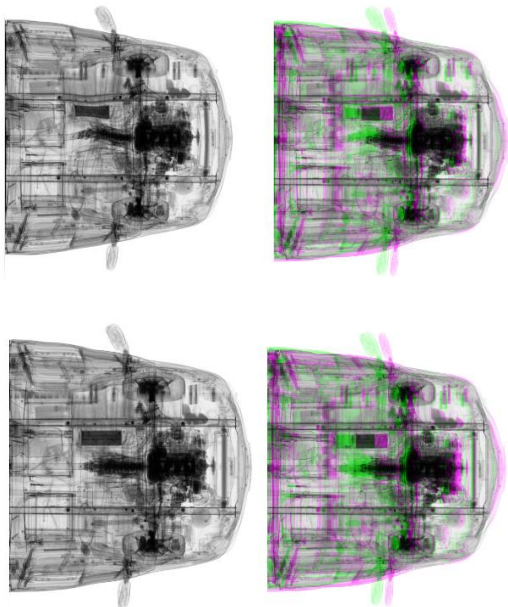


**Fig. 2.** (a) Scan d'avant de voiture  $\mathbf{T}$  ; (b) Scan à analyser  $\mathbf{R}$  (après estimation de pose)



**Fig. 3.** Résultats de recalage par méthode des démons ( $T_{final}$  résultant et la superposition de  $T_{final}$  et  $R$ ) avec un paramètre de lissage de 0.5 (haut) et 2 (bas)

Le recalage B-spline est aussi testé avec une stratégie multi-échelle et une pénalité de lissage paramétrée à 0.01 et 0.1 (**Fig. 4.**).



**Fig. 4.** Recalage B-spline ( $T_{final}$  résultant et la superposition de  $T_{final}$  et  $R$ ) avec un paramètre de lissage de 0.01 (haut) et 0.1 (bas)

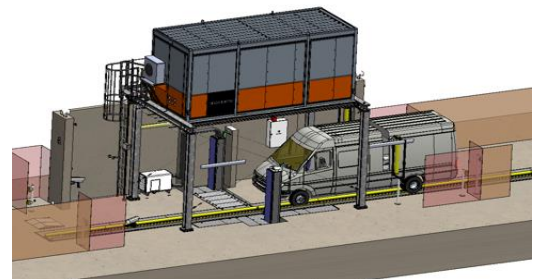
Au-delà des considérations de vitesse de calcul, ces méthodes standard ne permettent pas la réalisation d'un recalage correct pour notre cas de figure. La **Fig. 10.** montre les distances SSD obtenues après recalage pour

chaque méthode. La rigidité intrinsèque au véhicule ainsi que le mécanisme à l'origine de ces déformations doivent être pris en compte. L'idée est de simplifier le problème d'optimisation en passant d'un schéma à deux dimensions à un problème unidimensionnel. Plus spécifiquement, le champ de déplacement doit être contraint à la direction longitudinale et rester uniforme selon la largeur de la voiture. La prochaine partie précise les motivations et les aspects numériques de notre méthode.

### 3 Recalage Unidimensionnel

#### 3.1 Introduction au Problème de Recalage

Dans les systèmes d'imagerie radioscopique HCVL, tout véhicule inspecté est remorqué par un convoyeur via des cylindres exerçant une pression sur ses roues arrière (**Fig. 5.**). La vitesse du convoyeur est sensée rester constante à 12 m/min. Cependant, la voiture peut se désolidariser de l'équipement de remorquage du fait de chocs entre les roues et les cylindres. La vitesse du véhicule peut alors être sujette à des variations: un ralentissement (resp. accélération) provoquerait un sur-échantillonnage (resp. sous-échantillonnage) de zones spécifiques (**Fig. 1.**).



(a)



(b)

**Fig. 5.** (a) Système radiographique HCVL; (b) les cylindres du convoyeur appliquant une pression sur les roues arrière du véhicule (en jaune)

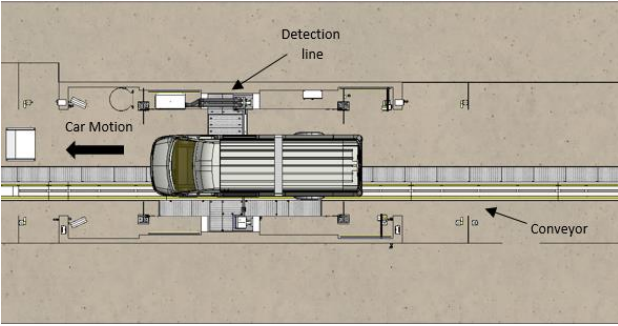
Considérons deux images radiographiques du même modèle de véhicule (pas nécessairement le même



véhicule) : on assume qu'une estimation de pose a déjà été effectuée de telle sorte que les deux images ont été recalées linéairement par une transformation rigide.

Nous formulons deux hypothèses fortes:

- **Hypothèse 1:** Nous supposons que le champ de déplacement est uniforme le long de chaque colonne. De fait, chaque voiture est scannée avec un taux d'échantillonnage constant en franchissant la ligne de balayage. Chaque colonne correspond ainsi à une coupe latérale du scan du véhicule à un temps donné (**Fig. 6.**). Ainsi, toute perturbation de la vitesse impacterait de façon uniforme chaque colonne.
- **Hypothèse 2:** La direction de la déformation est perpendiculaire à la ligne de balayage (la composante verticale de  $\mathbf{u}$  est nulle). Cette supposition est plausible dans la mesure où le véhicule peut difficilement dévier du convoyeur pendant le processus de scan (**Fig. 6.**).



**Fig. 6.** Description du système HCVL (vue de haut)

### 3.2 La Méthode

Formulons le problème d'optimisation unidimensionnel. Avec deux images  $\mathbf{R}$  et  $\mathbf{T}$ , l'estimation de pose est réalisée en appliquant une transformation rigide à  $\mathbf{T}$ . Pour simplifier les notations, nous continuerons à utiliser  $\mathbf{T}$  pour désigner l'image en mouvement après cette déformation de prétraitement.

On définit  $x$  et  $y$  comme les coordonnées horizontale et verticale de  $\mathbf{x} \in \Omega$ :

$$\mathbf{x} = (x, y) \quad (2)$$

De façon similaire, le champ de déplacement:

$$\mathbf{u} = (u_x(x, y), u_y(x, y)) \quad (3)$$

L'hypothèse 1 implique:

$$u_x(x, y) = u_x(x) \quad (4)$$

Et l'hypothèse 2 donne:

$$u_y(x, y) = 0 \quad (5)$$

Enfin, la combinaison de (5) et (4) donne:

$$\mathbf{u} = (u_x(x), 0). \quad (6)$$

Avec une distance SSD et un terme régularisant de la forme  $S(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2$ , (1) devient:

$$\text{Trouver } \mathbf{u} \text{ minimisant} \\ J(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{T}(\mathbf{u}) - \mathbf{R}\|_2^2 + \frac{1}{2} \alpha \|\nabla \mathbf{u}\|_2^2 \quad (7)$$

Sur la base de (6), (7) devient un problème d'optimisation en une dimension pouvant se résoudre via des méthodes de descente relativement simples.

### 3.3 Résolution numérique

Pour un indice de de colonne  $x$  donné et pour tout indice de ligne  $y$ , (7) équivaut à:

trouver  $u_x(x)$  minimisant

$$J(u_x(x)) = \frac{1}{2} \|\mathbf{T}(u_x(x)) - \mathbf{R}\|_2^2 + \frac{1}{2} \alpha \left\| \frac{\partial u_x(x)}{\partial x} \right\|_2^2 \quad (8)$$

Une méthode de descente du premier ordre serait pertinente pour ce problème unidimensionnel. Nous faisons appel à la méthode de descente du gradient en combinaison avec la technique de recherche linéaire d'Armijo [16]. Nous faisons évoluer l'équation suivante avec des conditions de Dirichlet aux bords:

$$\frac{\partial u_x(x)}{\partial t} = -\nabla J(u_x(x)), x \in \Omega \setminus \partial \Omega$$

$$\text{avec } u_x(x) = 0, x \in \partial \Omega \quad (8)$$

Le gradient de  $J(u_x(x))$  est calculé à partir de (8):

$$\nabla J(u_x(x)) = \frac{\partial \mathbf{T}(x+u_x(x))}{\partial u_x} (\mathbf{T}(x+u_x(x)) - \mathbf{R}(x)) - \alpha \frac{\partial^2 u_x(x)}{\partial x^2} \quad (9)$$

On note  $X = x + u_x(x)$  de telle sorte que  $\frac{\partial \mathbf{T}(x+u_x(x))}{\partial u_x} = \frac{\partial \mathbf{T}(x+u_x(x))}{\partial X}$ , correspondant au gradient de  $\mathbf{T}$  en  $x + u_x(x)$ .

On obtient l'expression finale:

$$\nabla J(u_x(x)) = \frac{\partial \mathbf{T}(x+u_x(x))}{\partial X} (\mathbf{T}(x+u_x(x)) - \mathbf{R}(x)) - \alpha \frac{\partial^2 u_x(x)}{\partial x^2} \quad (10)$$

Une approche multi-échelle est employée pour accélérer l'optimisation et éviter une convergence en un minimum local. Ainsi, le déplacement  $u_x^{(p)}$  obtenu à l'échelle  $p$  offre une initialisation pertinente pour l'estimation du champ  $u_x^{(p-1)}$  à l'échelle supérieure  $p - 1$ . Le nombre de niveaux est fixé à  $l = 4$ .

De façon empirique, un paramètre de lissage défini à  $\alpha = 0.5$  pour toutes les résolutions donne des résultats corrects et stables. Le critère d'arrêt est analogue à celui présenté dans le paragraphe 2.3 avec un seuil choisi  $\epsilon = 1$ .

Finalement, une estimation de  $T$  transformée via un champ de déplacement optimal  $u^*$  est calculée en utilisant une interpolation linéaire ou cubique (les deux méthodes donnent des résultats similaires dans notre cas).

### 3.3 Résultats Expérimentaux

Notre algorithme est testé sur l'exemple de la section 2.4. La Fig 7. montre  $T$  et  $R$  avant recalage rigide. Dans un premier temps, une transformation rigide est calculée en utilisant les points caractéristiques SURF [1] et en filtrant leurs mises en correspondances via RANSAC [6]. La transformation appliquée à  $T$  donne une estimation de la pose entre les deux images. Cf. Fig. 8. pour une description visuelle de l'alignement avant et après ce prétraitement. Celui-ci est souvent indispensable pour rectifier de légères différences de positionnement du véhicule ou de géométrie entre des systèmes d'imagerie radioscopique distincts.

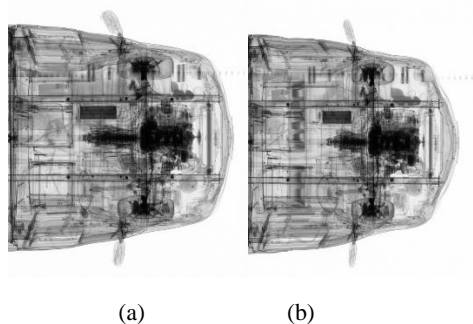


Fig. 7. ((a) Scan d'avant de voiture  $T$ ; (b) Scan à analyser  $R$  (avant estimation de pose)

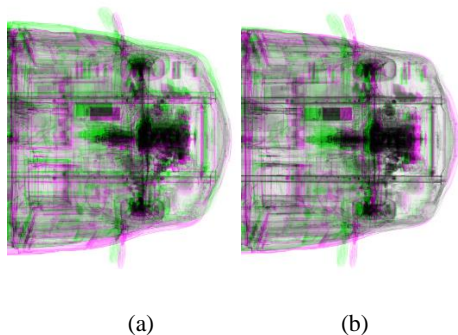


Fig. 8. (a) Superposition des deux images avant estimation de pose; (b) Superposition après recalage rigide

Notre schéma de minimisation unidimensionnelle multi-niveaux donne  $T_{final}$  suivante avec le champ de déplacement constant par colonne correspondant  $u^*$  (Fig. 9.).

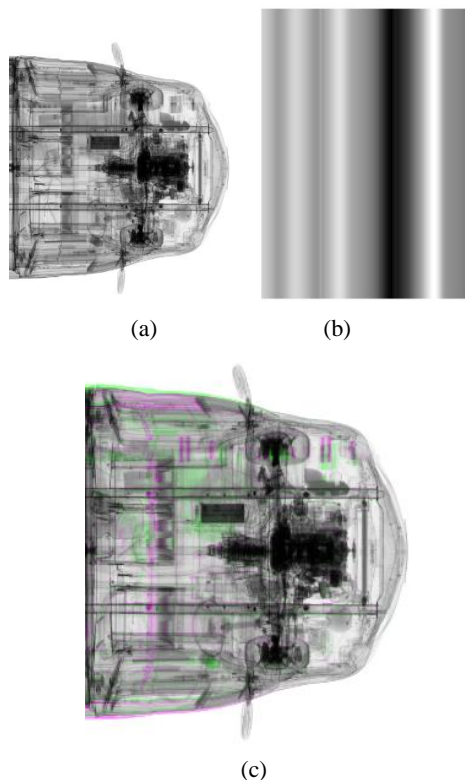


Fig. 9. (a) Image résultante; (b) Champ de déplacement; (c) superposition de  $R$  et  $T_{final}$

En atteignant un minimum global de la fonction de coût  $J$ , le recalage montre que la plupart des différences initiales disparaissent: les rétroviseurs, la batterie ou le volant s'alignent de façon quasi-parfaite (Fig. 9.). Nous obtenons aussi la plus petite distance SSD en comparaison avec les différentes méthodes testées (Fig. 10.).

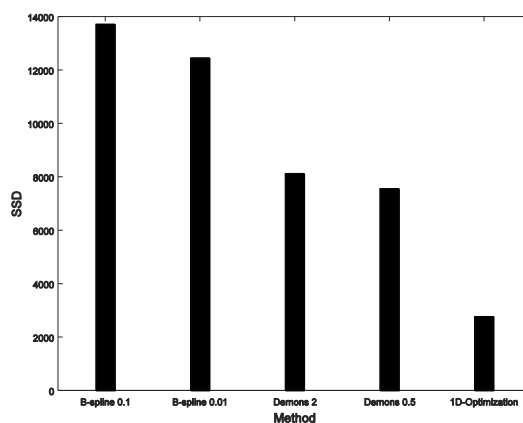


Fig. 10. Les distances SSD obtenues pour chaque méthode (avec le paramètre de lissage correspondant)

## 4 Conclusion

Cet article aborde le problème de recalage d'images radioscopiques (vues de haut) de différents véhicules de même modèle. Plus particulièrement, il s'agit de traiter les déformations non linéaires induites par d'éventuelles perturbations de la vitesse du véhicule pendant la phase de scan.

Une solution simple et intuitive est décrite : dans une première phase, une estimation de la pose entre les deux scans est réalisée. Puis, supposant que le champ de déplacement est constant par colonne et parallèle au mouvement du véhicule, un système d'optimisation unidimensionnel est formulé. Sa résolution est effectuée via la méthode du gradient en utilisant conjointement la méthode de recherche linéaire d'Armijo et une approche multi-niveaux.

Les résultats visuels et numériques présentés montrent à la fois la nécessité ainsi que les performances de notre méthode pour pallier le problème décrit.

## Bibliographie

- [1] Bay, H., Tuytelaars, T., & Van Gool, L. (2006, May). Surf: Speeded up robust features. In *European conference on computer vision* (pp. 404-417). Springer Berlin Heidelberg.
- [2] Broit, C. (1981). Optimal registration of deformed images
- [3] Chumchob, N., & Chen, K. (2011). A robust multigrid approach for variational image registration models. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 236(5), 653-674.
- [4] Christensen, G. E. (1994). Deformable shape models for anatomy (Doctoral dissertation, Washington University).
- [5] Crum, W. R., Hartkens, T., & Hill, D. L. G. (2014). Non-rigid image registration: theory and practice. *The British Journal of Radiology*.
- [6] Fischler, M. A., & Bolles, R. C. (1981). Random sample consensus: a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 24(6), 381-395.
- [7] Fischer, B., & Modersitzki, J. (2004). A unified approach to fast image registration and a new curvature based registration technique. *Linear Algebra and its applications*, 380, 107-124.
- [8] Fischer, B., & Modersitzki, J. (2003). Fast image registration: a variational approach. In *Proceedings of the International Conference on Numerical Analysis & Computational Mathematics*, G. Psihoyios (ed.), Wiley (pp. 69-74).
- [9] Haber, E., Heldmann, S., & Modersitzki, J. (2009). A computational framework for image-based constrained registration. *Linear Algebra and its Applications*, 431(3), 459-470.
- [10] Haber, E., & Modersitzki, J. (2006). A multilevel method for image registration. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 27(5), 1594-1607.
- [11] Haber, E., & Modersitzki, J. (2006, October). Intensity gradient based registration and fusion of multi-modal images. In *International Conference on Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention* (pp. 726-733). Springer Berlin Heidelberg.
- [12] Haber, E., & Modersitzki, J. (2004). Numerical methods for volume preserving image registration. *Inverse problems*, 20(5), 1621.
- [13] Haber, E., Ascher, U. M., & Oldenburg, D. (2000). On optimization techniques for solving nonlinear inverse problems. *Inverse problems*, 16(5), 1263.
- [14] Modersitzki, J. (2008). FLIRT with rigidity—image registration with a local non-rigidity penalty. *International Journal of Computer Vision*, 76(2), 153-163.
- [15] Modersitzki, J. (2009). FAIR: flexible algorithms for image registration (Vol. 6). SIAM.
- [16] Modersitzki, J. (2004). Numerical methods for image registration. Oxford University Press on Demand.
- [17] Nocedal, J., & Wright, S. (2006). Numerical optimization. Springer Science & Business Media.
- [18] Staring, M., Klein, S., & Pluim, J. P. (2006, March). Nonrigid registration using a rigidity constraint. In *Medical Imaging* (pp. 614413-614413). International Society for Optics and Photonics.
- [19] Thirion, J. P. (1998). Image matching as a diffusion process: an analogy with Maxwell's demons. *Medical image analysis*, 2(3), 243-260.