



HAL
open science

Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences, 1961, 252, pp.2810-2812. hal-01865239

HAL Id: hal-01865239

<https://hal.science/hal-01865239>

Submitted on 31 Aug 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

MÉCANIQUE DES FLUIDES. — *Constantes d'un îlot tourbillonnaire en fluide parfait barotrope.* Note (*) de M. JEAN-JACQUES MOREAU, présentée par M. Joseph Pérès.

Soit \vec{u} le champ des vitesses d'un fluide parfait barotrope. On appelle îlot tourbillonnaire une portion de fluide sur la frontière de laquelle $\text{rot } \vec{u}$ est tangentiel ou nul. On montre que l'intégrale de $\vec{u} \cdot \text{rot } \vec{u}$ sur un tel îlot reste constante au cours du mouvement; à cette intégrale s'en rattache une autre, ne dépendant que des valeurs de $\text{rot } \vec{u}$ sur l'îlot.

1. *La constante H.* — Soit, dans l'espace à trois dimensions, un fluide non visqueux, soumis à des forces de masse dérivant d'un potentiel et barotrope [relation $\rho = f(p)$ ou, en particulier, ρ constant]; le champ des accélérations $\vec{\gamma}$ est alors le gradient d'une fonction univoque q . Soit \vec{u} le champ des vitesses; on sait que le rotationnel $\vec{\xi} = \text{rot } \vec{u}$ est transporté par le fluide selon la loi de Helmholtz :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \xi_i \right) = \frac{1}{\rho} \xi_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}.$$

Nous appelons *îlot tourbillonnaire* une portion D de fluide ayant pour frontière une surface régulière S en chaque point de laquelle $\vec{\xi}$ est tangentiel ou nul. Cette propriété se conserve au cours du temps. Nous nous limitons ici au cas où D est borné.

Au cours du mouvement de l'îlot tourbillonnaire D, l'intégrale

$$H = \iiint_D \vec{u} \cdot \vec{\xi} \, d\tau$$

conserve une valeur constante ⁽¹⁾.

En effet, le fluide transportant invariante la mesure $\rho \, d\tau$:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \iiint_D \left[\frac{1}{\rho} \xi_k \frac{du_k}{dt} + u_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \xi_i \right) \right] \rho \, d\tau = \iiint_D \left(\xi_k \frac{\partial q}{\partial x_k} + u_i \xi_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) d\tau \\ &= \iiint_D \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\xi_k \left(q + \frac{u_i u_i}{2} \right) \right] d\tau = \iint_S \left(q + \frac{u_i u_i}{2} \right) \xi_k \alpha_k \, d\sigma \end{aligned}$$

et comme $\vec{\xi}$ est, sur S, orthogonal au vecteur unité normal $\vec{\alpha}$, cette dérivée est bien nulle.

2. *Autre expression de H.* — Le champ \vec{u} , sur D, peut être décomposé en la somme d'une vitesse \vec{v} , induite par l'îlot (intégrale de Biot-Savart de $\vec{\xi}$) et d'une vitesse primitive \vec{w} , irrotationnelle.

Si D est simplement connexe (ou peut être rendu tel par adjonction d'une portion irrotationnelle du fluide), \vec{w} est, sur D, le gradient d'une

fonction univoque φ , d'où

$$\iiint_D \vec{\omega} \cdot \vec{\xi} \, d\tau = \iiint_D \frac{\partial}{\partial x_i} (\varphi \xi_i) \, d\tau = \iint_S \varphi \xi_i \alpha_i \, d\sigma = 0.$$

Dans ce cas, H se réduit donc au terme

$$K = \iiint_D \vec{v} \cdot \vec{\xi} \, d\tau = \frac{1}{4\pi} \int_{D \times D} \xi_i^{(6)}(x) \cdot \frac{\overrightarrow{xy}}{|\overrightarrow{xy}|^3} \times \xi_j^{(6)}(y) \, d\tau_x \, d\tau_y$$

qui ne dépend pas de $\vec{\omega}$ mais uniquement des valeurs de $\vec{\xi}$ sur D.

Comme exemple d'îlot multiplement connexe, prenons D *homéomorphe à l'intérieur d'un tore*. Constituons un domaine simplement connexe D' en coupant D par une cloison Σ dont le bord Γ est homéomorphe à un cercle méridien du tore; le bord de D' est constitué de S et des deux faces Σ^+ et Σ^- de la cloison; sur D', le champ $\vec{\omega}$ est le gradient d'une fonction univoque φ . Un point x^- de Σ^- peut être joint dans D' au point x^+ , en regard sur Σ^+ , par une courbe équivalente pour $\vec{\omega}$ à un cycle C, tracé sur S (homéomorphe à un parallèle du tore); on a donc

$$\varphi(x^+) - \varphi(x^-) = \int_C \vec{\omega} \cdot d\vec{x} = \int_C \vec{u} \cdot d\vec{x} \quad \text{soit } a.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \iiint_D \vec{\omega} \cdot \vec{\xi} \, dx &= \iint_{S + \Sigma^+ + \Sigma^-} \varphi \vec{\xi} \cdot \vec{\alpha} \, d\sigma \\ &= \iint_{\Sigma^+} [\varphi(x^+) - \varphi(x^-)] \vec{\xi} \cdot \vec{\alpha} \, d\sigma = ab, \end{aligned}$$

où l'on pose

$$b = \iint_{\Sigma^+} \vec{\xi} \cdot \vec{\alpha} \, d\sigma = \int_{\Gamma} \vec{v} \cdot d\vec{x} = \int_{\Gamma} \vec{u} \cdot d\vec{x}.$$

Au cours du temps, les circulations a et b restent constantes, d'après le théorème de Kelvin; ainsi comme pour D simplement connexe, on obtient la conclusion :

K *reste constant au cours du mouvement de l'îlot D.*

3. *Cas d'une surface de glissement.* — Nous avons développé ailleurs ⁽²⁾ la théorie tourbillonnaire d'une *surface de glissement*, soit G, séparant deux portions F' et F'' d'un même fluide parfait barotrope; la discontinuité de vitesse $\vec{u}' - \vec{u}''$, sur G, est tangentielle. On introduit une couche fluide fictive G* qui évolue sur G avec la vitesse $\vec{u}^* = (\vec{u}' + \vec{u}'')/2$ et les résultats sont particulièrement simples dans le cas usuel où les valeurs $\vec{\xi}'$ et $\vec{\xi}''$ de $\vec{\xi}$, de part et d'autre de G, sont *tangentes à G ou nulles* : les points essentiels de la théorie classique des tourbillons se transposent alors, en remplaçant la mesure vectorielle $\vec{\xi} \, d\tau$ par la mesure vectorielle $d\Xi = \vec{\alpha} \times (\vec{u}' - \vec{u}'') \, d\sigma$ qui se trouve transportée par G* selon la loi de Helmholtz ($\vec{\alpha}$ vecteur unité

normal à G). La présente théorie s'adapte à ce cadre : une portion Δ de la couche G^* sera qualifiée *îlot tourbillonnaire* si, sur la courbe qui constitue son bord, $d\vec{\Xi}$ est tangentiel ou nul, ou encore si ce bord est nul (Δ surface fermée); cette propriété se conserve au cours du temps. L'intégrale du paragraphe 1 est alors à remplacer par

$$H^* = \iint_{\Delta} \vec{u}^* \cdot d\vec{\Xi} = \iint_{\Delta} (\vec{u}', \vec{u}'', \vec{\alpha}) d\sigma$$

et cette quantité conserve une valeur constante. Il faut toutefois noter qu'avec l'hypothèse faite ($\vec{\xi}' \cdot \vec{\alpha} = \vec{\xi}'' \cdot \vec{\alpha} = 0$), H est essentiellement nul si Δ est simplement connexe. Pour Δ multiplement connexe la valeur de H^* se relie aux circulations de \vec{u}' et \vec{u}'' sur des cycles de base, de sorte que l'invariance de H^* est un corollaire du théorème de Kelvin.

(*) Séance du 3 mai 1961.

(¹) O. BJØRGUM (*On Beltrami vector fields and flows*, Univ. Bergen Arbok. Naturvit. Rekke, 1951, n° 1), cité par C. TRUESDELL (*Math. Rev.*, 15, 1954, p. 569 et *The kinematics of vorticity*, Indiana University Press, Bloomington, Ind., U. S. A., 1954, p. 120) attire déjà l'attention sur cette intégrale, en remarquant que si $\vec{u} = \text{grad } h + f \text{ grad } g$ (f, g, h : « potentiels de Monge », avec h univoque), H est essentiellement nul pour un îlot tourbillonnaire. Ce n'est évidemment pas le cas général; comme exemple d'îlot ayant un H non nul, nous proposons un système de deux anneaux tourbillonnaire de révolution, d'intensité respectives I_1 et I_2 , *enlacés*, le tout plongé dans du fluide irrotationnel pour constituer un îlot D simplement connexe : on trouve alors $H = 2 I_1 I_2$.

(²) *Thèse*, Paris, 1949, p. 34 et *J. Math. pures et appl.*, 32, 1953, p. 12.

(Faculté des Sciences, Montpellier.)