



**HAL**  
open science

# Étalement de la phase et cohérence temporelle d'un gaz de fermions condensé par paires à basse température

Yvan Castin

► **To cite this version:**

Yvan Castin. Étalement de la phase et cohérence temporelle d'un gaz de fermions condensé par paires à basse température. *Comptes Rendus. Physique*, 2019, 20, pp.540. 10.1016/j.crhy.2019.01.003 . hal-01849311v2

**HAL Id: hal-01849311**

**<https://hal.science/hal-01849311v2>**

Submitted on 11 Mar 2019

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Étalement de la phase et cohérence temporelle d'un gaz de fermions condensé par paires à basse température

## *Phase spreading and temporal coherence of a pair-condensed Fermi gas at low temperature*

Yvan Castin

*Laboratoire Kastler Brossel, ENS-PSL, CNRS, Sorbonne Université et Collège de France, Paris, France*

---

### Abstract

A condensate of pairs in an isolated, homogeneous, unpolarised, finite-size spin 1/2 tridimensional Fermi gas at an extremely low nonzero temperature, undergoes with time a phase change  $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$  with a random component, due at least to the coupling to the thermal phonons of the gas. Thanks to the quantum second Josephson relation connecting  $d\hat{\theta}/dt$  to the phonon mode occupation numbers, and to linearised kinetic equations giving the evolution of the occupation number fluctuations, we access the behaviour of the phase change variance  $\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]$  at times much longer than the phonon collision time. The case where the phonon branch has a convex start is similar to the Bose gas case: the leading collisional processes are the Beliaev-Landau three-phonon processes, and the variance is the sum of a ballistic term  $Ct^2$  and of a delayed diffusive term  $2D(t - t_0)$ , whose analytical expressions are given in the thermodynamic limit. The concave case is much more exotic. It is analysed at time scales much shorter than  $T^{-9}$ , allowing one to restrict to the 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons small-angle Landau-Khalatnikov processes. The total number of phonons is conserved and the phonon mean occupation numbers at equilibrium can exhibit a chemical potential  $\mu_\phi < 0$ , assumed to be isotropic. The phase change variance is then the sum of a ballistic term  $Ct^2$ , of a diffusive term  $2Dt$ , of exotic subsubleading terms  $2A(\pi t)^{1/2} + 2B \ln(t^{1/2})$  and of a constant term. The analytic expression of the coefficients  $C$ ,  $A$  and  $B$  is obtained, as well as the diverging leading behavior of  $D$  and of the constant term when  $\mu_\phi/k_B T \rightarrow 0$ . For  $\mu_\phi = 0$ , the variance sub-ballistic part becomes superdiffusive, of the form  $d_0 t^{5/3}$ , where  $d_0$  is known exactly. For a nonzero infinitesimal  $\mu_\phi/k_B T$ , a law is found, that interpolates between the superdiffusive spreading and the diffusive spreading of the sub-ballistic part. As by-products, new results are obtained on the phonon Landau-Khalatnikov damping rate, in particular for  $\mu_\phi < 0$ .

*Keywords:* Fermi gases; pair condensate; temporal coherence; phase diffusion; ultracold atoms

### Résumé

Un condensat de paires dans un gaz tridimensionnel de fermions de spin 1/2 isolé, homogène, non polarisé, de taille finie et de température extrêmement basse mais non nulle, subit au cours du temps un changement de phase  $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$  avec une composante aléatoire, ne serait-ce que par couplage aux phonons thermiques du gaz. À l'aide de la seconde relation de Josephson quantique reliant  $d\hat{\theta}/dt$  aux opérateurs nombres d'occupation des modes de phonons, et d'équations cinétiques linéarisées donnant l'évolution des fluctuations des nombres d'occupation, nous accédons au comportement de la variance  $\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]$  de ce déphasage aux temps longs devant le temps de collision des phonons. Le cas où la branche de phonons est de départ convexe ressemble à celui du gaz de bosons : les processus collisionnels dominants sont ceux à trois phonons de Beliaev-Landau, si bien que la variance est la somme d'un terme balistique  $Ct^2$  et d'un terme diffusif avec retard  $2D(t - t_0)$ , dont nous donnons les expressions analytiques à la limite thermodynamique. Le cas concave est beaucoup plus exotique. Nous l'analysons aux échelles de temps courtes devant  $T^{-9}$ , ce qui permet de garder comme seuls processus collisionnels ceux 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons de Landau-Khalatnikov aux petits angles. Le nombre total de phonons est conservé et les nombres moyens d'occupation des phonons à l'équilibre peuvent admettre un potentiel chimique  $\mu_\phi < 0$  supposé isotrope. La variance du déphasage

est alors la somme d'un terme balistique  $Ct^2$ , d'un terme diffusif  $2Dt$ , de termes sous-sous-dominants exotiques  $2A(\pi t)^{1/2} + 2B \ln(t^{1/2})$  et d'un terme constant. Nous obtenons analytiquement l'expression des coefficients  $C$ ,  $A$  et  $B$ , ainsi que le comportement dominant divergent de  $D$  et du terme constant lorsque  $\mu_\phi/k_B T \rightarrow 0$ . Si  $\mu_\phi = 0$ , la partie sous-balistique de la variance devient superdiffusive, de la forme  $d_0 t^{5/3}$ , où  $d_0$  est connu exactement. Pour  $\mu_\phi/k_B T$  infinitésimal non nul, nous trouvons la loi interpolant entre l'étalement superdiffusif et l'étalement diffusif de cette partie sous-balistique. Comme sous-produits, nous obtenons des résultats nouveaux sur le taux d'amortissement Landau-Khalatnikov des phonons, en particulier à  $\mu_\phi < 0$ .

*Mots-clés* : gaz de fermions ; condensat de paires ; cohérence temporelle ; diffusion de phase ; atomes froids

## 1. Introduction : système et position du problème

Considérons un gaz tridimensionnel de  $N$  fermions de spin  $1/2$  non polarisé ( $N_\uparrow = N_\downarrow$ ), préparé à l'instant  $t = 0$  à l'équilibre thermique à la température  $T$  dans une boîte cubique de côté  $L$  avec des conditions aux limites périodiques. Les fermions de spins opposés interagissent dans l'onde  $s$  avec une longueur de diffusion  $a$  et une portée négligeable (interaction de contact) ; les fermions de même spin n'interagissent pas. On sait alors qu'en dessous d'une température critique  $T_c$ , se forme un condensat de paires liées  $\uparrow\downarrow$  de fermions dans un mode  $\phi_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$  du champ de paires ; nous supposons ici que  $T \ll T_c$ . Aux instants ultérieurs  $t > 0$ , le gaz dans son ensemble est isolé, c'est-à-dire qu'il évolue librement sous l'effet des interactions sans couplage à l'environnement. En revanche, le condensat de paires n'est pas isolé et interagit avec les modes non condensés, peuplés par des excitations thermiques, et qui forment un bain déphasant. On demande quel est le temps de cohérence  $t_c$  correspondant du condensat, c'est-à-dire la largeur de sa fonction de cohérence  $\langle \hat{a}_0^\dagger(t) \hat{a}_0(0) \rangle$ , où  $\hat{a}_0$  annihile une paire condensée et la moyenne est prise dans l'opérateur densité du système. Comme on pouvait s'y attendre,  $t_c$  est le temps au bout duquel le condensat a perdu la mémoire de sa phase initiale, la variance du déphasage  $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$  subi par le condensat étant d'ordre unité [1]. Ici  $\hat{\theta}$  est l'opérateur phase du condensat [2] tel que  $\hat{a}_0 = e^{i\hat{\theta}} \hat{N}_0^{1/2}$ ,  $\hat{N}_0$  étant l'opérateur nombre de paires condensées.

Ce problème est fondamental, mais n'a rien d'académique. On sait préparer en laboratoire des gaz d'atomes froids fermioniques condensés par paires [3, 4, 5, 6] dans des potentiels de piégeage à fond plat [7, 8]. Comme les pièges utilisés sont immatériels, ces gaz sont bien isolés et, bien qu'en interaction, ne présentent que de faibles pertes de particules dues aux recombinaisons à trois corps [9]. Une méthode interférométrique de type Ramsey de mesure de la fonction de cohérence  $\langle \hat{a}_0^\dagger(t) \hat{a}_0(0) \rangle$  [10] est en cours d'implémentation sur des gaz d'atomes bosoniques [11] ; elle est transposable au cas des fermions par bosonisation adiabatique réversible des paires de Cooper atomiques [1] (on les transforme en dimères fortement liés par une rampe de champ magnétique près d'une résonance de Feshbach [12]). Notre question pourrait recevoir bientôt une réponse expérimentale. Il n'y a cependant à notre connaissance pas de prédiction théorique complète, l'étude de l'étalement de la phase du condensat de paires dans les références [1, 13] étant limitée aux valeurs de  $k_F a$  telles que la relation de dispersion du son dans le superfluide a un départ convexe, soit  $1/k_F a > -0,14$  d'après les calculs approchés (RPA d'Anderson) de la référence [14] ( $k_F = (3\pi^2 \rho)^{1/3}$  est le nombre d'onde de Fermi du gaz de densité totale  $\rho$ ). Ce cas convexe ressemble beaucoup à celui des bosons en interaction faible, la variance du déphasage comportant en général aux temps longs un terme dominant balistique ( $\propto t^2$ ) et un terme sous-dominant diffusif avec retard ( $\propto t - t_0$ ). L'étalement de la phase dans le cas où la relation de dispersion du son a un départ concave, qui inclut la limite BCS du gaz de fermions ( $k_F a \rightarrow 0^-$ ) [15], semblait totalement inexploré. Le présent travail comble cette lacune ; il prédit des termes sous-balistiques plus exotiques voire à croissance plus rapide qu'une simple diffusion de phase retardée. Le cas concave cachait donc un régime nouveau et assez inattendu d'étalement de la phase du condensat.<sup>1</sup>

La structure de l'article est simple. Nous précisons dans la section 2 le régime de basse température considéré et effectuons un bref rappel du formalisme à base d'équations cinétiques développé au fil des années par l'auteur et ses collaborateurs, et permettant d'accéder à la variance du déphasage  $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$  subi par le condensat. Nous traitons le cas d'une branche de phonons convexe dans la section 3, assez brièvement puisqu'il suffit d'adapter les résultats

1. Ce cas concave pourrait aussi en principe être réalisé avec des atomes bosoniques dans le régime d'interaction faible, si l'on savait créer un potentiel d'interaction à courte portée mais de largeur non négligeable, de l'ordre de la longueur de relaxation  $\xi$  du condensat [16].

de la référence [17] sur les bosons. Le cas peu défriché de la branche de phonons concave fait l'objet de la longue section 4 : après avoir fait le tri entre les différents processus collisionnels phononiques à basse température  $T$  (§4.1), compte tenu de l'échelle de temps très courte devant  $\hbar(mc^2)^8(k_B T)^{-9}$  considérée ( $m$  est la masse d'un fermion et  $c$  la vitesse du son à température nulle), nous traitons séparément le terme d'étalement balistique de la phase (§4.2) et les termes sous-balistiques (§4.3). Ces derniers ont exigé des efforts notables : après l'écriture d'équations cinétiques pour des collisions à quatre phonons (§4.3.1), nous effectuons une approximation simple dite « de taux » de leur forme linéarisée, dont elle néglige les termes non diagonaux, et qui prédit diverses contributions exotiques à la variance de  $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ , avec une loi de puissance non entière ou logarithmique (§4.3.2); nous établissons quelle part de vérité ces prédictions approchées contiennent, en revenant aux équations cinétiques linéarisées exactes (§4.3.3). Cette étude nous a permis aussi d'obtenir de nouvelles expressions beaucoup plus maniables du taux d'amortissement Landau-Khalatnikov à quatre phonons, sous forme d'une intégrale double (41) puis simple (B.1), au lieu de quadruple dans les références [16, 18]. Nous concluons dans la section 5.

## 2. Régime considéré et formalisme de base

Nous nous plaçons ici à une température extrêmement basse mais non nulle.<sup>2</sup> Ceci permet de négliger les excitations du gaz par brisure de paires, qui présentent une bande d'énergie interdite  $\Delta$  et ont donc une densité exponentiellement faible  $O(e^{-\Delta/k_B T} T^{1/2})$  pour  $k_B T \ll \Delta$ . Le condensat de paires est alors couplé seulement à un gaz thermique peu dense d'excitations sonores (des phonons) de relation de dispersion en énergie  $\mathbf{q} \mapsto \epsilon_{\mathbf{q}}$ , où  $\mathbf{q}$  est le vecteur d'onde, et l'équation d'évolution de son opérateur phase [1] se réduit (après un lissage temporel supprimant les oscillations rapides à la pulsation thermique typique  $\epsilon_{q_{\text{th}}}/\hbar \approx k_B T/\hbar$ ) à

$$-\frac{\hbar}{2} \frac{d\hat{\theta}}{dt} = \mu_0(N) + \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \frac{d\epsilon_{\mathbf{q}}}{dN} \hat{n}_{\mathbf{q}} \quad (1)$$

Ici  $\hat{n}_{\mathbf{q}}$  est l'opérateur nombre de phonons dans le mode  $\mathbf{q}$  et  $\mu_0$  le potentiel chimique du gaz de  $N$  fermions à température nulle. L'équation (1) a une interprétation physique simple [1] : son second membre constitue un opérateur potentiel chimique microcanonique du gaz à suffisamment basse température, la seconde contribution, correction thermique à la première, étant la dérivée adiabatique isentropique (ici aux  $\hat{n}_{\mathbf{q}}$  fixés) de l'opérateur énergie des phonons  $\sum_{\mathbf{q} \neq 0} \epsilon_{\mathbf{q}} \hat{n}_{\mathbf{q}}$  par rapport au nombre total de particules  $N$ . L'équation (1) est donc une généralisation quantique opératoire de la seconde relation de Josephson reliant la dérivée temporelle du paramètre d'ordre du gaz à son potentiel chimique. La méthode la plus simple et la plus générale pour l'obtenir utilise l'hydrodynamique quantique, voir l'annexe B de la référence [1]. On écrit d'abord les équations du mouvement des opérateurs champs de phase  $\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$  et de densité  $\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$  du gaz superfluide. Dans la limite de basse température  $k_B T \ll \Delta, mc^2, \epsilon_F$ , où  $\epsilon_F$  est l'énergie de Fermi et  $c > 0$  est la vitesse du son à température nulle, les fluctuations spatiales de densité  $\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$  et de phase  $\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$  sont faibles, ce qui autorise à linéariser ces équations autour de la solution uniforme  $\hat{\rho}_0(t) = \hat{N}/L^3$  et  $\hat{\phi}_0(t) = \hat{\theta}(t)/2$  ( $\hat{N}$  est l'opérateur nombre total de particules). On développe ensuite  $\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$  et  $\delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$  sur les modes propres des équations linéarisées, avec comme coefficients les habituels opérateurs d'annihilation  $\hat{b}_{\mathbf{q}}$  et de création  $\hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger$  des phonons de vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ . Après injection de ces développements modaux dans l'expression de  $d\hat{\theta}/dt$  écrite au second ordre en  $\delta\hat{\rho}(\mathbf{r}, t)$  et  $\mathbf{grad} \delta\hat{\phi}(\mathbf{r}, t)$ , on trouve les termes diagonaux  $\propto \hat{n}_{\mathbf{q}} = \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}}$  de l'équation (1), et des termes non diagonaux  $\propto \hat{b}_{\mathbf{q}}^\dagger \hat{b}_{-\mathbf{q}}$  et  $\propto \hat{b}_{\mathbf{q}} \hat{b}_{-\mathbf{q}}^\dagger$ . Les termes non diagonaux oscillent rapidement à l'échelle du temps de collision entre phonons; on peut donc les supprimer par lissage temporel, comme il a été fait dans (1), sans que cela affecte l'étalement de la phase du condensat aux temps longs (voir l'annexe E de la référence [22]). Enfin, la température est suffisamment

2. À température nulle, il n'y a aucune excitation élémentaire ou collective présente dans le gaz, donc aucun environnement déphasant pour le condensat puisque le système est isolé. À nombre total  $N$  de particules fixé, notre formalisme prédit que le temps de cohérence du condensat est infini. Ceci est en accord avec un résultat obtenu par Beliaev dans le cas bosonique [19]. Le fait que le système ne soit pas un condensat pur dans son état fondamental, c'est-à-dire que le condensat soit sujet à une déplétion quantique, ne change rien à l'affaire, la fraction non condensée ne constituant pas une composante excitée du point de vue du gaz en interaction (même si c'en est une dans le cas bosonique du point de vue du gaz parfait). Lorsque  $N$  varie d'une réalisation de l'expérience à l'autre, on retrouve après moyenne sur les réalisations l'étalement balistique de la phase du condensat déjà prédit pour un gaz de bosons à température nulle [20, 21], voir notre note 3.

basse ( $k_B T \ll mc^2, k_B T \ll |\gamma|^{1/2} mc^2$ ) pour qu'on puisse ignorer les termes autres que linéaire et cubique dans le développement de  $\epsilon_{\mathbf{q}}$  à faible nombre d'onde :

$$\epsilon_{\mathbf{q}} \underset{q \rightarrow 0}{=} \hbar c q \left[ 1 + \frac{\gamma}{8} \left( \frac{\hbar q}{mc} \right)^2 + O(q^4 \ln q) \right] \quad (2)$$

où le paramètre de courbure  $\gamma$  est sans dimension. Lorsque  $\gamma > 0$ , la branche de phonons a un départ convexe ; lorsque  $\gamma < 0$ , elle a un départ concave. Alors que  $c$  se déduit de l'équation d'état ( $mc^2 = \rho d\mu_0/d\rho$  comme le prédit l'hydrodynamique quantique),  $\gamma$  doit être mesuré [23, 24] ou déduit d'une théorie microscopique exacte, ce qui n'a pas encore été fait dans les gaz d'atomes froids (les prédictions [14] de la RPA d'Anderson ne sont qu'indicatives).

Le calcul de l'étalement de la phase du condensat se ramène, au travers de l'équation (1), à un pur problème de dynamique de phonons. Comme le système est dans un état stationnaire, la variance du déphasage pendant  $t$  vaut [17]

$$\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = 2 \text{Re} \int_0^t d\tau (t - \tau) C(\tau) \quad (3)$$

où  $C(\tau)$  est la fonction de corrélation de la vitesse de variation de la phase :

$$C(\tau) = \left\langle \frac{d\hat{\theta}}{dt}(\tau) \frac{d\hat{\theta}}{dt}(0) \right\rangle - \left\langle \frac{d\hat{\theta}}{dt} \right\rangle^2 \quad (4)$$

la moyenne  $\langle \dots \rangle$  étant prise dans l'opérateur densité du système. La connaissance de la fonction de corrélation  $C(\tau)$  se ramène donc à celles  $Q_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}(\tau) = \langle \delta \hat{n}_{\mathbf{q}}(\tau) \delta \hat{n}_{\mathbf{q}'}(0) \rangle$  des fluctuations  $\delta \hat{n}_{\mathbf{q}}$  des nombres de phonons autour de leur valeur moyenne  $\bar{n}_{\mathbf{q}}$ . Ces dernières sont données par des équations cinétiques décrivant la redistribution incessante de quanta entre les modes de phonons par collision entre eux, et que l'on peut ici linéariser pour obtenir

$$\frac{d}{dt} \delta n_{\mathbf{q}} = \sum_{\mathbf{q}'} M_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \delta n_{\mathbf{q}'} \quad (5)$$

Cette forme linéarisée hérite des bonnes propriétés des équations cinétiques complètes non linéaires : elle repose sur une base microscopique solide incorporant les collisions 1 phonon  $\leftrightarrow$  2 phonons de Beliaev-Landau (branche de phonons convexe) ou 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons de Landau-Khalatnikov (branche concave), elle décrit la relaxation exponentielle en temps des nombres d'occupation moyens vers un état stationnaire donc la thermalisation, et respecte la stricte conservation de l'énergie totale  $E$ . Dans le cas concave, elle conserve de plus le nombre total de phonons  $N_\phi$ . La matrice  $M$  admet un vecteur propre de valeur propre nulle pour chaque quantité conservée par les équations cinétiques complètes, c'est-à-dire que la dimension de son noyau est égale au nombre de constantes du mouvement. Dans le secteur de moment cinétique nul qui importe dans l'étalement de la phase, le noyau de  $M$  est donc de dimension un dans le cas convexe et de dimension deux dans le cas concave. Ces vecteurs propres de valeur propre nulle jouent un rôle important dans la suite de l'étude : ils sont associés à des combinaisons linéaires des  $\delta n_{\mathbf{q}}$  non amorties qui induisent de ce fait un étalement balistique de la phase du condensat lorsque les quantités conservées associées  $E$  (cas convexe) ou  $(E, N_\phi)$  (cas concave) ont une variance non nulle dans l'opérateur densité du système, c'est-à-dire varient d'une réalisation à l'autre de l'expérience.

Il reste à résoudre les équations cinétiques linéarisées (5), sous leur forme explicite (13) dans le cas convexe et (39) dans le cas concave. Les relations matricielle et vectorielle [17]

$$Q(\tau) = e^{M\tau} Q(0) \text{ et } C(\tau) = \vec{A} \cdot Q(\tau) \vec{A} \quad (6)$$

donnent certes la solution formelle du problème ; on a introduit ici les matrices  $M$  et  $Q$  de composantes  $M_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$  et  $Q_{\mathbf{q}\mathbf{q}'}$ , ainsi que le vecteur  $\vec{A}$  de composantes

$$A_{\mathbf{q}} = \frac{2}{\hbar} \frac{d\epsilon_{\mathbf{q}}}{dN} \quad (7)$$

Remarquons au passage que  $\vec{A}$  vit dans le secteur de moment cinétique nul (ses composantes ne dépendent que du module de  $\mathbf{q}$  et sont donc isotropes), ce qui permettra dans la suite de restreindre l'étude de  $M$  à ce même secteur. Mais l'enjeu de notre travail est d'obtenir des résultats explicites sur l'étalement de la phase exacts à l'ordre dominant en température et à la limite thermodynamique  $N \rightarrow +\infty$  à  $\rho$  fixé, la température étant suffisamment basse pour que les interactions entre phonons soient bien décrites par l'hydrodynamique quantique.

### 3. Cas convexe

Lorsque la branche de phonons a un départ convexe (paramètre de courbure  $\gamma > 0$  dans l'équation (2)), les processus de collision dominants à basse température sont ceux à trois phonons de Beliaev et de Landau,  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{k}'$  et  $\mathbf{q} + \mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}'$  (voir la figure 1a) [25, 26, 27]. Ils ne conservent pas le nombre de quasi-particules. Aussi le gaz de phonons a-t-il un potentiel chimique nul à l'équilibre,

$$\bar{n}_{\mathbf{q}} = \frac{1}{e^{\beta\epsilon_{\mathbf{q}}} - 1} \quad (8)$$

avec  $\beta = 1/k_B T$ . C'est la même situation que la limite de basse température du gaz de bosons en interaction faible, déjà traitée dans la référence [17], à des facteurs globaux près dans les  $A_{\mathbf{q}}$  (le paramètre de courbure  $\gamma$  dépend de  $N$  dans le cas des fermions, alors qu'il vaut  $\gamma = 1$  dans le spectre de Bogolioubov) et sur l'amplitude du couplage Beliaev-Landau. Une transposition directe des résultats de la référence [17] au cas des fermions donne, à la limite thermodynamique et aux temps longs devant l'inverse du taux de collision typique  $\gamma_{\text{coll}}$  entre phonons, l'habituelle loi balistico-diffusive<sup>3</sup>

$$\boxed{\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \underset{\gamma_{\text{coll}} t \gg 1}{=} \left[ \partial_E \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, N) \right]^2 (\text{Var } E) \frac{4t^2}{\hbar^2} + 2D(t - t_0) + o(1)} \quad (9)$$

avec  $\mu_{\text{mc}}(E, N)$  le potentiel chimique microcanonique d'un gaz de  $N$  fermions d'énergie totale  $E$ ,  $\bar{E}$  étant la moyenne de l'énergie totale et  $\text{Var } E$  la variance supposée normale ( $\text{Var } E = O(N)$ ) de ses fluctuations,  $D$  est le coefficient de diffusion de la phase et  $t_0$  le temps de retard à la diffusion. La même transposition conduit aux équivalents à basse température dans l'ensemble canonique ( $\text{Var}_{\text{can}} E = k_B T^2 \partial_T \bar{E}$ ) :

$$[\partial_E \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, N)]^2 \text{Var}_{\text{can}} E \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{2\pi^2 u^2 (k_B T)^5}{15 N (\hbar c)^3 \rho} \quad (10)$$

$$\frac{\hbar N D}{m c^2} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} c_1 \frac{9\gamma^2 (2u - \frac{\partial \ln \gamma}{\partial \ln \rho})^2 (k_B T)^4}{(1+u)^2} \quad (11)$$

$$\frac{m c^2 t_0}{\hbar} \underset{T \rightarrow 0}{\sim} \frac{-9c_2}{16 \sqrt{2} c_1} \frac{1}{(1+u)^2} \left( \frac{\hbar \rho^{1/3}}{m c} \right)^3 \left( \frac{k_B T}{m c^2} \right)^{-5} \quad (12)$$

Les constantes  $c_1$  et  $c_2$  sont celles de la référence [17] ( $c_1 \simeq 0,3036$ ,  $c_2 \simeq -0,2033$ ),  $\rho$  est la densité totale et  $u = \partial \ln c / \partial \ln \rho$  le paramètre de Grüneisen du gaz de fermions. Le résultat (10) reproduit celui de la référence [28] dans le cas particulier du gaz de bosons en interaction faible. L'équivalent (11) généralise celui (spécifique de la limite unitaire  $1/a = 0$ ) de la référence [1] et reproduit celui (VIII.59) de la référence [13] sous une forme un peu différente. De manière remarquable, l'équivalent (12) du temps de retard  $t_0$  coïncide avec celui du temps d'amortissement Beliaev-Landau des phonons thermiques  $q = k_B T / \hbar c$  de la référence [16] à un facteur numérique près. Les résultats (11,12) valent pour un grand système préparé dans un ensemble statistique quelconque avec des fluctuations normales de  $E$  et  $N$  [17]. Pour être complet, nous donnons l'expression utilisée à basse température des équations cinétiques linéarisées sur les fluctuations isotropes  $\delta n_{\mathbf{q}} = \delta n_q$  des nombres d'occupation à la limite thermodynamique :

$$\frac{d}{dt} \delta n_q = \frac{(1+u)^2 \hbar}{4\pi m \rho} \left\{ -\delta n_q \left[ \int_0^{+\infty} dk k^2 (k+q)^2 (\bar{n}_k^\ell - \bar{n}_{k+q}^\ell) + \int_0^q dk k^2 (q-k)^2 (\bar{n}_k^\ell + 1/2) \right] \right. \\ \left. + \int_0^{+\infty} dk k^2 (k+q)^2 (\bar{n}_{k+q}^\ell - \bar{n}_q^\ell) \delta n_k + \int_0^q dk k^2 (q-k)^2 (\bar{n}_{q-k}^\ell - \bar{n}_q^\ell) \delta n_k + \int_q^{+\infty} dk k^2 (k-q)^2 (1 + \bar{n}_{k-q}^\ell + \bar{n}_q^\ell) \delta n_k \right\} \quad (13)$$

où les valeurs moyennes thermiques  $\bar{n}_q^\ell = [\exp(\hbar c q / k_B T) - 1]^{-1}$  sont celles d'une branche de phonons linéaire.

3. Si  $N$  a des fluctuations normales, le coefficient du terme balistique  $4t^2/\hbar^2$  vaut  $\langle [\delta N \partial_N \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N}) + \delta E \partial_E \mu_{\text{mc}}(\bar{E}, \bar{N})]^2 \rangle$  avec  $\delta N = N - \bar{N}$  et  $\delta E = E - \bar{E}$ . En revanche,  $D$  et  $t_0$  restent inchangés (à l'ordre dominant à la limite thermodynamique).

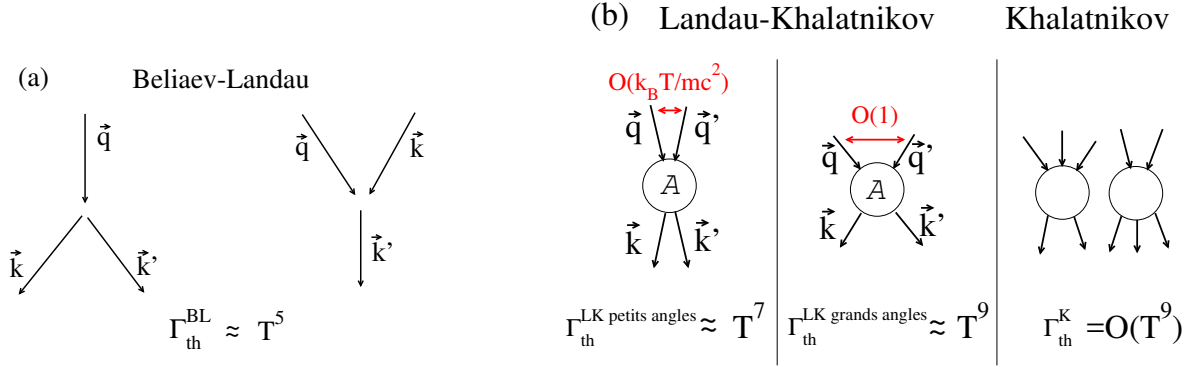


FIGURE 1: Les processus d'interaction dominants entre phonons à basse température et les lois d'échelle en température du taux de décroissance correspondant  $\Gamma_{\mathbf{q}}$  des phonons thermiques de nombre d'onde  $q \approx k_B T/\hbar c$ . (a) Cas  $\gamma > 0$  dans l'équation (2) (branche de départ convexe) : processus à trois phonons de Beliaev et de Landau (loi en  $T^5$ ). (b) Cas  $\gamma < 0$  (branche de départ concave) : les processus à quatre phonons (2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons) de Landau-Khalatnikov aux petits angles (écarts angulaires  $O(k_B T/mc^2)$  entre les quatre vecteurs d'onde mis en jeu) l'emportent (loi en  $T^7$ ) sur ceux aux grands angles (loi en  $T^9$ ) et sur ceux à cinq phonons (2 phonons  $\leftrightarrow$  3 phonons) de Khalatnikov ou à trois phonons de Beliaev-Landau (loi en  $O(T^9)$ , voir la note 5), et sont les seuls à être pris en compte ici. Les lois en température pour le taux de décroissance thermique typique sont données ici sous une forme ne respectant pas les dimensions,  $\Gamma_{\text{th}} \approx T^\alpha$ . Dans le cas convexe, il faut comprendre  $\hbar\Gamma_{\text{th}} \approx (mc^2)^{-5/2} \epsilon_F^{-3/2} (k_B T)^5$  où  $\epsilon_F$  est l'énergie de Fermi du gaz [16]; dans le cas concave, où l'on a nécessairement  $\epsilon_F \approx mc^2$  [14], il faut comprendre  $\hbar\Gamma_{\text{th}} \approx (mc^2)^{1-\alpha} (k_B T)^\alpha$ .

Il est utile pour la suite de rappeler, dans le cadre des équations cinétiques linéarisées (5), d'où provient le terme balistique de l'équation (9) [17]. Par conservation de l'énergie totale des phonons, on doit avoir  $\vec{\epsilon} \cdot \mathbf{M} = 0$  ( $\vec{\epsilon}$  est le vecteur de composantes  $\epsilon_{\mathbf{q}}$ ), c'est-à-dire que  $\vec{\epsilon}$  est vecteur propre à gauche de  $\mathbf{M}$  avec la valeur propre nulle. Selon un résultat d'algèbre linéaire élémentaire,  $\mathbf{M}$  admet alors un vecteur propre à droite  $\vec{d}_\epsilon$  de valeur propre nulle, c'est le vecteur dual de  $\vec{\epsilon}$ . Ici, il est facile à identifier : même si l'on écarte  $\beta$  de  $\delta\beta$  de sa valeur physique  $1/k_B T$ , l'expression (8) reste stationnaire, donc les variations correspondantes  $\delta\bar{n}_{\mathbf{q}}$  au premier ordre en  $\delta\beta$  doivent être une solution stationnaire des équations cinétiques linéarisées, d'où  $(d_\epsilon)_{\mathbf{q}} \propto -\partial_\beta \bar{n}_{\mathbf{q}} = \epsilon_{\mathbf{q}} \bar{n}_{\mathbf{q}} (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}})$  à un facteur de normalisation près (il faut avoir  $\vec{\epsilon} \cdot \vec{d}_\epsilon = 1$ ) [17]. En général, le vecteur  $Q(0)\vec{A}$  admet un coefficient  $\vec{\epsilon} \cdot Q(0)\vec{A}$  non nul sur  $\vec{d}_\epsilon$  si bien que  $C(\tau)$  a une limite non nulle lorsque  $\tau \rightarrow +\infty$  et  $\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]$  diverge quadratiquement en temps. En revanche, dans l'ensemble microcanonique,  $\text{Var} E = 0$ , toutes les fluctuations physiques  $\delta n_{\mathbf{q}}$  sont d'énergie totale nulle  $\sum_{\mathbf{q}} \epsilon_{\mathbf{q}} \delta n_{\mathbf{q}} = 0$  et  $\vec{\epsilon} \cdot Q(0) \equiv 0$  : l'étalement de la phase est diffusif.

#### 4. Cas concave

Lorsque la branche de phonons a un départ concave (paramètre de courbure  $\gamma < 0$  dans l'équation (2)), les processus 1 phonon  $\leftrightarrow$  2 phonons de Beliaev-Landau ne conservent plus l'énergie. Il en va de même pour tout processus 1 phonon  $\leftrightarrow$   $n$  phonons,  $n > 2$ . Les processus dominants sont alors ceux de Landau-Khalatnikov à quatre phonons, 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons, dont l'amplitude de couplage effective  $\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  a une expression connue dans le cadre de l'hydrodynamique quantique (il faut un diagramme du premier ordre et six diagrammes du second ordre de la théorie des perturbations) [29, 16]. Le taux de collision thermique correspondant  $\Gamma_{\text{th}}^{\text{LK}}$  est cependant multi-échelle en température : il varie en  $T^7$  pour des collisions aux petits angles ( $\mathbf{q}, \mathbf{q}', \mathbf{k}, \mathbf{k}'$  colinéaires et de même sens à des écarts angulaires  $O(k_B T/mc^2)$  près) et en  $T^9$  pour des collisions aux grands angles (voir la figure 1b). Nous étudions ici l'étalement de la phase du condensat de paires à l'échelle de temps des collisions aux petits angles (§4.1). Alors que le terme balistique dans la variance de  $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$  peut se déduire astucieusement de l'existence de deux quantités conservées, l'énergie des phonons  $E_\phi$  et leur nombre total  $N_\phi$  (§4.2), le calcul de la contribution sous-balistique nécessite l'écriture explicite des équations cinétiques pour les collisions à quatre phonons et la résolution de leur forme linéarisée autour de l'équilibre (§4.3).

#### 4.1. Échelle de temps considérée

Dans ce travail, nous étudions l'étalement de la phase du condensat à une échelle de temps  $t \approx \hbar(mc^2)^6(k_B T)^{-7}$  et négligeons les processus collisionnels entre phonons apparaissant aux échelles de temps  $\approx \hbar(mc^2)^8(k_B T)^{-9}$  ou ultérieures. En d'autres termes, nous ne tenons compte que des collisions  $\mathbf{q}+\mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{k}+\mathbf{k}'$  aux petits angles (voir la figure 1b). Nous ne pouvons donc décrire ni la relaxation de la direction des vecteurs d'onde vers une distribution isotrope (les processus aux petits angles changent la direction de manière négligeable<sup>4</sup>) ni la relaxation du nombre total de phonons  $N_\phi$  ou plus commodément du potentiel chimique  $\mu_\phi$  des phonons vers sa valeur à l'équilibre thermique vrai (les processus de Landau-Khalatnikov 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons conservent  $N_\phi$ , au contraire des processus Beliaev-Landau et des processus sous-dominants à 5 phonons de la figure 1b).<sup>5</sup> À l'échelle de temps  $T^{-7}$ , il existe donc des distributions de phonons  $\bar{n}_\mathbf{q}$  apparemment stationnaires anisotropes et de potentiel chimique  $\mu_\phi$  non nul au contraire de l'équation (8) [30].<sup>6</sup> Pour simplifier, et parce que c'est *a priori* naturellement le cas dans une expérience d'atomes froids, nous prenons des nombres d'occupation moyens isotropes pour les phonons,

$$\bar{n}_\mathbf{q} = \frac{1}{e^{\beta(\epsilon_\mathbf{q}-\mu_\phi)} - 1} \quad (14)$$

mais sans contrainte sur  $\mu_\phi$  (autre que  $\mu_\phi \leq 0$ ). Il sera commode dans la suite d'utiliser la notation

$$\nu = \beta\mu_\phi \quad (15)$$

La donnée seule des nombres moyens de phonons (14) ne suffit pas à déterminer l'étalement de la phase du condensat : comme on le voit sur l'équation (6), il faut connaître la matrice des covariances  $Q(0)$  des nombres d'occupation donc préciser l'opérateur densité  $\hat{\rho}_\phi$  des phonons. Pour simplifier, nous supposons dans un premier temps que le gaz de fermions non polarisé est préparé dans un ensemble canonique généralisé, défini par le nombre fixé  $N$  de fermions, la température  $T$  et le potentiel chimique  $\mu_\phi$  des phonons (qui fixe leur nombre moyen), d'où l'opérateur densité gaussien des phonons

$$\hat{\rho}_\phi = \frac{1}{\Xi} e^{-\beta \sum_{\mathbf{q} \neq 0} (\epsilon_\mathbf{q} - \mu_\phi) \hat{n}_\mathbf{q}} \quad (16)$$

où  $\Xi$  assure que  $\hat{\rho}_\phi$  est de trace unité. D'après le théorème de Wick, la matrice des covariances  $Q(0)$  est alors diagonale :

$$[Q(0)]_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \stackrel{\hat{\rho}_\phi \text{ de (16)}}{=} [Q_d(0)]_{\mathbf{q}\mathbf{q}'} \equiv \bar{n}_\mathbf{q}(1 + \bar{n}_\mathbf{q})\delta_{\mathbf{q},\mathbf{q}'} \quad (17)$$

Nous verrons dans la suite comment traiter un cas plus général.

#### 4.2. Sortir le terme balistique

De manière remarquable, nous pouvons obtenir dans le cas général le terme balistique de  $\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)]$  aux temps longs, sans écrire explicitement les équations cinétiques pour les collisions 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons. Il suffit d'exploiter l'existence de deux quantités conservées par évolution temporelle [32], ici l'énergie des phonons  $E_\phi = \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \epsilon_\mathbf{q} n_\mathbf{q}$  et leur nombre total  $N_\phi = \sum_{\mathbf{q} \neq 0} n_\mathbf{q}$ . Comme les fluctuations  $\delta E_\phi = E_\phi - \bar{E}_\phi$  et  $\delta N_\phi = N_\phi - \bar{N}_\phi$  sont elles aussi conservées, la matrice  $M$  des équations cinétiques linéarisées doit satisfaire aux conditions

$$\vec{e} \cdot M = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u}\vec{n} \cdot M = 0 \quad (18)$$

4. Si chaque collision aux petits angles change la direction de  $\mathbf{q}$  d'un angle aléatoire  $\delta\theta \approx k_B T/mc^2$ , il faut enchaîner  $n_{\text{coll}} \approx 1/\text{Var} \delta\theta \approx T^{-2}$  collisions successives (supposées indépendantes) pour thermaliser la direction de  $\mathbf{q}$ , ce qui prend le même temps (pour le même effet) qu'une seule collision aux grands angles.

5. Pour les processus 2 phonons  $\leftrightarrow$  3 phonons, de taux maximal aux petits angles, Khalatnikov trouve un taux de décroissance  $\Gamma_{\text{th}}^K \approx T^{11}$ . D'après lui, le nombre total de phonons  $N_\phi$  se thermaliserait donc avec un taux  $\propto T^{11}$  [30]. Cependant, les processus de Beliaev-Landau (qui changent aussi  $N_\phi$ ) ne sont à cet ordre plus énergétiquement interdits, les processus 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons de Landau-Khalatnikov conférant aux phonons entrants et sortants une largeur non nulle en énergie  $\Gamma_{\text{th}}^{LK} \approx T^7$ . On trouve alors que  $\Gamma_{\text{th}}^{\text{BL}} \approx T^9$  d'après l'équation (5.6) de la référence [31]. Ceci pointe plutôt vers un taux de thermalisation de  $N_\phi$  d'ordre  $T^9$ . Nous mettons donc dans la figure 1b un  $O(T^9)$ , qui suffit ici.

6. On peut tout simplement avoir un potentiel chimique, voire une température, dépendant de la direction du vecteur d'onde  $\mathbf{q}$ .



où  $\vec{\epsilon}$  est de composantes  $\epsilon_q$  comme dans la section 3 et  $\vec{u}\vec{n}$  est de composantes toutes égales à 1 :

$$\vec{\epsilon} = (\epsilon_q)_{q \neq 0} \text{ et } \vec{u}\vec{n} = (1)_{q \neq 0} \quad (19)$$

$M$  admet donc deux vecteurs propres à gauche de valeur propre nulle, et ce sont les « seuls » dans le secteur isotrope de moment cinétique nul dans lequel vit le terme source  $Q_d(0)\vec{A}$  de l'équation (6), puisque  $M$  n'y admet pas d'autre quantité conservée : les « autres » vecteurs propres à gauche isotropes  $\vec{e}_m$  (linéairement indépendants de  $\vec{\epsilon}$  et  $\vec{u}\vec{n}$ ) correspondent à des valeurs propres  $\Lambda_m$  de  $M$  de partie réelle  $< 0$ , c'est-à-dire à des modes cinétiques exponentiellement amortis (nous verrons au §4.3.3 que les  $\Lambda_m$  sont réelles). Nous en déduisons que  $M$  admet seulement deux vecteurs propres à droite isotropes linéairement indépendants de valeur propre nulle. Nous les trouvons comme dans la section 3 en remarquant que l'expression (14) de  $\vec{n}_q$  reste une solution stationnaire des équations cinétiques même si l'on fait varier  $\beta$  et  $\nu = \beta\mu_\phi$  de  $\delta\beta$  et de  $\delta\nu$ . Les variations correspondantes  $\delta\vec{n}_q$  au premier ordre en  $\delta\beta$  et  $\delta\nu$  doivent constituer une solution stationnaire des équations cinétiques linéarisées. Comme  $\partial_\beta \vec{n}_q = -\epsilon_q \vec{n}_q (1 + \vec{n}_q)$  et  $\partial_\nu \vec{n}_q = \vec{n}_q (1 + \vec{n}_q)$ , nous en déduisons que

$$MQ_d(0)\vec{\epsilon} = \vec{0} \text{ et } MQ_d(0)\vec{u}\vec{n} = \vec{0} \quad (20)$$

En général,  $Q_d(0)\vec{A}$  admet des composantes non nulles de coefficients  $\lambda_\epsilon$  et  $\lambda_{u\vec{n}}$  sur ces vecteurs propres à droite de  $M$  de valeur propre nulle, si bien que  $e^{M\tau}Q_d(0)\vec{A}$  et  $C(\tau)$  ne tendent pas vers zéro aux temps longs. En revanche, par définition, si l'on soustrait ces composantes, on doit obtenir une limite nulle :

$$e^{M\tau}[Q_d(0)\vec{A} - \lambda_\epsilon Q_d(0)\vec{\epsilon} - \lambda_{u\vec{n}} Q_d(0)\vec{u}\vec{n}] \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0 \quad (21)$$

En faisant le produit scalaire à gauche de cette expression avec  $\vec{\epsilon}$  et  $\vec{u}\vec{n}$ , qui doit, compte tenu de l'équation (18), donner zéro, nous aboutissons au système inversible

$$\lambda_\epsilon \vec{\epsilon} \cdot Q_d(0)\vec{\epsilon} + \lambda_{u\vec{n}} \vec{\epsilon} \cdot Q_d(0)\vec{u}\vec{n} = \vec{\epsilon} \cdot Q_d(0)\vec{A} \quad (22)$$

$$\lambda_\epsilon \vec{u}\vec{n} \cdot Q_d(0)\vec{\epsilon} + \lambda_{u\vec{n}} \vec{u}\vec{n} \cdot Q_d(0)\vec{u}\vec{n} = \vec{u}\vec{n} \cdot Q_d(0)\vec{A} \quad (23)$$

dont les coefficients, notons-le, sont des variances ou des covariances ( $\vec{\epsilon} \cdot Q_d(0)\vec{\epsilon} = \text{Var } E_\phi$ , etc). Nous avons donc séparé la fonction de corrélation de  $d\hat{\theta}/dt$  en une contribution constante et une contribution de limite nulle aux temps longs :

$$C(\tau) = C(+\infty) + \Delta C(\tau) \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} C(+\infty) \quad (24)$$

ce qui, d'après l'équation (3), revient à partager la variance du déphasage du condensat en un terme balistique et un terme sous-balistique :

$$\text{Var}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = C(+\infty)t^2 + \text{Var}_{\text{s-bal}}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \quad (25)$$

$$\text{Var}_{\text{s-bal}}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] = 2 \text{Re} \int_0^t d\tau (t - \tau) \Delta C(\tau) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} o(t^2) \quad (26)$$

L'expression de la constante  $C(+\infty)$  directement obtenue n'est pas très parlante :

$$C(+\infty) = \lambda_\epsilon \vec{A} \cdot Q_d(0)\vec{\epsilon} + \lambda_{u\vec{n}} \vec{A} \cdot Q_d(0)\vec{u}\vec{n} \quad (27)$$

mais un calcul un peu long permet de la mettre sous une forme aussi éclairante que dans l'équation (9) :

$$C(+\infty) = \text{Var} \left[ (N_\phi - \bar{N}_\phi) \partial_{N_\phi} \frac{2\mu_{\text{mc}}^\phi}{\hbar} (\bar{E}_\phi, \bar{N}_\phi) + (E_\phi - \bar{E}_\phi) \partial_{E_\phi} \frac{2\mu_{\text{mc}}^\phi}{\hbar} (\bar{E}_\phi, \bar{N}_\phi) \right] \quad (28)$$

où  $\mu_{\text{mc}}^\phi(E_\phi, N_\phi)$  est le potentiel chimique microcanonique d'un gaz parfait de  $N_\phi$  phonons d'énergie totale  $E_\phi$ .<sup>7</sup> L'expression de la contribution de limite nulle peut être rendue joliment symétrique grâce à l'équation (18) :

$$\Delta C(\tau) = \Delta \vec{A} \cdot e^{M\tau} Q_d(0) \Delta \vec{A} \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0 \quad (29)$$

où

$$\Delta \vec{A} = \vec{A} - \lambda_\epsilon \vec{e} - \lambda_{\text{un}} \vec{u}\vec{u} \quad (30)$$

et présente aussi une interprétation physique simple : elle n'est autre que la fonction de corrélation de  $d\hat{\theta}/dt$  lorsque le gaz de phonons est préparé dans l'ensemble microcanonique « moyen »  $(\bar{E}_\phi, \bar{N}_\phi)$ . Le vecteur  $Q_d(0)\Delta\vec{A}$  vit en effet dans le sous-espace des fluctuations d'énergie et de nombre de phonons nulles, voir les équations (22,23). La contribution  $\Delta C(\tau)$  et le terme sous-balistique (26) sont donc, à la limite thermodynamique où nous nous plaçons, indépendants des fluctuations (supposées normales) de  $N_\phi$  et  $E_\phi$  donc de l'ensemble statistique dans lequel le gaz de phonons est préparé, à  $\bar{N}_\phi$  et  $\bar{E}_\phi$  fixés, à l'exact contraire de  $C(+\infty)$  et du terme balistique dans (25). Ce fait avait déjà été établi pour un gaz de bosons en interaction faible dans la référence [17]. L'expression (28) de  $C(+\infty)$ , bien qu'obtenue pour l'opérateur densité gaussien (16), s'applique en fait à un gaz à nombre  $N$  certes fixé de fermions mais préparé à la limite thermodynamique dans un ensemble statistique quelconque (un mélange statistique quelconque d'ensembles microcanoniques à  $N_\uparrow = N_\downarrow = N/2$  fixés), pourvu que les fluctuations de l'énergie et du nombre de phonons restent normales (de variance  $O(N)$ ), que la distribution en impulsion des phonons reste isotrope et que la température soit suffisamment basse. Comme dans le raisonnement de la référence [28], ceci découle directement de l'hypothèse d'ergodisation du gaz de phonons par les collisions phonons-phonons.<sup>8</sup>

### 4.3. Étude du terme sous-balistique

Nous nous concentrons désormais sur le terme sous-balistique (26), plus difficile et plus riche. Une fois écrites les équations cinétiques linéarisées pour les collisions 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons aux petits angles (§4.3.1), nous en tirons l'étalement de la phase du condensat, d'abord heuristiquement en les remplaçant par une forme diagonale (approximation de taux, §4.3.2) puis quantitativement en revenant à leur forme exacte (§4.3.3).

#### 4.3.1. Les équations cinétiques

Nous devons tout d'abord écrire les équations cinétiques donnant l'évolution moyenne des nombres d'occupation  $n_{\mathbf{q}}$  des phonons sous l'effet des processus de collision 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons de Landau-Khalatnikov. Le hamiltonien effectif correspondant d'interaction entre les phonons, déduit de l'hydrodynamique quantique [29], s'écrit

$$\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{LK}} = \frac{1}{4L^3} \sum_{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4} \mathcal{A}(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2; \mathbf{q}_3, \mathbf{q}_4) \hat{b}_{\mathbf{q}_3}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_4}^\dagger \hat{b}_{\mathbf{q}_1} \hat{b}_{\mathbf{q}_2} \delta_{\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3 + \mathbf{q}_4} \quad (31)$$

où  $\hat{b}_{\mathbf{q}}$  est l'opérateur d'annihilation d'un phonon dans le mode  $\mathbf{q}$  et l'amplitude de couplage  $\mathcal{A}$ , réelle, est connue explicitement [16]. Comme  $\mathcal{A}$  est invariante par échange de ses deux premiers arguments et par échange de ses

7. On utilise le fait qu'à la limite d'un grand système, le potentiel chimique ne dépend plus de l'ensemble statistique, pourvu que les moyennes de  $E_\phi$  et  $N_\phi$  soient fixées. Alors

$$\frac{2}{\hbar} \mu_{\text{mc}}^\phi(\bar{E}_\phi(\beta, \mu_\phi), \bar{N}_\phi(\beta, \mu_\phi)) \sim \sum_{\mathbf{q} \neq 0} A_{\mathbf{q}} \bar{n}_{\mathbf{q}}(\beta, \mu_\phi)$$

où les valeurs moyennes  $\bar{E}_\phi$ ,  $\bar{N}_\phi$  et  $\bar{n}_{\mathbf{q}}$  sont prises dans l'opérateur densité canonique (16). Il reste à dériver cette relation par rapport à  $\beta$  et  $\mu_\phi$  pour obtenir  $\partial_{N_\phi} \mu_{\text{mc}}^\phi$  et  $\partial_{E_\phi} \mu_{\text{mc}}^\phi$ . On constate en particulier que  $\lambda_\epsilon = \partial_{E_\phi} \frac{2\mu_{\text{mc}}^\phi}{\hbar}$  et  $\lambda_{\text{un}} = \partial_{N_\phi} \frac{2\mu_{\text{mc}}^\phi}{\hbar}$ .

8. Le second membre de l'équation (1) est, comme nous l'avons vu, une approximation à faible densité d'excitations d'un opérateur potentiel chimique du gaz de fermions, la somme au second membre étant la dérivée adiabatique (aux opérateurs nombres d'occupation  $\hat{n}_{\mathbf{q}}$  fixés) du hamiltonien des excitations phononiques  $\hat{H}_\phi$  [1]. Sous l'hypothèse ergodique en présence de collisions Landau-Khalatnikov 2 phonons  $\rightarrow$  2 phonons, la moyenne temporelle de l'équation (1) aux temps longs  $\gamma_{\text{coll}} t \rightarrow +\infty$  ne dépend plus de chaque nombre d'occupation individuellement mais des constantes du mouvement  $\hat{H}_\phi = \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \epsilon_{\mathbf{q}} \hat{n}_{\mathbf{q}}$  et  $\hat{N}_\phi = \sum_{\mathbf{q} \neq 0} \hat{n}_{\mathbf{q}}$  au travers d'une moyenne microcanonique (hypothèse de microcanonicité des états propres à  $N$  corps [33, 34, 35]) si bien que

$$\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} - \left[ \mu_0(N) + \mu_{\text{mc}}^\phi(\hat{H}_\phi, \hat{N}_\phi) \right] \frac{2t}{\hbar}$$

Il reste à linéariser  $\mu_{\text{mc}}^\phi(\hat{H}_\phi, \hat{N}_\phi)$  en les fluctuations autour de la moyenne  $(\bar{E}_\phi, \bar{N}_\phi)$  et prendre la variance pour retrouver le résultat (28) compte tenu de l'équation (25). Cette approche permettrait facilement de prendre en compte des fluctuations du nombre total de fermions (tant que  $N_\uparrow = N_\downarrow$ ).

deux derniers arguments (les phonons sont des bosons), nous avons sorti le facteur de symétrie 1/4. Elle est de plus invariante par échange des deux premiers arguments avec les deux derniers, ce qui assure l'hermiticité de  $\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{LK}}$  et la microréversibilité des processus collisionnels. Considérons le processus de collision  $\mathbf{q} + \mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{k}'$  de la figure 1b et le processus inverse  $\mathbf{k} + \mathbf{k}' \rightarrow \mathbf{q} + \mathbf{q}'$ , puis faisons le bilan des flux entrant et sortant dans le mode de phonon  $\mathbf{q}$  en appliquant la règle d'or de Fermi au hamiltonien  $\hat{H}_{\text{eff}}^{\text{LK}}$  :

$$\frac{d}{dt}n_{\mathbf{q}} = -\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}'} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{[\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \mathbf{k}, \mathbf{k}')]^2}{L^6} \delta_{\mathbf{k}+\mathbf{k}', \mathbf{q}+\mathbf{q}'} \delta(\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{q}'}) \times [n_{\mathbf{q}}n_{\mathbf{q}'}(1+n_{\mathbf{k}})(1+n_{\mathbf{k}'}) - n_{\mathbf{k}}n_{\mathbf{k}'}(1+n_{\mathbf{q}})(1+n_{\mathbf{q}'})] \quad (32)$$

On reconnaît le Dirac  $\delta$  de conservation de l'énergie, le  $\delta$  de Kronecker de conservation de l'impulsion et les facteurs d'amplification bosonique  $1+n$  accompagnant l'ajout d'un phonon dans un mode déjà peuplé. La somme sur les vecteurs d'onde (autres que  $\mathbf{q}$ ) mis en jeu dans la collision est affectée d'un facteur 1/2 pour éviter le double comptage de l'état final (ou initial)  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \equiv (\mathbf{k}', \mathbf{k})$ . Enfin, l'amplitude au carré  $\mathcal{A}^2$  est factorisable par microréversibilité. Après passage à la limite thermodynamique<sup>9</sup> et linéarisation de l'équation (32) autour de la solution stationnaire isotrope (14), en nous limitant à des fluctuations  $\delta n_{\mathbf{q}}$  isotropes (dans le secteur de moment cinétique nul) comme nous y autorise la structure de (6) et l'invariance par rotation de  $M$ , et comme nous y incite la remarque après (7), nous obtenons<sup>10</sup>

$$\frac{d}{dt}\delta n_{\mathbf{q}} = -\frac{\pi}{\hbar} \int \frac{d^3k d^3q'}{(2\pi)^6} [\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \mathbf{k}, \mathbf{k}')]^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{q}'}) \times \left[ \frac{\delta n_{\mathbf{q}}}{\bar{n}_{\mathbf{q}}} \bar{n}_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}'} (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}'}) + \frac{\delta n_{\mathbf{q}'}}{\bar{n}_{\mathbf{q}'}} \bar{n}_{\mathbf{k}} \bar{n}_{\mathbf{k}'} (1 + \bar{n}_{\mathbf{q}}) - \frac{\delta n_{\mathbf{k}}}{\bar{n}_{\mathbf{k}}} \bar{n}_{\mathbf{q}} \bar{n}_{\mathbf{q}'} (1 + \bar{n}_{\mathbf{k}'}) - \frac{\delta n_{\mathbf{k}'}}{\bar{n}_{\mathbf{k}'}} \bar{n}_{\mathbf{q}} \bar{n}_{\mathbf{q}'} (1 + \bar{n}_{\mathbf{k}}) \right] \quad (33)$$

en éliminant le vecteur d'onde  $\mathbf{k}'$  au profit des autres,

$$\mathbf{k}' = \mathbf{q} + \mathbf{q}' - \mathbf{k} \quad (34)$$

Il reste dans la forme (33) une difficile intégrale angulaire sur les directions  $\hat{\mathbf{k}}$  et  $\hat{\mathbf{q}}'$  de  $\mathbf{k}$  et  $\mathbf{q}'$ . Dans la limite  $\varepsilon = k_B T / mc^2 \rightarrow 0$  à  $v = \mu_{\phi} / k_B T$  fixé, elle est heureusement dominée par les petits angles,  $\theta_{\mathbf{k}} = \widehat{(\mathbf{q}, \mathbf{k})}$  et  $\theta_{\mathbf{q}'} = \widehat{(\mathbf{q}, \mathbf{q}')}$  d'ordre  $\varepsilon$ . À l'ordre zéro en  $\varepsilon$ , l'équation (34) projetée sur  $\hat{\mathbf{q}}$  se réduit à

$$k' = q + q' - k \quad (35)$$

ce qui constitue une approximation suffisante de  $k'$ , indépendante des angles, dans les moyennes  $\bar{n}_{k'}$  et les fluctuations  $\delta n_{k'}$  des nombres d'occupation (mais pas dans le Dirac  $\delta$  de conservation de l'énergie) et limite l'intégration sur le nombre d'onde  $k$  à l'intervalle  $[0, q + q']$ . Il reste à calculer la moyenne angulaire de  $\mathcal{A}^2 \delta$  à l'ordre dominant en  $\varepsilon$ . La procédure est exposée en détail dans la référence [16] : on introduit les nombres d'onde réduits

$$\bar{q} = \frac{\hbar c q}{k_B T}, \quad \bar{k} = \frac{\hbar c k}{k_B T}, \quad \bar{q}' = \frac{\hbar c q'}{k_B T} \quad (36)$$

et les angles réduits  $\bar{\theta}_{\mathbf{k}} = \theta_{\mathbf{k}} / \varepsilon$ ,  $\bar{\theta}_{\mathbf{q}'} = \theta_{\mathbf{q}'} / \varepsilon$ , puis on prend la limite mathématique  $\varepsilon \rightarrow 0$  aux variables réduites  $\bar{q}, \bar{k}, \bar{q}', \bar{\theta}_{\mathbf{k}}, \bar{\theta}_{\mathbf{q}'}$  fixées; il faut trouver un équivalent de  $\mathcal{A}^2$  et développer la différence d'énergie dans l'argument du  $\delta$  jusqu'à l'ordre  $\varepsilon^3$ , ce qui fait intervenir explicitement le paramètre de courbure  $\gamma$  dans l'équation (2). Dans les

9. Dans une expérience typique d'atomes froids, le taux d'amortissement Landau-Khalatnikov des phonons dans le cas concave est beaucoup plus faible que celui de Beliaev-Landau dans le cas convexe [18]. La largeur collisionnelle  $\hbar \Gamma_q$  des phonons étant fortement réduite, la nature discrète de leurs niveaux d'énergie dans la boîte de potentiel donc les effets de taille finie sont plus importants. Une condition d'atteinte de la limite thermodynamique pour les processus Landau-Khalatnikov est donnée dans la note 5 de la référence [18]. Les tailles minimales de boîte exigées, de l'ordre de 100  $\mu\text{m}$ , restent cependant réalisables en laboratoire [7, 8].

10. L'expression est grandement simplifiée grâce à une astuce déjà utilisée par Landau et Khalatnikov : (i) on élimine les facteurs  $1 + \bar{n}$  grâce à la relation  $1 + \bar{n} = e^{\beta(\varepsilon - \mu_{\phi})} \bar{n}$ , (ii) on factorise le plus possible en pensant à utiliser la conservation de l'énergie, (iii) on fait disparaître les exponentielles en reconnaissant  $e^{\beta(\varepsilon - \mu_{\phi})} - 1 = 1/\bar{n}$  ou à l'aide de la relation inverse de celle du (i).

références [16, 18], la moyenne angulaire de  $\mathcal{A}^2\delta$  est ainsi ramenée à une difficile intégrale double. Nous avons réalisé depuis qu'elle se réduit à une expression analytique extrêmement simple (voir l'Annexe A) :

$$\int d^2\bar{k} \int d^2\bar{q}' [\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \mathbf{k}, \mathbf{k}')]^2 \delta(\epsilon_{\mathbf{k}} + \epsilon_{\mathbf{k}'} - \epsilon_{\mathbf{q}} - \epsilon_{\mathbf{q}'}) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\text{var fixées}} \frac{(4\pi)^2 k_B T}{3|\gamma| \rho^2} (1+u)^4 \frac{\bar{k}'}{\bar{q}\bar{q}'\bar{k}} [\min(\bar{q}, \bar{q}', \bar{k}, \bar{k}')]^3 \quad (37)$$

où le paramètre de Grüneisen  $u = \partial \ln c / \partial \ln \rho$  se déduit de l'équation d'état du gaz de fermions à température nulle. Adimensionnons le temps à l'aide du taux d'amortissement thermique typique  $\Gamma_{\text{th}}$  de Landau-Khalatnikov comme dans les références [18, 16] :

$$\bar{t} = \Gamma_{\text{th}} t \quad \text{avec} \quad \Gamma_{\text{th}} = \left( \frac{1+u}{2\pi} \right)^4 \left( \frac{k_B T}{mc^2} \right)^7 \frac{mc^2}{|\gamma| \hbar} \left( \frac{mc}{\hbar \rho^{1/3}} \right)^6 \quad (38)$$

Nous obtenons ainsi la limite aux petits angles ( $k_B T / mc^2 \rightarrow 0$ ) des équations cinétiques linéarisées :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\bar{t}} \delta n_q = & -\frac{4\pi}{3} \int_0^{+\infty} d\bar{q}' \int_0^{\bar{q}+\bar{q}'} d\bar{k} \frac{\bar{q}'\bar{k}\bar{k}'}{\bar{q}} [\min(\bar{q}, \bar{q}', \bar{k}, \bar{k}')]^3 \\ & \times \left[ \delta n_q \frac{\bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell (1 + \bar{n}_{q'}^\ell)}{\bar{n}_q^\ell} + \delta n_{q'} \frac{\bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell (1 + \bar{n}_q^\ell)}{\bar{n}_{q'}^\ell} - \delta n_k \frac{\bar{n}_q^\ell \bar{n}_{q'}^\ell (1 + \bar{n}_k^\ell)}{\bar{n}_k^\ell} - \delta n_{k'} \frac{\bar{n}_q^\ell \bar{n}_{q'}^\ell (1 + \bar{n}_{k'}^\ell)}{\bar{n}_{k'}^\ell} \right] \end{aligned} \quad (39)$$

où  $\bar{k}' = \bar{q} + \bar{q}' - \bar{k}$  comme dans l'équation (35) et où les nombres d'occupation thermiques doivent être ceux du spectre de phonons linéarisé  $\epsilon_{\mathbf{k}} \simeq \hbar c k$  :

$$\bar{n}_k^\ell = \frac{1}{e^{\beta(\hbar c k - \mu_\phi)} - 1} = \frac{1}{e^{\bar{k} - \nu} - 1} \quad (40)$$

comme le rappelle l'exposant  $\ell$ . La partie diagonale de l'équation intégrale (39) peut s'écrire  $-\bar{\Gamma}_q \delta n_q$ , où  $\bar{\Gamma}_q = \Gamma_q / \Gamma_{\text{th}}$  est le taux de décroissance réduit des phonons de nombre d'onde  $q$ ; grâce à la percée que constitue l'équation (37), nous obtenons une expression du taux bien plus explicite que dans les références [18, 16] :

$$\bar{\Gamma}_q = \frac{4\pi}{3\bar{q}\bar{n}_q^\ell} \int_0^{+\infty} d\bar{q}' \bar{q}' (1 + \bar{n}_{q'}^\ell) \int_0^{\bar{q}+\bar{q}'} d\bar{k} \bar{k} \bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell \bar{n}_{k'}^\ell [\min(\bar{q}, \bar{q}', \bar{k}, \bar{k}')]^3 \quad (41)$$

On peut aller encore plus loin et se ramener à une intégrale simple après intégration sur  $\bar{k}$  (voir l'Annexe B).

Poursuivons le calcul de la composante  $\Delta C(\tau)$  de limite aux temps longs nulle de la fonction de corrélation de  $d\hat{\theta}/dt$ . Dans son expression (29), nous connaissons désormais l'opérateur  $M$ , défini sous forme réduite par le second membre de l'équation (39). Il nous reste à déterminer la limite de basse température  $k_B T / mc^2 \rightarrow 0$  des composantes  $\Delta A_{\mathbf{q}}$  du vecteur source, prise à  $\bar{q}$  et  $\nu$  fixés. Un calcul assez direct<sup>11</sup> partant des équations (7,22,23,30) donne

$$\Delta A_{\mathbf{q}} \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\bar{q} \text{ fixé}} \frac{k_B T \gamma}{4\hbar N} \left( \frac{k_B T}{mc^2} \right)^2 \left( \frac{\partial \ln |\gamma|}{\partial \ln \rho} - 2u \right) [\bar{q}^3 - X(\nu) - Y(\nu)\bar{q}] \quad (42)$$

avec des coefficients  $X(\nu)$  et  $Y(\nu)$ , souvenirs de  $\lambda_\epsilon$  et  $\lambda_{\text{un}}$ , fonctions de  $\nu$  et écrits sous forme compacte

$$X(\nu) = \frac{\langle\langle \bar{q}^2 \rangle\rangle \langle\langle \bar{q}^3 \rangle\rangle - \langle\langle \bar{q} \rangle\rangle \langle\langle \bar{q}^4 \rangle\rangle}{\langle\langle \bar{q}^2 \rangle\rangle - \langle\langle \bar{q} \rangle\rangle^2} \quad (43)$$

$$Y(\nu) = \frac{\langle\langle \bar{q}^4 \rangle\rangle - \langle\langle \bar{q} \rangle\rangle \langle\langle \bar{q}^3 \rangle\rangle}{\langle\langle \bar{q}^2 \rangle\rangle - \langle\langle \bar{q} \rangle\rangle^2} \quad (44)$$

11. Une astuce simplificatrice consiste à sortir dans  $A_{\mathbf{q}}$  une composante proportionnelle à  $\epsilon_{\mathbf{q}}$ , à savoir  $(2u/\hbar N)\epsilon_{\mathbf{q}}$  (où l'énergie propre  $\epsilon_{\mathbf{q}}$  est ici non encore linéarisée), ce qui fait sortir le terme  $2u/(\hbar N)$  dans  $\lambda_\epsilon$ ; le reste de  $A_{\mathbf{q}}$  et de  $\lambda_\epsilon$ , ainsi que  $\lambda_{\text{un}}$ , sont déjà d'ordre  $k_B T \varepsilon^2$ , qui est l'ordre dominant cherché dans l'équation (42). Comme on pouvait s'y attendre, les valeurs données de  $X(\nu)$  et  $Y(\nu)$  expriment le fait que le vecteur  $Q_{\mathbf{q}}(0)\Delta\hat{A}$  écrit à l'ordre  $k_B T \varepsilon^2$ , de coordonnées  $\propto \bar{n}_q^\ell (1 + \bar{n}_q^\ell) (\bar{q}^3 - X(\nu) - Y(\nu)\bar{q})$ , est orthogonal aux vecteurs de coordonnées  $\bar{q}$  et  $\bar{q}^0 = 1$ , traduisant l'absence de fluctuations de l'énergie et du nombre de phonons.

à l'aide de la notation

$$\langle\langle \bar{q}^n \rangle\rangle = \frac{\int_0^{+\infty} d\bar{q} \bar{n}_q^\ell (1 + \bar{n}_q^\ell) \bar{q}^{n+2}}{\int_0^{+\infty} d\bar{q} \bar{n}_q^\ell (1 + \bar{n}_q^\ell) \bar{q}^2} = \frac{(n+2)! g_{n+2}(e^\nu)}{2g_2(e^\nu)} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (45)$$

Ici,  $g_\alpha(z)$  est l'habituelle fonction de Bose (ou polylogarithme).

Une dernière remarque nous sépare du résultat : pour les processus de Landau-Khalatnikov, on peut donner une forme hermitienne aux équations cinétiques linéarisées (39) en prenant comme variables  $\psi_{\bar{q}}$  plutôt que  $\delta n_q$ , avec

$$\bar{q} \delta n_q = [\bar{n}_q^\ell (1 + \bar{n}_q^\ell)]^{1/2} \psi_{\bar{q}} \quad (46)$$

On récrit alors l'équation (39) sous la forme d'une équation de Schrödinger en temps imaginaire, avec la notation de Dirac pour des fonctions d'onde de Fourier fictives sur la demi-droite réelle ( $\psi_{\bar{q}} \equiv \langle \bar{q} | \psi \rangle$ ,  $\bar{q} \in \mathbb{R}^+$  étant le vecteur d'onde d'une particule fictive vivant en dimension un et  $\langle \bar{q} | \bar{q}' \rangle = \delta(\bar{q} - \bar{q}')$ ) :

$$\frac{d}{d\bar{t}} |\psi\rangle = -\hat{\mathcal{H}} |\psi\rangle \quad (47)$$

Le hamiltonien fictif  $\hat{\mathcal{H}}$  est un opérateur hermitien positif; comme  $-\hat{\mathcal{H}}$  et  $M$  ont même spectre, on en déduit que les valeurs propres de  $M$  sont réelles négatives.  $\hat{\mathcal{H}}$  s'écrit en effet comme la somme d'un opérateur taux  $\hat{\Gamma}$  diagonal dans la base des  $|\bar{q}\rangle$ , qui renferme les taux de décroissance (41) des phonons,

$$\hat{\Gamma} |\bar{q}\rangle = \bar{\Gamma}_q |\bar{q}\rangle \quad (48)$$

et d'un opérateur noyau intégral  $\hat{V}$  hermitien non local en  $q$ , qui décrit la redistribution des phonons par collision :

$$\hat{\mathcal{H}} = \hat{\Gamma} + \hat{V} \quad (49)$$

Les éléments de matrice de  $\hat{V}$  admettent d'après l'équation (39) la forme intégrale harmonieuse<sup>12</sup>

$$\begin{aligned} \langle \bar{q} | \hat{V} | \bar{q}' \rangle &= \frac{4\pi}{3} \int_0^{+\infty} d\bar{k} \int_0^{+\infty} d\bar{k}' \delta(\bar{k} + \bar{k}' - \bar{q} - \bar{q}') [\min(\bar{q}, \bar{q}', \bar{k}, \bar{k}')]^3 \phi(\bar{k}) \phi(\bar{k}') \\ &- \frac{8\pi}{3} \int_0^{+\infty} d\bar{k} \int_0^{+\infty} d\bar{k}' \delta(\bar{k}' + \bar{q}' - \bar{q} - \bar{k}) [\min(\bar{q}, \bar{q}', \bar{k}, \bar{k}')]^3 \phi(\bar{k}) \phi(\bar{k}') \end{aligned} \quad (50)$$

avec

$$\phi(\bar{k}) = \bar{k} [\bar{n}_k^\ell (1 + \bar{n}_k^\ell)]^{1/2} \quad (51)$$

Nous en donnons une expression explicite en termes de fonctions de Bose dans l'Annexe B. Nous obtenons finalement l'équivalent à basse température de la contribution sous-ballistique (26) à la variance du déphasage du condensat :

$$\text{Var}_{\text{s-bal}}[\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)] \stackrel{\substack{\bar{t}, \nu \text{ fixés} \\ k_B T / mc^2 \rightarrow 0}}{\sim} \frac{1}{N} \frac{16\pi^6 |\gamma|^4}{(1+u)^8} \left( \frac{mc^2}{k_B T} \right)^5 \left( \frac{\hbar \rho^{1/3}}{mc} \right)^9 \left( \frac{\partial \ln |\gamma|}{\partial \ln \rho} - 2u \right)^2 \bar{\mathcal{V}}(\bar{t}) \quad (52)$$

avec<sup>13</sup>

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{t}) = \langle \chi | \frac{e^{-\hat{\mathcal{H}}\bar{t}} - 1 + \hat{\mathcal{H}}\bar{t}}{\hat{\mathcal{H}}^2} | \chi \rangle \quad \text{et} \quad \langle \bar{q} | \chi \rangle = \phi(\bar{q}) [\bar{q}^3 - X(\nu) - Y(\nu)\bar{q}] \quad (53)$$

la limite  $\varepsilon \rightarrow 0$  étant prise au temps réduit  $\bar{t}$  de l'équation (38) fixé et à la fugacité  $e^\nu$  des phonons fixée. La suite de ce travail est consacrée à l'étude de la variance réduite  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  dans le régime dominé par les collisions  $\bar{t} \gg 1$ .

12. On utilise le même genre d'astuce que dans la note 10.

13. Cette expression de  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  provient de l'intégration formelle de  $\int_0^{\bar{t}} d\bar{\tau} (\bar{t} - \bar{\tau}) \langle \chi | e^{-\hat{\mathcal{H}}\bar{\tau}} | \chi \rangle$ , où  $\Delta \bar{C}(\bar{\tau}) = \langle \chi | e^{-\hat{\mathcal{H}}\bar{\tau}} | \chi \rangle$  est une forme adimensionnée de  $\Delta C(\tau)$ .

#### 4.3.2. Étude de $\bar{V}(\bar{t})$ dans l'approximation de taux

De manière exploratoire, nous utilisons dans un premier temps l'approximation de taux proposée dans la référence [36], qui consiste à ne garder au second membre des équations cinétiques linéarisées (39) que le terme de décroissance  $-\bar{\Gamma}_q \delta n_q$ , ce qui les rend diagonales. Ce genre d'approximation est assez courant en physique du solide, voir l'équation (16.9) dans la référence [37]; il faut garder bien sûr la dépendance du taux en le nombre d'onde  $q$ , qui joue un rôle crucial. Dans la formulation de Schrödinger fictive (47), ceci revient à négliger  $\hat{V}$  dans le hamiltonien (49). En remplaçant  $\hat{\mathcal{H}}$  par  $\hat{\Gamma}$  dans l'équation (53), et en posant  $\bar{\Gamma}(\bar{q}) = \bar{\Gamma}_q$ , nous aboutissons à l'approximation

$$\bar{V}_{\text{app}}(\bar{t}) = \int_0^{+\infty} d\bar{q} \frac{\langle \bar{q} | \chi \rangle^2}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} \left[ e^{-\bar{\Gamma}(\bar{q})\bar{t}} - 1 + \bar{\Gamma}(\bar{q})\bar{t} \right] \quad (54)$$

Son comportement aux temps longs est dominé par le comportement plus ou moins singulier de l'intégrande à faible nombre d'onde  $\bar{q}$ . Son analyse doit donc distinguer les cas d'un potentiel chimique de phonons strictement négatif ( $\nu < 0$ ) ou nul ( $\nu = 0$ ).

*Cas  $\nu < 0$ .* Le taux de décroissance  $\bar{\Gamma}(\bar{q})$  tend vers zéro quadratiquement en  $\bar{q} = 0$ , et nous disposons du développement

$$\bar{\Gamma}(\bar{q}) \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\stackrel{\nu < 0}{\approx}} C(\nu) \bar{q}^2 [1 + \alpha(\nu) \bar{q} + O(\bar{q}^2)] \quad (55)$$

Une expression intégrale des coefficients  $C(\nu)$  et  $\alpha(\nu)$ , ainsi que du terme sous-sous-dominant, est donnée dans l'Annexe B. Il suffit de savoir ici que  $C(\nu)$  et  $\alpha(\nu)$  sont positifs strictement. Comme  $\langle \bar{q} | \chi \rangle^2$  s'annule quadratiquement aussi :

$$\langle \bar{q} | \chi \rangle^2 \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\sim} \bar{q}^2 \bar{n}_0 (1 + \bar{n}_0) X(\nu)^2 \quad (56)$$

avec  $\bar{n}_0 = (e^{-\nu} - 1)^{-1}$ , nous pouvons séparer dans l'intégrale (54) le terme  $\bar{\Gamma}(\bar{q})\bar{t}$ , pour obtenir un comportement dominant diffusif aux temps longs, mais nous ne pouvons pas séparer le terme constant  $-1$  sans déclencher une divergence infrarouge : contrairement au cas (9) de la branche acoustique convexe, le terme sous-diffusif n'est plus un simple retard à la diffusion, mais est lui-même divergent aux temps longs. Une étude mathématique complète obtient, à partir du comportement suivant à faible  $\bar{q}$  sous le signe intégral dans l'équation (54),

$$\frac{\langle \bar{q} | \chi \rangle^2}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\stackrel{\nu < 0}{\approx}} \frac{-\bar{A}_{\text{app}}(\nu) C(\nu)^{-1/2} - \bar{B}_{\text{app}}(\nu) \bar{q} + O(\bar{q}^2)}{\bar{q}^2} \quad (57)$$

le développement asymptotique particulièrement riche (voir l'Annexe C)

$$\bar{V}_{\text{app}}(\bar{t}) \underset{\bar{t} \rightarrow +\infty}{\stackrel{\nu < 0}{\approx}} \bar{D}_{\text{app}}(\nu) \bar{t} + \bar{A}_{\text{app}}(\nu) (\pi \bar{t})^{1/2} + \bar{B}_{\text{app}}(\nu) \ln(\bar{t}^{1/2}) + \bar{E}_{\text{app}}(\nu) + o(1) \quad (58)$$

avec

$$\bar{D}_{\text{app}}(\nu) = \int_0^{+\infty} d\bar{q} \frac{\langle \bar{q} | \chi \rangle^2}{\bar{\Gamma}(\bar{q})} \quad (59)$$

$$\bar{A}_{\text{app}}(\nu) = \frac{-X(\nu)^2 \bar{n}_0 (1 + \bar{n}_0)}{C(\nu)^{3/2}} \quad (60)$$

$$\bar{B}_{\text{app}}(\nu) = \frac{-2X(\nu)^2 \bar{n}_0 (1 + \bar{n}_0)}{C(\nu)^2} \left[ \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} - \alpha(\nu) - \left( \frac{1}{2} + \bar{n}_0 \right) \right] \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \bar{E}_{\text{app}}(\nu) = & - \int_0^{\bar{q}_c} d\bar{q} \left[ \frac{\langle \bar{q} | \chi \rangle^2}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} + \frac{\bar{A}_{\text{app}}(\nu) C(\nu)^{-1/2} + \bar{q} \bar{B}_{\text{app}}(\nu)}{\bar{q}^2} \right] - \int_{\bar{q}_c}^{+\infty} d\bar{q} \frac{\langle \bar{q} | \chi \rangle^2}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} \\ & - \bar{A}_{\text{app}}(\nu) C(\nu)^{-1/2} \left[ \frac{1}{\bar{q}_c} - \frac{1}{2} \alpha(\nu) \right] + \bar{B}_{\text{app}}(\nu) \left\{ \ln[\bar{q}_c C(\nu)^{1/2}] + \frac{1}{2} \gamma_{\text{Euler}} \right\} \end{aligned} \quad (62)$$

Dans l'équation (62),  $\gamma_{\text{Euler}} = -0,577\,215\dots$  est la constante d'Euler et  $\bar{q}_c > 0$  est une coupure arbitraire dont la valeur de  $\bar{E}_{\text{app}}(\nu)$  ne dépend pas, comme on peut le vérifier en prenant la dérivée par rapport à  $\bar{q}_c$ . Les quatre coefficients du

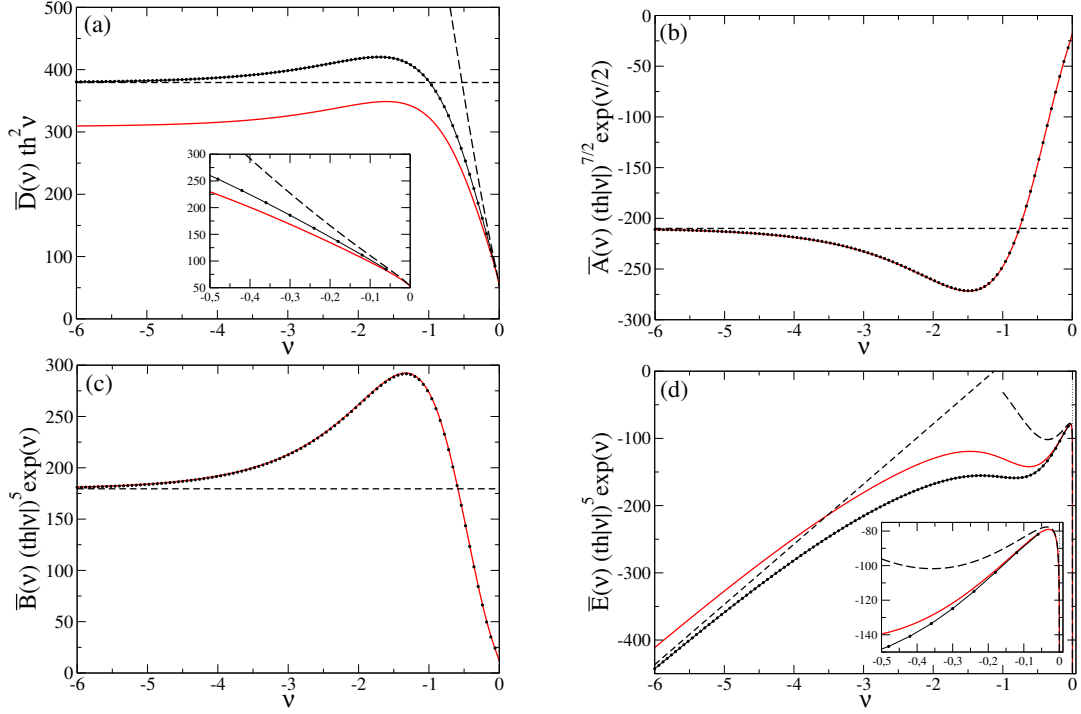


FIGURE 2: Coefficients  $\bar{D}$ ,  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  et  $\bar{E}$  du développement aux temps longs de la variance sous-balistique (53) du déphasage du condensat, voir les équations (73) et (58), en fonction du potentiel chimique réduit  $\nu = \mu_\phi/k_B T$  du gaz de phonons. Ici la branche acoustique a un départ concave et les processus collisionnels entre phonons pris en compte sont ceux de Landau-Khalatnikov aux petits angles. Disques noirs (avec parfois une fine ligne directrice) : résultats exacts obtenus numériquement. Trait plein rouge : résultats (59,60,61,62) dans l'approximation de taux. Tireté : comportements aux limites (90,91) et (98,99,100,101) prédits analytiquement. Les coefficients sont multipliés par les puissances de  $\text{th}|\nu|$  et de  $e^\nu$  leur conférant des limites finies et non nulles en  $\nu = 0$  et  $\nu = -\infty$ . Les vignettes sont des agrandissements.

développement (58) sont représentés en fonction du potentiel chimique réduit  $\nu$  des phonons sur la figure 2 (trait plein rouge). Ils présentent lorsque  $\nu \rightarrow 0^-$  un comportement divergent, que nous compensons en les multipliant par des puissances bien choisies de  $\text{th}|\nu|$ ; de même, nous multiplions les trois derniers coefficients par une puissance bien choisie de  $e^\nu$  afin de compenser leur divergence en  $\nu = -\infty$ . Les fonctions représentées sont donc bornées.

*Cas  $\nu = 0$ .* La divergence du coefficient de diffusion de la phase en  $\nu = 0$  laisse augurer un comportement superdiffusif de la variance sous-balistique à potentiel chimique des phonons nul, du moins dans l'approximation de taux. Cette fois-ci, le taux de décroissance des phonons s'annule cubiquement en  $\bar{q} = 0$  [38, 18, 16] :

$$\bar{\Gamma}(\bar{q}) \stackrel{\nu=0}{\underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\simeq}} C_0 \bar{q}^3 [1 + \alpha_0 \bar{q} + O(\bar{q}^2)] \quad (63)$$

avec les formes explicites obtenues dans l'Annexe B (la valeur de  $C_0$  est en accord avec les références [18, 16], celle de  $\alpha_0$  est nouvelle; l'Annexe B donne aussi le coefficient du terme sous-sous-dominant) :

$$C_0 = \frac{16\pi^5}{135} \quad \text{et} \quad \alpha_0 = -\frac{15}{8\pi^2} - \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \quad (64)$$

et l'on obtient un étalement sous-balistique anormalement rapide de la phase du condensat (voir l'Annexe C) :

$$\bar{V}_{\text{app}}(\bar{t}) \stackrel{\nu=0}{\underset{\bar{t} \rightarrow +\infty}{\simeq}} \bar{d}_0^{\text{app}} \bar{t}^{5/3} + \bar{d}_1^{\text{app}} \bar{t}^{4/3} + \bar{d}_2^{\text{app}} \bar{t} \ln \bar{t} + O(\bar{t}) \quad (65)$$

Nous donnons ici explicitement seulement le coefficient du terme dominant,

$$\bar{d}_0^{\text{app}} = \frac{3X_0^2 \Gamma(1/3)}{10C_0^{1/3}} \quad \text{avec} \quad X_0 = \lim_{\nu \rightarrow 0^-} X(\nu) = -\frac{360\pi^4}{7} \frac{\pi^2 \zeta(3) - 7\zeta(5)}{\pi^6 - 405\zeta(3)^2} \quad (66)$$

qui dépend uniquement du terme dominant dans le développement à faible  $\bar{q}$  suivant :

$$\frac{\langle \bar{q}|\chi \rangle^2}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} \stackrel{\nu=0}{\underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\approx}} \frac{X_0^2}{C_0^2 \bar{q}^6} + O(1/\bar{q}^5) \quad (67)$$

*Cas  $\nu$  infinitésimal non nul : raccordement entre régime superdiffusif et diffusif.* Si  $\nu$  est non nul mais très proche de zéro,  $|\nu| \ll 1$ , on s'attend à ce que  $\bar{V}_{\text{app}}(\bar{t})$  présente d'abord un comportement superdiffusif en  $\bar{t}^{5/3}$ , comme celui (65) pour  $\nu = 0$ , avant de se rebrancher aux temps suffisamment longs sur le comportement diffusif (58) attendu pour  $\nu < 0$ . L'existence de ces deux régimes temporels résulte de la présence à faible  $|\nu|$  de deux échelles bien distinctes de variation en  $\bar{q}$  des nombres d'occupation  $\bar{n}_q^\ell$ ,  $\bar{q} = |\nu|$  et  $\bar{q} = 1$ , voir l'équation (40). Ne serait-ce qu'à cause de la présence de  $\bar{n}_q^\ell$  au dénominateur de l'équation (41), le taux de décroissance  $\bar{\Gamma}(\bar{q})$  présente lui aussi ces deux échelles. Aux temps longs  $\bar{t} \gg 1$  mais pas trop, l'intégrale (54) est dominée par les  $\bar{q}$  tels que  $|\nu| \ll \bar{q} \ll 1$  et l'étalement sous-ballistique de la phase du condensat est superdiffusif ; aux temps vraiment très longs, ce sont les  $\bar{q} \ll |\nu|$  qui dominant et l'étalement se fait diffusif. Mathématiquement, pour décrire le basculement de part et d'autre de l'échelle  $\bar{q} = |\nu|$ , nous effectuons dans l'intégrale (54) le changement de variable

$$\bar{q} = |\nu|Q \quad (68)$$

et faisons tendre  $\nu$  vers 0 à  $Q$  fixé. Le calcul donne par ailleurs les approximations uniformes à faible  $\bar{q}$

$$\bar{n}_q^\ell \stackrel{Q \text{ fixé}}{\underset{\nu \rightarrow 0^-}{\approx}} \frac{1}{|\nu|(Q+1)} - \frac{1}{2} + O(\nu) \quad (69)$$

$$\bar{\Gamma}(\bar{q}) \stackrel{Q \text{ fixé}}{\underset{\nu \rightarrow 0^-}{\approx}} |\nu|^2 C(\nu) Q^2 (Q+1) [1 + |\nu| \Phi(Q) + O(|\nu| \ln |\nu|)^2] \quad (70)$$

où  $\Phi(Q)$ , indépendante de  $\nu$ , a une expression explicite donnée dans l'Annexe C et  $C(\nu) \underset{\nu \rightarrow 0^-}{\sim} |\nu| C_0$  comme on pouvait s'y attendre. Sous l'exponentielle dans l'équation (54), il faut donc renormaliser le temps comme suit :

$$\Theta = C(\nu) |\nu|^2 \bar{t} \quad (71)$$

et l'on obtient l'expression du déphasage cherchée raccordant les deux régimes d'étalement  $\propto \Theta^{5/3}$  pour  $\Theta \ll 1$  et  $\propto \Theta$  pour  $\Theta \gg 1$  :

$$\bar{V}_{\text{app}}(\bar{t}) \stackrel{\Theta \text{ fixé}}{\underset{\nu \rightarrow 0^-}{\approx}} \frac{X(\nu)^2}{C(\nu)^2 |\nu|^3} I(\Theta) \quad \text{avec} \quad I(\Theta) = \int_0^{+\infty} dQ \frac{e^{-Q^2(1+Q)\Theta} - 1 + Q^2(1+Q)\Theta}{Q^2(1+Q)^4} \quad (72)$$

L'intégrale dans l'équation (72) n'admettant *a priori* pas d'expression simple, nous l'avons représentée graphiquement sur la figure 3.

*Moralité.* Les comportements exotiques (58) et (65) du déphasage du condensat prédits à la limite thermodynamique par l'approximation de taux pour des collisions Landau-Khalatnikov à basse température  $T \rightarrow 0$  ne valent bien sûr qu'aux échelles de temps  $o(1/T^9)$ , comme il a été dit dans la section 4.1. Leur origine est claire et résulte de la combinaison de deux effets :

- le taux de décroissance des phonons à faible nombre d'onde tend vers zéro plus rapidement que dans l'amortissement Beliaev-Landau, comme  $q^2$  ou même  $q^3$  pour  $\nu = 0$ , au lieu de  $q$ .
- l'existence d'un second mode non amorti des équations cinétiques linéarisées, associée à une nouvelle quantité conservée par les collisions Landau-Khalatnikov, le nombre de phonons  $N_\phi$ , a un effet spectaculaire pour  $\nu = 0$  : la fonction  $\langle \bar{q}|\chi \rangle^2$  ne tend plus vers zéro lorsque  $\bar{q} \rightarrow 0$ , alors qu'elle (ou son équivalent dans l'équation (49) de la référence [36]) s'annulait quadratiquement dans le cas Beliaev-Landau. Cela est lié au fait que le nouveau vecteur propre à gauche de  $M$ , à savoir  $\vec{u}_\phi$ , est à coefficients constants (ce sont les poids des nombres d'occupation  $n_q$  dans  $N_\phi$ ) alors que l'ancien, à savoir  $\vec{\epsilon}$ , est à coefficients linéaires en  $q$  à faible  $q$  (ce sont les poids des  $n_q$  dans l'énergie).

Il reste maintenant à voir quelle part de vérité contient l'approximation de taux.



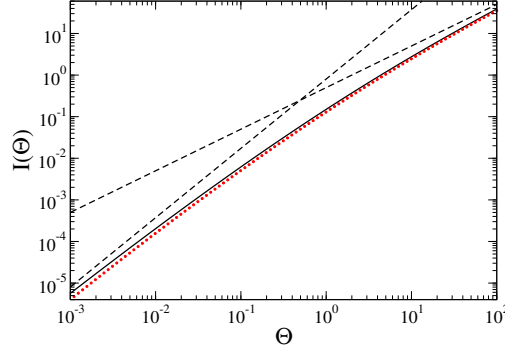


FIGURE 3: Loi d'interpolation (trait plein) raccordant le régime superdiffusif ( $\Theta \ll 1$ ) et le régime diffusif ( $\Theta \gg 1$ ) de l'étalement sous-balistique de la phase du condensat à très faible potentiel chimique réduit des phonons ( $\nu = \mu_\phi/k_B T \rightarrow 0^-$  à  $\Theta$  fixé) sous l'effet des collisions Landau-Khalatnikov aux petits angles. Le temps renormalisé  $\Theta$  est celui de l'équation (71), et la fonction représentée est l'intégrale  $I(\Theta)$  au second membre de l'équation (72). La loi d'interpolation, initialement obtenue dans l'approximation de taux (54), est en fait un équivalent exact à faible  $\nu$  de la variance réduite sous-balistique  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  comme il est montré dans la section 4.3.3, voir l'équation (92). En tireté : comportements aux limites  $I(\Theta) \sim \frac{3}{10}\Gamma(1/3)\Theta^{5/3}$  pour  $\Theta \rightarrow 0$  et  $I(\Theta) \sim \frac{1}{2}\Theta$  pour  $\Theta \rightarrow +\infty$ . Disques rouges : résultats numériques pour  $\nu = -1/10$  tirés de l'expression exacte (79) de  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  et soumis au même redimensionnement que dans l'équation (72) (on donne  $C(\nu = -1/10) = 2,596\,303\dots$  et  $X(\nu = -1/10) = -75,909\,694\dots$ ); le fait que les disques rouges soient proches de la ligne en trait plein montre le succès de l'approximation de taux, et plus généralement de la loi d'interpolation, à  $\nu$  très petit non nul.

#### 4.3.3. Étude de $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$ sur la forme exacte

Repartons de l'expression (53) (exacte à suffisamment basse température) de la variance sous-balistique du déphasage du condensat. Nous avons effectué d'abord une étude numérique en discrétisant et en tronquant la demi-droite  $\bar{q} \in [0, +\infty[$ , et en diagonalisant la matrice de  $\hat{\mathcal{H}}$  correspondante.<sup>14</sup>

Cas  $\nu < 0$ . Aux temps longs, nous trouvons pour  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  une loi de même forme que l'équation (58) :

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{t}) \underset{\bar{t} \rightarrow +\infty}{\stackrel{\nu < 0}{\simeq}} \bar{D}(\nu)\bar{t} + \bar{A}(\nu)(\pi\bar{t})^{1/2} + \bar{B}(\nu)\ln(\bar{t}^{1/2}) + \bar{E}(\nu) + o(1) \quad (73)$$

avec les coefficients obtenus numériquement représentés par des disques noirs sur la figure 2. À titre d'illustration, nous représentons en fonction du temps sur la figure 4a la variance sous-balistique  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  obtenue numériquement, sa partie diffusif  $\bar{D}(\nu)\bar{t}$ , qui l'approxime assez mal, et son expression asymptotique complète (73). Cette dernière, même si elle est meilleure, commet une erreur d'ordre  $1/\bar{t}^{1/2}$  (voir la note 33 de l'Annexe C), qui tend assez lentement vers zéro. Nous représentons donc aussi une approximation hybride très performante mêlant partie diffusif exacte et partie sous-diffusif dans l'approximation de taux. Mais revenons à la figure 2. De manière remarquable, l'approximation de taux est en accord parfait avec les résultats numériques pour les coefficients  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  des ordres en temps intermédiaires. En revanche, en ce qui concerne les coefficients  $\bar{D}$  et  $\bar{E}$  des ordres en temps extrêmes, elle est infirmée quantitativement, sauf dans la limite  $\nu \rightarrow 0^-$  où elle semble donner des équivalents exacts (voir l'agrandissement dans les vignettes). En particulier, le coefficient de diffusion de la phase est bien divergent lorsque  $\nu \rightarrow 0^-$ .

Cas  $\nu = 0$ . Le calcul numérique confirme pleinement la loi d'étalement superdiffusif  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t}) \propto \bar{t}^{5/3}$  prédite par l'approximation de taux, y compris la valeur (66) du coefficient de  $\bar{t}^{5/3}$ , comme on peut en juger qualitativement sur la figure 4b, et quantitativement sur sa variante (non reproduite ici) portant  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})/\bar{t}^{5/3}$  en fonction de  $\bar{t}^{-1/3}$  et extrapolant quadratiquement à  $\bar{t}^{-1/3} = 0$ .

Cas  $\nu$  très proche de 0. Enfin, pour  $\nu = -1/10$ , le passage pour  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  d'un étalement superdiffusif à un étalement diffusif est assez bien décrit par la loi interpolante (72) tirée de l'approximation de taux, comme le montre le report des résultats numériques sur la figure redimensionnée 3.

14. Dans les calculs les plus précis, nous avons pris une troncature  $\bar{q}_{\max} = 40 + |\nu|$ , et nous avons extrapolé linéairement à un pas  $d\bar{q} = 0$  à partir de  $d\bar{q} = 0,004$  et  $d\bar{q} = 0,006$  ou  $0,008$ . Le cas  $\nu \neq 0$  mais  $|\nu| \ll 1$  est difficile à étudier car il faut avoir  $d\bar{q} < |\nu|/10$  pour une bonne convergence.

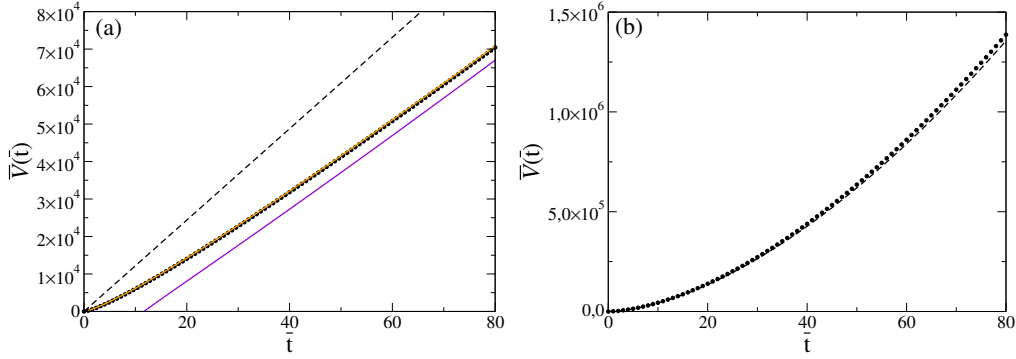


FIGURE 4: Variance réduite sous-balistique  $\bar{V}(t)$  du déphasage du condensat en fonction du temps sous l'effet des collisions Landau-Khalatnikov aux petits angles, obtenue par diagonalisation numérique de  $\hat{\mathcal{H}}$  dans l'équation (53), pour un potentiel chimique des phonons réduit (a)  $\nu = -1/2$ , (b)  $\nu = 0$ . Disques noirs : résultats numériques. Tireté : (a) partie diffusives exacte  $\bar{D}t$ ; (b) : équivalent asymptotique  $\bar{d}_0^{\text{app}} t^{5/3}$  prédit par l'approximation de taux, voir les équations (65,66). Trait plein violet dans (a) d'aspect rectiligne : développement asymptotique (73) exact à  $o(1)$  près. Trait plein orange dans (a) : approximation hybride de  $\bar{V}(t)$ , somme de la partie diffusives numérique  $\bar{D}t$  et de la partie sous-diffusives dans l'approximation de taux.

*Les raisons du succès.* Il reste à comprendre analytiquement pourquoi l'approximation de taux est aussi bonne, voire exacte pour certaines quantités ( $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ) ou dans certains cas ( $\nu \rightarrow 0^-$ ). Pour cela, repartons de la forme (49) du hamiltonien fictif  $\hat{\mathcal{H}}$  et interprétons-en les deux termes  $\hat{\Gamma}$  et  $\hat{V}$  :

- l'opérateur  $\hat{\Gamma}$  est diagonal dans l'espace des nombres d'onde de la particule fictive, c'est-à-dire dans la base continue  $|\bar{q}\rangle$ ; la valeur propre associée  $\bar{\Gamma}(\bar{q})$  est une fonction positive et croissante de  $\bar{q}$ , s'annulant quadratiquement en  $\bar{q} = 0$  (du moins pour  $\nu < 0$ , voir l'équation (55)) et tendant vers  $+\infty$  lorsque  $\bar{q} \rightarrow +\infty$ , comme le montre l'équivalent établi dans l'Annexe C (y compris pour  $\nu = 0$ ) :

$$\bar{\Gamma}(\bar{q}) \underset{\bar{q} \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{16\pi}{3} g_5(e^\nu) \bar{q}^2 \quad (74)$$

où  $g_5$  est une fonction de Bose.  $\hat{\Gamma}$  a donc les propriétés requises pour être considéré formellement comme un opérateur énergie cinétique pour la particule fictive, si ce n'est que celle-ci va toujours vers l'avant ( $\bar{q} \geq 0$ ).

- l'opérateur  $\hat{V}$  n'est pas diagonal dans la base  $|\bar{q}\rangle$  mais ses éléments de matrice  $\langle \bar{q} | \hat{V} | \bar{q}' \rangle$  tendent rapidement vers zéro lorsque  $\bar{q}' \rightarrow +\infty$  à  $\bar{q}$  fixé et ne présentent aucune divergence à faible  $\bar{q}'$  (ils tendent là aussi vers zéro), comme on peut le vérifier sur l'expression explicite donnée dans l'Annexe B. Nous pouvons donc considérer formellement  $\hat{V}$  comme un potentiel extérieur à courte portée pour la particule fictive, même s'il présente la bizarrerie de ne pas être local en position.<sup>15</sup>

Par ailleurs, nous savons que le spectre de  $\hat{\mathcal{H}}$  est positif :  $\hat{\mathcal{H}}$  provient *in fine* de la linéarisation d'équations cinétiques, et de faibles écarts initiaux aux nombres d'occupation thermiques ne peuvent pas diverger exponentiellement en temps. Le potentiel fictif  $\hat{V}$  ne conduit donc pas à la formation d'états liés au sens strict pour la particule fictive ; il donne naissance cependant à deux états propres discrets (normalisables) de  $\hat{\mathcal{H}}$  pour la valeur propre nulle donc situés exactement au seuil,<sup>16</sup>

$$\hat{\mathcal{H}}|\phi\rangle = 0 \quad \text{et} \quad \hat{\mathcal{H}}(\hat{q}|\phi\rangle) = 0 \quad (75)$$

souvenirs de la conservation de l'énergie et du nombre de phonons par les processus Landau-Khalatnikov (la fonction  $\langle \bar{q} | \phi \rangle$  est celle de l'équation (51) et  $\hat{q}$  est l'opérateur nombre d'onde fictif). D'où la conclusion importante suivante : les autres états propres de  $\hat{\mathcal{H}}$  sont les états stationnaires de diffusion de la particule fictive sur  $\hat{V}$ . Chaque état de diffusion

15. Plus précisément,  $\langle \bar{q} | \hat{V} | \bar{q}' \rangle$  est la somme de deux contributions. La première tend uniformément vers zéro lorsque  $\bar{q}$  et  $\bar{q}'$  tendent vers  $+\infty$ ; qualitativement, ceci correspond à un modèle de potentiel séparable  $\langle \bar{q} | u \rangle \langle u | \bar{q}' \rangle$  avec  $\langle u | u \rangle < +\infty$ . La seconde admet une limite finie  $\tilde{U}(Q)$  lorsque  $\bar{q}$  et  $\bar{q}' \rightarrow +\infty$  à  $Q = \bar{q} - \bar{q}'$  fixé; qualitativement, ceci correspond à un potentiel  $U(x)$  local dans l'espace des positions de la particule fictive,  $\tilde{U}(Q)$  étant sa transformée de Fourier. Ici  $\tilde{U}(Q)$  est à décroissance rapide. Ces affirmations sont justifiées dans l'Annexe B, voir (B.36,B.37).

16. C'est une simple réécriture de l'équation (20) selon le changement de fonction (46).

est repéré par le nombre d'onde  $\bar{q}$  de l'onde fictive incidente ; le ket correspondant  $|\psi_{\bar{q}}\rangle$ , somme de l'onde incidente et de l'onde diffusée, s'écrit dans l'espace de Fourier

$$\langle \bar{q}' | \psi_{\bar{q}} \rangle = \delta(\bar{q} - \bar{q}') + \langle \bar{q}' | \psi_{\bar{q}}^{\text{diff}} \rangle \quad (76)$$

Le premier terme est un  $\delta$  de Dirac, le second est une fonction régulière de  $\bar{q}'$  sauf en  $\bar{q}' = \bar{q}$  où elle diverge comme  $(\bar{q}' - \bar{q})^{-1}$ , selon l'habituelle théorie de la diffusion ondulatoire [39], qui démontre aussi que l'énergie propre de  $|\psi_{\bar{q}}\rangle$  se réduit à l'énergie cinétique (ici fictive) de l'onde incidente :

$$\hat{\mathcal{H}}|\psi_{\bar{q}}\rangle = \bar{\Gamma}(\bar{q})|\psi_{\bar{q}}\rangle \quad (77)$$

Le spectre de  $\hat{\mathcal{H}}$  se réduit donc à la valeur propre discrète nulle deux fois dégénérée et au spectre continu  $\bar{\Gamma}(\bar{q})$  non dégénéré :

$$\text{Spec } \hat{\mathcal{H}} = \{0; 0\} \cup \{\bar{\Gamma}(\bar{q}) \mid \bar{q} \in \mathbb{R}^{+*}\} \quad (78)$$

ce qu'une étude numérique soignée confirme.

Toujours selon la théorie de la diffusion, les états stationnaires normalisés comme dans l'équation (76) sont orthogonaux,  $\langle \psi_{\bar{q}} | \psi_{\bar{q}'} \rangle = \delta(\bar{q} - \bar{q}')$ . Par injection d'une relation de fermeture sur les  $|\psi_{\bar{q}}\rangle$  dans l'expression (53) de la variance sous-balistique du déphasage du condensat, nous obtenons l'écriture exacte

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{r}) = \int_0^{+\infty} d\bar{q} \frac{|\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle|^2}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} \left[ e^{-\bar{\Gamma}(\bar{q})\bar{r}} - 1 + \bar{\Gamma}(\bar{q})\bar{r} \right] \quad (79)$$

L'approximation de taux (54) revient donc à négliger l'onde diffusée dans  $|\psi_{\bar{q}}\rangle$  (le second terme dans l'équation (76)). Cette belle réinterprétation permet d'aller au-delà et d'estimer la première correction à l'approximation  $\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle \simeq \langle \chi | \bar{q} \rangle$ , en traitant l'effet de  $\hat{V}$  dans l'approximation de Born :<sup>17</sup>

$$|\psi_{\bar{q}}\rangle \simeq [1 + \hat{G}_0(\bar{\Gamma}(\bar{q}) + i0^+) \hat{V}] |\bar{q}\rangle \quad (80)$$

où  $\hat{G}_0(z) = (z - \hat{\Gamma})^{-1}$ , pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ , est l'opérateur résolvante du hamiltonien non perturbé  $\hat{\Gamma}$ .<sup>18</sup> On en déduit que

$$\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle - \langle \chi | \bar{q} \rangle \simeq \int_0^{+\infty} d\bar{k} \frac{\langle \chi | \bar{k} \rangle \langle \bar{k} | \hat{V} | \bar{q} \rangle}{\bar{\Gamma}(\bar{q}) - \bar{\Gamma}(\bar{k}) + i0^+} \quad (81)$$

La correction est en général d'ordre unité, d'où l'échec quantitatif de l'approximation de taux sur le coefficient de diffusion  $\bar{D}(\nu)$  pour  $\nu$  quelconque (voir la figure 2a). Dans le cas particulier des faibles nombres d'onde  $\bar{q} \rightarrow 0$ , en revanche, l'élément de matrice de  $\hat{V}$  tend vers zéro uniformément en  $\bar{k}$  :

$$\langle \bar{k} | \hat{V} | \bar{q} \rangle \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{\overset{\bar{k}=O(1)}{\sim}} [\min(\bar{q}, \bar{k})]^3 \mathcal{W}(\bar{k}, \nu) \quad (82)$$

La fonction  $\mathcal{W}(\bar{k}, \nu)$  est explicitée dans l'Annexe B. Il suffit ici de savoir qu'elle est uniformément bornée sur  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$  :

$$\mathcal{W}(\bar{k}, \nu) = O(1) \quad (83)$$

En particulier, elle admet une limite finie et non nulle en  $\bar{k} = 0$  (même pour  $\nu = 0$ ). On en déduit ce qui suit :

17. Nous disons bien estimer car l'approximation de Born ne donne en général pas de manière exacte la première correction à l'approximation de taux. En effet, les éléments de matrice  $\langle \bar{k} | \hat{V} | \bar{k}' \rangle$ , pour  $\bar{k}$  et  $\bar{k}' = O(1)$ , ne sont infinitésimaux que si l'un au moins des  $\bar{k}$  et  $\bar{k}'$  l'est. Or l'ordre suivant du développement de Born de  $\langle \bar{k} | \psi_{\bar{q}} \rangle$ , à savoir  $\langle \bar{k} | \hat{G}_0 \hat{V} \hat{G}_0 \hat{V} | \bar{q} \rangle$ , où  $\bar{k} = O(1)$  et  $\bar{q} = o(1)$ , fait apparaître des éléments de matrice  $\langle \bar{k} | \hat{V} | \bar{k}' \rangle$  d'ordre unité puisque la fonction  $\bar{k}' \mapsto \langle \bar{k}' | \hat{V} | \bar{q} \rangle$  a une largeur d'ordre unité comme le montre l'équation (82); cet ordre suivant apporte donc une correction relative d'ordre unité au terme de Born  $\langle \bar{k} | \hat{G}_0 \hat{V} | \bar{q} \rangle$ .

18. L'équation (80) devient exacte si l'on remplace  $\hat{V}$  par la matrice  $\hat{T}(z) = \hat{V} + \hat{V} \hat{G}(z) \hat{V}$  où  $\hat{G}(z) = (z - \hat{\mathcal{H}})^{-1}$  est l'opérateur résolvante du hamiltonien complet et  $z = \bar{\Gamma}(\bar{q}) + i0^+$ .

— pour  $\nu < 0$  fixé,<sup>19</sup>

$$\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle - \langle \chi | \bar{q} \rangle \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{=} O(\bar{q}^3 \ln \bar{q}) \quad (84)$$

Comme  $\langle \chi | \bar{q} \rangle$  s'annule linéairement dans cette limite, l'approximation de taux introduit une erreur relative d'ordre  $\bar{q}^2 \ln \bar{q}$  sur  $|\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle|^2$  dans l'équation (79). Aussi  $|\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle|^2 / \bar{\Gamma}(\bar{q})^2$  admet-il de manière exacte le développement limité (57). Les expressions (60,61) des coefficients  $\bar{A}(\nu)$  et  $\bar{B}(\nu)$  qui en découlent sont donc exactes. Nous les récrivons ici :

$$\bar{A}(\nu) = \frac{-X(\nu)^2 \bar{n}_0(1 + \bar{n}_0)}{C(\nu)^{3/2}} \quad (85)$$

$$\bar{B}(\nu) = \frac{-2X(\nu)^2 \bar{n}_0(1 + \bar{n}_0)}{C(\nu)^2} \left[ \frac{Y(\nu)}{X(\nu)} - \alpha(\nu) - \left( \frac{1}{2} + \bar{n}_0 \right) \right] \quad (86)$$

En revanche, les expressions (59) et (62) ne dépendent pas seulement du comportement de  $\langle \bar{q} | \chi \rangle$  au voisinage de  $\bar{q} = 0$ ; elles ne donnent donc pas la valeur exacte de  $\bar{D}(\nu)$  et  $\bar{E}(\nu)$ .

— pour  $\nu = 0$ ,<sup>20</sup>

$$\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle - \langle \chi | \bar{q} \rangle \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{=} O(\bar{q}) \quad (87)$$

Comme  $\langle \chi | \bar{q} \rangle$  a une limite finie et non nulle en  $\bar{q} = 0$ , l'approximation de taux introduit une erreur relative  $\bar{q}$  sur  $|\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle|^2$ . Le développement (67) n'est affecté qu'à l'ordre sous-dominant. Il en va de même pour l'équation (65). Nous gardons donc le résultat exact prédit par l'approximation de taux (voir (66) pour l'expression de  $X_0$  et (64) pour celle de  $C_0$ ) :

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{r}) \underset{\bar{r} \rightarrow +\infty}{\overset{\nu=0}{\equiv}} \bar{d}_0 \bar{r}^{\bar{\nu}/3} + O(\bar{r}^{A/3}) \text{ avec } \bar{d}_0 = \frac{3X_0^2 \Gamma(1/3)}{10C_0^{1/3}} = 913,184\,011\dots \quad (88)$$

— pour  $\nu$  infinitésimal non nul, nous avons vu dans l'approximation de taux que le basculement de  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{r})$  de l'étalement superdiffusif à l'étalement diffusif est dominé par les nombres d'onde  $\bar{q} \simeq |\nu|$ . Nous posons donc  $\bar{q} = |\nu|Q$  comme dans l'équation (68) et  $\bar{k} = |\nu|K$  dans l'intégrale (81), puis faisons tendre  $\nu$  vers zéro à  $Q$  et  $K$  fixés. En gardant l'ordre dominant dans l'expression (53) de  $\langle \bar{k} | \chi \rangle$  et dans les équations (69,70), et en approximant  $\mathcal{W}(\bar{k}, \nu)$  par  $\mathcal{W}(0, 0)$ , nous trouvons que

$$\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle - \langle \chi | \bar{q} \rangle \underset{\nu \rightarrow 0^-}{\overset{Q \text{ fixé}}{\simeq}} \frac{X_0}{C_0} \mathcal{W}(0, 0) |\nu| \int_0^{+\infty} dK \frac{\frac{K}{K+1} [\min(K, Q)]^3}{K^2(1+K) - Q^2(1+Q) - i0^+} = O(|\nu|) \quad (89)$$

Comme  $\langle \chi | \bar{q} \rangle \sim -X_0 Q / (1 + Q)$  dans cette limite, les erreurs relative et absolue introduites sur  $|\langle \psi_{\bar{q}} | \chi \rangle|^2$  par l'approximation de taux sont d'ordre un en  $|\nu|$ . L'approximation de taux donne donc les valeurs exactes du coefficient de diffusion  $\bar{D}$  et du terme constant  $\bar{E}$  dans la limite  $\nu \rightarrow 0^-$  à l'ordre dominant en  $|\nu|$  :

$$\bar{D}(\nu) = \int_0^{+\infty} d\bar{q} \frac{|\langle \chi | \psi_{\bar{q}} \rangle|^2}{\bar{\Gamma}(\bar{q})} \underset{\nu \rightarrow 0^-}{=} \frac{X(\nu)^2}{2C(\nu)|\nu|} + O\left(\frac{\ln |\nu|}{|\nu|}\right) \quad (90)$$

$$\bar{E}(\nu) \underset{\nu \rightarrow 0^-}{=} \frac{2X(\nu)^2}{C(\nu)^2 |\nu|^3} \left[ \ln(C(\nu)|\nu|^2) - \frac{29}{12} + \gamma_{\text{Euler}} \right] + O\left(\frac{\ln |\nu|}{|\nu|^4}\right) \quad (91)$$

comme on peut le vérifier sur les agrandissements autour de  $\nu = 0$  dans les vignettes des figures 2a et 2d. Nous avons obtenu ces résultats en effectuant le changement de variable  $\bar{q} = |\nu|Q$  dans l'équation (59) et dans la

19. Comme l'intégrale sur  $\bar{k}$  dans (81) est dominée par les  $\bar{k} \ll \bar{k}_c \ll 1$ , où  $\bar{k}_c$  est arbitraire mais fixé, on approxime  $\mathcal{W}(\bar{k}, \nu)$  par  $\mathcal{W}(0, \nu)$ ,  $\langle \chi | \bar{k} \rangle$  par  $-\bar{k}[\bar{n}_0(1 + \bar{n}_0)]^{1/2} X(\nu)$ ,  $\bar{\Gamma}(\bar{k})$  par  $C(\nu)\bar{k}^2$  et, bien sûr,  $\bar{\Gamma}(\bar{q})$  par  $C(\nu)\bar{q}^2$ . Après le changement de variable  $\bar{k} = \bar{q}K$ , on tombe sur l'intégrale  $\bar{q}^3 \int_0^{\bar{k}_c/\bar{q}} dK K[\min(1, K)]^3 / (K^2 - 1 - i0^+) = O(\bar{q}^3 \ln \bar{q})$ .

20. On peut procéder comme dans la note 19 si ce n'est que  $\langle \chi | \bar{k} \rangle \xrightarrow{\bar{k} \rightarrow 0} -X_0$  et  $\bar{\Gamma}(\bar{k})$  s'annule cubiquement. On tombe sur l'intégrale  $\bar{q} \int_0^{\bar{k}_c/\bar{q}} dK [\min(1, K)]^3 / (K^3 - 1 - i0^+) = O(\bar{q})$ .

première intégrale de l'équation (62) puis en remplaçant l'intégrande par un équivalent pour  $\nu \rightarrow 0$  à  $Q$  fixé, voir l'équation (70), commettant ainsi une erreur relative  $O(|\nu|)$  du même ordre que celle de l'approximation de taux. Dans l'équation (62), on remplace de même  $\bar{A}_{\text{app}}(\nu)$ ,  $\bar{B}_{\text{app}}(\nu)$  et  $\alpha(\nu)$  par des équivalents et on néglige la seconde intégrale  $\int_{\bar{q}_c}^{+\infty}$  de contribution bornée.<sup>21</sup> De la même manière, on déduit de l'équation (89) que la loi d'interpolation (72) entre les étalements sous-balistiques superdiffusif et diffusif, tirée de l'approximation de taux, est en fait un équivalent exact à faible  $\nu$  de  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  à  $\Theta = C(\nu)|\nu|^2\bar{t}$  fixé, que nous récrivons donc ici :

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{t}) \underset{\nu \rightarrow 0^-}{\overset{\Theta \text{ fixé}}{\sim}} \frac{X(\nu)^2}{C(\nu)^2|\nu|^3} \int_0^{+\infty} dQ \frac{e^{-Q^2(1+Q)\Theta} - 1 + Q^2(1+Q)\Theta}{Q^2(1+Q)^4} \quad (92)$$

Cas  $\nu \rightarrow -\infty$ . Pour terminer, signalons qu'un autre résultat exact peut être obtenu dans la limite  $\nu \rightarrow -\infty$  où le gaz de phonons est non dégénéré. Les nombres d'occupation thermiques des modes tendent alors exponentiellement vers zéro :

$$\bar{n}_k^\ell \underset{\nu \rightarrow -\infty}{\sim} e^\nu e^{-\bar{k}} \quad (93)$$

Comme on le voit sur les expressions (41) de sa partie diagonale et (50) de sa partie non diagonale, le hamiltonien fictif (49) tend vers zéro de la même façon :

$$\hat{\mathcal{H}} \underset{\nu \rightarrow -\infty}{\sim} e^\nu \hat{\mathcal{H}}_\infty \quad (94)$$

où l'opérateur  $\hat{\mathcal{H}}_\infty$  est indépendant de  $\nu$ . Ceci vaut aussi pour le ket fictif  $|\chi\rangle$  dans l'équation (53) :<sup>22</sup>

$$|\chi\rangle \underset{\nu \rightarrow -\infty}{\sim} e^{\nu/2} |\chi_\infty\rangle \text{ avec } \langle \bar{q} | \chi_\infty \rangle = \bar{q} e^{-\bar{q}} (\bar{q}^3 - X_\infty - Y_\infty \bar{q}) \quad (95)$$

Si l'on redéfinit astucieusement le temps et la variance sous-balistique du déphasage comme suit,  $e^\nu \bar{t} = \bar{t}_\infty$  et  $\bar{\mathcal{V}}_\infty(\bar{t}_\infty) = e^\nu \bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$ , la variance réduite  $\bar{\mathcal{V}}_\infty(\bar{t}_\infty)$  dépend seulement de  $\bar{t}_\infty$  et plus de  $\nu$  dans la limite non dégénérée :

$$\bar{\mathcal{V}}_\infty(\bar{t}_\infty) = \langle \chi_\infty | \frac{e^{-\hat{\mathcal{H}}_\infty \bar{t}_\infty} - 1 + \hat{\mathcal{H}}_\infty \bar{t}_\infty}{\hat{\mathcal{H}}_\infty^2} | \chi_\infty \rangle \quad (96)$$

Or elle doit admettre aux temps  $\bar{t}_\infty$  longs un développement asymptotique de même forme que (73) :

$$\bar{\mathcal{V}}_\infty(\bar{t}_\infty) \underset{\bar{t}_\infty \rightarrow +\infty}{\sim} \bar{D}_\infty \bar{t}_\infty + \bar{A}_\infty (\pi \bar{t}_\infty)^{1/2} + \bar{B}_\infty \ln(\bar{t}_\infty^{1/2}) + \bar{E}_\infty + o(1) \quad (97)$$

avec des coefficients constants  $\bar{A}_\infty$ ,  $\bar{B}_\infty$  connus analytiquement et  $\bar{D}_\infty$ ,  $\bar{E}_\infty$  calculables numériquement.<sup>23</sup> Si l'on revient au temps  $\bar{t}$  et à la variance  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  dans l'équation (97), on doit trouver le comportement limite de l'équation (73) lorsque  $\nu \rightarrow -\infty$ , à une erreur relative  $O(e^\nu)$  près comme dans les équations (93,94,95), d'où

$$\bar{D}(\nu) = \bar{D}_\infty [1 + O(e^\nu)] \quad (98)$$

$$\bar{A}(\nu) = e^{-\nu/2} \bar{A}_\infty [1 + O(e^\nu)] \quad (99)$$

$$\bar{B}(\nu) = e^{-\nu} \bar{B}_\infty [1 + O(e^\nu)] \quad (100)$$

$$\bar{E}(\nu) = e^{-\nu} (\bar{E}_\infty + \bar{B}_\infty \nu/2) [1 + O(e^\nu)] \quad (101)$$

Ces prédictions sont représentées par des droites en tireté sur la figure 2.

21. On prend  $C(\nu)^{-1/2} \bar{A}_{\text{app}}(\nu) \sim -X(\nu)^2 / [|\nu|^2 C(\nu)^2]$ ,  $\bar{B}_{\text{app}}(\nu) \sim 4X(\nu)^2 / [C(\nu)^2 |\nu|^3]$  et  $\langle \bar{q} | \chi \rangle^2 / \bar{\Gamma}(\bar{q})^2 \sim X(\nu)^2 / [|\nu|^4 C(\nu)^2 Q^2 (1+Q)^4]$ . On prend aussi  $\alpha(\nu) \sim 1/|\nu|$ , comme le laisse présager (70) et comme le confirme un calcul explicite (voir l'Annexe B). Dans toutes ces expressions, l'erreur relative est bien un  $O(|\nu|)$ . Il reste à dire que  $\int_0^{\bar{q}_c/|\nu|} dQ \left[ \frac{1}{Q^2(1+Q)^4} - \frac{1}{Q^2} + \frac{4}{Q} \right] = \frac{13}{3} + 4 \ln \frac{\bar{q}_c}{|\nu|} + O(|\nu|)$ .

22. On donne  $X_\infty = \lim_{\nu \rightarrow -\infty} X(\nu) = -120$  et  $Y_\infty = \lim_{\nu \rightarrow -\infty} Y(\nu) = 60$ .

23. On donne  $\bar{D}_\infty \simeq 379$ ,  $\bar{E}_\infty \simeq 101$ ,  $\bar{A}_\infty = -(5!)^2 / (16\pi/3)^{3/2} \simeq -210$  et  $\bar{B}_\infty = 2(5!)^2 (1 + \alpha_\infty) / (16\pi/3)^2 \simeq 180$ , sachant que  $\alpha_\infty = \lim_{\nu \rightarrow -\infty} \alpha(\nu) = 3/4$  d'après (B.19).

## 5. Conclusion

Dans un gaz tridimensionnel de  $N$  fermions de spin  $1/2$  à l'équilibre, homogène, non polarisé et isolé de son environnement, un condensat de paires accumule pendant la durée  $t$  un déphasage  $\hat{\theta}(t) - \hat{\theta}(0)$ , dont nous avons étudié le comportement de la variance aux temps longs devant le temps de collision entre les phonons thermiques du système. Le gaz est proche de la limite thermodynamique, mais reste de taille finie. Sa température est non nulle mais extrêmement basse, suffisamment pour justifier l'emploi de l'hydrodynamique quantique. Il nous a fallu distinguer deux cas, qui dépendent de la force des interactions de contact entre fermions de spins opposés.

Dans le premier cas, la relation de dispersion des phonons est convexe à faible nombre d'onde  $q$ . Les processus collisionnels dominants sont ceux à trois phonons  $\phi \leftrightarrow \phi + \phi$  de Beliaev-Landau, avec une échelle de temps  $\propto \hbar(mc^2)^{5/2} \epsilon_F^{3/2} (k_B T)^{-5}$ , où  $c$  est la vitesse du son à température nulle et  $\epsilon_F$  l'énergie de Fermi du gaz. La variance du déphasage du condensat est asymptotiquement la somme d'un terme balistique  $\propto t^2$  et d'une contribution  $2D(t - t_0)$  sous-dominante correspondant à une diffusion de phase avec un temps de retard  $t_0$ . Le terme balistique résulte des variations d'une réalisation de l'expérience à l'autre des quantités conservées que sont l'énergie totale  $E$  et le nombre total  $N$  de fermions dans le gaz; il disparaît donc si le système est préparé dans l'ensemble microcanonique. Il est insensible aux fluctuations initiales d'autres observables car le gaz de phonons a une dynamique quantique ergodique. En revanche, les coefficients  $D$  et  $t_0$ , dont nous donnons des expressions analytiques, ne dépendent pas de l'ensemble statistique à la limite thermodynamique. Cette situation ressemble beaucoup à celle d'un condensat dans un gaz de bosons en interaction faible [17].

Dans le second cas, la relation de dispersion des phonons est concave à faible nombre d'onde. La situation est alors beaucoup plus riche, les processus collisionnels présentant plusieurs échelles de temps pertinentes. À l'échelle de temps  $\propto \hbar(mc^2)^6 (k_B T)^{-7}$ , les processus dominants sont ceux à quatre phonons de Landau-Khalatnikov aux petits angles (collisions  $\mathbf{q} + \mathbf{q}' \rightarrow \mathbf{k} + \mathbf{k}'$  avec des angles  $O(k_B T/mc^2)$  entre les vecteurs d'onde). Nous nous limitons ici aux durées  $t$  négligeables devant  $\hbar(mc^2)^8 (k_B T)^{-9}$  pour exclure les autres processus, et aux distributions thermiques de phonons isotropes dans l'espace des  $\mathbf{q}$  pour simplifier (les collisions de Landau-Khalatnikov aux petits angles, de la façon dont nous les traitons, ne thermalisent pas la direction de  $\mathbf{q}$  [30]). Le nombre total de phonons  $N_\phi$  est donc de manière effective une constante du mouvement et les phonons admettent, au contraire du cas précédent, des distributions quasi-stationnaires de potentiel chimique  $\mu_\phi$  non nul,  $\mu_\phi < 0$ . La variance du déphasage est alors asymptotiquement la somme d'un terme balistique  $\propto t^2$ , d'un terme diffusif  $2Dt$ , de termes sous-sous-dominants exotiques  $2A(\pi t)^{1/2} + 2B \ln(t^{1/2})$  et d'un terme constant. Le coefficient du terme balistique résulte, comme dans le premier cas, des fluctuations des quantités conservées, ici  $N$ ,  $E$  et  $N_\phi$ ; il s'annule dans un ensemble microcanonique généralisé fixant  $N$ ,  $E$  et  $N_\phi$ . Les coefficients  $A$  et  $B$  dépendent seulement de la physique infrarouge du gaz de phonons, c'est-à-dire des nombres d'onde  $q \ll q_{\text{th}}$  où  $q_{\text{th}} = k_B T/\hbar c$  est le nombre d'onde thermique. Leur valeur exacte peut ainsi être obtenue analytiquement par une simple approximation de taux réduisant à leur partie diagonale, c'est-à-dire à leurs termes de décroissance, les équations cinétiques linéarisées sur les fluctuations des nombres d'occupation des modes de phonons. Le coefficient  $D$  et le terme constant sont, quant à eux, dominés par cette physique infrarouge seulement lorsque  $\mu_\phi/k_B T \rightarrow 0$ ; dans cette limite, on obtient analytiquement leur comportement dominant, divergent. Lorsque le potentiel chimique des phonons est nul,  $\mu_\phi = 0$ , la variance du déphasage du condensat est asymptotiquement la somme du sempiternel terme balistique, de termes superdiffusifs exotiques (à exposants non entiers)  $d_0 t^{5/3} + d_1 t^{4/3}$  et de termes sous-sous-dominants en  $O(t \ln t)$ . La valeur exacte du coefficient  $d_0$  est obtenue analytiquement par l'approximation de taux. On peut de même obtenir une loi interpolante à  $\mu_\phi/k_B T$  très petit non nul décrivant le passage, pour la variance sous-balistique, de l'étalement superdiffusif  $\propto t^{5/3}$  à l'étalement diffusif  $\propto t$ , le changement de régime se faisant à un temps  $t \propto \hbar \epsilon_F^6 |\mu_\phi|^{-3} (k_B T)^{-4}$ .

Dans tous les cas, nous avons utilisé de façon centrale la généralisation quantique de la seconde relation de Josephson, qui relie la dérivée temporelle de l'opérateur phase  $\hat{\theta}$  du condensat de paires aux opérateurs nombres d'occupation des modes de phonons [1]. Dans tous les cas, nous trouvons que le coefficient du terme balistique est un  $O(1/N)$  pour des fluctuations normales des quantités conservées, et que tous les coefficients des termes sous-balistiques ( $D$  et  $Dt_0$  dans le cas convexe,  $D$ ,  $A$ ,  $B$ , le terme constant,  $d_0$  et  $d_1$  dans le cas concave) sont  $\propto 1/N$ . Dans le cas concave, des résultats nouveaux et forts sur le taux d'amortissement Landau-Khalatnikov des phonons ont été obtenus (voir en particulier l'équation (41)), pour  $\mu_\phi < 0$  bien sûr mais pour  $\mu_\phi = 0$  aussi; simples intermédiaires de calcul ici, ils ont été relégués en annexe.

Un prolongement naturel de notre travail sur l'étalement de la phase du condensat de paires serait d'effectuer l'ana-

lyse aux échelles de temps plus longues  $\hbar(mc^2)^8(k_B T)^{-9}$  où le nombre de phonons n'est plus conservé, de prendre en compte le couplage aux quasi-particules fermioniques BCS c'est-à-dire aux paires de fermions brisées thermiquement [40, 41], voire de traiter le cas harmoniquement piégé comme il est fait pour les bosons dans la référence [42]. Signalons aussi comme sujet de recherche émergent et prometteur l'étude de la cohérence temporelle à température non nulle d'un gaz (de bosons ou de fermions) isolé de dimensionnalité réduite [43]; la physique y est assez différente de notre cas tridimensionnel à la limite thermodynamique puisqu'il n'y a plus de condensat, mais certains des outils théoriques du présent travail pourraient y être réemployés.

## Remerciements

Nous remercions chaleureusement Alice Sinatra et Hadrien Kurkjian pour leurs contributions à un stade préliminaire de notre étude, ainsi que Boris Svistunov pour ses encouragements et Jacques Villain pour ses questions.

## Annexe A. Calcul analytique de la moyenne angulaire Landau-Khalatnikov dans l'équation (37)

Pour justifier l'équation (37) et donc l'expression très simple du taux d'amortissement Landau-Khalatnikov dans l'équation (41), il faut montrer que la fonction des nombres d'onde réduits (36) entrants et sortants définie sur l'hyperplan  $\bar{k} + \bar{k}' = \bar{q} + \bar{q}'$  par

$$F(\bar{q}, \bar{q}'; \bar{k}, \bar{k}') \equiv \frac{\bar{q}'\bar{k}}{2\bar{q}\bar{k}'|w|} \int_0^\pi d\phi \int_0^{\pi/2} d\alpha \sin(2\alpha) \Theta\left(\frac{-w}{u}\right) |\mathcal{A}_{\text{red}}|^2 \quad (\text{A.1})$$

vaut simplement

$$F(\bar{q}, \bar{q}'; \bar{k}, \bar{k}') = \frac{4\pi}{3} \frac{[\min(\bar{q}, \bar{q}', \bar{k}, \bar{k}')]^3}{\bar{q}\bar{q}'\bar{k}\bar{k}'} \quad (\text{A.2})$$

Nous avons repris ici les résultats de la référence [18] avec presque les mêmes notations. En particulier,  $\Theta$  est la fonction de Heaviside et

$$u = \frac{1}{\bar{k}'} \left[ \bar{q}(\bar{k} \sin^2 \alpha - \bar{q}' \cos^2 \alpha) + \bar{q}'\bar{k}(1 - \sin 2\alpha \cos \phi) \right]; \quad w = \frac{1}{4} (\bar{q}^3 + \bar{q}'^3 - \bar{k}^3 - \bar{k}'^3) \quad (\text{A.3})$$

$$\mathcal{A}_{\text{red}} = \frac{1}{\bar{q}' \left( \frac{\cos^2 \alpha}{(\bar{q} + \bar{q}')^2} - \frac{3u}{4w} \right)} - \frac{1}{\bar{k} \left( \frac{\sin^2 \alpha}{(\bar{q} - \bar{k})^2} - \frac{3u}{4w} \right)} - \frac{1}{\frac{\bar{q}' \cos^2 \alpha - \bar{k} \sin^2 \alpha + u}{(\bar{q}' - \bar{k})^2} - \frac{3u}{4w} \bar{k}'} \quad (\text{A.4})$$

La fonction  $F$  hérite des propriétés de symétrie de l'amplitude de couplage  $\mathcal{A}(\mathbf{q}, \mathbf{q}'; \mathbf{k}, \mathbf{k}')$  à quatre phonons du hamiltonien effectif (31) :  $F(\bar{q}, \bar{q}'; \bar{k}, \bar{k}') = F(\bar{q}', \bar{q}; \bar{k}, \bar{k}') = F(\bar{q}, \bar{q}'; \bar{k}', \bar{k}) = F(\bar{k}, \bar{k}'; \bar{q}, \bar{q}')$ . Elle est de plus positivement homogène de degré  $-1$ ,  $F(\lambda\bar{q}, \lambda\bar{q}'; \lambda\bar{k}, \lambda\bar{k}') = \lambda^{-1} F(\bar{q}, \bar{q}'; \bar{k}, \bar{k}')$  pour tout  $\lambda > 0$ , comme on le constate aisément sur l'écriture (A.1). Il suffit donc d'établir (A.2) sur le domaine fondamental  $0 < \bar{k} < \bar{q} < 1/2$  et  $\bar{k}' + \bar{k} = \bar{q}' + \bar{q} = 1$ , auquel nous nous restreignons désormais.

Sur ce domaine fondamental,  $w = -\frac{3}{4}(\bar{q} - \bar{k})(1 - \bar{k} - \bar{q})$  est strictement négatif et l'on a, en introduisant  $X = \tan \alpha$  :

$$u > 0 \iff sX - \frac{s'}{X} > \cos \phi \iff X > X_0(\phi) = \frac{\cos \phi + \sqrt{4ss' + \cos^2 \phi}}{2s} \quad \text{où } s = \frac{1}{2(1 - \bar{q})} > 0 \text{ et } s' = \frac{\bar{q} - \bar{k}}{2\bar{k}} > 0 \quad (\text{A.5})$$

Comme il est suggéré dans une note de la référence [16], on peut voir l'amplitude réduite  $\mathcal{A}_{\text{red}}$  comme une somme d'éléments simples en la variable  $\cos \phi$  :

$$\mathcal{A}_{\text{red}} = \frac{1}{\sin 2\alpha} \sum_{i=1}^3 \frac{b_i}{a_i - \cos \phi} \quad (\text{A.6})$$

avec

$$a_1 = \frac{1}{2(1 - \bar{q})} \quad a'_1 = -\frac{(\bar{q} - \bar{k})(2 - \bar{k} - \bar{q})}{2(1 - \bar{q})} \quad b_1 = \frac{(1 - \bar{k})(\bar{q} - \bar{k})(1 - \bar{k} - \bar{q})}{\bar{k}(1 - \bar{q})^2} \quad (\text{A.7})$$

$$a_2 = \frac{1-2\bar{k}}{2\bar{k}(\bar{q}-\bar{k})} \quad a'_2 = -\frac{\bar{q}-\bar{k}}{2\bar{k}} \quad b_2 = -\frac{(1-\bar{k})(\bar{q}-\bar{k})(1-\bar{k}-\bar{q})}{\bar{k}^2(1-\bar{q})} \quad (\text{A.8})$$

$$a_3 = \frac{1-2\bar{k}}{2[1+\bar{k}^2-\bar{k}(3-\bar{q})]} \quad a'_3 = \frac{(\bar{q}-\bar{k})(2-\bar{k}-\bar{q})}{2[1+\bar{k}^2-\bar{k}(3-\bar{q})]} \quad b_3 = -\frac{(1-\bar{k})(\bar{q}-\bar{k})(1-\bar{k}-\bar{q})^2}{\bar{k}(1-\bar{q})[1+\bar{k}^2-\bar{k}(3-\bar{q})]} \quad (\text{A.9})$$

Il faut cependant prendre le contrepied de cette note en intégrant d'abord sur l'angle  $\alpha$  plutôt que sur l'angle  $\phi$  :

$$F(\bar{q}, 1-\bar{q}; \bar{k}, 1-\bar{k}) = \frac{\bar{k}(1-\bar{q})}{3\bar{q}(1-\bar{k})(\bar{q}-\bar{k})(1-\bar{k}-\bar{q})} \sum_{i,j=1}^3 b_i b_j I(a_i, a'_i; a_j, a'_j) \quad (\text{A.10})$$

où l'on a introduit la fonction

$$I(a, a'; \check{a}, \check{a}') \equiv \int_0^\pi d\phi \int_{X_0(\phi)}^{+\infty} dX \frac{X}{(aX^2 - X \cos \phi + a')(\check{a}X^2 - X \cos \phi + \check{a}')} \quad (\text{A.11})$$

Deuxième remarque salvatrice, les coefficients  $a_i$  et  $a'_i$  obéissent aux relations remarquables et inattendues

$$(a_i a'_j - a_j a'_i)^2 + (a_i - a_j)(a'_i - a'_j) = 0 \quad \forall i, j \in \{1, 2, 3\} \quad (\text{A.12})$$

Nous calculons donc la fonction  $I(a, a'; \check{a}, \check{a}')$  uniquement sur la variété

$$\mathbb{V} = \{(a, a', \check{a}, \check{a}') \in \mathbb{R}^4 \mid (a\check{a}' - a'\check{a})^2 + (a - \check{a})(a' - \check{a}') = 0\} \quad (\text{A.13})$$

La décomposition de l'intégrande de (A.11) en éléments simples sur le corps des réels vis-à-vis de la variable  $X$  fait alors apparaître un facteur global dont la dépendance en  $\phi$  est particulièrement simple, puisqu'il est  $\propto \sin^{-2} \phi$ .<sup>24</sup> On se ramène ainsi, après intégration sur  $X$ , à

$$I(a, a'; \check{a}, \check{a}') = \frac{J(a, a') - J(\check{a}, \check{a}') - \frac{1}{2}K(a, a') + \frac{1}{2}K(\check{a}, \check{a}')}{a\check{a}' - a'\check{a}} + 2 \frac{a'J(a, a') - \check{a}'J(\check{a}, \check{a}')}{a' - \check{a}'} \quad (\text{A.14})$$

Les fonctions de deux variables introduites,

$$J(a, a') \equiv \int_\eta^{\pi-\eta} \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} \frac{\cos \phi}{\sqrt{4aa' - \cos^2 \phi}} \left[ \operatorname{atan} \frac{2a\Lambda}{\sqrt{4aa' - \cos^2 \phi}} - \operatorname{atan} \frac{2aX_0(\phi) - \cos \phi}{\sqrt{4aa' - \cos^2 \phi}} \right] \quad (\text{A.15})$$

$$K(a, a') \equiv \int_\eta^{\pi-\eta} \frac{d\phi}{\sin^2 \phi} \ln \frac{aX_0^2(\phi) - X_0(\phi) \cos \phi + a'}{a} \quad (\text{A.16})$$

contiennent des paramètres de régularisation strictement positifs  $\Lambda$  et  $\eta$  qu'on fait tendre respectivement vers  $+\infty$  et  $0^+$  à la fin des calculs. Il reste à intégrer les équations (A.15, A.16) par parties, en prenant la dérivée des fonctions non rationnelles  $\operatorname{atan}$  et  $\ln$  pour s'en débarrasser.<sup>25</sup> Les termes tout intégrés divergent comme  $D_J(a, a')/\eta + O(\eta)$  et  $D_K(a, a')/\eta + O(\eta)$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ ; l'expression des coefficients  $D_J(a, a')$  et  $D_K(a, a')$  importe peu puisque leurs contributions se compensent exactement dans la fonction de limite finie  $I(a, a'; \check{a}, \check{a}')$ . Les intégrales restantes convergent lorsque  $\eta \rightarrow 0$  : elles constituent les parties finies  $\operatorname{Pf} J$  et  $\operatorname{Pf} K$  des intégrales  $J$  et  $K$  au sens de Hadamard. Ce sont des intégrales de fonctions rationnelles  $f(\phi)$  de  $\cos \phi$  et de  $X_0(\phi)$ , qui se ramènent donc en principe à des intégrales elliptiques [44]; en réalité, l'astuce de symétrisation remplaçant leur intégrande  $f(\phi)$  par  $[f(\phi) + f(\pi - \phi)]/2$  (ce que l'on peut toujours faire pour une intégrale sur  $[0, \pi]$ ) fait disparaître la racine carrée  $\sqrt{4ss' + \cos^2 \phi}$  provenant de  $X_0(\phi)$  et nous ramène à des intégrales de fractions rationnelles de  $\cos \phi$ ,

$$\operatorname{Pf} J(a, a') = -\frac{a-s}{1-4aa'} \int_0^\pi d\phi \frac{a'(a's + as') - \frac{1}{2}(a' + s') \cos^2 \phi}{(as' + a's)^2 + (a-s)(a' + s') \cos^2 \phi} \quad (\text{A.17})$$

$$\operatorname{Pf} K(a, a') = -(a-s)(a' + s') \int_0^\pi d\phi \frac{\cos^2 \phi}{(as' + a's)^2 + (a-s)(a' + s') \cos^2 \phi} \quad (\text{A.18})$$

24. Dans le cas général, on sort un facteur plus compliqué  $[(a\check{a}' - a'\check{a})^2 + (a - \check{a})(a' - \check{a}') \cos^2 \phi]^{-2}$ , qui compromet la suite du calcul.

25. Dans l'équation (A.15), les fonctions arc tangente et racine carrée sont définies sur le plan complexe. Une primitive de  $\cos \phi / (\sin^2 \phi \sqrt{4aa' - \cos^2 \phi})$  est  $\sqrt{4aa' - \cos^2 \phi} / [(1 - 4aa') \sin \phi]$ . La racine carrée  $\sqrt{4aa' - \cos^2 \phi}$  qu'elle contient se multiplie avec celle provenant de la dérivée de  $\operatorname{atan}$  : l'intégration par parties fait donc disparaître d'un seul coup les deux fonctions gênantes racine carrée et arc tangente.



qui se déduisent aisément de  $\int_0^\pi d\phi [1 - C(a, a') \cos^2 \phi]^{-1} = \pi [1 - C(a, a')]^{-1/2}$ , où  $C(a, a')$  a même valeur dans  $\text{Pf}J(a, a')$  et  $\text{Pf}K(a, a')$ .<sup>26</sup> On obtient ainsi, après remplacement de  $J$  et  $K$  dans (A.14) par leur partie finie  $\text{Pf}J$  et  $\text{Pf}K$ , une expression essentiellement explicite de  $I(a, a'; \check{a}, \check{a}')$  :

$$I(a, a'; \check{a}, \check{a}') = \frac{\text{Pf}J(a, a') - \text{Pf}J(\check{a}, \check{a}') - \frac{1}{2}\text{Pf}K(a, a') + \frac{1}{2}\text{Pf}K(\check{a}, \check{a}')}{a\check{a}' - a'\check{a}} + 2 \frac{a'\text{Pf}J(a, a') - \check{a}'\text{Pf}J(\check{a}, \check{a}')}{a' - \check{a}'} \quad (\text{A.19})$$

Le calcul de  $I(a, a'; \check{a}, \check{a}')$  que nous venons d'exposer échoue dans le cas particulier  $(a, a') = (\check{a}, \check{a}')$  et ne permet *a priori* pas d'obtenir les termes diagonaux  $i = j$  dans l'équation (A.10). Une astuce simple permet cependant de contourner l'obstacle : il suffit de prendre  $(a, a') = (a_i, a'_i)$  et de faire tendre  $(\check{a}, \check{a}')$  vers  $(a_i, a'_i)$  dans (A.19) tout en restant sur la variété  $\mathbb{V}$  de l'équation (A.13). En pratique, on prend  $(\check{a}, \check{a}') = (a_i + \epsilon, a'_i + \lambda_i \epsilon)$  avec  $\epsilon \rightarrow 0$  et  $\lambda_i = [\sqrt{1 - 4a_i a'_i} - (1 - 2a_i a'_i)] / (2a_i^2)$ , c'est-à-dire  $\lambda_1 = \lambda_2 = -(\bar{k} - \bar{q})^2$  et  $\lambda_3 = -(\bar{k} - \bar{q})^2 / (1 - 2\bar{k})^2$ . Nous obtenons finalement  $F(\bar{q}, 1 - \bar{q}; \bar{k}, 1 - \bar{k}) = 4\pi\bar{k}^2 / [3\bar{q}(1 - \bar{k})(1 - \bar{q})]$  comme dans l'équation (A.2) restreinte au domaine fondamental  $0 < \bar{k} < \bar{q} < 1/2$ , ce qu'il fallait démontrer.

## Annexe B. Expressions et résultats analytiques sur le taux de décroissance Landau-Khalatnikov des phonons et sur le noyau intégral des équations cinétiques linéarisées correspondantes

Pour alléger les notations, on omet ici les barres au-dessus de  $\bar{q}, \bar{q}', \bar{k}$  : les nombres d'onde sont implicitement exprimés en unités de  $k_B T / \hbar c$  ( $T$  température du gaz,  $c$  vitesse du son).

### Annexe B.1. Cas du taux de décroissance $\bar{\Gamma}_q$

L'équation (41) donne  $\bar{\Gamma}_q$  sous forme d'une intégrale double (au lieu d'une intégrale quadruple dans les références [18, 16]). L'intégrale intérieure sur  $k$  peut cependant être effectuée analytiquement, ce qui ramène  $\bar{\Gamma}_q$  à l'intégrale simple suivante :

$$\bar{\Gamma}_q = \frac{8\pi}{3q\bar{n}_q^\ell} \int_0^{+\infty} dq' \frac{q'(1 + \bar{n}_{q'}^\ell)}{e^{q+q'-2\nu} - 1} F(\min(q, q'), \max(q, q')) \quad (\text{B.1})$$

avec

$$\begin{aligned} F(q, q') &= \frac{1}{12} q^3 q'^2 (q' + 3q) - \frac{q^5}{20} (q + q') - 3q^3 q' [g_2(e^{\nu-q}) + g_2(e^{\nu-q'})] \\ &+ 6q^2 (2q' - q) [g_3(e^{\nu-q'}) - g_3(e^{\nu-q})] + 12q(3q - 2q') [g_4(e^{\nu-q}) + g_4(e^{\nu-q'})] \\ &+ 24(q + q') [g_5(e^\nu) - g_5(e^{\nu-q-q'})] + 24(q' - 4q) [g_5(e^{\nu-q'}) - g_5(e^{\nu-q})] \\ &- 120 [g_6(e^\nu) + g_6(e^{\nu-q-q'}) - g_6(e^{\nu-q}) - g_6(e^{\nu-q'})] \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

où  $g_\alpha(z)$  est l'habituelle fonction de Bose (ou polylogarithme) d'indice  $\alpha$ ,  $g_\alpha(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} z^n / n^\alpha$  (pour  $|z| < 1$ ). On peut montrer que l'intégrande de (B.1) est une fonction de  $q'$  de classe  $C^2$ , sa dérivée troisième étant discontinue en  $q' = q$ .

Expliquons brièvement comme l'équation (B.2) a été obtenue. La première étape est d'expliciter le min dans l'équation (41). Comme l'intégrale sur  $k$  y est invariante par le changement de variable  $k \rightarrow q + q' - k$  (son intégrande est invariant sous l'échange de  $k$  et  $k' = q + q' - k$ ), on peut la limiter à l'intervalle  $[0, (q + q')/2]$  au prix d'une multiplication par un facteur 2. Alors  $k \leq k'$ ,  $k'$  ne peut jamais être le min et il ne reste que quatre cas :

(1)  $q' \geq q, k > q$  : la contribution à  $\bar{\Gamma}_q$  vaut

$$\bar{\Gamma}_1(q) = \frac{8\pi q^2}{3\bar{n}_q^\ell} \int_q^{+\infty} dq' q'(1 + \bar{n}_{q'}^\ell) f_1(q, q') \quad \text{avec} \quad f_1(q, q') = \int_q^{(q+q')/2} dk k k' \bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell = \frac{1}{2} \int_q^{q'} dk k k' \bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell \quad (\text{B.3})$$

où nous avons cette fois utilisé la symétrie  $k \leftrightarrow k'$  pour doubler l'intervalle d'intégration.

<sup>26</sup> Là aussi, la situation est plus simple que prévu : (i) comme  $a_1 - s = 0$  et  $a'_2 + s' = 0$ , on a  $\text{Pf}J(a_1, a'_1) = \text{Pf}K(a_1, a'_1) = \text{Pf}K(a_2, a'_2) = 0$  et  $C(a_1, a'_1) = C(a_2, a'_2) = 0$ ; (ii)  $1 - C(a_3, a'_3) = [(1 - \bar{k} - \bar{q}) / (1 + \bar{k} - \bar{q})]^2$  est un carré parfait.

(2)  $q' \geq q, k < q$  : la contribution à  $\bar{\Gamma}_q$  vaut

$$\bar{\Gamma}_2(q) = \frac{8\pi q^2}{3\bar{n}_q^\ell} \int_q^{+\infty} dq' q' (1 + \bar{n}_{q'}^\ell) f_2(q, q') \quad \text{avec} \quad f_2(q, q') = \frac{1}{q^3} \int_0^q dk k^4 k' \bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell, \quad (\text{B.4})$$

(3)  $q' \leq q, k < q'$  : la contribution à  $\bar{\Gamma}_q$  vaut

$$\bar{\Gamma}_3(q) = \frac{8\pi q^2}{3\bar{n}_q^\ell} \int_0^q dq' q' (1 + \bar{n}_{q'}^\ell) f_3(q, q') \quad \text{avec} \quad f_3(q, q') = \frac{1}{q^3} \int_0^{q'} dk k^4 k' \bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell, \quad (\text{B.5})$$

(4)  $q' \leq q, k > q'$  : la contribution à  $\bar{\Gamma}_q$  vaut

$$\bar{\Gamma}_4(q) = \frac{8\pi q^2}{3\bar{n}_q^\ell} \int_0^q dq' q' (1 + \bar{n}_{q'}^\ell) f_4(q, q') \quad \text{avec} \quad f_4(q, q') = \frac{q'^3}{q^3} \int_{q'}^{(q+q')/2} dk k k' \bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell, \quad (\text{B.6})$$

La deuxième étape consiste à évaluer les fonctions  $f_n(q, q')$ . On constate que

$$f_3(q, q') = \left(\frac{q'}{q}\right)^3 f_2(q', q) \quad \text{et} \quad f_4(q, q') = \left(\frac{q'}{q}\right)^3 f_1(q', q) \quad (\text{B.7})$$

Il reste à calculer  $f_1$  et  $f_2$ . Expliquons sur  $f_1$  comment procéder. On décompose l'intégrande de  $f_1(q, q')$  en éléments simples vis-à-vis de la variable  $X = e^k$  (le monôme  $k$  au numérateur est traité comme une constante) après avoir translaté la variable d'intégration de  $\nu$  pour obtenir

$$f_1(q, q') = \frac{1/2}{e^{q+q'-2\nu} - 1} \int_{q-\nu}^{q'-\nu} dk \left[ \frac{(k+\nu)(q+q'-\nu-k)}{e^k - 1} - \frac{(k+\nu)(q+q'-\nu-k)}{e^{k-(q+q'-2\nu)} - 1} \right] \quad (\text{B.8})$$

Dans l'intégrale du second terme, on effectue le changement de variable  $k \rightarrow q + q' - 2\nu - k$  pour se ramener à

$$f_1(q, q') = \frac{1}{e^{q+q'-2\nu} - 1} \left[ \frac{1}{2} \int_{q-\nu}^{q'-\nu} dk (q+q'-\nu-k)(\nu+k) + \int_{q-\nu}^{q'-\nu} dk \frac{(k+\nu)(q+q'-\nu-k)}{e^k - 1} \right] \quad (\text{B.9})$$

qu'on sait calculer puisqu'on connaît une primitive de  $k^n/(e^k - 1)$  sur  $[0, 1]$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  :<sup>27</sup>

$$\int dk \frac{k^n/n!}{e^k - 1} = - \sum_{s=0}^n \frac{k^s}{s!} g_{n+1-s}(e^{-k}) \quad (\text{B.10})$$

### Annexe B.2. Cas du noyau intégral de la forme hermitienne des équations cinétiques linéarisées

Partons de l'expression (50) du noyau intégral comme somme de deux intégrales doubles  $I$  et  $II$ . Dans la première intégrale, on intègre trivialement sur  $k'$  grâce au  $\delta$  de Dirac ( $k' = q + q' - k$  et  $k \leq q + q'$ ); en récrivant<sup>28</sup>

$$\phi(k)\phi(k') \stackrel{\text{dans } I}{=} k(q+q'-k) e^{(q+q')/2-\nu} \bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell, \quad (\text{B.11})$$

nous nous ramenons à la même intégrale sur  $k$  que dans  $\bar{\Gamma}_q$ . Dans la seconde intégrale double, on choisit  $q \geq q'$  (sans perte de généralité compte tenu de la symétrie hermitienne) et on intègre trivialement sur  $k'$  grâce au  $\delta$  de Dirac ( $k' = k + q - q' \geq k$ ) pour tomber sur

$$\langle q | \hat{V}_{II} | q' \rangle \stackrel{q' \leq q}{=} -\frac{8\pi}{3} \int_0^{+\infty} dk k(k+q-q') e^{k+\frac{q-q'}{2}-\nu} \bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k+q-q'}^\ell [\min(q', k)]^3 \quad (\text{B.12})$$

27. On dérivera l'équation (B.10) par rapport à  $k$  et on utilisera  $\frac{d}{dx} [g_\alpha(e^{-x})] = -g_{\alpha-1}(e^{-x})$  et  $g_0(e^{-x}) = 1/(e^x - 1)$ .

28. La loi de Bose vérifie  $1 + \bar{n}_k^\ell = e^{k-\nu} \bar{n}_k^\ell$  donc  $\phi(k)\phi(k') = e^{(k+k')/2-\nu} k k' \bar{n}_k^\ell \bar{n}_{k'}^\ell$  en toute généralité.

Il reste à distinguer  $k \leq q'$  et  $k \geq q'$ , à décomposer l'intégrande en éléments simples vis-à-vis de  $X = e^k$  puis à utiliser (B.10). Nous trouvons finalement<sup>29</sup>

$$\langle q|\hat{V}|q'\rangle = \langle q|\hat{V}_I|q'\rangle + \langle q|\hat{V}_{II}|q'\rangle \quad (\text{B.13})$$

$$\langle q|\hat{V}_I|q'\rangle = \frac{4\pi}{3 \operatorname{sh}\left(\frac{q+q'}{2} - \nu\right)} F(\min(q, q'), \max(q, q')) \quad (\text{B.14})$$

$$\langle q|\hat{V}_{II}|q'\rangle = -\frac{4\pi}{3 \operatorname{sh}\left|\frac{q-q'}{2}\right|} G(\max(q, q'), \min(q, q')) \quad (\text{B.15})$$

où la fonction  $F$  est celle de l'équation (B.2) et la fonction  $G$  est donnée par

$$\begin{aligned} G(q, q') &= 3qq'^3[g_2(e^{\nu-q}) - g_2(e^{\nu-q'})] + 6q'^2(2q + q')[g_3(e^{\nu-q}) - g_3(e^{\nu-q'})] \\ &+ 12q'(2q + 3q')[g_4(e^{\nu-q}) - g_4(e^{\nu-q'})] + 24(q - q')[g_5(e^\nu) - g_5(e^{\nu+q'-q})] \\ &+ 24(q + 4q')[g_5(e^{\nu-q}) - g_5(e^{\nu-q'})] + 120[g_6(e^\nu) + g_6(e^{\nu-q}) - g_6(e^{\nu-q'}) - g_6(e^{\nu-q+q'})] \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Considérée comme une fonction de  $q'$ ,  $\langle q|\hat{V}|q'\rangle$  est continue mais présente un point anguleux en  $q' = q$  à cause de la contribution II.

### Annexe B.3. Applications

Donnons sans démonstration quelques développements limités ou asymptotiques du taux de décroissance  $\bar{\Gamma}_q$  et du noyau intégral  $\langle q|\hat{V}|q'\rangle$ .

#### Annexe B.3.1. $\bar{\Gamma}_q$ à faible $q$

Il faut distinguer les cas  $\nu < 0$ ,  $\nu = 0$  et  $\nu$  infinitésimal.

— Cas  $\nu < 0$  :  $\bar{\Gamma}_q$  admet le développement limité

$$\boxed{\bar{\Gamma}(q) \stackrel{\nu < 0}{\underset{q \rightarrow 0}{\equiv}} C(\nu)q^2[1 + \alpha(\nu)q + \beta(\nu)q^2 + O(q^3)]} \quad (\text{B.17})$$

avec

$$C(\nu) = \frac{4\pi}{3\bar{n}_0} J_0(\nu) \quad (\text{B.18})$$

$$\alpha(\nu) = \bar{n}_0 + 1 + \frac{J_1(\nu)}{J_0(\nu)} \quad (\text{B.19})$$

$$\beta(\nu) = (\bar{n}_0 + 1) \left[ \frac{1}{2} + \frac{J_1(\nu)}{J_0(\nu)} \right] + \frac{J_2(\nu)}{2J_0(\nu)} - \frac{1}{5}\bar{n}_0 \frac{g_2(e^\nu)}{J_0(\nu)} \quad (\text{B.20})$$

Ici,

$$J_n(\nu) = \int_0^{+\infty} dk \frac{f^{(n)}(k)}{1 - e^{-k}} \{k[g_2(e^\nu) - g_2(e^{\nu-k})] + 2[g_3(e^\nu) - g_3(e^{\nu-k})]\} \quad (\text{B.21})$$

$f^{(n)}(k)$  étant la dérivée  $n^{\text{ième}}$  de la fonction  $f(k) = k\bar{n}_k^\ell$  par rapport à  $k$ .

— Cas  $\nu = 0$  :  $\bar{\Gamma}_q$  admet le développement limité

$$\boxed{\bar{\Gamma}(q) \stackrel{\nu=0}{\underset{q \rightarrow 0}{\equiv}} C_0 q^3 [1 + \alpha_0 q + \beta_0 q^2 + O(q^3)]} \quad (\text{B.22})$$

29. L'inversion entre max et min dans l'équation (B.15) n'est pas une faute de frappe mais résulte d'un choix historique arbitraire.

avec

$$C_0 = \frac{4\pi}{3} J_0(0) = \frac{16\pi^5}{135} \quad (\text{B.23})$$

$$\alpha_0 = \frac{J_1(0) - \zeta(2)}{J_0(0)} + \frac{1}{2} = -\frac{15}{8\pi^2} - \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \quad (\text{B.24})$$

$$\beta_0 = \frac{\frac{7}{10} + J_1(0) + J_2(0)}{2J_0(0)} + \frac{1}{6} = \frac{3}{\pi^4} + \frac{5}{16\pi^2} \quad (\text{B.25})$$

— Cas  $\nu$  infinitésimal : en faisant tendre  $\nu$  vers zéro dans  $\bar{\Gamma}_q$  à  $Q = q/|\nu|$  fixé, on obtient le développement (70) avec

$$\Phi(Q) = \frac{15}{2\pi^2} \left\{ \left[ -\frac{1}{4} - \frac{3\zeta(3)}{2\pi^2} \right] Q + \left( 1 + \frac{1}{Q^3} \right) \ln(1+Q) - \frac{1}{Q^2} + \frac{1}{2Q} - \frac{1}{3} \right\} \quad (\text{B.26})$$

Notre motivation pour le calcul de  $\Phi(Q)$  fut la constatation suivante : le développement à faible  $q$

$$\frac{e^{\nu/2} [\bar{n}_q^\ell (1 + \bar{n}_q^\ell)]^{1/2} \bar{\Gamma}_q}{\frac{4\pi}{3} q^2 J_0(\nu)} \underset{q \rightarrow 0}{\overset{\nu \text{ fixé}}{\sim}} 1 + \check{\alpha}(\nu)q + O(q^2) \quad (\text{B.27})$$

fait apparaître un coefficient  $\check{\alpha}(\nu)$  discontinu en  $\nu = 0$ . Le calcul est simple. D'une part,  $\check{\alpha}(0) = \alpha_0$ . D'autre part, pour  $\nu > 0$ ,  $\check{\alpha}(\nu) = \alpha(\nu) - (\bar{n}_0 + 1/2) = 1/2 + J_1(\nu)/J_0(\nu)$ , et l'on passe à la limite  $\nu \rightarrow 0^-$  en notant que  $J_0(\nu)$  est continue ( $J_0(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0^-} J_0(0) = 4\pi^4/45$ ) alors que  $J_1(\nu)$  ne l'est pas ( $J_1(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0^-} J_1(0) + 2\zeta(2)$ ),<sup>30</sup> si bien que

$$\check{\alpha}(\nu) \xrightarrow{\nu \rightarrow 0^-} \check{\alpha}(0^-) = \frac{15}{4\pi^2} - \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \neq \check{\alpha}(0) = -\frac{15}{8\pi^2} - \frac{45\zeta(3)}{4\pi^4} \quad (\text{B.28})$$

Dans le développement (B.27) on ne peut donc pas échanger les limites  $q \rightarrow 0$  et  $\nu \rightarrow 0^-$ . Pour retrouver le coefficient  $\check{\alpha}(0^-)$ , il faut faire tendre  $q$  vers zéro plus vite que  $\nu$  donc  $Q \rightarrow 0$  dans l'équation (B.26). Pour retrouver  $\check{\alpha}(0)$ , il faut au contraire faire tendre  $\nu$  vers zéro plus vite que  $q$  donc  $Q \rightarrow +\infty$  dans l'équation (B.26). Et en effet,

$$\Phi(Q) \underset{Q \rightarrow 0}{\sim} \check{\alpha}(0^-)Q \quad \text{et} \quad \Phi(Q) \underset{Q \rightarrow +\infty}{\sim} \check{\alpha}(0)Q \quad (\text{B.29})$$

La fonction  $\Phi(Q)$  permet donc de raccorder les deux cas limites  $0 < q \ll |\nu| \ll 1$  et  $0 < |\nu| \ll q \ll 1$ .

### Annexe B.3.2. $\bar{\Gamma}_q$ à grand $q$

On découvre que la série asymptotique en  $1/q$  admet un nombre fini de termes non nuls et commet une erreur exponentiellement petite, que  $\nu$  soit nul ou  $< 0$  :

$$\bar{\Gamma}_q \underset{q \rightarrow +\infty}{=} \frac{8\pi}{3q} \left[ \sum_{n=0}^3 q^n c_n(\nu) + O(q^4 e^{-q}) \right] \quad (\text{B.30})$$

avec

$$c_3 = 2g_5(e^\nu) \quad (\text{B.31})$$

$$c_2 = 30g_6(e^\nu) \quad (\text{B.32})$$

$$c_1 = -36g_7(e^\nu) + 2 \int_0^{+\infty} dq q^4 g_0(e^{\nu-q}) [g_2(e^{\nu-q}) + qg_1(e^{\nu-q})] \quad (\text{B.33})$$

$$c_0 = -252g_8(e^\nu) \quad (\text{B.34})$$

30. En d'autres termes, pour obtenir cette limite, il est incorrect de faire tendre  $\nu$  vers zéro sous le signe intégral dans  $J_1(\nu)$ , alors que c'est légitime dans  $J_0(\nu)$ . En effet, pour  $k \approx |\nu|$ ,  $f(k) \approx k/(k+|\nu|)$  est uniformément bornée mais  $f'(k) \approx |\nu|/(k+|\nu|)^2$  ne l'est pas. Il faut donc distinguer dans  $J_1(\nu)$ , pour  $\varepsilon \ll 1$  fixé, le sous-intervalle d'intégration  $[\varepsilon, +\infty[$  (sur lequel on peut faire  $\nu \rightarrow 0^-$  à  $k$  fixé) du sous-intervalle  $[0, \varepsilon]$  (sur lequel on doit faire  $\nu \rightarrow 0^-$  à  $K = k/|\nu|$  fixé); le bout  $\int_0^\varepsilon dk$  contribue à la limite  $\nu \rightarrow 0^-$  à hauteur de  $2\zeta(2) = \pi^2/3$ .

### Annexe B.3.3. $\langle k|\hat{V}|q\rangle$ à faible $q$

À  $\nu$  fixé nul ou  $< 0$ , on prend  $k = O(1)$  mais pas forcément fixé lorsque  $q \rightarrow 0$ .<sup>31</sup> Il faut donc distinguer les cas  $k < q$  et  $k > q$  dans l'équation (B.13) appliquée à  $\langle k|\hat{V}|q\rangle$ . Nous justifions alors l'équivalent (82) avec

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(k, \nu) &= \frac{4\pi}{3 \operatorname{sh}(\frac{k}{2} - \nu)} \left\{ \frac{k^3}{12} + k[g_2(e^\nu) + g_2(e^{\nu-k})] + 2[g_3(e^{\nu-k}) - g_3(e^\nu)] \right\} \\ &- \frac{4\pi}{3 \operatorname{sh} \frac{k}{2}} \left\{ k[g_2(e^\nu) - g_2(e^{\nu-k})] + 2[g_3(e^\nu) - g_3(e^{\nu-k})] \right\} \end{aligned} \quad (\text{B.35})$$

Cette expression s'étend par continuité à  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$ , le numérateur de la première (seconde) contribution tendant quadratiquement (linéairement) vers zéro là où son dénominateur s'annule, toujours linéairement. En particulier,  $\lim_{(k, \nu) \rightarrow (0, 0)} \mathcal{W}(k, \nu) \equiv \mathcal{W}(0, 0) = -8\pi^3/9$ . La fonction  $\mathcal{W}(k, \nu)$  ainsi étendue est bornée. De plus, lorsque  $\nu \rightarrow 0^-$  et  $(k, q) \rightarrow (0, 0)$  à  $k/|\nu| = K$  et  $q/|\nu| = Q$  fixés, nous avons vérifié que l'équation (82) vaut toujours,  $\mathcal{W}(k, \nu)$  pouvant y être remplacé par  $\mathcal{W}(0, 0)$ .

### Annexe B.3.4. $\langle q|\hat{V}|q'\rangle$ à grand nombre d'onde

Partons de l'équation (B.13). Si  $q' \rightarrow +\infty$  à  $q$  fixé,  $\langle q|\hat{V}|q'\rangle$  tend exponentiellement vers zéro, c'est un  $O(q'^3 e^{-q'/2})$ . Si  $q$  et  $q'$  tendent conjointement vers l'infini, les contributions  $I$  et  $II$  se comportent différemment :

$$\langle q|\hat{V}_I|q'\rangle \underset{q, q' \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2\pi e^\nu}{9} q^3 q'^3 e^{-(q+q')/2} \left[ 1 + O\left(\frac{\min(q, q')}{\max(q, q')}\right) \right] \quad (\text{B.36})$$

$$\langle q|\hat{V}_{II}|q'\rangle \underset{q, q' \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{-32\pi}{\operatorname{sh} \left| \frac{q-q'}{2} \right|} \left\{ |q - q'| [g_5(e^\nu) - g_5(e^{\nu-|q-q'|})] + 5[g_6(e^\nu) - g_6(e^{\nu-|q-q'|})] \right\} \quad (\text{B.37})$$

Ceci justifie le distinguo effectué dans la note 15.

## Annexe C. Variance sous-balistique du déphasage du condensat aux temps longs dans le cas concave

La variance sous-balistique réduite  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  du déphasage du condensat en présence de processus Landau-Khalatnikov à basse température  $T$  est donnée dans la théorie exacte par l'équation (79) et dans l'approximation de taux par l'équation (54). Dans les deux cas, elle est de la forme

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{t}) = \int_0^{+\infty} d\bar{q} \frac{f(\bar{q})}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} \left[ e^{-\bar{\Gamma}(\bar{q})\bar{t}} - 1 + \bar{\Gamma}(\bar{q})\bar{t} \right] \quad (\text{C.1})$$

où la fonction  $f(\bar{q})$  est régulière et admet un développement limité en  $\bar{q} = 0$ . Il s'agit ici de calculer le développement asymptotique de  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  pour  $\bar{t} \rightarrow +\infty$ . Il faut pour cela distinguer les cas  $\nu < 0$  et  $\nu = 0$  ( $\nu = \mu_\phi/k_B T$ , où  $\mu_\phi$  est le potentiel chimique du gaz de phonons) qui conduisent à des comportements différents de  $f(\bar{q})$  et  $\bar{\Gamma}(\bar{q})$  au voisinage de  $\bar{q} = 0$ . Dans les deux cas,  $\bar{\Gamma}(\bar{q})$  est une fonction strictement croissante de  $\bar{q}$  tendant vers  $+\infty$  lorsque  $\bar{q} \rightarrow +\infty$ ,<sup>32</sup> ce qui va permettre d'effectuer un changement de variable simplificateur dans l'équation (C.1).

### Annexe C.1. Cas $\nu < 0$

$\bar{\Gamma}(\bar{q})$  s'annule quadratiquement en  $\bar{q} = 0$  (voir l'équation (55)) et il en va de même pour  $f(\bar{q})$  (voir l'équation (56) pour l'approximation de taux et l'équation (84) pour la théorie exacte). On peut séparer dans l'équation (C.1) la partie diffusive linéaire en temps (elle provient du terme  $\bar{\Gamma}(\bar{q})\bar{t}$  entre crochets). Dans le reste, on prend comme nouvelle variable d'intégration

$$\Omega = [\bar{\Gamma}(\bar{q})]^{1/2} \quad (\text{C.2})$$

31. En pratique, on traite les cas  $q \rightarrow 0$  à  $k$  fixé et  $q \rightarrow 0$  à  $K = k/q$  fixé, puis on vérifie qu'ils se représentent bien par l'unique expression (82, B.35).

32. Il suffit en fait que  $\bar{\Gamma}(\bar{q})$  soit strictement croissante sur un voisinage de  $\bar{q} = 0$  et reste ailleurs à distance non nulle de zéro pour que nos résultats s'appliquent.

l'exposant  $1/2$  assurant que  $\Omega$  est à l'ordre dominant une fonction linéaire de  $\bar{q}$  à faible  $\bar{q}$ . Alors  $f(\bar{q})/\bar{\Gamma}(\bar{q})^2$  diverge comme  $1/\Omega^2$  en l'origine et  $\bar{\mathcal{V}}(t)$  se réécrit sous la forme

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{t}) = \bar{D}\bar{t} + \int_0^{+\infty} d\Omega \frac{F(\Omega)}{\Omega^2} (e^{-\Omega^2\bar{t}} - 1) \quad (\text{C.3})$$

avec

$$\bar{D} = \int_0^{+\infty} d\bar{q} \frac{f(\bar{q})}{\bar{\Gamma}(\bar{q})} \quad \text{et} \quad F(\Omega) = \frac{f(\bar{q})}{\frac{d\Omega}{d\bar{q}}\bar{\Gamma}(\bar{q})} = \frac{2f(\bar{q})}{[\bar{\Gamma}(\bar{q})]^{1/2}\bar{\Gamma}'(\bar{q})} \quad (\text{C.4})$$

$F(\Omega)$  admet en  $\bar{q} = \Omega = 0$  un développement limité par rapport à  $\bar{q}$  donc par rapport à  $\Omega$  :

$$F(\Omega) \underset{\Omega \rightarrow 0}{=} F(0) + \Omega F'(0) + O(\Omega^2) \quad (\text{C.5})$$

avec  $F(0) \neq 0$ . Introduisons une coupure arbitraire  $\bar{q}_c > 0$  sur le nombre d'onde  $\bar{q}$  donc une coupure  $\Omega_c = [\bar{\Gamma}(\bar{q}_c)]^{1/2}$  sur  $\Omega$ . Dans l'intégrale (C.3), la contribution haute a une limite finie lorsque  $\bar{t} \rightarrow +\infty$ , obtenue en omettant le terme exponentiel en temps : ce dernier est majoré par  $e^{-\Omega_c^2\bar{t}}$  et le négliger ne déclenche aucune divergence de l'intégrale ( $\int_{\Omega_c}^{+\infty} d\Omega F(\Omega)/\Omega^2 < \infty$ ). Dans la contribution basse, il faut d'abord séparer l'approximation affine (C.5) de  $F(\Omega)$  avant de pouvoir négliger le terme exponentiel :<sup>33</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^{\Omega_c} d\Omega \frac{F(\Omega)}{\Omega^2} (e^{-\Omega^2\bar{t}} - 1) &\underset{\bar{t} \rightarrow +\infty}{=} \int_0^{\Omega_c} d\Omega \frac{F(\Omega) - F(0) - F'(0)\Omega}{\Omega^2} (-1) \\ &\quad + F(0) \int_0^{\Omega_c} d\Omega \frac{e^{-\Omega^2\bar{t}} - 1}{\Omega^2} + F'(0) \int_0^{\Omega_c} d\Omega \frac{e^{-\Omega^2\bar{t}} - 1}{\Omega} + o(1) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

On donne alors (la notation  $O(X^{-\infty})$  signifie à décroissance rapide) les résultats

$$\int_0^X dx \frac{e^{-x^2} - 1}{x^2} \underset{X \rightarrow +\infty}{=} -\pi^{1/2} + \frac{1}{X} + O(X^{-\infty}) \quad (\text{C.7})$$

$$\int_0^X dx \frac{e^{-x^2} - 1}{x} \underset{X \rightarrow +\infty}{=} -\ln X - \frac{1}{2}\gamma_{\text{Euler}} + O(X^{-\infty}) \quad (\text{C.8})$$

auxquels on se ramène par le changement de variable  $\Omega = x/\bar{t}^{1/2}$ . Nous trouvons donc bien un développement asymptotique de la forme (58,73) avec des coefficients

$$A(\nu) = -F(0) \quad (\text{C.9})$$

$$B(\nu) = -F'(0) \quad (\text{C.10})$$

$$E(\nu) = - \int_0^{\Omega_c} d\Omega \frac{F(\Omega) - F(0) - F'(0)\Omega}{\Omega^2} - \int_{\Omega_c}^{+\infty} d\Omega \frac{F(\Omega)}{\Omega^2} + \frac{F(0)}{\Omega_c} - F'(0) \left( \ln \Omega_c + \frac{1}{2}\gamma_{\text{Euler}} \right) \quad (\text{C.11})$$

Il reste à faire le lien avec la variable d'intégration originelle  $\bar{q}$  de l'équation (C.1). Le calcul montre que

$$\frac{\bar{q}^2 f(\bar{q})}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} \underset{\bar{q} \rightarrow 0}{=} F(0)C(\nu)^{-1/2} + \bar{q}F'(0) + O(\bar{q}^2) \quad (\text{C.12})$$

où  $C(\nu) = \lim_{\bar{q} \rightarrow 0} \bar{\Gamma}(\bar{q})/\bar{q}^2$ ; cette équation (C.12), écrite dans le texte principal sous la forme (57), est commode car elle donne accès à  $F(0)$  et  $F'(0)$  sans jamais passer par la variable  $\Omega$ . On obtient ainsi les équations (60,61). En revenant à  $\bar{q}$  dans l'équation (C.11) on trouve

$$\begin{aligned} E(\nu) = & - \int_0^{\bar{q}_c} d\bar{q} \left[ \frac{f(\bar{q})}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} - \frac{F(0)C(\nu)^{-1/2} + \bar{q}F'(0)}{\bar{q}^2} \right] - \int_{\bar{q}_c}^{+\infty} d\bar{q} \frac{f(\bar{q})}{\bar{\Gamma}(\bar{q})^2} \\ & + F(0)C(\nu)^{-1/2} \left[ \frac{1}{\bar{q}_c} - \frac{1}{2}\alpha(\nu) \right] - F'(0) \left\{ \ln[\bar{q}_c C(\nu)^{1/2}] + \frac{1}{2}\gamma_{\text{Euler}} \right\} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

33. On commet cette fois une erreur  $O(\int_0^{+\infty} d\Omega e^{-\Omega^2\bar{t}}) = O(\bar{t}^{-1/2})$ , au lieu d'une erreur exponentiellement petite en temps.

sachant que

$$\lim_{\bar{q} \rightarrow 0} \frac{1}{[\bar{\Gamma}(\bar{q})]^{1/2}} - \frac{1}{\bar{q}C(\nu)^{1/2}} = -\frac{\alpha(\nu)}{2C(\nu)^{1/2}} \quad \text{et} \quad \lim_{\bar{q} \rightarrow 0} \ln \bar{q} - \frac{1}{2} \ln \bar{\Gamma}(\bar{q}) = -\frac{1}{2} \ln C(\nu) \quad (\text{C.14})$$

d'après l'équation (55). Voilà qui justifie l'équation (62).

*Annexe C.2. Cas  $\nu = 0$*

Cette fois  $\bar{\Gamma}(\bar{q})$  s'annule cubiquement en  $\bar{q} = 0$  (voir l'équation (63)) et  $f(\bar{q})$  ne s'annule pas. Pour avoir une nouvelle variable d'intégration  $\Omega$  linéaire en  $\bar{q}$  à l'ordre dominant, nous posons

$$\Omega = [\bar{\Gamma}(\bar{q})]^{1/3} \quad (\text{C.15})$$

Alors  $f(\bar{q})/\bar{\Gamma}(\bar{q})^2$  diverge comme  $1/\Omega^6$  en l'origine, on ne peut plus sortir un terme diffusif et  $\bar{\mathcal{V}}(\bar{t})$  se réécrit

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{t}) = \int_0^{+\infty} d\Omega \frac{F(\Omega)}{\Omega^6} (e^{-\Omega^3 \bar{t}} - 1 + \Omega^3 \bar{t}) \quad \text{où} \quad F(\Omega) = \frac{f(\bar{q})}{d\Omega/d\bar{q}} \quad (\text{C.16})$$

Dans l'approximation de taux,  $F(\Omega)$  admet en  $\Omega = 0$  un développement limité

$$F(\Omega) = F(0) + \Omega F'(0) + \frac{\Omega^2}{2} F''(0) + O(\Omega^3) \quad (\text{C.17})$$

avec  $F(0)$  non nul. On procède ensuite comme pour le cas  $\nu < 0$ . À l'aide des résultats

$$\int_0^X dx \frac{e^{-x^3} - 1 + x^3}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} \Gamma\left(\frac{1-n}{3}\right) = \begin{cases} \frac{3}{10} \Gamma(\frac{1}{3}) & \text{si } n = 6 \\ \frac{3}{4} \Gamma(\frac{2}{3}) & \text{si } n = 5 \end{cases} \quad (\text{C.18})$$

$$\int_0^X dx \frac{e^{-x^3} - 1 + x^3}{x^4} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ln X + O(1) \quad (\text{C.19})$$

nous trouvons

$$\bar{\mathcal{V}}(\bar{t}) \underset{\bar{t} \rightarrow +\infty}{=} \frac{3}{10} \Gamma(1/3) F(0) \bar{t}^{5/3} + \frac{3}{4} \Gamma(2/3) F'(0) \bar{t}^{4/3} + \frac{1}{2} F''(0) \bar{t} \ln(\bar{t}^{1/3}) + O(\bar{t}) \quad (\text{C.20})$$

ce qui justifie les équations (65,66). Dans la théorie exacte, nous pensons que  $F'(0)$  existe mais nous ne connaissons pas sa valeur, et nous n'avons pas montré l'existence de  $F''(0)$ .

## Références

- [1] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, "Brouillage thermique d'un gaz cohérent de fermions", *Comptes Rendus Physique* **17**, 789 (2016) [[libre accès](#), [doi : 10.1016/j.crhy.2016.02.005](#)]
- [2] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, "Phase operators and blurring time of a pair-condensed Fermi gas", *Phys. Rev. A* **88**, 063623 (2013).
- [3] K.M. O'Hara, S.L. Hemmer, M.E. Gehm, S.R. Granade, J.E. Thomas, "Observation of a strongly interacting degenerate Fermi gas of atoms", *Science* **298**, 2179 (2002).
- [4] S.Nascimbène, N. Navon, K.J. Jiang, F. Chevy, C. Salomon, "Exploring the thermodynamics of a universal Fermi gas", *Nature* **463**, 1057 (2010).
- [5] M.J.H. Ku, A.T. Sommer, L.W. Cheuk, M.W. Zwierlein, "Revealing the Superfluid Lambda Transition in the Universal Thermodynamics of a Unitary Fermi Gas", *Science* **335**, 563 (2012).
- [6] C. Kohstall, S. Riedl, E.R. Sánchez Guajardo, L.A. Sidorenkov, J. Hecker Denschlag, R. Grimm, "Observation of interference between two molecular Bose-Einstein condensates", *New Journal of Physics* **13**, 065027 (2011).
- [7] A.L. Gaunt, T.F. Schmidutz, I. Gotlibovych, R.P. Smith, Z. Hadzibabic, "Bose-Einstein condensation of atoms in a uniform potential", *Phys. Rev. Lett.* **110**, 200406 (2013).
- [8] B. Mukherjee, Zhenjie Yan, P.B. Patel, Z. Hadzibabic, T. Yefsah, J. Struck, M.W. Zwierlein, "Homogeneous Atomic Fermi Gases", *Phys. Rev. Lett.* **118**, 123401 (2017).
- [9] D.S. Petrov, C. Salomon, G.V. Shlyapnikov, "Weakly Bound Dimers of Fermionic Atoms", *Phys. Rev. Lett.* **93**, 090404 (2004).
- [10] A. Sinatra, Y. Castin, "Spatial and temporal coherence of a Bose condensed gas", in *Physics of Quantum Fluids : new trends and hot topics in atomic and polariton condensates*, édité par Michele Modugno, Alberto Bramati, Springer Series in Solid-State Sciences **177** (Springer, Berlin, 2013).
- [11] M. Oberthaler, communication personnelle.

- [12] M.W. Zwierlein, J.R. Abo-Shaeer, A. Schirotzek, C.H. Schunck, W. Ketterle, "Vortices and Superfluidity in a Strongly Interacting Fermi Gas", *Nature* **435**, 1047 (2005).
- [13] H. Kurkjian, *Cohérence, brouillage et dynamique de phase dans un condensat de paires de fermions*, thèse de doctorat, École Normale Supérieure, Paris (2016).
- [14] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, "Concavity of the collective excitation branch of a Fermi gas in the BEC-BCS crossover", *Phys. Rev. A* **93**, 013623 (2016).
- [15] M. Marini, F. Pistolesi, G.C. Strinati, "Evolution from BCS superconductivity to Bose condensation : analytic results for the crossover in three dimensions", *European Physical Journal B* **1**, 151 (1998).
- [16] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, "Three-phonon and four-phonon interaction processes in a pair-condensed Fermi gas", *Annalen der Physik* **529**, 1600352 (2017).
- [17] A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, "Coherence time of a Bose-Einstein condensate", *Phys. Rev. A* **80**, 033614 (2009).
- [18] H. Kurkjian, Y. Castin, A. Sinatra, "Landau-Khalatnikov phonon damping in strongly interacting Fermi gases", *EPL* **116**, 40002 (2016).
- [19] S.T. Beliaev, "Application of the Methods of Quantum Field Theory to a System of Bosons", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 417 (1958) [*Sov. Phys. JETP* **7**, 289 (1958)].
- [20] E.M. Wright, D.F. Walls, J.C. Garrison, "Collapses and Revivals of Bose-Einstein Condensates Formed in Small Atomic Samples", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2158 (1996).
- [21] M. Lewenstein, Li You, "Quantum Phase Diffusion of a Bose-Einstein Condensate", *Phys. Rev. Lett.* **77**, 3489 (1997).
- [22] A. Sinatra, E. Witkowska, Y. Castin, "Spin squeezing in finite temperature Bose-Einstein condensates: Scaling with the system size", *Eur. Phys. J. Special Topics* **203**, 87 (2012).
- [23] D. Rugar, J.S. Foster, "Accurate measurement of low-energy phonon dispersion in liquid  $^4\text{He}$ ", *Phys. Rev. B* **30**, 2595 (1984).
- [24] E.C. Swenson, A.D.B. Woods, P. Martel, "Phonon dispersion in liquid Helium under pressure", *Phys. Rev. Lett.* **29**, 1148 (1972).
- [25] S.T. Beliaev, "Energy-Spectrum of a Non-ideal Bose Gas", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **34**, 433 (1958) [*Soviet Physics JETP* **7**, 299 (1958)].
- [26] L.P. Pitaevskii, S. Stringari, "Landau damping in dilute Bose gases", *Phys. Lett. A* **235**, 398 (1997).
- [27] S. Giorgini, "Damping in dilute Bose gases : A mean-field approach", *Phys. Rev. A* **57**, 2949 (1998).
- [28] A. Sinatra, Y. Castin, E. Witkowska, "Nondiffusive phase spreading of a Bose-Einstein condensate at finite temperature", *Phys. Rev. A* **75**, 033616 (2007).
- [29] L. Landau, I. Khalatnikov, "Teoriya vyazkosti Geliya-II", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **19**, 637 (1949).
- [30] I.M. Khalatnikov, "Pogloshcheniye zvuka v geliu II", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **20**, 243 (1950); I.M. Khalatnikov, D.M. Chernikova, "Relaxation phenomena in superfluid helium", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **49**, 1957 (1965) [*Soviet Physics JETP* **22**, 1336 (1966)].
- [31] C.J. Pethick, D. ter Haar, "On the attenuation of sound in liquid helium", *Physica* **32**, 1905 (1966).
- [32] S. Laurent, X. Leyronas, F. Chevy, "Momentum Distribution of a Dilute Unitary Bose Gas with Three-Body Losses", *Phys. Rev. Lett.* **113**, 220601 (2014).
- [33] J. Deutsch, "Quantum statistical mechanics in a closed system", *Phys. Rev. A* **43**, 2046 (1991).
- [34] M. Srednicki, "Chaos and quantum thermalization", *Phys. Rev. E* **50**, 888 (1994).
- [35] M. Rigol, V. Dunjko, M. Olshanii, "Thermalization and its mechanism for generic isolated quantum systems", *Nature* **452**, 854 (2008).
- [36] A. Sinatra, Y. Castin, "Genuine phase diffusion of a Bose-Einstein condensate in the microcanonical ensemble: A classical field study", *Phys. Rev. A* **78**, 053615 (2008).
- [37] N.W. Ashcroft, N. David Mermin, in *Solid State Physics*, HRW International Editions (Saunders College, Philadelphia, CBS Publishing Asia Ltd., 1976).
- [38] J. Jäckle, "Calculation of the Sound Absorption in Superfluid Helium below 0.6 K", *Z. Physik* **231**, 362 (1970); C.E. Carroll, "Phonon-Phonon Interactions in Liquid Helium II", *Phys. Rev. A* **2**, 497 (1970); ces deux références donnent le taux d'amortissement Landau-Khalatnikov à faible nombre d'onde à un facteur de proportionnalité près et mentionnent des résultats concordants non publiés de S.G. Eckstein.
- [39] M. Le Bellac, in *Physique quantique : Applications et exercices corrigés*, chapitre 13, EDP Sciences/CNRS Éditions (Les Ulis/Paris, 2013).
- [40] Z. Zhang, W. Vincent Liu, "Finite temperature damping of collective modes of a BCS-BEC crossover superfluid", *Phys. Rev. A* **83**, 023617 (2011).
- [41] Y. Castin, A. Sinatra, H. Kurkjian, "Landau phonon-rotor theory revisited for superfluid  $^4\text{He}$  and Fermi gases", *Phys. Rev. Lett.* **119**, 260402 (2017).
- [42] Y. Castin, A. Sinatra, "Temps de cohérence d'un condensat de Bose-Einstein dans un gaz isolé harmoniquement piégé", *Comptes Rendus physique* **19**, 316 (2018) [[libre accès, doi : 10.1016/j.crhy.2018.04.001](https://doi.org/10.1016/j.crhy.2018.04.001)].
- [43] N.V. Prokof'ev, B.V. Svistunov, "Algebraic time crystallization in a two-dimensional superfluid", *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **154**, 982 (2018).
- [44] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, section §8.110, "Tables of Integrals, Series, and Products", Academic Press (San Diego, 1994).