HAL open science

Approche fiabiliste pour l'optimisation locale d'un problème couplé fluide-structure

Nicolas Roussouly, Joseph Morlier, M. Charlotte, Michel Salaün

To cite this version:

Nicolas Roussouly, Joseph Morlier, M. Charlotte, Michel Salaün. Approche fiabiliste pour l'optimisation locale d'un problème couplé fluide-structure. 11ème colloque CSMA 2013 (Calcul des Structures et Modélisation), May 2013, Giens, France. pp.0. hal-01853202

HAL Id: hal-01853202

https://hal.science/hal-01853202v1

Submitted on 2 Aug 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)
OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: http://oatao.univ-toulouse.fr/
Eprints ID: 8629

To cite this document: Roussouly, nicolas and Morlier, Joseph and Charlotte, Miguel and Salaün, Michel *Approche fiabiliste pour l'optimisation locale d'un problème couplé fluide-structure.* (2013) In: 11e colloque CSMA 2013 (Calcul des Structures et Modélisation), 13-17 Mai 2013, Giens, France.

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: staff-oatao@inp-toulouse.fr

Approche fiabiliste pour l'optimisation locale d'un problème couplé fluide-structure

Nicolas ROUSSOULY [1], Joseph MORLIER [2], Miguel CHARLOTTE [2], Michel SALAUN [2]

[1] FCS STAE, nicolas.roussouly@isae.fr
[2] ISAE, Institut Clément Ader, joseph.morlier@isae.fr, miguel.charlotte@isae.fr, michel.salaun@isae.fr

Résumé — Le projet OSYCAF (Optimisation d'un Système Couplé fluide/structure représentant une Aile Flexible) a pour objectif de proposer une méthodologie d'optimisation multidisciplinaire dans un contexte aéronautique. Plus précisément, il s'agit d'optimiser une aile d'avion en tenant compte des interactions fluide-structure. Les modèles de mécanique des fluides et des structures sont des disciplines devant communiquer entre elles et avec l'optimiseur global. L'optimisation est réalisée sur deux niveaux : par rapport aux paramètres globaux, communs aux deux disciplines, et par rapport aux paramètres locaux, propres à chacune. Le travail présente l'optimisation de la structure par rapport aux paramètres locaux. Dans ce cadre, il est proposé d'introduire des incertitudes probabilistes permettant de tenir compte de contraintes de fiabilité.
Mots clés — Optimisation multidisciplinaire, RBDO, fiabilité, interaction fluide-structure, aile flexible

1 Introduction

1.1 Contexte

Le projet OSYCAF (Optimisation d'un Système Couplé fluide/structure représentant une Aile Flexible) a pour objectif de mettre en œuvre une méthodologie d'optimisation multidisciplinaire dans un contexte aéronautique. Il est proposé par le FCS STAE (Fondation de Coopération Scientifique Science Technique Aéronautique et Espace) et fédère plusieurs laboratoires de recherche (CERFACS, ONERA, IMT, ICA). Ce projet est une étape dans la réalisation, à long terme, d'un processus automatique permettant de traiter un avion complet.

L'application considérée est une aile d'avion : composant dont les performances dépendent très fortement des interactions fluide-structure. En effet, en se déformant sous l'effet de la pression du fluide, la structure crée une nouvelle répartition du champ de pression. Dans le cadre du projet, les disciplines prises en compte se limitent à la mécanique des fluides et des structures. Les objectifs de l'optimisation sont de maximiser la portance et minimiser la traînée aérodynamique tout en minimisant la masse de la structure. Dans la suite, seule la discipline structure sera détaillée.

L'algorithme d'optimisation multidisciplinaire utilisé et la méthode DIVE (Disciplinary Interaction Variable Elimination) [1]. Cette dernière suppose que les réponses renvoyées par les disciplines sont optimales par rapport à leurs paramètres locaux (paramètres propres à chaque discipline). Pour la structure, cette optimisation peut faire intervenir un certain nombre de contraintes de dimensionnement et de cas de chargement. C'est dans le cadre de cette optimisation qu'il est proposé d'inclure des constraintes de fiabilité en tenant compte des incertitudes liées aux paramètres de la structures et aux amplitudes de chargement.

1.2 Objet de l'étude

Cette étude s'inscrit dans le cadre de l'optimisation basée sur des contraintes de fiabilité [2, 3] (*Reliability Based Design Optimization* − RBDO) qui consiste à minimiser une fonction sous des constraintes de probabilités de défaillance. Si l'on considère un ensemble de paramètres $\boldsymbol{\theta}$ à optimiser et un ensemble de variables aléatoires $\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta})$ pouvant dépendre de $\boldsymbol{\theta}$ (par exemple les valeurs moyennes), le problème

d'optimisation peut être formulé par :

$$\boldsymbol{\theta}^* = \operatorname{argmin} f(\boldsymbol{\theta}) \quad \text{s.c.} \quad \begin{cases} \mathbb{P}\left(G_i(\mathbf{X}(\boldsymbol{\theta})) \leq 0\right) \leq p_{f_i}^0 & i = 1 \ldots N_c \\ \boldsymbol{\theta}_l \leq \boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{\theta}_u \end{cases} \tag{1}$$

Le problème ne considère ici qu'une seule fonction objectif mais il peut être généralisé au cas multi-objectif. Les fonctions G_i sont les fonctions de performance permettant de distinguer les domaines de défaillance ($G_i(\mathbf{x}) \leq 0$) des domaines admissibles ($G_i(\mathbf{x}) > 0$). Le vecteur $\mathbf{X}$ des variables aléatoires X_m est muni d'une distribution de probabilité conjointe notée $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ et les probabilités de défaillance relatives aux fonctions de performance sont définies par :

$$P_{f_i} = \mathbb{P}\left(G_i(\mathbf{X}) \leq 0\right) = \int_{G_i(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \tag{2}$$

(la dépendance de $\mathbf{X}$ à $\boldsymbol{\theta}$ pourra être omise pour des raisons de simplicité d'écriture). Le domaine admissible des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ est tel que les probabilités de défaillance doivent être inférieures aux valeurs limites $p_{f_i}^0$. Il peut également être limités par les bornes inférieures $\boldsymbol{\theta}_l$ et supérieures $\boldsymbol{\theta}_u$.

La résolution de problème (1) fait intervenir des méthodes d'optimisation numérique et d'analyse de fiabilité. Les méthodologies sont souvent classées en trois catégories :

- Les méthodes en double boucle (*nested methods*) dans lesquelles les probabilités de défaillance sont estimées à chaque appel des fonctions contraintes par n'importe quelles méthodes d'analyse de fiabilité. La tendance est néanmoins à l'utilisation de méthodes basées sur le point de défaillance le plus probable (*Most Probable Point − MPP search method*) telle que la *Reliability Index Approach* (RIA) ou la *Performance Measure Approach* (PMA) [4] qui, malgré certaines hypothèses, ont plusieurs avantages.
- Les méthodes en simple boucle (*single-loop method*) consistent à transformer le problème pour le traiter dans une simple boucle d'optimisation comme dans le cadre déterministe [**?**].
- Les méthodes séquentielles (*sequential methods*) ou basées sur l'utilisation de métamodèles (*surrogate based methods*) dans lesquelles le problème est découpé en plusieurs sous-problèmes d'optimisation résolus de manière séquentielle [5, 6]. Les méthodes basées sur l'approximation par métamodèles sont soit locales, avec eventuellement l'utilisation de régions de confiance [7, 8], soit globales avec un enrichissement adaptatif des zones d'intérêt [9, 10]

La méthodologie proposée dans le cadre de cette étude s'appuie sur l'utilisation de métamodèles de type polynomial. Le principe est semblable aux méthodes séquentielles et s'inspire de la notion des régions de confiance. À chaque itération, une région de confiance est définie, dans laquelle les fonctions contraintes et, éventuellement objectif, sont approchées à partir d'un plan d'expérience numérique. Une optimisation est ensuite réalisée sur les modèles approchés dans la région de confiance uniquement. L'optimum déterminé est utilisé à l'itération suivante pour définir une nouvelle région de confiance et construire de nouvelles approximations. La région de confiance est la région dans laquelle l'approximation des fonctions contraintes doit permettre d'estimer les probabilités de défaillance de manière suffisamment précise. Cela signifie que la taille de la région doit être choisie en fonction du niveau de probabilité estimé et que l'approximation des contraintes, dans cette région, doit être de bonne qualité. La taille de la région de confiance reste constante au cours des itérations, seule sa position varie. En effet, contrairement aux méthodes d'optimisation déterministes où l'optimum obtenu sur le modèle approché peut être évalué sur le vrai modèle pour mettre à jour la région de confiance, les probabilités de défaillance ne peuvent pas être estimées sur le vrai modèle dans le cas d'une optimisation probabiliste.

Les métamodèles utilisés sont du type chaos polynomial creux, c'est-à-dire que seuls les termes les plus influents sont sélectionnées dans le développement. Cette sélection permet de réduire considérablement le nombre d'appel au modèle de référence lors du plan d'expérience. D'autres types d'approximations polynomiales peuvent être utilisés mais l'avantage du chaos polynomial est d'extraire, au point optimum, les indices de sensibilité globaux dits de Sobol [11] de manière analytique. Les probabilités de défaillance peuvent être estimées par tirages de Monte Carlo ou tirages d'importance sur les métamodèles. Dans la suite la méthode *subset simulation* [12] sera préférée car elle permet d'estimer des probabilités de défaillance faibles avec un nombre réduit de simulations sans faire d'hypothèse sur les

zones qui contribuent de manière significative à la probabilité de défaillance (unicité du point de défaillance le plus probable). L'algorithme d'optimisation utilisé au sein d'une région de confiance est un algorithme d'optimisation non-linéaire sous contrainte à gradient. Les gradients des probabilités de défaillance par rapport aux variables d'optimisation sont estimés par un post-traitement du *subset sampling* [13] grâce à la notion de *score function* [14].

2 Approximation polynomiale pour l'analyse de fiabilité

2.1 Principe d'approximation

L'approximation d'une grandeur d'intérêt par un métamodèle a pour objectif de limiter le temps de calcul de l'estimation d'une probabilité de défaillance qui est irréalisable sur un modèle de référence coûteux tel qu'un modèle éléments finis (EF). L'approximation par chaos polynomial considérée par la suite consiste à rechercher la grandeur d'intérêt notée Y comme un développement des variables aléatoires $\mathbf{X}$:

$$Y = \hat{f}(\mathbf{X}) = \sum_{p=0}^{+\infty} a_p \Psi_p(\mathbf{X}) \tag{3}$$

où les polynômes multidimensionnels $\Psi_p(\mathbf{X})$ sont composés par produit tensoriel de polynômes unidimensionnels $(\psi_{k_m}^{(m)})_{k_m \in \mathbb{N}}$ qui forment une base orthogonale par rapport à la mesure des variables aléatoires X_m. Par exemple, les polynômes sont d'Hermite si les variables sont gaussiennes ou de Legendre si les variables sont uniformes. De manière classique, le développement de l'équation (3) est tronqué, en pratique, à un certain nombre de termes. Si l'ordre du polynôme est noté o et M est le nombre de variables, le nombre P de termes vaut :

$$P = \frac{(M+o)!}{M!o!} \tag{4}$$

Les coefficients a_p du développement peuvent être déterminés soit par projection, grâce à l'othogonalité de la base, en utilisant des schémas d'intégration numérique, soit par régression à partir d'un échantillon issu d'un plan d'expérience. C'est cette seconde méthode que nous utiliserons dans la suite, c'est-à-dire qu'à partir d'un échantillon de points des variables d'entrée $\mathcal{X} = \{\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(N)}\}$ et des valeurs des réponses du modèle de référence évalué en ces mêmes points $\mathcal{Y} = \{y^{(1)}, \ldots, y^{(N)}\}$, les coefficients valent :

$$\mathbf{a}^* = \underset{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^P}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=0}^{N} \left(\hat{f}(\mathbf{x}^{(i)}) - y^{(i)} \right)^2 \tag{5}$$

Le nombre de points N dans l'échantillon doit être au moins égal au nombre de coefficients à déterminer dans le développement. Cela signifie que le nombre de points à évaluer par la fonction de référence augmente rapidement avec l'ordre du développement lorsque le nombre de variable est grand, compte tenu de la relation (4). Pour cette raison, plusieurs stratégies sont utiles pour sélectionner les termes les plus importants. Elles sont basées sur la régression itérative (*forward, backward, stepwise selection*) ou la pénalisation des coefficients (*lasso, stagewise, lar*). Récemment, la méthode *lar* a été employée dans le cadre du chaos polynomial [15].

2.2 Construction de l'approximation, sélection des termes

La méthodologie utilisée ici est basée sur le méthode *forward*. Les termes du développement sont testés un à un, puis le plus important, i.e celui qui améliore le mieux le modèle, est sélectionné. Les critères d'acceptation des termes sont des critères statistiques tels que le Cp de Mallows, le *Bayesian Information Criterion* (BIC), le *Akaike Information Criterion* (AIC) ou le R^2 ajusté, tous très utilisés dans la littérature statistique. Ces critères sont fonctions de l'erreur des moindres carrés et sont pénalisés par le nombre de termes sélectionnés dans le modèle. Le principe de la pénalisation est que l'ajout d'un nouveau terme doit suffisamment réduire l'erreur pour que ce dernier soit accepté. Cela permet de construire des modèles parcimonieux, i.e avec un faible nombre de termes et donc de réduire l'erreur d'approximation (pas de surapprentissage).

Dans la suite, les quatre critères cités précédemment seront utilisés, ce qui signifie que quatre modèles potentiels sont construits. Le meilleur d'entre eux est choisi par la procédure de validation croisée décrite dans la section suivante.

2.3 Estimation de l'erreur d'approximation

L'erreur de généralisation du modèle correspond à l'espérance de l'écart au carré entre la variable aléatoire de la grandeur d'intérêt Y et celle résultant de l'approximation $\hat{f}(\mathbf{X})$. Cette erreur ne peut pas être estimée simplement à partir de l'échantillon utilisé pour construire l'approximation. Un premier moyen est d'utiliser les citères pénalisés cités à la section précédente, mais ces derniers reposent sur des hypothèses pas toujours vérifiées qui ne permettent pas de valider un modèle de manière absolue. D'autres méthodes basées sur la simulation sont plus adaptées. C'est le cas de la validation croisée qui consiste à écarter certains points de l'échantillon lors de la construction de modèle pour les utiliser en tant que test. En répétant l'opération pour plusieurs groupes de points, l'indicateur de prédictivité, noté Q^2, peut être calculé. Il vaut :

$$Q^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{N} \left(y^{(i)} - \hat{f}^{(-\mathcal{D}_i)}(\mathbf{x}^{(i)})\right)^2}{\sum_{i=1}^{N} (y^{(i)} - \overline{y})^2} \tag{6}$$

où $\hat{f}^{(-\mathcal{D}_i)}$ désigne le modèle construit sans le sous-ensemble contenant les points i et $\overline{y}$ est la moyenne des réponses $y^{(i)}$. Ce coefficient correspond au R^2 en validation croisée et ces valeurs sont entre 0 et 1 (plus la valeur est proche de 1, meilleur est le modèle). Il est utilisé, dans la suite, pour déterminer le meilleur modèle parmi les quatre déterminés précédemment mais permettra également de s'assurer de la bonne qualité d'un modèle au cours de l'algorithme d'optimisation (cf. section 3.1).

3 Optimisation avec contraintes de fiabilité

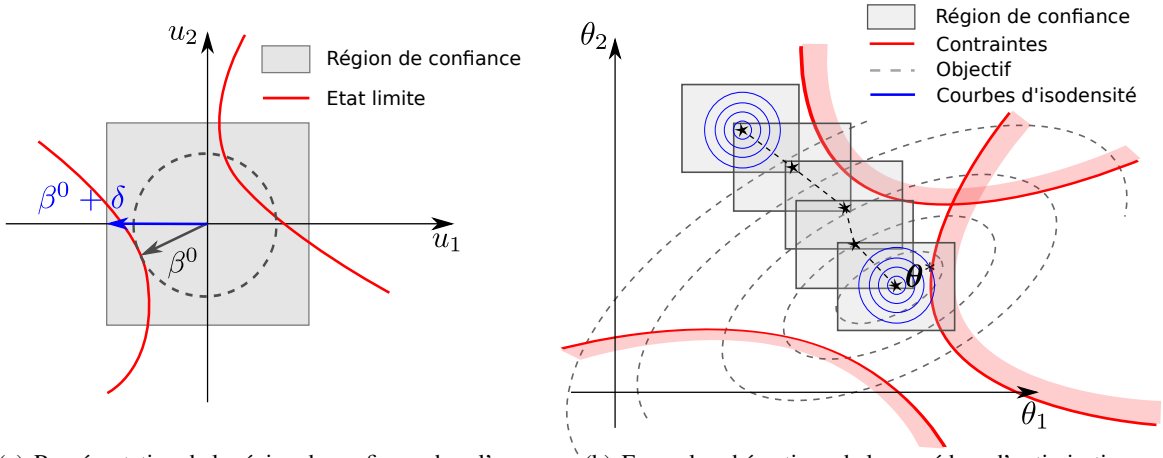
3.1 Principe de l'algorithme

L'algorithme d'optimisation présenté est basé sur l'approximation des fonctions contraintes par un développement polynomial, de type chaos, permettant d'estimer les probabilités de défaillance à moindre coût. L'approximation est construite sur la base d'un échantillon statistique formé par un plan d'expérience numérique. Étant donné qu'une approximation polynomiale reste locale, la notion de région de confiance est introduite. La région de confiance est définie par la région dans laquelle une contrainte peut être estimée avec précision, c'est-à-dire qu'elle doit suffisamment couvrir l'état limite. Sa taille dépend donc du niveau de probabilité de défaillance de la contrainte. Si l'on considère, par exemple, que le seuil de probabilité d'une contrainte est p_f^0 avec l'indice de fiabilité généralisé correspondant β^0, la région de confiance est définie par l'hyperrectangle :

$$\prod_{m=0}^{M} \left[b_{m_{\inf}}, b_{m_{\sup}}\right] = \prod_{m=0}^{M} \left[F_{X_m}^{-1}\left(\Phi(-(\beta^0+\delta))\right), F_{X_m}^{-1}\left(\Phi(\beta^0+\delta)\right)\right] \tag{7}$$

où $F_{X_m}^{-1}$ est l'inverse de la fonction de répartition de la variable X_m, Φ est la fonction de répartition gaussienne standard et δ est un accroissement permettant de couvrir la zone de l'état limite. Ce dernier peut être défini à partir d'un niveau d'importance de l'indice de fiabilité en s'inspirant de [16]. La figure 1(a) illustre la notion de région de confiance.

À chaque itération, un Latin Hypercube (LHS) est généré dans la région de confiance pour construire les métamodèles. La méthode inspirée de [17] permet d'enrichir le LHS si des points existants sont présents dans la région. Une optimisation est réalisée dans la région de confiance uniquement, éventuellement limitée par les contraintes, c'est-à-dire que le domaine de variation des paramètres $\boldsymbol{\theta}$ est limité aux bornes $\max(\boldsymbol{\theta}_l, \mathbf{b}_{\inf})$ et $\min(\boldsymbol{\theta}_u, \mathbf{b}_{\sup})$. L'optimiseur utilisé à cette occasion est un algorithme par gradient dont les fonctions contraintes renvoient les probabilités de défaillance relatives aux fonctions de performance. Une fois l'optimum déterminé, une nouvelle région de confiance est définie, le plan d'expérience numérique est enrichi et les métamodèles sont reconstruits. Pour garantir une bonne estimation des probabilités de défaillance, le coefficient de prédictivité des métamodèles doit être supérieur à 0.99. Cela signifie que le plan LHS peut être enrichi plusieurs fois au sein d'une même région pour que les Q^2 soient suffisants. Dans le cas où le métamodèle ne s'améliore pas après un enrichissement du LHS, l'ordre du développement du chaos peut être augmenté. Notons bien que la région de confiance ne fait que se déplacer au cours des itérations mais sa taille reste constante. La procédure se termine lorsqu'un les



(a) Représentation de la région de confiance dans l'espace normal standard

(b) Exemple schématique de la procédure d'optimisation

Fig. 1 – Schématisation de la région de confiance et et de la procédure d'optimisation

variations entre deux optimums sont suffisamment faibles. Un exemple, en 2 dimensions, de la procédure est schématisé en figure 1(b) et les étapes de l'algorithme sont résumés en figure 2

3.2 Estimation de la probabilité de défaillance

Les probabilités de défaillance des fonctions contraintes peuvent être classiquement estimées par une méthode de simulation telle que des tirages de Monte Carlo, d'importance ou toutes autres techniques. La méthode retenue ici est le tirage par sous-ensemble, *subset sampling* [12]. Elle consiste à estimer la probabilité de défaillance en plusieurs étapes, à partir d'états limites intermédiaires. En effet, la probabilité de défaillance définie par $\mathbb{P}(F)$, où F est l'évènement de défaillance $\{G(\mathbf{X}) \leq 0\}$, peut être déterminé par $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F_1)\prod_{i=2}^{n_F}\mathbb{P}(F_i|F_{i-1})$, où F_i désigne des évènements intermédiaires tels que $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_{n_F} = F$, c'est-à-dire $F_i = \{G(\mathbf{X}) \leq t_i\}$. Précisément, la démarche proposée par les auteurs, consiste à fixer la probabilité intermédiaire $\mathbb{P}(F_i|F_{i-1}) = p_0$ puis à déterminer le seuil de défaillance t_i correspondant à cette probabilité. La démarche est répétée itérativement jusqu'à ce que t_i soit négatif. L'échantillon initial permettant de déterminer t_1 est un tirage de Monte Carlo classique. Les échantillons générés aux étapes i sont conditionnés par l'évènement F_{i-1}, c'est-à-dire qu'ils sont générés par la loi $h_{\mathbf{X}|F_{i-1}}(\mathbf{x}) = \mathbb{I}_{F_{i-1}}(\mathbf{x})f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})/\mathbb{P}(F_{i-1})$ où $\mathbb{I}_{F_{i-1}}$ désigne la fonction indicatrice telle que :

$$\mathbb{I}_{F_{i-1}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad G(\mathbf{x}) \leq t_{i-1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{8}$$

Cette loi peut être générée efficacement par une méthode de Monte Carlo par Chaîne de Markov (MCMC). L'avantage de ce type de méthode est d'estimer des probabilités de défaillance faibles avec un nombre réduit de simulation. De plus, contrairement aux tirages d'importance, il n'est pas nécessaire de connaître *a priori* le point de défaillance le plus probable, s'il est unique, ou les zones qui contribuent significativement à la probabilité de défaillance, s'il y en a plusieurs.

3.3 Analyse de sensibilité de la probabilité de défaillance

Les algorithmes d'optimisation par gradient nécessite de calculer le gradient des fonctions contraintes par rapport aux variables d'optimisation. Ce dernier peut être approché par différences finies lorsque l'évaluation de la contrainte n'est pas trop coûteuse en temps de calcul, ce qui n'est pas le cas pour estimer la probabilité de défaillance. La méthodologie de calcul des gradients utilisée ici est issue de [13]. Elle permet d'estimer le gradient de la probabilité comme un simple post-traitement du *subset sampling*. En simplifiant l'éciture de $\mathbb{P}(F_i|F_{i-1})$ par $\mathbb{P}_i$, il est montré que :

$$\frac{\partial P_f}{\partial \theta_k} = \sum_{i=1}^{n_F} \frac{P_f}{\mathbb{P}_i}\frac{\partial \mathbb{P}_i}{\partial \theta_k} \tag{9}$$

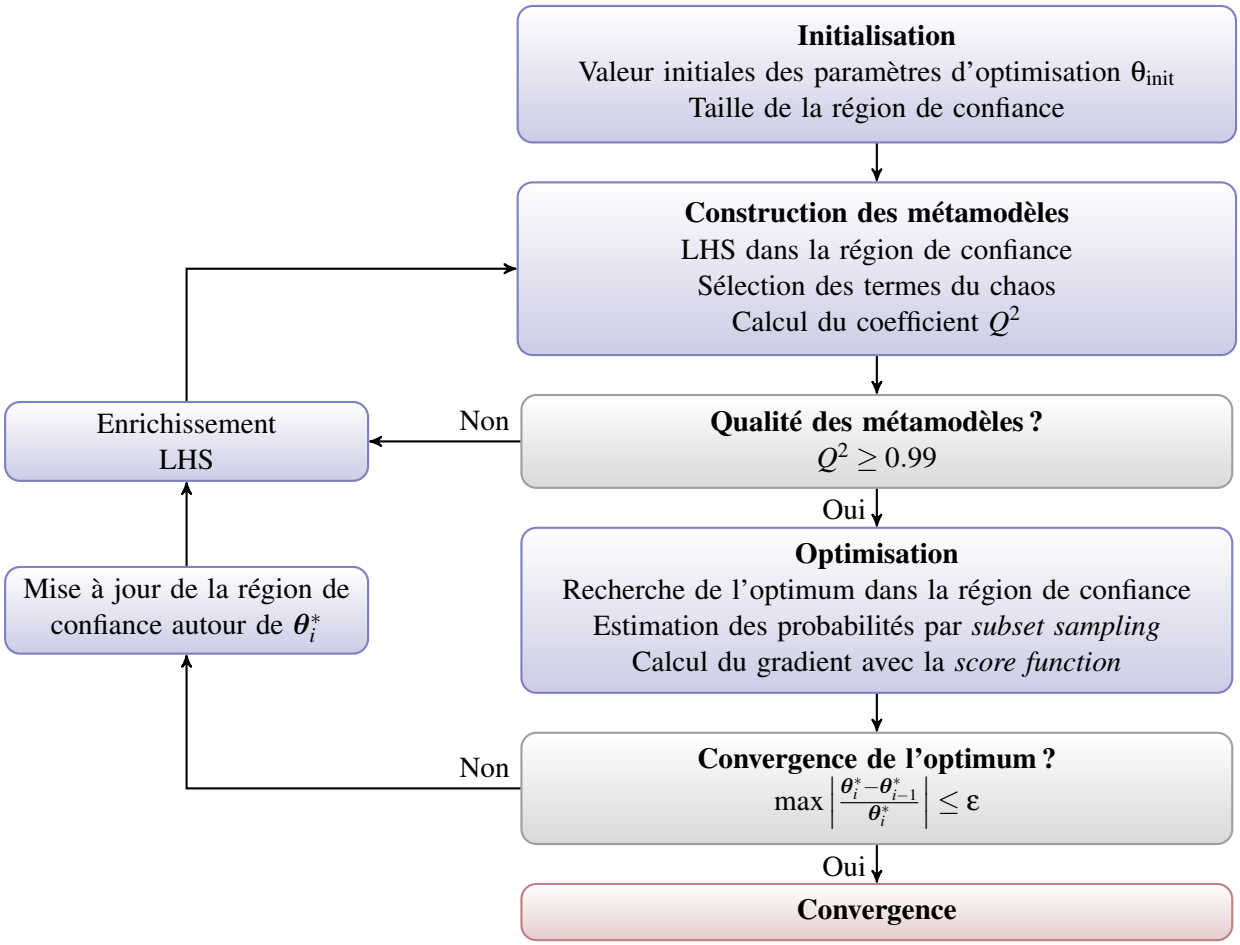


Fig. 2 – Procédure d'optimisation avec contraintes de fiabilité

avec :

$$\frac{\partial \mathbb{P}_1}{\partial \theta_k} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \left(\mathbb{I}_{F_1}(\mathbf{x}^{(i)}) \left(\frac{1}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(i)})} \frac{\partial f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(i)})}{\partial \theta_k} \right) \right) \tag{10}$$

et :

$$\frac{\partial \mathbb{P}_i}{\partial \theta_k} = \frac{1}{N_s} \sum_{i=1}^{N_s} \left(\mathbb{I}_{F_1}(\mathbf{x}^{(i)}) \left(\frac{1}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(i)})} \frac{\partial f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}^{(i)})}{\partial \theta_k} - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{1}{\mathbb{P}_j} \frac{\partial \mathbb{P}_j}{\partial \theta_k} \right) \right) \quad \text{pour} \quad i \geq 2 \tag{11}$$

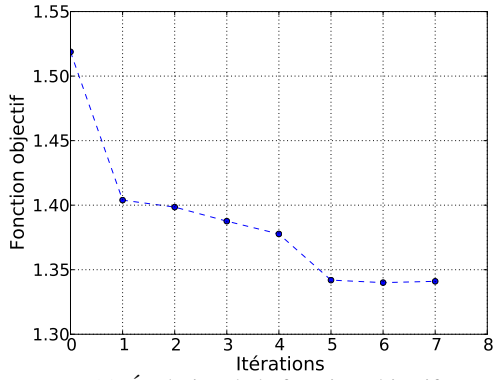
La sensibilité de la distribution normalisée peut être réécrite par :

$$\frac{1}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})} \frac{\partial f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial \theta_k} = \frac{\partial \log f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})}{\partial \theta_k} \tag{12}$$

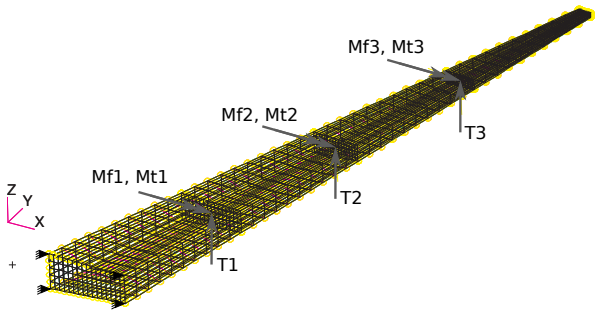
et est souvent appelée *score function*. Les relations analytiques de la *score fonction* peuvent être trouvée dans la littérature notamment lorsque les lois sont dépendantes et la loi jointe définie par la théorie des copules [14].

4 Application

La méthodologie est appliquée sur le modèle éléments finis d'un caisson de voilure d'avion possédant 5 sections (cf. figure 3(b)). L'objectif est de minimiser la masse. Les états limites des contraintes de probabilité sont : la limite élastique dans le cas des raidisseurs avant, arrière et des peaux inférieures ; un critère analytique de flambage pour les peaux supérieures. Seuls les trois premiers tronçons sont pris en compte. Les critères sont définis par des marges de sécurité, notées MS_i pour $i = 1, \ldots, 12$, c'est-à-dire tels que $MS_i \leq 0$ correspond aux domaines de défaillance.



(a) Évolution de la fonction objectif



(b) Modèle éléments finis du caisson de voilure

Fig. 3 – Application à un caisson de voilure

Variable	Distribution	Moyenne	Écart type	Corrélation
$t_1,\ldots,t_{12}$ (m)	Normales tronquées $[0.002\ ;\ \infty[$	$\mu_1,\ldots,\mu_{12}$	0.001	Aucune
$k_1,\ldots,k_9$	Log-normales	0.	0.3	0.8

Tableau 1 – Description des variables aléatoires

Les variables aléatoires prises en compte sont les épaisseurs des raidisseurs avants, arrières et des peaux inférieures, supérieures des trois premiers tronçons du caisson, ainsi que les amplitudes des chargements appliqués (efforts tranchants, moments de flexion et torsion). Les variables des épaisseurs sont notées t_i, pour $i = 1\ldots12$, et sont caractérisées par des lois gaussiennes tronquées dont les moyennes μ_i sont les variables d'optimisation. Les amplitudes des chargements, notées T_i, Mf_i et Mt_i pour $i = 1\ldots3$, sont définies par un facteur multiplicatif aléatoire. Par exemple, $T_i = k_i\text{nom}_i$ où nom_i est une valeur nominale et k_i est le facteur aléatoire. Les facteurs k_i, pour $i = 1\ldots9$, sont caractérisés par des lois log-normales qui sont corrélées d'un coefficient 0.8. Les lois des variables sont décrites dans le tableau 1. Les valeurs initiales des moyennes ont été obtenues par une optimisation déterministe préliminaire et sont comprises entre 5.10^{-3} et 4.10^{-2}.

Les contraintes d'optimisation sont telles que les probabilités de défaillance doivent être inférieures à 10^{-4}. Les bornes inférieures et supérieures des variables d'optimisation sont $\mu_l = 5.10^{-3}$ et $\mu_u = 5.10^{-2}$. La fonction objectif n'est pas définie par la masse de la structure mais par son volume, c'est-à-dire qu'elle vaut $\sum_{i=1}^{12} S_i\mu_i$ où S_i est la surface des composants du caisson.

Les valeurs de la fonction objectif au cours des itérations sont présentés sur la figure 3(a). La procédure converge en 7 itérations ce qui a nécessite au total 364 simulations du modèle éléments finis. Les probabilités de défaillance ont été estimées avec des intervalles de confiance inférieurs à 8% et l'ordre de développement du chaos polynomial a atteint 3 pour satisfaire la contrainte de qualité des métamodèles de certaines réponses. La comparaison avec d'autres approches est en cours mais des premiers résultats montrent que l'utilisation de méthodes utilisant le krigeage avec enrichissement adaptatif [10] nécessite plus de 200 simulations du modèle éléments finis pour approcher correctement une seule réponse.

5 Conclusion

La méthode d'optimisation sous contrainte de fiabilité présentée ici, s'appuie sur l'utilisation du chaos polynomial pour approcher les fonctions de performance des contraintes du problème. Les probabilités de défaillance et leur gradient sont estimés par une méthode de simulation *subset sampling*. L'approximation par chaos polynomial étant locale, la notion de région de confiance est utilisée pour estimer précisément les probabilités de défaillance et limiter la variation des variables d'optimisation à chaque itération. La méthode est appliquée au cas d'un modèle éléments finis du caisson d'une voilure d'avion ou 21 variables aléatoires sont prises en compte.

Références

[1] M. Masmoudi and Y. Parte. Disciplinary interaction variable elimination (DIVE) approach for mdo. In *ECCOMAS CFD*, volume 2006, 2006.

[2] Yiannis Tsompanakis, Nikkos D. Lagaros, and Manolis Papadrakakis. *Structural Design Optimization Considering Uncertainties*, volume 1. Taylor & Francis, 2008.

[3] G.I. Schuëller and H.A. Jensen. Computational methods in optimization considering uncertainties â an overview. *Computational Methods in Optimization Considering Uncertainties*, 198(1) :2–13, November 2008.

[4] Jian Tu, Kyung K Choi, and Young H Park. A new study on reliability-based design optimization. *Journal of Mechanical Design*, 121(4) :557–564, 1999.

[5] M. S. Eldred, A. A. Giunta, S. F. Wojtkiewicz Jr, and T. G. Trucano. Formulations for surrogate-based optimization under uncertainty. In *Proc. 9th AIAA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, number AIAA-2002-5585, Atlanta, GA*, volume 189, page 346, 2002.

[6] Gengdong Cheng, Lin Xu, and Lei Jiang. A sequential approximate programming strategy for reliability-based structural optimization. *Computers & Structures*, 84(21) :1353–1367, August 2006.

[7] M. S. Eldred, C. G. Webster, and P. Constantine. Design under uncertainty employing stochastic expansion methods. In *Proceedings of the 12th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, number AIAA-2008-6001, Victoria, British Columbia*, 2008.

[8] A. A. Giunta and M. S. Eldred. Implementation of a trust region model management strategy in the DAKOTA optimization toolkit. In *Proceedings of the 8th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization, Long Beach, CA*, 2000.

[9] B.J. Bichon, S. Mahadevan, and M.S. Eldred. Reliability-based design optimization using efficient global reliability analysis. *AIAA Proceedings.[np]. 04-07 May*, 2009.

[10] V. Dubourg, B. Sudret, and J.M. Bourinet. Reliability-based design optimization using kriging surrogates and subset simulation. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, pages 1–18, 2011.

[11] I. M. Sobol. Sensitivity analysis for non-linear mathematical models. *Mathematical Modelling and Computational Experiment*, 1(1) :407–414, 1993.

[12] S. K. Au and J. L.a Beck. Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16(4) :263–277, 2001.

[13] S. Song, Z. Lu, and H. Qiao. Subset simulation for structural reliability sensitivity analysis. *Reliability Engineering and System Safety*, 94 :658–665, 2009.

[14] I. Lee, K.K. Choi, Y. Noh, L. Zhao, and D. Gorsich. Sampling-based stochastic sensitivity analysis using score functions for rbdo problems with correlated random variables. Technical report, DTIC Document, 2010.

[15] G. Blatman and B. Sudret. Adaptive sparse polynomial chaos expansion based on least angle regression. *Journal of Computational Physics*, 230(6) :2345–2367, March 2011.

[16] A. Dutfoy and R. Lebrun. Le test du maximum fort : une façon efficace de valider la qualité d'un point de conception. In *Congrès Français de Mécanique*, 2007.

[17] G. G. Wang. Adaptive response surface method using inherited latin hypercube design points. *Journal of Mechanical Design*, 125(2) :210–220, 2003.