HAL
open science

# Etude numérique de l'influence de la structure de dépendance des valeurs propres en synthèse modale probabiliste

Sylvain Dubreuil, Frank Petitjean, Michel Salaün

## To cite this version:

Sylvain Dubreuil, Frank Petitjean, Michel Salaün. Etude numérique de l'influence de la structure de dépendance des valeurs propres en synthèse modale probabiliste. CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, Aug 2013, Bordeaux, France. pp.0. hal-01851641

**HAL Id: hal-01851641**

**https://hal.science/hal-01851641v1**

Submitted on 30 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Open Archive Toulouse Archive Ouverte (OATAO)
OATAO is an open access repository that collects the work of Toulouse researchers and makes it freely available over the web where possible.

This is an author-deposited version published in: http://oatao.univ-toulouse.fr/
Eprints ID: 9176

**To cite this document**: Dubreuil, Sylvain and Petitjean, Frank and Salaün, Michel *Etude numérique de l'influence de la structure de dépendance des valeurs propres en synthèse modale probabiliste.* (2013) In: CFM 2013 - 21ème Congrès Français de Mécanique, 26-30 Aug 2013, Bordeaux, France. (Unpublished)

Any correspondence concerning this service should be sent to the repository administrator: staff-oatao@inp-toulouse.fr

# Etude numérique de l'influence de la structure de dépendance des valeurs propres en synthèse modale probabiliste.

**S. Dubreuil[a,b], F. Petitjean[b], M.Salaün[a]**

a. *Institut Catholique d'Arts et Métiers (ICAM), F-31055 Toulouse*
b. *ISAE-Institut Clément Ader (ICA), F-31300 Toulouse*

## Résumé :

*Ce travail a pour cadre la détermination de fonctions de réponse en fréquence (FRF) par synthèse modale. La modélisation probabiliste des paramètres d'entrée du modèle conduit à un problème aux valeurs propres aléatoires. Nous nous intéressons à la représentation de la structure de dépendance entre les valeurs propres et son influence sur la densité de probabilité de la FRF . Cette structure de dépendance est modélisée par une copule identifiée à partir de simulations de Monte-Carlo. En adaptant les travaux de C. Heinkelé au cas de l'amortissement critique, nous obtenons les expressions analytiques des densités de probabilité de la FRF d'un oscillateur harmonique. Nous utilisons ces résultats afin d'exprimer la densité jointe d'un vecteur de N oscillateurs connaissant la loi jointe des N premières valeurs propres du système.*

## Abstract :

*This study takes place in the context of frequency response function (FRF) evaluated by modal synthesis. Uncertainties affecting model input parameters lead to a random eigenvalue problem. We are interested in modeling the dependence structure of eigenvalues and observing its impact on FRF. Dependence structure is modeled by a copula which identification is perfomed by Monte-Carlo method. Adapting the work of C. Heinkelé to critical damping, we get analytical expressions of probability density function of the random oscillator FRF. We use this results to express the joint density of a N dimensional random vector.*

## Mots clefs : **oscillateur aléatoire ; synthèse modale ; copule**

## 1 Oscillateur aléatoire

Nous rappelons que, dans le cas déterministe, le point de départ de la synthèse modale est l'étude de l'oscillateur à un degré de liberté dont la fonction de transfert s'écrit :

$$H(\omega) = \frac{-\omega^2 + \underline{\lambda}}{(-\omega^2 + \underline{\lambda})^2 + 4\xi^2\underline{\lambda}\omega^2} + j\frac{-2\xi\sqrt{\underline{\lambda}}\omega}{(-\omega^2 + \underline{\lambda})^2 + 4\xi^2\underline{\lambda}\omega^2}$$

avec $j^2 = -1$, $\omega$ la pulsation considérée, $\underline{\lambda}$ le carré de la pulsation propre et $\xi$ le coefficient d'amortissement critique.

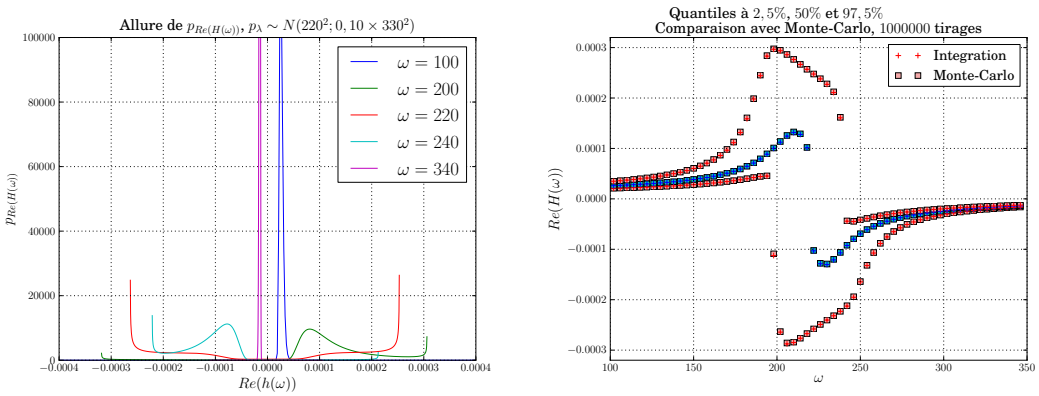
Les incertitudes sur les propriétés de l'oscillateur (masse et raideur) conduisent à une pulsation propre aléatoire. Notons $\lambda$ la variable aléatoire modélisant le carré de cette pulsation propre aléatoire, de densité de probabilité $p_\lambda$ et $H(\omega)$ la fonction de transfert aléatoire correspondante. On considère le coefficient d'amortissement $\xi$ comme déterministe. Nous suivons la démarche proposée par [5], en l'adaptant au cas de l'amortissement critique, afin d'obtenir les expressions des densités de probabilité des parties réelle et imaginaire de $H(\omega)$. La méthodologie étant similaire pour les parties réelle et

imaginaire (ou le module et la phase), nous détaillons seulement le cas de la partie réelle de $H(\omega)$. Nous obtenons pour densité de probabilité de la partie réelle l'expression :

$$\begin{aligned} p_{Re(H)}(Re(h);\omega,\xi) &= \frac{|1-4\omega^2\xi^2 Re(h)-\sqrt{u}|}{2Re(h)^2\sqrt{u}} p_\lambda\left(\frac{1+2\omega^2(1-2\xi^2)Re(h)-\sqrt{u}}{2Re(h)}\right) \\ &+ \frac{|1-4\omega^2\xi^2 Re(h)+\sqrt{u}|}{2Re(h)^2\sqrt{u}} p_\lambda\left(\frac{1+2\omega^2(1-2\xi^2)Re(h)+\sqrt{u}}{2Re(h)}\right) \end{aligned} \tag{1}$$

avec $u = \left(16\,\omega^4\,\xi^4 - 16\,\omega^4\,\xi^2\right)\,Re\,(h)^2 - 8\,\omega^2\,\xi^2\,Re\,(h) + 1$ et $Re(h) \in \left[\frac{1}{4\xi\omega^2\,(\xi-1)}\,;\,\frac{1}{4\xi\omega^2\,(\xi+1)}\right]$.

Dans [5] des expressions analogues (obtenues pour un modèle d'amortissement totalement déterministe) sont exploitées de façon analytique pour $p_\lambda$ suivant une loi uniforme. Nous proposons d'exploiter l'expression (1) par intégration numérique, celle-ci étant intégrable si $\lambda$ est une variable aléatoire d'ordre deux. Cette hypothèse est physiquement réaliste puisque les variations de la pulsation propre sont dues aux variations des paramètres d'entrée, bornées dans notre cas. La figure 1 i) donne l'allure de la densité $p_{Re(H)}(Re(h);\omega,\xi)$ lorsque $p_\lambda$ est une densité normale de moyenne $220^2$ et de coefficient de variation 10% pour différentes pulsations $\omega$. Le coefficient d'amortissement critique $\xi$ est égal à 2%.




i) ii)

FIGURE 1 – i) Allure de la densité de la partie réelle de la fonction de transfert d'un oscillateur de valeur propre aléatoire lorsque $\lambda$ suit une loi normale de moyenne $220^2$ et de coefficient de variation 10% ; ii) Quantiles à $2,5\%$, $50\%$ et $97,5\%$ - Comparaison entre intégration numérique et simulations de Monte-Carlo.

L'intégration numérique de l'expression (1) présente deux difficultés. Tout d'abord, concernant les limites infinies aux bords du domaines, le problème est résolu en intégrant numériquement sur le domaine où la fonction est régulière $[\frac{1-\epsilon}{4\xi\omega^2\,(\xi-1)}, \frac{1-\epsilon}{4\xi\omega^2\,(\xi+1)}]$ et en intégrant analytiquement un équivalent de la fonction sur $[\frac{1}{4\xi\omega^2\,(\xi-1)}, \frac{1-\epsilon}{4\omega^2\,(\xi-1)}]$ et $[\frac{1-\epsilon}{4\xi\omega^2\,(\xi+1)}, \frac{1}{4\xi\omega^2\,(\xi+1)}]$. La seconde difficulté concerne la forme de la fonction lorsque $\omega$ s'eloigne de $\sqrt{\underline{\lambda}}$ (visible sur la figure 1 i) pour les pulsations $\omega = 100\ rad.s^{-1}$ et $\omega = 340\ rad.s^{-1}$). La densité tend vers une densité de Dirac en zéro. Il est donc nécessaire d'adapter le schéma d'intégration au gradient de la fonction. Une fois ces précautions prises, nous utilisons l'intégration de la densité de probabilité pour obtenir les grandeurs caractérisant la dispersion de la partie réelle de la FRF de l'oscillateur (moyenne, écart type, quantiles). A titre d'exemple, la figure 1 ii) présente les quantiles à $2,5\%$, $50\%$ et $97,5\%$ obtenus par intégration comparés à une simulation de Monte-Carlo d'un million de tirages. Les paramètres de l'exemple sont les mêmes que précédemment. Les résultats présentés par la figure 1 ii) permettent d'être confiant quant à la méthode d'intégration numérique développée.

Afin d'adapter la méthode de synthèse modale au cadre probabiliste, nous présentons maintenant une généralisation de ces résultats à un système à plusieurs degrés de liberté (ddl).

# 2 Système à plusieurs ddl.

## 2.1 Synthèse modale

On considère le modèle mécanique d'une structure obtenu par discrétisation éléments finis. On note $[\underline{\mathtt{M}}]$, $[\underline{\mathtt{K}}]$ et $[\underline{\mathtt{D}}]$ les matrices de masse, de rigidité et d'amortissement du modèle moyen. Ce modèle moyen est le modèle mécanique pour lequel les variables aléatoires modélisant les paramètres d'entrée, sont remplacées par leurs valeurs moyennes. L'équation du mouvement dans le domaine fréquentiel s'écrit alors :

$$(-\omega^2 [\underline{\mathtt{M}}] + j\omega [\underline{\mathtt{D}}] + [\underline{\mathtt{K}}])\, \underline{y}(\omega) = \underline{f}(\omega) \quad , \tag{2}$$

où $\underline{y}(\omega)$ est le vecteur des ddl moyens et $\underline{f}(\omega)$ le vecteur des efforts extérieurs moyens appliqués aux ddl de la structure. La synthèse modale s'appuie sur la résolution du problème aux valeurs propres suivant :

$$(-\omega^2 [\underline{\mathtt{M}}] + [\underline{\mathtt{K}}])\, \underline{y} = 0 \quad . \tag{3}$$

L'intérêt de la synthèse modale est de sélectionner une base de vecteurs propres $[\underline{\varphi}]$ de dimension $N$ faible devant le nombre total de ddl de la structure. On notera $\underline{\lambda_k}$ , $k = 1, \cdots, N$, les valeurs propres correspondantes. En effet, les premiers modes suffisent à décrire le comportement basse fréquence de la structure. La projection de l'équation (2) dans cette base conduit à une réduction du problème étudié. En faisant l'hypothèse que la matrice d'amortissement se diagonalise également dans la base $[\underline{\varphi}]$ (hypothèse de Basile communément admise), la matrice des fonctions de transfert du système réduit est diagonale. Son terme diagonal s'écrit :

$$H_{kk}(\omega) = \frac{-\omega^2 + \underline{\lambda}_k}{(-\omega^2 + \underline{\lambda}_k)^2 + 4\xi_k^2 \underline{\lambda}_k \omega^2} + j \frac{-2\xi_k \sqrt{\underline{\lambda}_k}\omega}{(-\omega^2 + \underline{\lambda}_k)^2 + 4\xi_k^2 \underline{\lambda}_k \omega^2} \quad , \tag{4}$$

où l'on reconnaît l'équation de l'oscillateur décrit dans la première partie. Ainsi, la fonction de transfert entre deux ddl $a$ et $b$ de la structure s'écrit : $[\underline{F}]_{ab} = \sum_{i=1}^{N} [\underline{H}]_{ii} [\underline{\varphi}]_{bi} [\underline{\varphi}]_{ai}$ .

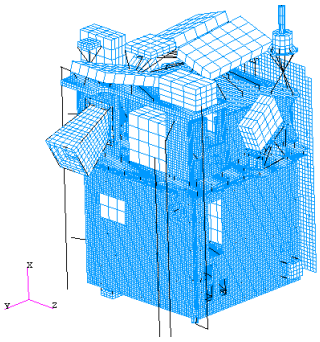
Les incertitudes sur les paramètres d'entrée de la structure vont conduire à un problème aux valeurs propres aléatoires. Afin de simplifier ce problème, nous faisons l'hypothèse que la base des vecteurs propres aléatoires reste proche de la base moyenne $[\underline{\varphi}]$. Ainsi l'aléa est uniquement porté par la matrice des fonctions de transfert aléatoires $[\mathbf{H}]$ dont chaque terme diagonal est un oscillateur aléatoire étudié dans la première partie. Nous considérons donc le vecteur aléatoire $Re(\{\mathbf{H}\})$ de densité jointe $p_{Re(\{\mathbf{H}\})}(Re(\{\mathbf{h}\}))$. La transformation permettant de calculer la fonction de transfert entre deux ddl $a$ et $b$ étant une combinaison linéaire des variables aléatoires de ce vecteur, la fonction caractéristique de $Re(F_{ab})$ s'écrit :

$$\Phi_{Re(F_{ab})}(v) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp(j < v, \sum_{i=1}^{N} Re(h_i) [\underline{\varphi}]_{bi} [\underline{\varphi}]_{ai} >) p_{Re(\{\mathbf{H}\})}(Re(\{\mathbf{h}\})) \mathrm{d}Re(\{\mathbf{h}\}) \quad . \tag{5}$$

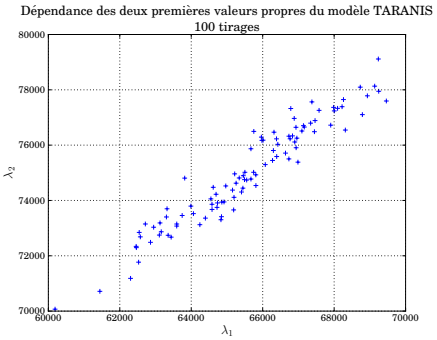
Une fois la fonction caractéristique calculée, plusieurs méthodes sont disponibles afin d'accéder aux grandeurs caractérisant la dispersion de $Re(F_{ab})$ (densité de probabilité, fonction de répartition). L'équation (5) est une intégrale de dimension $N$ relativement à la densité jointe du vecteur $Re(\{\mathbf{H}\})$. Il est donc important de connaître la structure de dépendance de ce vecteur.

## 2.2 Modélisation de la structure de dépendance de $Re(\{\mathbf{H}\})$

Afin d'illustrer et de justifier le besoin de modélisation de la structure de dépendance de $Re(\{\mathbf{H}\})$, nous introduisons l'exemple du satellite Taranis. Nous considérons le modèle éléments finis présenté par la figure 2 i). Certains paramètres d'entrée de ce modèle sont aléatoires, de lois connues, et indépendants (il s'agit de paramètres matériaux et de paramètres géométriques). La figure 2 ii), obtenue par un tirage de Monte-Carlo de 100 réalisations, illustre la dépendance des deux premières valeurs propres de ce système. Il apparaît clairement que celles-ci sont corrélées (même si les paramètres d'entrée du modèle sont indépendants). Ainsi, les termes du vecteur $Re(\{\mathbf{H}\})$ vont être corrélés. Nous proposons



i)




ii)

FIGURE 2 – i) Modèle éléments finis du satellite TARANIS. ii) Allure de la dépendance des deux premières valeurs propres du modèle.

donc d'identifier la structure de dépendance des valeurs propres par une copule puis d'expliciter la densité $p_{Re(\{\mathbf{H}\})}(Re(\{\mathbf{h}\}))$ en fonction de cette copule et des densités marginales $p_{\lambda_i}$.

Dans la suite, nous explicitons le cas $N = 2$ afin de simplifier les écritures, la généralisation étant immédiate. De plus, en pratique, le cas $N = 2$ risque d'être le plus fréquemment rencontré car la dépendance des valeurs propres ne doit être modélisée que si les modes concernés interviennent sur la même bande de fréquences. On suppose donc que l'on peut identifier la copule de densité $c$ permettant d'expliciter la densité jointe des valeurs propres de la façon suivante :

$$p_{\lambda_1,\lambda_2}(\lambda_1, \lambda_2) = p_{\lambda_1}(\lambda_1) \times p_{\lambda_2}(\lambda_2) \times c(F_{\lambda_1}(\lambda_1), F_{\lambda_2}(\lambda_2))$$

où $F_{\lambda_i}$ est la fonction caractéristique de $\lambda_i$. L'existence de cette copule est assurée par la théorème de Sklar [6]. La théorie des copules est présentée dans [6] et on trouvera une description très accessible dans [2]. Avec ce modèle de loi jointe des valeurs propres, nous pouvons utiliser les résultats classiques de transformation de variables aléatoires en dimension 2 (démarche analogue à celle de la partie 1 mais en dimension deux) et les résultats sur les transformations de copule (présentés dans [6] et adaptés à notre cas), ce qui nous permet au final d'obtenir l'expression analytique de la densité jointe de $Re(\{\mathbf{H}\})$. En appelant $\mathcal{F}_i$ la fonction, $\mathcal{F}_i : \mathbb{R} \to \left[\frac{1}{4\xi_i\omega^2\,(\xi_i-1)}\,;\frac{1}{4\xi_i\omega^2\,(\xi_i+1)}\right]$, telle que :

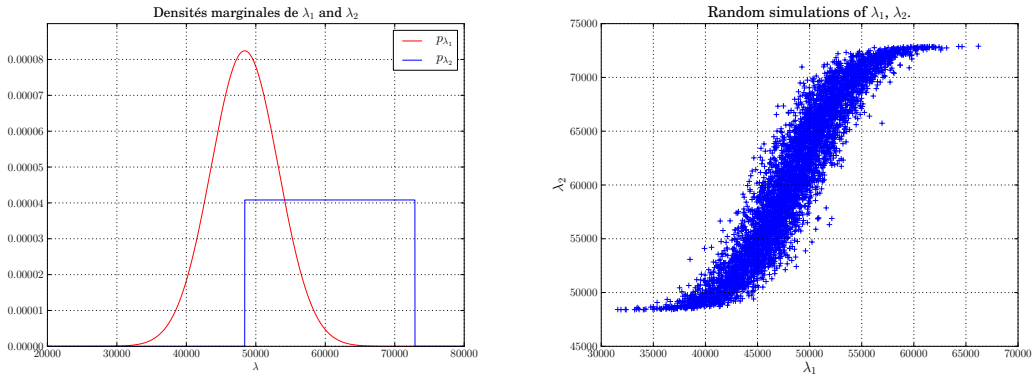
$$\mathcal{F}_i(\lambda_i\,;\xi_i,\omega) = Re(H) = \frac{-\omega^2 + \lambda_i}{(-\omega^2 + \lambda_i)^2 + 4\xi_i^2\lambda_i\omega^2} \tag{6}$$

nous obtenons :

$$p_{Re(\{\mathbf{H}\})}(Re(\{\mathbf{h}\})) = \tag{7}$$
$$\sum_{i,j=1}^{2}\left[\frac{p_{\lambda_1}(\mathcal{F}_i^{-1}(Re(H_1)))}{|J(\mathcal{F}_i^{-1}(Re(H_1)))|} \times \frac{p_{\lambda_2}(\mathcal{F}_j^{-1}(Re(H_2)))}{|J(\mathcal{F}_j^{-1}(Re(H_2)))|} \times c\left(F_{\lambda_1}(\mathcal{F}_i^{-1}(Re(H_1))), F_{\lambda_2}(\mathcal{F}_j^{-1}(Re(H_2)))\right)\right].$$

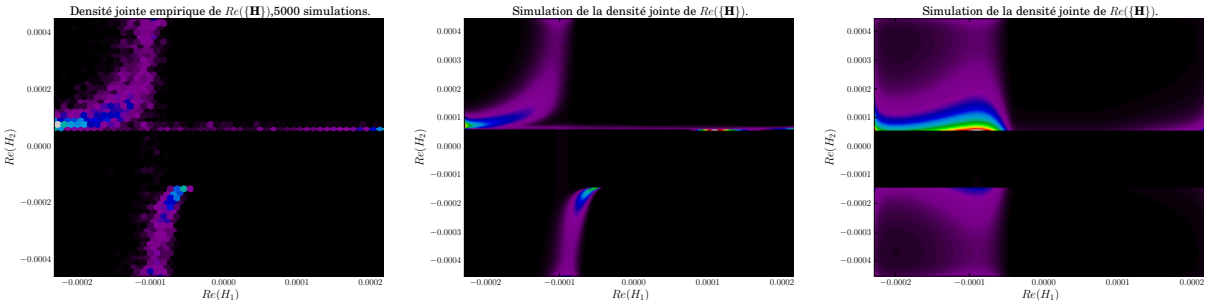
## 3 Illustrations numériques

Nous considérons l'exemple suivant :
- $p_{\lambda_1}$ est une densité normale de moyenne $220^2$ et de coefficient de variation $0,10$ et $\xi_1 = 0.02$ ;
- $p_{\lambda_2}$ est une densité uniforme sur $[220^2; 270^2]$ et $\xi_2 = 0.01$ ;
- $c$ est la densité d'une copule normale, de paramètre $\tau = 0,95$, appelé coefficient de corrélation de Kendall. Nous ne détaillerons pas ici les paramètres des copules, ceux-ci pouvant être trouvés par exemple dans [6] ou dans [7]. La figure 3 i) présente les densités marginales $p_{\lambda_1}$ et $p_{\lambda_2}$ et 3 ii) illustre la corrélation de ces deux valeurs propres. En appliquant la formule (7), à $\omega = 235\ rad.s{-}1$, nous obtenons la loi jointe du vecteur $Re(\{\mathbf{H}\})$, celle-ci est illustrée par la figure 4 ii). La figure 4 i) représente la densité jointe obtenue par tirage de Monte-Carlo. Enfin, la figure 4 iii) donne la densité




i) ii)

FIGURE 3 – i) Marginales $p_{\lambda_1}$ et $p_{\lambda_2}$. ii) Allure de la dépendance des deux premières valeurs propres.




i) ii) iii)

FIGURE 4 – i) Densité jointe empirique obtenue par 5000 tirages de Monte-Carlo. ii) Simulation de la densité jointe par la formule (7). iii) Simulation de la densité jointe par la formule (7), sans prendre en compte la corrélation des valeurs propres.

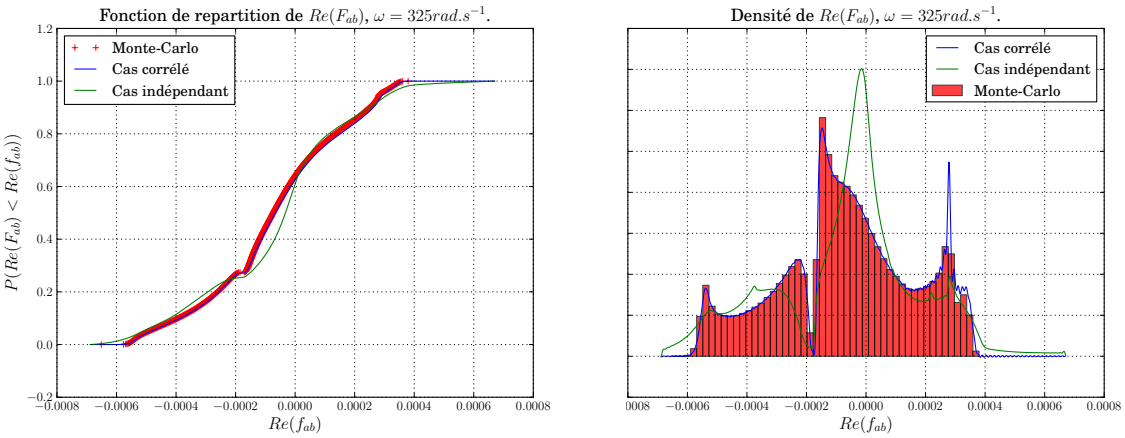
jointe obtenue en considérant les deux valeurs propres comme indépendantes. Nous voyons donc que l'expression analytique (7) est correcte et que la densité jointe de $Re(\{\mathbf{H}\})$ est fortement influencée par la corrélation des valeurs propres.

Nous restons dans les conditions de l'exemple précédent ($\omega = 235\ rad.s^{-1}$) et l'on considère $[\underline{\varphi}]_{bi} = [\underline{\varphi}]_{ai} = 1$. La fonction caractéristique d'une FRF entre deux ddl $a$ et $b$ du modèle est obtenue en calculant numériquement l'intégrale double (5). Cette intégration numérique demande de nombreuses précautions puisque les mêmes problèmes que pour la dimension un se posent. Une fois la fonction caractéristique calculée, nous obtenons la fonction de répartition par la formule de Gil-Pelaez [4], et plus précisément la méthode décrite dans [3]. Nous calculons également la densité de probabilité de $Re(F_{ab})$ par la formule sommatoire de Poisson comme décrit dans [1]. Les figures 5 i) et ii) illustrent les fonctions de répartition et les densités obtenues en prenant en compte ou non la corrélation des valeurs propres, et en comparant à chaque fois avec une méthode de Monte-Carlo d'un million de tirages.

Enfin, nous utilisons cette méthode afin de déterminer les quantiles à $2,5\%$, $50\%$ et $97,5\%$ de $Re(F_{ab})$ sur une bande de pulsation $\omega \in [170; 290]$. La performance de la méthode d'intégration et l'intérêt de prendre en compte la corrélation apparaissent une nouvelle fois sur la figure 6.

# 4 Conclusions

Le but de cet article était, d'une part, de montrer que la théorie des copules pouvait servir à modéliser la corrélation des valeurs propres et, d'autre part, d'évaluer l'influence de cette corrélation sur une fonction de réponse en fréquence. Il apparaît clairement sur les différents exemples traités que l'influence de la corrélation n'est pas négligeable. Il reste cependant à quantifier cette influence en fonction du type de dépendance et de son importance (paramètre de la copule).




i) ii)

FIGURE 5 – i) Fonctions de répartition ii) Densité de probabilité, obtenues en prenant en compte, ou non, la corrélation des valeurs propres, comparaison avec la méthode de Monte-Carlo

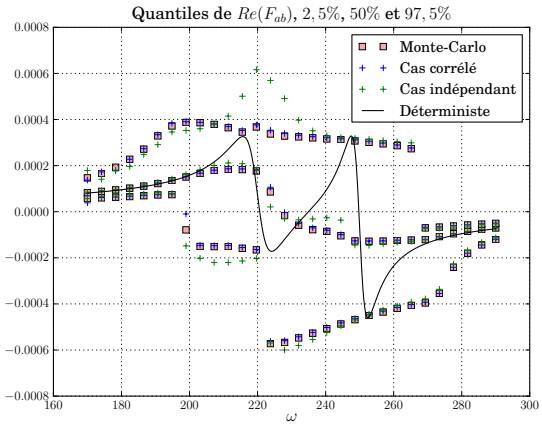



FIGURE 6 – Quantiles à $2,5\%$, $50\%$ et $97,5\%$.

**Remerciements :** Ce travail a été financé par le Centre National d'Études Spatiales (CNES) et Thales Alenia Space (TAS). Les auteurs remercient Fabrice Buffe (CNES), Jérôme Buffe et Anne Giovannini (TAS) pour leur soutien.

## Références

[1] J. Abate and W. Whitt. The Fourier-series method for inverting transforms of probability distributions. *Queueing Systems*, 10 :5–88, 1992.

[2] P. Clauss. Théorie des copules. Notes de cours, ENSAI.

[3] R. B. Davies. Numerical inversion of a characteristic function. *Biometrika*, 60 :415–417, 1973.

[4] J. Gil-Pelaez. Note on the inversion theorem. *Biometrika*, 38 :481–483, 1951.

[5] C. Heinkelé. *Synthèse modale probabiliste. Théorie et applications.* PhD thesis, Université Claude Bernard-Lyon I, Lyon, 2008.

[6] R. Nelsen. *An introduction to copulas.* Springer, 2006.

[7] OpenTURNS. *OpenTURNS : Reference Guide, V.0.15*, 2011. `http://trac.openturns.org`.