



**HAL**  
open science

# Dualité de Koszul formelle et théorie des représentations des groupes algébriques réductifs en caractéristique positive

Pramod N Achar, Simon Riche

► **To cite this version:**

Pramod N Achar, Simon Riche. Dualité de Koszul formelle et théorie des représentations des groupes algébriques réductifs en caractéristique positive. E. Breuillard. SMF 2018 : Congrès de la Société Mathématique de France, 33, 2019, Séminaires et congrès, 978-2-85629-912-8. hal-01848388

**HAL Id: hal-01848388**

**<https://hal.science/hal-01848388>**

Submitted on 24 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# DUALITÉ DE KOSZUL FORMELLE ET THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS DES GROUPES ALGÈBRIQUES RÉDUCTIFS EN CARACTÉRISTIQUE POSITIVE

PRAMOD N. ACHAR ET SIMON RICHE

RÉSUMÉ. Dans cet article nous présentons les grandes lignes de la preuve d’une formule de caractères pour les représentations basculantes des groupes algébriques réductifs sur un corps de caractéristique positive, obtenue partiellement en collaboration avec plusieurs auteurs. Nous unissons les différentes étapes de cette preuve dans la notion de “dualité de Koszul formelle”, et en présentons quelques applications.

## TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
<b>Partie 1. Dualité de Koszul classique</b>	<b>5</b>
2. Anneaux de Koszul et dualité	5
3. Anneaux quasi-héréditaires et catégories de plus haut poids	11
4. Objets basculants et dualité de Ringel	19
<b>Partie 2. Dualité de Koszul formelle</b>	<b>23</b>
5. Objets à parité	23
6. Dualité de Koszul formelle	31
<b>Partie 3. Exemples et applications</b>	<b>33</b>
7. Exemples	33
8. Traces combinatoires	40
9. Applications en théorie des représentations	47
Références	55

## 1. INTRODUCTION

**1.1. Présentation.** Le but principal de cet article est de présenter les grandes lignes de la preuve d’une formule de caractères pour les représentations basculantes des groupes algébriques réductifs sur des corps algébriquement clos de caractéristique positive, conjecturée par G. Williamson et le second auteur [RW1], et

---

P.A. was supported by NSF Grant No. DMS-1500890. This project has received funding from the European Research Council (ERC) under the European Union’s Horizon 2020 research and innovation programme (grant agreement No 677147).

démontrée dans une suite de travaux partiellement en collaboration avec S. Makisumi, C. Mautner, L. Rider, et G. Williamson (voir notamment [ARd, MR2, AR4, AMRW2]).

Cette preuve implique la construction de plusieurs équivalences de catégories qui ont une structure similaire, que nous avons essayé d’axiomatiser dans la notion de “dualité de Koszul formelle”. La dualité de Koszul “classique” (étudiée notamment dans un article fondateur de Beilinson–Ginzburg–Soergel [BGS]) est une équivalence de catégories qu’on peut construire quand on rencontre un *anneau de Koszul*. Une dualité de Koszul formelle est “une dualité de Koszul sans anneau de Koszul”, c’est-à-dire un foncteur possédant certaines propriétés formellement similaires à celles des dualités de Koszul (ou plus précisément de “Ringel–Koszul”) classiques, mais qui peut exister même dans des situations où aucun anneau de Koszul n’est présent.

**1.2. Anneaux et dualité de Koszul.** La notion d’*anneau de Koszul* a été introduite par Priddy, et étudiée dans un cadre général et très satisfaisant par Beilinson–Ginzburg–Soergel [BGS]. Il s’agit d’un anneau  $A$  gradué par  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ , dont la composante de degré 0 est un anneau semi-simple, et qui vérifie la condition que

$$(1.1) \quad \mathrm{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(A_0, A_0\langle n \rangle[m]) = 0 \quad \text{si } n + m \neq 0.$$

(Ici,  $A\text{-gmod}$  désigne la catégorie des  $A$ -modules gradués de type fini, et  $\langle n \rangle$  est le décalage de la graduation, avec des conventions précisées ci-dessous.)

Sous certaines conditions techniques, si  $A$  est un anneau de Koszul l’anneau gradué

$$A^! := \left( \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{D^b(A\text{-gMod})}(A_0, A_0\langle -n \rangle[n]) \right)^{\mathrm{op}}$$

est encore un anneau de Koszul (appelé *anneau de Koszul dual*), et (sous des hypothèse techniques plus fortes) il existe une équivalence de catégories triangulées  $\kappa$  entre les catégories dérivées bornées des  $A$ -modules gradués de type fini et des  $A^!$ -modules gradués de type fini (appelée *dualité de Koszul* associée à  $A$ ). En un sens cette équivalence “mélange” la graduation des modules et la graduation cohomologique des complexes ; plus précisément elle vérifie  $\kappa \circ \langle 1 \rangle \cong \langle -1 \rangle[1] \circ \kappa$ . En particulier, la condition (1.1) se traduit par le fait que l’image par  $\kappa$  d’un  $A$ -module simple gradué concentré en degré 0 est un  $A^!$ -module gradué projectif, et dualement l’image inverse par  $\kappa$  d’un  $A^!$ -module simple gradué concentré en degré 0 est un  $A$ -module gradué injectif.

Le modèle typique de cette construction est obtenu quand  $A = \bigwedge V$  est l’algèbre extérieure d’un espace vectoriel  $V$  de dimension finie (avec sa graduation naturelle) ; l’anneau dual est alors l’algèbre symétrique  $S(V^*)$  de l’espace vectoriel dual  $V^*$  (avec sa graduation naturelle, encore une fois).

**1.3. La dualité de Koszul de Beilinson–Ginzburg–Soergel.** L’exemple principal qui a motivé l’étude générale de ces constructions par Beilinson–Ginzburg–Soergel est celui où  $A$  est l’anneau qui “gouverne” un bloc régulier de la catégorie  $\mathcal{O}$  d’une algèbre de Lie semi-simple complexe (c’est-à-dire l’anneau opposé à celui des endomorphismes d’un générateur projectif de cette catégorie). Cet anneau n’est pas “naturellement” gradué ; cependant Beilinson–Ginzburg–Soergel montrent qu’il peut être muni d’une graduation qui en fait un anneau de Koszul, isomorphe à son anneau de Koszul dual. La dualité de Koszul associée permet d’“expliquer” certaines

formules vérifiées par les polynômes de Kazhdan–Lusztig, et notamment la “formule d’inversion” de Kazhdan–Lusztig.

Cette construction a joué un rôle prépondérant en théorie géométrique des représentations, et a depuis été adaptée dans divers contextes proches ; voir par exemple [So1, Bac, R2, SVV, ES].

**1.4. Dualité de Koszul et anneaux quasi-héréditaires.** En plus du fait qu’il peut être muni d’une graduation de Koszul, l’anneau  $A$  considéré au §1.3 possède une autre structure remarquable : il s’agit d’un anneau *quasi-héréditaire* ; en d’autres termes, il possède des modules “standards” et des modules “costandards” qui exhibent des propriétés cohomologiques remarquables. Les anneaux gradués qui possèdent ces deux structures, et pour lesquels les deux structures sont “compatibles” en un sens approprié, sont appelés *quasi-héréditairement de Koszul*.

Les anneaux quasi-héréditaires (gradués ou non) possèdent également un autre type de “dualité”, la *dualité de Ringel*. En général, le dual de Ringel d’un anneau quasi-héréditairement de Koszul n’est pas nécessairement quasi-héréditairement de Koszul ; cependant, quand il l’est, des résultats de Mazorchuk [Ma] montrent que les dualités de Koszul et de Ringel commutent en un sens approprié, et leur composition devient une “dualité de Koszul–Ringel” qui envoie les modules simples concentrés en degré 0 vers des modules *basculants* de l’anneau dual. En particulier, cette situation se produit dans le contexte de Beilinson–Ginzburg–Soergel ; dans ce cas le dual de Ringel de l’anneau  $A$  du §1.3 est également isomorphe à  $A$ , et la dualité de Koszul–Ringel est donc une auto-équivalence de la catégorie dérivée bornée des  $A$ -modules gradués de type fini.

Cet anneau “contrôle” également la catégorie des faisceaux pervers sur la variété de drapeaux associée à notre algèbre de Lie semi-simple, constructibles par rapport à la stratification de Bruhat (et à coefficients complexes). Une idée fondamentale suggérée par Beilinson–Ginzburg [BG] et mise en pratique par Bezrukavnikov–Yun [BY] est que, dans ce cadre, la dualité de Koszul–Ringel admet une vaste généralisation, qui relie les faisceaux pervers sur la variété de drapeaux d’un groupe de Kac–Moody aux faisceaux pervers sur la variété de drapeaux du groupe de Kac–Moody dual (au sens de Langlands).

**1.5. Objets à parité et dualité de Koszul formelle.** Dans le cadre de Beilinson–Ginzburg–Soergel, la “Koszulité” est une propriété d’un anneau, et permet la construction d’une dualité de Koszul (ou de Koszul–Ringel). Une idée exprimée notamment dans [So5]<sup>1</sup> est que, dans le contexte de la théorie des représentations sur des corps de caractéristique positive, on peut reconstruire des équivalences qui ont les mêmes propriétés formelles que les dualités de Koszul, même en l’absence d’anneaux de Koszul. En d’autres termes, cette idée suggère que la “Koszulité” est une propriété d’un *foncteur* plutôt que d’un anneau (ou de sa catégorie de modules).

Pour exprimer cette idée plus précisément, nous avons besoin de la notion d’*objets à parité*. Cette notion a été introduite et étudiée par Juteau–Mautner–Williamson [JMW] dans le cadre des complexes de faisceaux sur des variétés algébriques. Dans cet article nous en considérons une variante dans le cadre des catégories triangulées munies d’une collection quasi-exceptionnelle (au sens de [B1]) “à parité”. Dans le cas où cette collection quasi-exceptionnelle est en fait exceptionnelle (au

1. La prépublication [So5] contient une erreur dans une preuve cruciale ; cette preuve a été corrigée, et la construction complétée, dans l’article [RSW].

sens de [B2]), et si de plus ses objets appartiennent au coeur de la t-structure associée, ce coeur possède une structure naturelle de *catégorie de plus haut poids* (c'est-à-dire une structure similaire à celle de la catégorie des modules sur un anneau quasi-héréditaire), et on peut également considérer les objets basculants dans cette catégorie. Une *dualité de Koszul formelle* est (essentiellement) un foncteur entre deux catégories triangulées possédant ces structures, qui envoie les objets à parité de la première catégorie sur les objets basculants de la seconde et réciproquement.

Dans la plupart des contextes rencontrés en pratique pour lesquels le corps de coefficients considéré est de caractéristique 0 (comme dans [BGS] ou [BY]), les objets à parité sont en fait des sommes directes de décalés d'objets simples dans le coeur de la t-structure associée à la collection exceptionnelle considérée. En ce sens les dualités de Koszul–Ringel considérées dans [BGS, BY] sont des dualités de Koszul formelles. Cependant, cette notion recouvre également d'autres constructions qui ne s'énoncent pas naturellement en termes d'anneaux (par exemple celles de [ABG]); de plus, dans des exemples importants pour les lesquels le corps de coefficients est de caractéristique positive, ces objets à parité ne sont *pas* des sommes de décalés d'objets simples, et il n'y a donc *pas* d'anneau de Koszul “sous-jacent” à la dualité de Koszul formelle considérée.

**1.6. Formule de caractères pour les représentations basculantes des groupes algébriques réductifs.** Le contexte principal dans lequel de tels foncteurs apparaissent est le suivant. Considérons un groupe algébrique réductif connexe  $\mathbf{G}$  défini sur un corps  $\mathbb{k}$  algébriquement clos de caractéristique  $p > 0$ . La catégorie  $\text{Rep}(\mathbf{G})$  des représentations algébriques de dimension finie de  $\mathbf{G}$  possède une structure naturelle de catégorie de plus haut poids, et la détermination des caractères des représentations basculantes indécomposables associées est un problème crucial du domaine. (Il est notamment connu qu'à partir de ces caractères on peut obtenir une formule de caractères pour les représentations *simples* de  $\mathbf{G}$ .)

Dans [RW1], G. Williamson et le second auteur ont proposé une formule conjecturale permettant de déterminer ces caractères, qui fait intervenir les  *$p$ -polynômes de Kazhdan–Lusztig* associés au groupe de Weyl affine associé à  $\mathbf{G}$ . Ces polynômes sont une “trace combinatoire” des objets à parité dans une catégorie de  $\mathbb{k}$ -faisceaux sur la variété de drapeaux affines du groupe Langlands-dual. Cette conjecture énonce donc une égalité entre des données combinatoires provenant d'objets basculants et d'objets à parité, ce qui suggère de la voir comme une trace combinatoire d'une dualité de Koszul formelle. Cependant, sa preuve fait intervenir non pas une mais *trois* foncteurs de type “dualité de Koszul formelle” :

- (1) une généralisation de la dualité de Koszul de Bezrukavnikov–Yun au cas des  $\mathbb{k}$ -faisceaux, démontrée en collaboration avec S. Makisumi et G. Williamson [AMRW2] et reliant certains complexes de faisceaux “d'Iwahori–Whittaker” sur une variété de drapeaux affines à des complexes de faisceaux sur une Grassmannienne affine ;
- (2) une adaptation au cadre modulaire d'une équivalence due à Arkhipov–Bezrukavnikov–Ginzburg [ABG] reliant certains complexes de faisceaux sur une Grassmannienne affine à des complexes de faisceaux cohérents équivariants sur la résolution de Springer du groupe dual, démontrée indépendamment par L. Rider et le premier auteur [ARd] et par C. Mautner et le second auteur [MR2] ;

- (3) une adaptation au cadre modulaire d’une autre équivalence due à Arkhipov–Bezrukavnikov–Ginzburg [ABG], démontrée dans [AR4] et reliant les complexes de faisceaux cohérents équivariants sur la résolution de Springer du décalé de Frobenius  $\mathbf{G}$  de  $\mathbf{G}$  à la catégorie dérivée du bloc principal de  $\mathbf{G}$ .

**1.7. Contenu.** La Partie 1 de cet article est dédiée au rappel du point de vue “classique” sur la dualité de Koszul, dû notamment à Beilinson–Ginzburg–Soergel. En particulier, au §2 nous rappelons les définitions et propriétés principales des anneaux de Koszul. Au §3 nous considérons les anneaux quasi-héréditaires, et l’interaction entre cette notion et la Koszulté. Enfin, au §4 nous rappelons quelques résultats concernant les relations entre la dualité de Koszul et la dualité de Ringel.

La Partie 2 est dédiée à l’étude générale de la notion de dualité de Koszul formelle. Au §5 nous considérons une variation de la notion de complexes à parité de Juteau–Mautner–Williamson [JMW]. Puis au §6 nous définissons les dualités de Koszul formelles, et énonçons quelques propriétés qui découlent directement de la définition.

Enfin, la Partie 3 est dédiée aux exemples de telles dualités qui apparaissent en lien avec la théorie des représentations modulaires des groupes algébriques réductifs. Au §7 nous présentons ces exemples. Au §8 nous énonçons quelques conséquences combinatoires de l’existence de ces foncteurs, dans le cadre des bases  $p$ -canoniques de Williamson. Enfin, au §9 nous présentons quelques applications de ces résultats :

- (1) à la preuve de la formule de caractères conjecturée dans [RW1] ;
- (2) à une preuve de la *conjecture de Humphreys* sur les variétés de support des  $\mathbf{G}$ -modules basculants en grande caractéristique (obtenue dans [AHR], en collaboration avec W. Hardesty) ;
- (3) à des formules “de Steinberg” et “de Donkin” pour la base  $p$ -canonique (qui n’avaient pas été considérées jusque-là).

**1.8. Remerciements.** Comme expliqué ci-dessus, les résultats présentés dans ce texte sont issus de travaux effectués partiellement en collaboration avec S. Makisumi, C. Mautner, L. Rider, et G. Williamson. Nous les remercions tous les quatre pour l’aide et les idées qu’ils nous ont apportées. Nous remercions également la Société Mathématique de France et les organisateurs du congrès de Lille pour avoir donné l’occasion à l’un de nous de présenter ces travaux lors du 2ème congrès de la S.M.F.

L’essentiel du travail sur cet article a été effectué alors que le second auteur était membre du Freiburg Institute for Advanced Studies, dans le cadre du programme “Cohomology in Algebraic Geometry and Representation Theory” organisé par A. Huber-Klawitter, S. Kebekus et W. Soergel.

## Partie 1. Dualité de Koszul classique

### 2. ANNEAUX DE KOSZUL ET DUALITÉ

**2.1. Définitions.** Soit  $\mathbb{k}$  un corps, et soit  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre positivement graduée. Notons  $A\text{-gmod}$  la catégorie des  $A$ -modules gradués de type fini, et soit  $D^b(A\text{-gmod})$  sa catégorie dérivée bornée. Si  $M \in A\text{-gmod}$ , nous noterons  $M\langle n \rangle$  le module obtenu par décalage de la graduation, où  $(M\langle n \rangle)_m = M_{n+m}$ . Pour  $M, N \in$

$A$ -gmod, soit  $\underline{\text{Ext}}_A^k(M, N)$  l'espace vectoriel gradué défini par

$$(2.1) \quad \underline{\text{Ext}}_A^k(M, N)_n = \text{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(M, N\langle n \rangle[k]).$$

Supposons maintenant de plus que chaque composante de  $A$  est de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ , et que la composante  $A_0$  est un anneau semi-simple. Notons

$$\text{Irr}_0(A)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $A$ -modules simples dont la graduation est concentrée en degré 0. (Cet ensemble est en bijection avec celui des classes d'isomorphisme de  $A_0$ -modules simples; en particulier il est fini.) Notons

$$\text{Proj}_0(A)$$

l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $A$ -modules projectifs indécomposables dont l'unique quotient simple est concentré en degré 0. Il y a évidemment une bijection canonique entre  $\text{Proj}_0(A)$  et  $\text{Irr}_0(A)$ , envoyant  $P$  sur son unique quotient simple. Il sera souvent pratique d'introduire un nouvel ensemble de paramètres  $I$  avec une bijection fixée

$$(2.2) \quad I \xrightarrow{\sim} \text{Irr}_0(A) = \text{Proj}_0(A).$$

Pour  $i \in I$ , notons

$$L_i, \quad \text{resp.} \quad P_i$$

un  $A$ -module gradué simple, resp. projectif, dans la classe d'isomorphisme correspondante. En particulier, il y a un morphisme surjectif  $P_i \twoheadrightarrow L_i$ .

Considérons maintenant l'anneau

$$E := \underline{\text{Ext}}_A^\bullet(L, L) \quad \text{où } L = \bigoplus_{i \in I} L_i.$$

Cet anneau est  $\mathbb{Z}^2$ -gradué : on a

$$E = \bigoplus E_m^n \quad \text{où } E_m^n = \text{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(L, L\langle m \rangle[n]).$$

Il est clair que la graduation en exposant (la graduation "cohomologique") est positive. La graduation en indice (ou "interne") vérifie certaines bornes aussi. En effet, nos hypothèses impliquent que le module semi-simple  $L$  admet une résolution projective

$$\dots \rightarrow P^{-1} \rightarrow P^0 \rightarrow L \rightarrow 0$$

où chaque terme  $P^k = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} P_n^k$  est un  $A$ -module gradué projectif qui vérifie

$$P_n^k = 0 \quad \text{si } n < -k.$$

Par conséquent, l'algèbre  $\mathbb{Z}^2$ -graduée  $E$  vérifie

$$E_n^k = 0 \quad \text{si } n > -k.$$

L'algèbre  $A$  est dite *de Koszul* si  $E$  vérifie la condition

$$E_n^k \neq 0 \quad \Rightarrow \quad n = -k.$$

Si  $A$  est de Koszul, soit

$$A^! := E^{\text{op}}$$

l'anneau opposé de  $E$ , muni de la graduation définie par  $A_n^! = E_{-n}^n$ . Cet anneau gradué vérifie les mêmes hypothèses que celles imposées sur  $A$ ; en particulier il est de Koszul (voir [BGS, Proposition 2.9.1 et Theorem 2.10.1]), et on l'appelle la *dual* (au sens de Koszul) de  $A$ . Il est à noter que l'opération  $A \mapsto A^!$  n'est pas une

involution. Cependant, elle n'est pas loin de l'être, ce qui justifie l'utilisation du mot "dual"; voir la Remarque 2.5. On remarquera également que

$$A_0^! = \bigoplus_{i \in I} \text{End}_{A_0}(L_i)^{\text{op}}$$

est un anneau semi-simple, dont les classes d'isomorphisme de modules simples sont en bijection canonique avec  $I$ .

*Remarque 2.1.* (1) Soit  $A$  comme ci-dessus (positivement graduée, avec composantes graduées de dimension finie), mais ne supposons pas a priori que  $A_0$  est semi-simple. Définissons encore  $I$  comme l'ensemble des classes d'isomorphisme de  $A_0$ -modules simples, ou de façon équivalente de  $A$ -modules simples concentrés en degré 0. Alors la condition que  $\text{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(L_i, L_j\langle n \rangle[k]) = 0$  pour  $n \neq -k$  implique en particulier que

$$\text{Ext}_{A_0}^1(L_i, L_j) = \text{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(L_i, L_j[1]) = 0$$

pour tous  $i, j \in I$ . Donc  $A_0$  est automatiquement un anneau semi-simple.

(2) Un anneau de Koszul est en particulier un anneau quadratique (voir [BGS, Corollary 2.3.3]), et l'anneau  $A^!$  est canoniquement isomorphe à l'anneau quadratique dual; voir [BGS, Theorem 2.10.1].

*Exemple 2.2.* Soit  $V$  un espace vectoriel de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ , et soit  $A = \text{Sym}(V)$  l'algèbre symétrique associée. Munissons-la de la graduation "naturelle", où  $A_n = \text{Sym}^n(V)$ . Il est bien connu que l'algèbre  $E = \text{Ext}_A^\bullet(\mathbb{k}, \mathbb{k})$  s'identifie à l'algèbre extérieure de l'espace vectoriel dual, et que  $E_n^k = 0$  si  $n \neq -k$ . Cet anneau est isomorphe à son anneau opposé, et on a donc  $A^! \cong \bigwedge V^*$ .

Il est également possible d'échanger les rôles des deux algèbres dans cet exemple : voir l'Exemple 2.6.

**2.2. Dualité de Koszul.** Pour un anneau gradué  $A$ , on notera

$$D_{\text{lf}}^b(A\text{-gmod}) \quad \text{resp.} \quad D_{\text{pf}}^b(A\text{-gmod})$$

la sous-catégorie triangulée pleine de  $D^b(A\text{-gmod})$  engendrée par les modules de longueur finie, resp. par les modules projectifs de type fini. (On appelle les objets de  $D_{\text{pf}}^b(A\text{-gmod})$  les *complexes parfaits*.) L'énoncé suivant explique, dans le cas où  $A$  est de Koszul, la relation entre les  $A$ -modules gradués et les  $A^!$ -modules gradués.

**Proposition 2.3.** *Soit  $A$  comme au §2.1, et supposons  $A$  de Koszul. Il existe une équivalence de catégories triangulées*

$$\kappa : D_{\text{lf}}^b(A\text{-gmod}) \xrightarrow{\sim} D_{\text{pf}}^b(A^!\text{-gmod})$$

telle que

$$\kappa(M\langle 1 \rangle) \cong \kappa(M)\langle -1 \rangle[1]$$

pour tout  $M$  dans  $D_{\text{lf}}^b(A\text{-gmod})$ . De plus, en identifiant  $\text{Irr}_0(A)$  est  $\text{Irr}_0(A^!)$  comme ci-dessus, et en utilisant (2.2) (pour l'algèbre  $A^!$ ) on a

$$\kappa(L_i) \cong P_i^!$$

pour tout  $i \in I$ .



Pour une preuve de cette proposition, voir [BGS, Theorem 2.12.1]. (En fait, ce dernier résultat est beaucoup plus général que notre Proposition 2.3 : les hypothèses sur les anneaux ainsi que les conditions “lf” et “pf” ont été affaiblies. Par contre, la version ci-dessus est plus facile à énoncer et suffira pour nos buts.)

Sous certaines hypothèses de finitude supplémentaires, on peut supprimer les indices “lf” et “pf” dans la Proposition 2.3. Si  $A$  est de dimension finie, alors la catégorie  $A\text{-gmod}$  a assez d’injectifs. Notons

$$\text{Inj}_0(A)$$

l’ensemble des classes d’isomorphisme de  $A$ -modules gradués injectifs indécomposables dont l’unique sous-module simple est concentré en degré 0. Il y a encore une fois une bijection canonique  $\text{Irr}_0(A) = \text{Inj}_0(A)$ . Pour  $i \in I$ , notons  $J_i$  le module injectif correspondant. On a alors le résultat suivant.

**Théorème 2.4** (Dualité de Koszul, 1ère version). *Soit  $A$  comme au §2.1, supposée de plus de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ , de dimension globale finie, et de Koszul. Alors le dual  $A^!$  est de dimension finie sur  $\mathbb{k}$ , de dimension globale finie (et de Koszul), et il existe une équivalence de catégories triangulées*

$$\kappa : D^b(A\text{-gmod}) \xrightarrow{\sim} D^b(A^!\text{-gmod})$$

telle que

$$\kappa(M\langle 1 \rangle) \cong \kappa(M)\langle -1 \rangle[1]$$

pour tout  $M$  dans  $D^b(A\text{-gmod})$ . Via l’identification  $\text{Irr}_0(A) \cong \text{Irr}_0(A^!)$  considérée ci-dessus, on a

$$\kappa(L_i) \cong P_i^!, \quad \kappa(J_i) \cong L_i^!$$

pour tout  $i \in I$ .

*Démonstration.* L’anneau  $A^!$  est de dimension finie car  $A$  est de dimension globale finie. Puisque tout  $A$ -module est de longueur finie, le foncteur d’inclusion  $D_{\text{lf}}^b(A\text{-gmod}) \rightarrow D^b(A\text{-gmod})$  est une équivalence de catégories. On a alors le foncteur  $\kappa : D^b(A\text{-gmod}) \rightarrow D_{\text{pf}}^b(A^!\text{-gmod})$  de la Proposition 2.3. En considérant les espaces

$$\text{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(L_i, J_j\langle n \rangle[k]) \cong \text{Hom}_{D^b(A^!\text{-gmod})}(P_i^!, \kappa(J_j)\langle -n \rangle[n+k]),$$

on peut vérifier que  $\kappa(J_j)$  est l’unique quotient simple de  $P_i^!$ . En particulier, tout  $A^!$ -module simple est un complexe parfait, ce qui implique que  $A^!$  est de dimension globale finie. Cette propriété nous assure que l’inclusion  $D_{\text{pf}}^b(A^!\text{-gmod}) \rightarrow D^b(A^!\text{-gmod})$  est une équivalence de catégories, et on peut alors considérer  $\kappa$  comme une équivalence  $D^b(A\text{-gmod}) \xrightarrow{\sim} D^b(A^!\text{-gmod})$ .  $\square$

*Remarque 2.5.* (1) Pour une version plus “catégorique” de cette construction, on pourra consulter [AR1, Theorem 2.4].

- (2) Il est clair d’après la preuve du théorème que les hypothèses réellement nécessaires sont que  $A$  est de dimension finie et que  $A^!$  est de dimension globale finie. Cependant, imposer les deux conditions sur  $A$  permet d’obtenir une version plus symétrique de l’énoncé.
- (3) On peut remarquer que les rôles des modules projectifs et injectifs dans le Théorème 2.4 n’est pas symétrique, et se demander s’il existe une version modifiée de cet énoncé qui échange leurs rôles. C’est bien le cas : si  $A$  est de

Koszul, son anneau opposé l'est aussi (voir [BGS, Proposition 2.2.1]), et on peut poser

$${}^!A := ((A^{\text{op}})^!)^{\text{op}}.$$

Avec cette notation, [BGS, Theorem 2.10.2] implique qu'il existe des isomorphismes canoniques

$$A \cong {}^!(A^!) \cong ({}^!A)^!.$$

Si  $A$  vérifie de plus les hypothèses du Théorème 2.4, alors il existe une équivalence de catégories triangulées  $\kappa' : D^b(A\text{-gmod}) \xrightarrow{\sim} D^b({}^!A\text{-gmod})$  qui envoie les modules projectifs (resp. simples) sur des modules simples (resp. injectifs).

*Exemple 2.6.* Soit  $A = \bigwedge V^*$  l'algèbre extérieure du dual d'un espace vectoriel  $V$ . Comme on l'a vu dans l'Exemple 2.2, on a  ${}^!A \cong A^! \cong \text{Sym}(V)$ . (Ici on a utilisé le fait que les algèbres symétriques et extérieures sont toutes les deux isomorphes, de façon naturelle, à leurs anneaux opposés.) Cet exemple ne rentre pas dans le cadre du Théorème 2.4 car  $A$  n'est pas de dimension globale finie ; mais sa preuve reste valable dans ce cas particulier<sup>2</sup> (voir la Remarque 2.5(2)), et on obtient une équivalence de catégories triangulées

$$\kappa : D^b(\bigwedge V^*\text{-gmod}) \xrightarrow{\sim} D^b(\text{Sym}(V)\text{-gmod}).$$

Rappelons maintenant que l'anneau  $A$  est auto-injectif : ses modules injectifs coïncident avec ses modules projectifs. Le foncteur  $\kappa$  envoie alors

$$\begin{aligned} L_0 &\mapsto P_0^!, \\ P_0(\dim V) &\mapsto L_0^!, \end{aligned}$$

où  $L_0$  est l'unique module simple concentré en degré 0 (et de même pour  $L_0^!$ ). La dualité de Koszul pour les algèbres symétrique et extérieure jouit donc d'une symétrie supplémentaire, qui ne vaut pas pour les anneaux de Koszul généraux.

**2.3. Quelques exemples.** Soit  $R$  l'algèbre des chemins (à coefficients dans  $\mathbb{k}$ ) du carquois suivant :

$$(2.3) \quad \textcircled{1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha} \\ \xrightarrow{\beta} \end{array} \textcircled{2}$$

De même, soit  $R^*$  l'algèbre des chemins du carquois obtenu en inversant les flèches :

$$\textcircled{1} \begin{array}{c} \xleftarrow{\alpha^*} \\ \xrightarrow{\beta^*} \end{array} \textcircled{2}$$

(La concaténation des chemins sera notée avec les mêmes conventions que pour les compositions d'applications.) Munissons  $R$  et  $R^*$  de la graduation donnée par la longueur des chemins. (En particulier, les idempotents correspondant aux sommets sont de degré 0, et les éléments  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\alpha^*$ , et  $\beta^*$  correspondant aux flèches sont tous de degré 1). Pour rendre explicite cette graduation, nous décrirons les représentations du carquois comme des espaces vectoriels gradués, de façon compatible avec les degrés des flèches. Par exemple, les diagrammes suivants correspondent à des  $R$ -modules gradués :

$$\mathbb{k} \begin{array}{c} \xleftarrow{\text{id}} \\ \xrightarrow{0} \end{array} \mathbb{k}\langle -1 \rangle \quad \mathbb{k}\langle -1 \rangle \begin{array}{c} \xleftarrow{0} \\ \xrightarrow{\text{id}} \end{array} \mathbb{k}.$$

2. En fait, ce cas particulier est justement celui qui a motivé le développement de cette théorie.

Les anneaux de la colonne de gauche du tableau ci-dessous sont de Koszul, et leurs duaux de Koszul sont les anneaux qui figurent dans la colonne de droite :

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{R} & & \frac{A^!}{R^*/(\alpha^*\beta^*, \beta^*\alpha^*)} \\ R/(\alpha\beta) & & R^*/(\alpha^*\beta^*) \\ R/(\alpha\beta, \beta\alpha) & & R^* \end{array}$$

En fait, pour vérifier cela on peut procéder de la façon suivante. On écrit  $R$  comme l'algèbre tensorielle du bimodule sur  $R_0 = \mathbb{k}e_1 \oplus \mathbb{k}e_2$  donné par  $V = \mathbb{k}\alpha \oplus \mathbb{k}\beta$  (avec  $e_1\alpha = 0$ ,  $e_2\alpha = \alpha$ , etc.). L'algèbre tensorielle d'un bimodule  $V$  sur un anneau semisimple est toujours de Koszul, ce qui règle la première et la troisième ligne de ce tableau. Pour la deuxième ligne, on voit que  $R/(\alpha\beta)$  est l'anneau quadratique défini par  $V$  et les relations  $\mathbb{k} \cdot (\alpha \otimes \beta) \subset V \otimes_{R_0} V$ . S'il est de Koszul, son anneau dual est l'anneau quadratique dual (voir la Remarque 2.1(2)). Avec les conventions adoptées dans [BGS], cet anneau quadratique dual est défini par le  $R_0$ -bimodule  $V^* = \text{Hom}_{R_0}(V, R_0) = \mathbb{k}\alpha^* \oplus \mathbb{k}\beta^*$  (où  $\alpha^*(\alpha) = e_2$ ,  $\alpha^*(\beta) = 0 = \beta^*(\alpha)$ ,  $\beta^*(\beta) = e_1$ ) et les relations  $\mathbb{k} \cdot (\alpha^* \otimes \beta^*) \subset V^* \otimes_{R_0} V^*$ . Il ne reste donc plus qu'à voir que  $R/(\alpha\beta)$  est de Koszul.

Un module gradué sur cet anneau peut être vu comme une représentation graduée du carquois (2.3) qui vérifie la relation  $\alpha\beta = 0$ . Nous allons donc écrire les modules dans le langage des carquois. Les  $R/(\alpha\beta)$ -modules simples en degré 0 sont :

$$L_1 = \mathbb{k} \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \leftarrow \\ 0 \end{array} 0, \quad L_2 = 0 \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \leftarrow \\ 0 \end{array} \mathbb{k}$$

Leurs couvertures projectives et enveloppes injectives sont :

$$P_1 = I_1\langle -2 \rangle = (\mathbb{k}\langle -2 \rangle \oplus \mathbb{k}) \begin{array}{c} [0 \ 1] \\ \leftarrow \\ [1 \ 0] \end{array} \mathbb{k}\langle -1 \rangle, \\ P_2 = \mathbb{k}\langle -1 \rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \leftarrow \\ \text{id} \\ \xrightarrow{0} \end{array} \mathbb{k}, \quad I_2 = \mathbb{k}\langle 1 \rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}} \\ \leftarrow \\ 0 \end{array} \mathbb{k}.$$

En particulier, on a des résolutions projectives des objets simples de la forme

$$(2.4) \quad 0 \rightarrow P_2\langle -1 \rangle \rightarrow P_1 \rightarrow L_1 \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad 0 \rightarrow P_2\langle -2 \rangle \rightarrow P_1\langle -1 \rangle \rightarrow P_2 \rightarrow L_2 \rightarrow 0,$$

qui montrent que  $R$  est bien de Koszul.

On peut comprendre plus concrètement la relation  $\alpha^*\beta^* = 0$  dans l'anneau dual de la façon suivante. En utilisant les résolutions projectives ci-dessus on peut vérifier que  $\underline{\text{Ext}}^1(L_1, L_2)$  et  $\underline{\text{Ext}}^1(L_2, L_1)$  sont de dimension 1 ; plus précisément, il existe des suites exactes courtes non scindées

$$0 \rightarrow L_2\langle -1 \rangle \rightarrow I_2\langle -1 \rangle \rightarrow L_1 \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow L_1\langle -1 \rangle \rightarrow P_2 \rightarrow L_2 \rightarrow 0.$$

Soient  $\alpha^* \in \text{Ext}^1(L_1, L_2\langle -1 \rangle)$  et  $\beta^* \in \text{Ext}^1(L_2, L_1\langle -1 \rangle)$  les éléments correspondants à ces suites exactes courtes. Le produit  $\beta^* \cdot \alpha^*$  au sens de Yoneda correspond à la suite exacte

$$(2.5) \quad 0 \rightarrow L_1\langle -2 \rangle \rightarrow P_2\langle -1 \rangle \rightarrow I_2\langle -1 \rangle \rightarrow L_1 \rightarrow 0.$$

Il existe une suite de sous-modules  $L_1\langle -2 \rangle \subset P_2\langle -1 \rangle \subset P_1$  telle que  $P_1/L_1\langle -2 \rangle \cong I_2\langle -1 \rangle$  et  $P_1/P_2\langle -1 \rangle \cong L_1$ . Autrement dit, la classe de la suite (2.5) dans le groupe  $\text{Ext}^2(L_1, L_1\langle -2 \rangle)$  est nulle.

## 3. ANNEAUX QUASI-HÉRÉDITAIRES ET CATÉGORIES DE PLUS HAUT POIDS

**3.1. Anneaux quasi-héréditaires.** Comme au §2.1, soit  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre positivement graduée, qu'on supposera ici de dimension finie pour simplifier. Soit  $I$  un ensemble paramétrant les  $A_0$ -modules simples (ou, de façon équivalente, les  $A$ -modules simples concentrés en degré 0). Supposons que  $I$  est muni d'un ordre partiel  $\preceq$ . On appellera "idéal" de  $I$  un sous-ensemble  $J \subset I$  tel que si  $i \in I$ ,  $j \in J$  et  $i \preceq j$  alors  $i \in J$ . Pour tout idéal  $T \subset I$ , on notera  $A\text{-gmod}_T$  la sous-catégorie pleine de  $A\text{-gmod}$  formée par les modules dont tous les facteurs de composition sont de la forme  $L_i\langle n \rangle$  avec  $i \in T$  et  $n \in \mathbb{Z}$ . On considérera en particulier cette sous-catégorie dans le cas où  $T = \{\preceq i\} := \{j \in I \mid j \preceq i\}$ , et dans celui où  $T = \prec i := \{j \in I \mid j \prec i\}$ .

L'algèbre  $A$  est dite *quasi-héréditaire graduée* si pour tout  $i \in I$  il existe des objets  $\Delta_i, \nabla_i \in A\text{-gmod}_{\{\preceq i\}}$  et des morphismes  $\Delta_i \rightarrow L_i \rightarrow \nabla_i$  qui vérifient les conditions suivantes :

- (1) pour tout module simple  $L_i$ , on a  $\underline{\text{End}}(L_i) \cong \mathbb{k}$  ;
- (2) pour tout idéal  $T \subset I$  et tout  $i \in T$  maximal,  $\Delta_i$  est la couverture projective de  $L_i$  dans  $A\text{-gmod}_T$ , et  $\nabla_i$  est son enveloppe injective ;
- (3) le noyau de  $\Delta_i \rightarrow L_i$  et le conoyau de  $L_i \rightarrow \nabla_i$  appartiennent à  $A\text{-gmod}_{\prec i}$  ;
- (4) pour tout  $i, j \in I$ , on a  $\underline{\text{Ext}}_A^2(\Delta_i, \nabla_j) = 0$ .

Les modules de la forme  $\Delta_i\langle n \rangle$ , resp.  $\nabla_i\langle n \rangle$ , sont dits *standards*, resp. *costandards*. Notons que toute algèbre quasi-héréditaire est de dimension globale finie ; voir [BGS, Corollary 3.2.2]. Notons également qu'on a automatiquement

$$(3.1) \quad \text{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(\Delta_i, \nabla_j\langle n \rangle[k]) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & \text{si } i = j \text{ et } n = k = 0 ; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

voir par exemple [R3, Corollary 7.6].

*Remarque 3.1.* (1) Les objets  $\Delta_i$  et  $\nabla_i$  sont bien sûr uniques (à isomorphisme près) s'ils existent.

- (2) La notion d'algèbre quasi-héréditaire est due à Cline–Parshall–Scott ; voir notamment [CPS]. La définition que nous considérons ici est différente de celle étudiée dans [CPS] ; cependant, il est possible de déduire de [CPS, Theorem 3.6] et de [BGS, Theorem 3.2.1] que les deux notions de quasi-hérédité coïncident. La définition adoptée ci-dessus (qui est suggérée dans [BGS]) a l'avantage d'être "catégorique" ; c'est-à-dire qu'elle s'adapte bien au cadre des catégories abéliennes plus générales, qui ne sont pas définies naturellement comme une catégorie de modules sur un anneau.
- (3) Notons bien que dans cette partie les algèbres que nous considérons sont *positivement* graduées. On peut bien sûr étudier des algèbres quasi-héréditaires graduées par  $\mathbb{Z}$  (aucun des axiomes ci-dessus n'utilise nos restrictions sur la graduation), mais nous ne le ferons pas ici.
- (4) Ci-dessous nous considérerons également des algèbres quasi-héréditaires *non graduées*. Pour les définir, il suffit de remplacer les  $\underline{\text{Hom}}$  et les  $\underline{\text{Ext}}$  dans les axiomes ci-dessus par les  $\text{Hom}$  et  $\text{Ext}$  ordinaires, et d'omettre les décalages de graduation.

**3.2. Anneaux quasi-héréditairement de Koszul et dualité de Koszul.** Soit  $A$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre quasi-héréditaire graduée (avec les conventions du §3.1). On dira que  $A$  est *quasi-héréditairement de Koszul* si pour tous  $i, j \in I$ , on a

$$(3.2) \quad \mathrm{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(\Delta_i, L_j\langle n \rangle[k]) = \mathrm{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(L_i, \nabla_j\langle n \rangle[k]) = 0$$

si  $n \neq -k$ .

*Remarque 3.2.* Dans la terminologie de [BGS, Definition 2.14.1], la condition que  $\mathrm{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(\Delta_i, L_j\langle n \rangle[k]) = 0$  si  $n + k \neq 0$  peut s'interpréter comme disant que les modules gradués  $\Delta_i$  sont des *modules de Koszul*.

Cette terminologie est justifiée par le résultat suivant. (Pour une preuve dans le langage de modules sur un anneau, voir [ADL]. Pour une preuve dans un langage catégorique plus proche de celui utilisé ici, voir [AR3, Proposition 2.13] et la Remarque 2.1.)

**Proposition 3.3.** *Si  $A$  est une  $\mathbb{k}$ -algèbre quasi-héréditairement de Koszul, alors elle est de Koszul.*

*Remarque 3.4.* Cette proposition implique en particulier que si  $A$  est une  $\mathbb{k}$ -algèbre quasi-héréditairement de Koszul alors l'anneau  $A_0$  est semi-simple.

Considérons encore une  $\mathbb{k}$ -algèbre quasi-héréditaire graduée  $A$  comme au §3.1. Si  $M$  est un  $A$ -module gradué, une *filtration standard*, resp. *costandard*, est une filtration finie  $0 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_k = M$  telle que tout sous-quotient  $M_i/M_{i-1}$  est un module standard, resp. costandard. Une propriété très importante des anneaux quasi-héréditaires est que tout module projectif admet une filtration standard (voir [BGS, Theorem 3.2.1]). En un sens, les modules standards servent donc à "interpoler" entre les modules simples et les modules projectifs. De même, les modules costandard interpolent entre les modules simples et les modules injectifs. Il est donc naturel de se demander comment les modules (co)standards se comportent par rapport au foncteur du Théorème 2.4.

Le résultat suivant est démontré dans [ADL]. Ci-dessous nous en donnons une autre preuve.

**Théorème 3.5** (Dualité de Koszul, 2ème version). *Soit  $A$  une algèbre quasi-héréditaire graduée comme au §3.1 (pour un ensemble partiellement ordonné  $(I, \preceq)$ ), et supposons que  $A$  est quasi-héréditairement de Koszul. Alors le dual de Koszul  $A^!$  est quasi-héréditaire gradué (par rapport à l'ensemble partiellement ordonné  $(I, \preceq^{\mathrm{op}})$ ) et quasi-héréditairement de Koszul. Il existe une équivalence de catégories triangulées*

$$\kappa : D^b(A\text{-gmod}) \xrightarrow{\sim} D^b(A^!\text{-gmod})$$

qui vérifie

$$\kappa(M\langle 1 \rangle) \cong \kappa(M)\langle -1 \rangle[1]$$

pour tout  $M$  dans  $D^b(A\text{-gmod})$ , et telle que

$$\kappa(L_i) \cong P_i^!, \quad \kappa(\nabla_i) \cong \Delta_i^!, \quad \kappa(J_i) \cong L_i^!$$

pour tout  $i \in I$ .

Pour démontrer ce résultat, nous aurons besoin du lemme suivant. Ici, pour  $\mathcal{D}$  une catégorie triangulée et  $(X_\alpha : \alpha \in A)$  une collection d'objets de  $\mathcal{D}$ , nous noterons  $\langle X_\alpha : \alpha \in A \rangle_{\mathrm{ext}}$  la sous-catégorie de  $\mathcal{D}$  engendrée par extensions par

les objets  $(X_\alpha : \alpha \in A)$ , c'est-à-dire la plus petite sous-catégorie pleine  $\mathcal{D}'$  de  $\mathcal{D}$  contenant ces objets et telle que si  $M_1, M_3 \in \mathcal{D}'$  et si  $M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow M_3 \xrightarrow{[1]}$  est un triangle distingué, alors  $M_2$  appartient à  $\mathcal{D}'$ .

**Lemme 3.6.** *Soit  $A$  une  $\mathbb{k}$ -algèbre quasi-héréditaire graduée comme au §3.1 (pour un ensemble partiellement ordonné  $(I, \preceq)$ ). Pour  $M$  dans  $D^b(A\text{-gmod})$ , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) pour tout  $i \in I$ , on a  $\text{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(\Delta_i\langle n \rangle[m], M) = 0$  si  $n \neq -m$  ;
- (2)  $M$  appartient à  $\langle \nabla_j\langle k \rangle[-k] : j \in I, k \in \mathbb{Z} \rangle_{\text{ext}}$ .

*Démonstration.* Pour démontrer que (2) implique (1), on peut supposer que  $M = \nabla_j\langle k \rangle[-k]$ . Dans ce cas, le résultat voulu est une conséquence de (3.1).

Supposons maintenant que  $M$  vérifie la condition (1), et soit  $T \subset I$  le plus petit idéal tel que  $M$  appartient à la sous-catégorie triangulée de  $D^b(A\text{-gmod})$  engendrée par les objets  $\{L_i\langle n \rangle : i \in T, n \in \mathbb{Z}\}$ . Nous procéderons par récurrence sur le cardinal de  $T$ . Si  $T$  est vide, alors  $M = 0$ , et il n'y a rien à prouver. Sinon, soit  $i$  un élément maximal de  $T$ . Le formalisme de recollement (tel que développé dans [B1, Lemma 4] ; voir aussi [R3, §7.3]) et notre condition sur  $M$  permettent de construire un morphisme canonique

$$\phi : M \rightarrow \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(\Delta_i\langle n \rangle[-n], M) \otimes_{\mathbb{k}} \nabla_i\langle n \rangle[-n]$$

dont le cocône  $M'$  appartient à la sous-catégorie triangulée engendrée par les objets  $\{L_j\langle n \rangle : j \in T \setminus \{i\}, n \in \mathbb{Z}\}$ . En utilisant (3.1), il n'est pas difficile de voir que  $M'$  vérifie encore la condition (1). Par récurrence il vérifie également (2), et on en déduit la même condition pour  $M$ .  $\square$

*Démonstration du Théorème 3.5.* Définissons  $A^!$  et  $\kappa$  comme dans le Théorème 2.4. Pour tout  $i \in I$ , notons  $A^!\text{-gmod}_{\{\preceq^{\text{op}} i\}}$  la sous-catégorie pleine de  $A^!\text{-gmod}$  dont les objets sont les modules dont tous les facteurs de composition sont de la forme  $L_j^!\langle n \rangle$  avec  $j \preceq^{\text{op}} i$ .

Pour commencer, nous allons montrer que  $A^!$  vérifie les axiomes (1)–(4) définissant les anneaux quasi-héréditaires, et que  $\kappa$  envoie les  $A$ -modules standards sur les  $A^!$ -modules costandards.

Pour démontrer (1), on remarque que puisque  $\kappa(J_i) \cong L_i^!$ , pour tout  $n \in \mathbb{Z}$  on a

$$\text{Hom}_{A^!\text{-gmod}}(L_i^!, L_i^!\langle n \rangle) \cong \text{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(J_i, J_i\langle -n \rangle[n]).$$

Bien sûr, ce groupe est nul si  $n \neq 0$ . Et pour  $n = 0$ , on remarque que

$$\dim(\text{Hom}_{A^!\text{-gmod}}(J_i, J_i)) = [J_i : L_i].$$

Mais, puisque  $L_i$  est le socle de  $J_i$ , en utilisant le fait que  $A^!$  est concentré en degrés positifs ou nuls et que  $A_0^!$  est semi-simple, on voit que le conoyau de l'injection  $L_i \hookrightarrow J_i$  est concentré en degrés strictement négatifs ; il ne peut donc pas posséder  $L_i$  comme facteur de composition, ce qui implique que  $[J_i : L_i] = 1$ .

Ensuite, définissons  $\Delta_i^!$  par

$$\Delta_i^! := \kappa(\nabla_i).$$

A priori, il s'agit d'un objet de  $D^b(A^!\text{-gmod})$ . Pour montrer qu'il appartient en fait à  $A^!\text{-gmod}_{\{\preceq^{\text{op}} i\}}$ , il suffit de montrer que

$$\text{Hom}_{D^b(A^!\text{-gmod})}(P_j^!\langle n \rangle, \Delta_i^![k]) = 0 \quad \text{sauf si } k = 0 \text{ et } j \preceq^{\text{op}} i.$$

En appliquant  $\kappa^{-1}$ , on transforme cette condition en la version équivalente suivante :

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A\text{-gmod})}(L_j, \nabla_i \langle n \rangle [k - n]) = 0 \quad \text{sauf si } k = 0 \text{ et } j \succeq i.$$

Le fait que cet espace est nul si  $k \neq 0$  découle du fait que  $A$  est quasi-héréditairement de Koszul. Si  $k = 0$  et  $j \not\succeq i$ , alors  $L_j$  appartient à  $A\text{-gmod}_T$ , où  $T$  est l'idéal  $I \setminus \{k \in I \mid k \succ i\}$ , dans lequel  $i$  est maximal. L'annulation voulue découle alors du fait que (par hypothèse)  $\nabla_i$  est l'enveloppe injective de  $L_i$  dans  $A\text{-gmod}_T$ , puisque le foncteur naturel

$$D^b(A\text{-gmod}_T) \rightarrow D^b(A\text{-gmod})$$

est pleinement fidèle (voir [R3, Proposition 7.9(1)]).

Nous avons établi que  $\Delta_i^! \in A^1\text{-gmod}_{\{\preceq^{\mathrm{op}} i\}}$ . Pour montrer que, pour tout idéal  $T$  (pour  $\preceq^{\mathrm{op}}$ ) dans lequel  $i$  est maximal,  $\Delta_i^!$  est la couverture projective de  $L_i^!$  dans  $A^1\text{-gmod}_T$ , il suffit de montrer que pour tout  $j \in I$  on a

$$\mathrm{Hom}_{A^1\text{-gmod}}(\Delta_i^!, L_j^! \langle n \rangle) \cong \begin{cases} \mathbb{k} & \text{si } j = i \text{ et } n = 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et que si  $j \not\succeq i$  on a

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A^1\text{-gmod})}(\Delta_i^!, L_j^! \langle n \rangle [1]) = 0.$$

En appliquant  $\kappa^{-1}$ , on se ramène à des arguments similaires à ceux utilisés ci-dessus.

Soit  $K_i^!$  le noyau de la surjection  $\Delta_i^! \rightarrow L_i^!$ . On veut montrer que  $K_i^!$  appartient à  $A^1\text{-gmod}_{\{\prec^{\mathrm{op}} i\}}$ , c'est-à-dire que  $\mathrm{Hom}(P_j^!, K_i^! \langle n \rangle) = 0$  si  $i \not\succeq j$ . L'objet  $\kappa^{-1}(K_i^!)$  s'identifie au décalage par  $[-1]$  du conoyau de l'injection  $\nabla_i \hookrightarrow J_i$ . Ce dernier objet admet une filtration costandard, dans laquelle les objets  $\nabla_k \langle m \rangle$  qui interviennent vérifient  $k \succ i$ . On peut en déduire que  $\mathrm{Hom}(L_j, \kappa^{-1}(K_i^! \langle n \rangle [k])) = 0$  si  $j \not\succeq i$ , et ainsi que  $K_i^! \in A^1\text{-gmod}_{\{\prec^{\mathrm{op}} i\}}$ , comme souhaité. On a donc vérifié les axiomes (2) et (3) pour les objets  $\Delta_i^!$ .

Construisons maintenant les objets  $\nabla_i^!$ . Puisque  $A^1$  est de dimension finie, tout module simple  $L_i^!$  admet une enveloppe injective  $J_i^!$ . Si  $T \subset I$  est un idéal (pour  $\preceq^{\mathrm{op}}$ ) dans lequel  $i$  est maximal, notons  $\nabla_T^!$  le plus grand sous-objet de  $J_i^!$  qui appartient à  $A^1\text{-gmod}_T$ . Alors  $\nabla_T^!$  est l'enveloppe injective de  $L_i^!$  dans  $A^1\text{-gmod}_T$ . Nous affirmons que cet objet ne dépend pas de  $T$ , c'est-à-dire que si  $\{\preceq^{\mathrm{op}} i\} := \{k \in I \mid k \preceq^{\mathrm{op}} i\}$  alors l'inclusion  $\nabla_{i, \{\preceq^{\mathrm{op}} i\}}^! \hookrightarrow \nabla_{i, T}^!$  est une égalité. Nous procéderons par récurrence descendante sur le cardinal de  $T$ . Pour cela choisissons  $j \in T$  maximal et différent de  $i$ , et posons  $T' := T \setminus \{j\}$ . Si  $\nabla_{i, T'}^!$  admet  $L_j \langle n \rangle$  comme facteur de composition pour un  $n \in \mathbb{Z}$ , d'après les propriétés des objets standards (démontrées ci-dessus) on doit avoir

$$\mathrm{Hom}_{A\text{-gmod}}(\Delta_j^! \langle n \rangle, \nabla_{i, T}^!) \neq 0.$$

Par définition de  $\nabla_{i, T}^!$ , cet espace s'identifie à  $\mathrm{Hom}_{A\text{-gmod}}(\Delta_j^! \langle n \rangle, J_i^!)$ , et donc  $L_i^!$  est un facteur de composition de  $\Delta_j^! \langle n \rangle$ . Ceci implique que  $i \preceq^{\mathrm{op}} j$ , ce qui est absurde puisque  $i$  est maximal dans  $T$ .

Au vu de cette propriété, on peut donc poser  $\nabla_i^! := \nabla_{i, \{\preceq^{\mathrm{op}} i\}}^!$ , et cet objet vérifie l'axiome (2). Il vérifie également l'axiome (3), puisque pour  $n \in \mathbb{Z}$  on a

$$[\nabla_i^! : L_i^! \langle n \rangle] = \dim \mathrm{Hom}_{A^1\text{-gmod}}(\Delta_i^! \langle n \rangle, \nabla_i^!) = [\Delta_i^! \langle n \rangle : L_i^!] = \delta_{n, 0}.$$

On considère finalement l'axiome (4). L'axiome (3) implique déjà que

$$\underline{\mathrm{Ext}}^1(\Delta_i^!, \nabla_j^!) = 0$$

pour tous  $i, j \in I$  (voir par exemple la preuve de [R3, Lemma 7.4]). On en déduit plus généralement que si  $M$  est un  $A^!$ -module gradué admettant une filtration par des objets  $\Delta_j^! \langle n \rangle$ , alors  $\underline{\text{Ext}}^1(M, \nabla_j^!) = 0$ . Soit  $M_i^!$  le noyau de l'unique morphisme non nul  $P_i^! \rightarrow \Delta_i^!$  (qui est surjectif puisque  $L_i^!$  est la tête de  $\Delta_i^!$ ). Pour montrer que  $\underline{\text{Ext}}^2(\Delta_i^!, \nabla_j^!) = 0$ , il suffit de montrer que  $\underline{\text{Ext}}^1(M^!, \nabla_j^!) = 0$ , et on se ramène donc à montrer que  $M^!$  (ou, de façon équivalente,  $P_i^!$ ) possède une filtration par des objets  $\Delta_j^! \langle n \rangle$ , c'est-à-dire appartient à  $\langle \Delta_j^! \langle n \rangle : j \in I, n \in \mathbb{Z} \rangle_{\text{ext}}$ . Via  $\kappa^{-1}$ , cette condition équivaut à dire que  $L_i$  appartient à  $\langle \nabla_j \langle k \rangle [-k] : j \in I, k \in \mathbb{Z} \rangle_{\text{ext}}$ . Cette dernière propriété découle du Lemme 3.6 et de notre hypothèse sur  $A$ .

Pour conclure, il reste maintenant à montrer que  $A^!$  est quasi-héréditairement de Koszul, c'est-à-dire que

$$\text{Hom}_{D^b(A^!-\text{gmod})}(\Delta_i^!, L_j^! \langle n \rangle [k]) = 0 = \text{Hom}_{D^b(A^!-\text{gmod})}(L_i^!, \nabla_j^! \langle n \rangle [k])$$

si  $n \neq -k$ . En appliquant  $\kappa^{-1}$ , on voit que la première égalité revient à dire que  $\text{Hom}_{D^b(A-\text{gmod})}(\nabla_i, J_j \langle -n \rangle [k+n]) = 0$  si  $n \neq -k$ , ce qui est clair. Pour la deuxième condition, en appliquant l'énoncé dual du Lemme 3.6, on voit qu'on doit démontrer que  $L_i^!$  appartient à  $\langle \Delta_j^! \langle -m \rangle [m] : j \in I, m \in \mathbb{Z} \rangle_{\text{ext}}$ , ce qui se traduit (en appliquant  $\kappa^{-1}$ ) par la condition que  $J_i$  appartient à  $\langle \nabla_j \langle m \rangle : j \in I, m \in \mathbb{Z} \rangle_{\text{ext}}$ , c'est-à-dire que  $J_i$  admet une filtration costandard. Cette dernière propriété est connue, comme rappelé ci-dessus.  $\square$

*Exemple 3.7.* Soit  $R$  comme au §2.3. Considérons son quotient  $R/(\alpha\beta)$ , et posons

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \nabla_1 = L_1 = \mathbb{k} \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{array} 0 \\ \Delta_2 &= P_2 = \mathbb{k} \langle -1 \rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{\text{id}} \end{array} \mathbb{k} \quad \nabla_2 = J_2 = \mathbb{k} \langle 1 \rangle \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{id}} \\ \xleftarrow{0} \end{array} \mathbb{k} \end{aligned}$$

On peut montrer que ces objets vérifient les axiomes de la définition d'un anneau quasi-héréditaire (par rapport à l'ordre usuel  $1 \prec 2$ ). Le seul point délicat de cette preuve est la démonstration que  $\underline{\text{Ext}}^2(\Delta_1, \nabla_1) = 0$ ; pour cela on peut utiliser la première résolution projective de (2.4).

Les anneaux de Koszul autres que  $R/(\alpha\beta)$  et  $R^*/(\alpha^*\beta^*)$  considérés au §2.3 ne sont quasi-héréditaires pour aucun ordre sur  $\{1, 2\}$ .

**3.3. Un exemple fondamental : la dualité de Koszul de Beilinson–Ginzburg–Soergel.** Soit  $\mathfrak{g}$  une algèbre de Lie complexe semi-simple, dont on fixe une sous-algèbre de Borel et une sous-algèbre de Cartan, et soit  $\mathcal{O}$  la catégorie de  $\mathfrak{g}$ -modules définie dans [BGG]. Soit  $\mathcal{O}_0 \subset \mathcal{O}$  son *bloc principal*, c'est-à-dire la sous-catégorie de Serre engendrée par les modules irréductibles dont le plus haut poids est de la forme  $w\rho - \rho$  pour  $w$  dans le groupe de Weyl  $W$ , où  $\rho$  est la demi-somme des racines positives. Par définition, les objets simples dans  $\mathcal{O}_0$  sont paramétrés par  $W$ . Il découle par ailleurs des résultats de [BGG] que tout objet de  $\mathcal{O}_0$  est de longueur finie, et que cette catégorie a assez d'objets projectifs. Soit  $L_w$ , resp.  $P_w$ , le module simple correspondant à  $w \in W$ , resp. sa couverture projective. Des résultats généraux d'algèbre homologique impliquent que

$$(3.3) \quad \mathcal{O}_0 \cong A\text{-mod}, \quad \text{où } A = \text{End} \left( \bigoplus_{w \in W} P_w \right)^{\text{op}}.$$

Ici, l'anneau  $A$  est une  $\mathbb{C}$ -algèbre de dimension finie.



Cet anneau est en fait quasi-héréditaire : sous l'équivalence (3.3), les  $\mathfrak{g}$ -modules de Verma deviennent les  $A$ -modules standards, et leurs duaux deviennent les  $A$ -modules costandards. Par contre,  $A$  n'a pas de graduation évidente.

Les résultats principaux de [BGS] affirment que cet anneau possède les propriétés remarquables suivantes :

- (1) L'anneau  $A$  admet une graduation positive  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$ , où  $A_0$  est un anneau semi-simple. Ses modules (co)standards admettent des graduations ; ainsi,  $A$  est un anneau quasi-héréditaire gradué.
- (2) L'anneau gradué quasi-héréditaire  $A$  est quasi-héréditairement de Koszul, et donc de Koszul.
- (3) L'anneau gradué  $A$  est isomorphe à son dual de Koszul.

La catégorie  $\mathcal{O}_0^{\text{gr}} = A\text{-gmod}$  des modules gradués de type fini sur  $A$  peut être considérée comme une “version graduée” de  $\mathcal{O}_0$ . Le Théorème 3.5 affirme donc l'existence d'une équivalence de catégories triangulées

$$\kappa : D^b(\mathcal{O}_0^{\text{gr}}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{O}_0^{\text{gr}})$$

qui vérifie  $\kappa(M\langle 1 \rangle) \cong \kappa(M)\langle -1 \rangle[1]$ . Les objets simples dans  $\mathcal{O}_0^{\text{gr}}$  sont paramétrés par  $(W, \preceq)$ , où  $\preceq$  désigne l'opposé de l'ordre de Bruhat. Le Théorème 3.5 donne un paramétrage des objets simples du côté dual par  $(W, \preceq^{\text{op}})$  ; mais dans ce cas il est plus pratique d'utiliser le paramétrage “intrinsèque” des objets dans  $\mathcal{O}_0$ . D'après [BGS, Theorem 1.1.3], le foncteur  $\kappa$  vérifie

$$\kappa(L_w^{\text{gr}}) \cong P_{w^{-1}w_0}^{\text{gr}}, \quad \kappa(\nabla_w^{\text{gr}}) \cong \Delta_{w^{-1}w_0}^{\text{gr}}, \quad \kappa(J_w^{\text{gr}}) \cong L_{w^{-1}w_0}^{\text{gr}}$$

pour tout  $w \in W$ , où  $w_0$  est l'élément le plus long de  $W$ . (Ici, pour tout  $y \in W$ ,  $L_y^{\text{gr}}$  désigne le module simple gradué concentré en degré 0 correspondant à  $L_y$ ,  $P_y^{\text{gr}}$  sa couverture projective,  $J_y^{\text{gr}}$  son enveloppe injective,  $\Delta_y^{\text{gr}}$  l'unique “relevé” de  $\Delta_y$  admettant une surjection vers  $L_y^{\text{gr}}$ , et  $\nabla_y^{\text{gr}}$  l'unique “relevé” de  $\nabla_y$  admettant  $L_y^{\text{gr}}$  comme sous-objet.)

*Exemple 3.8.* Dans le cas où  $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ , l'anneau  $A$  est isomorphe à l'anneau  $R/(\alpha\beta)$  étudié au §2.3 et dans l'Exemple 3.7. En particulier, on a vu explicitement que cet anneau est auto-dual au sens de Koszul.

**3.4. Catégories graduées de plus haut poids.** Afin de pouvoir adapter les notions du §3.2 dans un cadre plus général, nous allons maintenant introduire une version “catégorique” de quasi-hérédité. Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie abélienne  $\mathbb{k}$ -linéaire qui est de longueur finie (c'est-à-dire telle que tout objet est de longueur finie). Supposons que  $\mathcal{A}$  est munie d'un automorphisme  $\langle 1 \rangle : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ , qu'on appellera *décalage interne*. On peut alors définir Hom et Ext comme dans (2.1).

Soit  $\text{Irr}_0(\mathcal{A})$  un ensemble de représentants des objets simples à isomorphisme et à décalage interne près. Soit  $I$  un ensemble muni d'une bijection fixée

$$I \xrightarrow{\sim} \text{Irr}_0(\mathcal{A}),$$

qu'on notera  $i \mapsto L_i$ , ainsi que d'un ordre partiel  $\preceq$  tel que pour tout  $i \in I$ , l'ensemble  $\{j \in I : j \preceq i\}$  est fini. Pour tout idéal  $T \subset I$ , notons  $\mathcal{A}_T$  la sous-catégorie pleine de  $\mathcal{A}$  dont les objets sont ceux dont tous les facteurs de composition sont de la forme  $L_i\langle n \rangle$  avec  $i \in T$  et  $n \in \mathbb{Z}$ .

En s'inspirant de [BGS, §3.2], on dira que la catégorie  $\mathcal{A}$  (munie des structures ci-dessus) est *graduée de plus haut poids* s'il existe des objets  $\Delta_i, \nabla_i \in \mathcal{A}_{\{\preceq i\}}$  et des morphismes  $\Delta_i \rightarrow L_i \rightarrow \nabla_i$  qui vérifient les conditions suivantes :

- (1) Pour tout  $i \in I$ , on a  $\underline{\text{End}}(L_i) \cong \mathbb{k}$ .
- (2) Pour tout  $i \in I$ , et tout idéal  $T \subset I$  dans lequel  $i$  est maximal,  $\Delta_i \rightarrow L_i$  est la couverture projective de  $L_i$  dans  $\mathcal{A}_T$ , et  $L_i \rightarrow \nabla_i$  est son enveloppe injective.
- (3) Le noyau du morphisme  $\Delta_i \rightarrow L_i$  et le conoyau du morphisme  $L_i \rightarrow \nabla_i$  appartiennent à  $\mathcal{A}_{\prec_i}$ .
- (4) Pour tous  $i, j \in I$ , on a  $\underline{\text{Ext}}^2(\Delta_i, \nabla_j) = 0$ .

Comme au §3.2, les objets de la forme  $\Delta_i\langle n \rangle$ , resp.  $\nabla_i\langle n \rangle$ , seront dits *standards*, resp. *costandards*. Ils vérifient automatiquement

$$(3.4) \quad \text{Hom}_{D^b(\mathcal{A})}(\Delta_i, \nabla_j\langle n \rangle[k]) = \begin{cases} \mathbb{k} & \text{si } i = j \text{ et } n = k = 0; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La catégorie  $\mathcal{A}$  sera dite *de type fini* si de plus elle vérifie la condition suivante :

- (5) L'ensemble  $I \cong \text{Irr}_0(\mathcal{A})$  est fini.

D'après [BGS, Theorem 3.2.1], si  $\mathcal{A}$  est une catégorie graduée de plus haut poids et de type fini, alors il y a assez de projectifs et d'injectifs dans  $\mathcal{A}$ . De plus, tout objet projectif (resp. injectif) admet une filtration dont les sous-quotients sont des objets standards (resp. costandards). Dans ce cas, on note

$$P_i \twoheadrightarrow L_i \quad \text{et} \quad L_i \hookrightarrow J_i$$

la couverture projective et l'enveloppe injective de  $L_i$ , respectivement.

*Remarque 3.9.* La définition d'une catégorie de plus haut poids (non graduée) est similaire, en omettant le foncteur  $\langle 1 \rangle$  et en remplaçant  $\underline{\text{End}}$  par  $\text{End}$  et  $\underline{\text{Ext}}$  par  $\text{Ext}$ . Les mêmes propriétés restent valables dans ce cadre, avec les adaptations évidentes.

La catégorie  $\mathcal{A}$  sera dite *positivement graduée*, resp. *strictement positivement graduée*, si elle vérifie

$$(3.5) \quad \text{Ext}^1(L_i, L_j\langle n \rangle) = 0 \quad \text{pour tout } n > 0, \text{ resp. pour tout } n \geq 0.$$

Si  $A = \bigoplus_{n \geq 0} A_n$  est un anneau positivement gradué avec  $A_0$  de dimension finie, et si on choisit pour  $\text{Irr}_0(\mathcal{A})$  des représentants concentrés en degré 0, alors  $A\text{-gmod}$  est positivement graduée au sens de (3.5). Elle est strictement positivement graduée si et seulement si  $A_0$  est un anneau semi-simple.

*Remarque 3.10.* Il est à noter que la propriété d'être positivement graduée pour une catégorie abélienne  $\mathcal{A}$  comme ci-dessus dépend du choix des objets  $L_i$  : si on remplace un  $L_i$  par un décalage interne, cela peut changer les propriétés de positivité de la catégorie  $\mathcal{A}$ . Ce phénomène correspond au fait qu'un anneau positivement gradué peut être Morita-équivalent à un anneau qui ne l'est pas.

*Exemple 3.11.* Soit  $X$  une variété algébrique complexe, munie d'une stratification algébrique finie  $\mathcal{S}$  (au sens de [CG, Définition 3.2.23]) dont toute strate est un espace affine. Comme expliqué dans [BGS, §3.3], la catégorie  $\text{Perv}_{\mathcal{S}}(X, \mathbb{k})$  des faisceaux pervers sur  $X$  à coefficients dans  $\mathbb{k}$  et constructibles par rapport à  $\mathcal{S}$  est une catégorie de plus haut poids (non graduée) et de type fini. L'ensemble partiellement ordonné  $(I, \preceq)$  qui gouverne cette catégorie est l'ensemble des strates, ordonnées par les inclusions de leurs adhérences. L'objet standard, resp. costandard, associé à une strate  $S$  est l'extension par zéro  $j_{S!}\mathbb{k}[\dim S]$ , resp. l'image directe  $j_{S*}\mathbb{k}[\dim S]$  du faisceau pervers constant (où  $j_S : S \hookrightarrow X$  est l'inclusion).

Si  $\mathbb{k} = \overline{\mathbb{Q}_\ell}$ , et pour certains choix de  $X$  (par exemple une variété de drapeaux, éventuellement parabolique, d'un groupe algébrique réductif connexe), les constructions de [BGS, §4] (qui exploitent la théorie des faisceaux étales  $\ell$ -adiques de Deligne) permettent de définir une catégorie  $\text{Perv}_{\mathcal{F}}^{\text{mix}}(X, \mathbb{k})$ , qui est graduée de plus haut poids et strictement positivement graduée, et qui peut être considérée comme une “version graduée” de la catégorie  $\text{Perv}_{\mathcal{F}}(X, \mathbb{k})$ .

Dans [AR1], les auteurs ont proposé une nouvelle démarche qui mène à la même catégorie que dans [BGS, §4]. Cette nouvelle approche a présagé une généralisation au cas où  $\mathbb{k}$  est de caractéristique positive, qui a été développée dans [AR2]. Pour  $\mathbb{k}$  quelconque, la catégorie  $\text{Perv}_{\mathcal{F}}^{\text{mix}}(X, \mathbb{k})$  comme définie dans [AR2] est graduée de plus haut poids, mais pas nécessairement positivement graduée.

**3.5. Catégories quasi-héréditairement de Koszul.** Une catégorie abélienne graduée de plus haut poids est dite *quasi-héréditairement de Koszul* si elle vérifie la condition suivante (cf. (3.2)) :

$$\text{Ext}^k(\Delta_i, L_j\langle n \rangle) = \text{Ext}^k(L_i, \nabla_j\langle n \rangle) = 0 \quad \text{si } n \neq -k.$$

D'après [AR3, Proposition 2.13], si  $\mathcal{A}$  est quasi-héréditairement de Koszul, alors elle est de Koszul au sens où elle vérifie

$$\text{Ext}_{\mathcal{A}}^k(L_i, L_j\langle n \rangle) = 0 \quad \text{si } n \neq -k.$$

(En particulier,  $\mathcal{A}$  est alors strictement positivement graduée.)

Soient  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux catégories abéliennes graduées de plus haut poids, de type fini, et quasi-héréditairement de Koszul. Soient  $(I_{\mathcal{A}}, \preceq_{\mathcal{A}})$  et  $(I_{\mathcal{B}}, \preceq_{\mathcal{B}})$  les ensembles partiellement ordonnés qui paramètrent leurs objets simples respectifs. Une *dualité de Koszul “classique”* entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  est une équivalence de catégories triangulées

$$\kappa : D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{B})$$

qui vérifie

$$\kappa(X\langle 1 \rangle) \cong \kappa(X)\langle -1 \rangle[1]$$

pour tout  $X$  dans  $D^b(\mathcal{A})$ , et telle qu'il existe un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés  $\varphi : (I_{\mathcal{A}}, \preceq_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\sim} (I_{\mathcal{B}}, \preceq_{\mathcal{B}}^{\text{op}})$  tel que

$$\kappa(L_i^{\mathcal{A}}) \cong P_{\varphi(i)}^{\mathcal{B}}, \quad \kappa(\nabla_i^{\mathcal{A}}) \cong \Delta_{\varphi(i)}^{\mathcal{B}}, \quad \kappa(I_i^{\mathcal{A}}) \cong L_{\varphi(i)}^{\mathcal{B}}$$

pour tout  $i \in I_{\mathcal{A}}$ .

Un analogue du Théorème 3.5 affirme que si  $\mathcal{A}$  est graduée de plus haut poids, de type fini, et quasi-héréditairement de Koszul, alors il existe une catégorie  $\mathcal{B}$  possédant les mêmes propriétés et une dualité de Koszul  $D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{B})$ . En fait, on a alors  $\mathcal{A} \cong A\text{-gmod}$  pour une certaine  $\mathbb{k}$ -algèbre  $A$  comme dans le Théorème 3.5, et on peut prendre  $\mathcal{B} = A^1\text{-gmod}$ , où  $A^1 = \underline{\text{Ext}}^\bullet(L, L)^{\text{op}}$ .

*Exemple 3.12* (Beilinson–Ginzburg–Soergel). Soient  $G$  un groupe réductif complexe et  $B \subset G$  un sous-groupe de Borel. Notons  $\mathcal{X} := G/B$  sa variété de drapeaux. Notons  $\text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  la catégorie des faisceaux pervers sur  $\mathcal{X}$ , à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , et constructible par rapport à la stratification dont les strates sont les orbites de  $B$  sur  $\mathcal{X}$ . Ces derniers étant des espaces affines, on peut faire appel à l'Exemple 3.11 et ainsi conclure que la catégorie  $\text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  est de plus haut poids.

Dans ce cadre, Beilinson–Ginzburg–Soergel ont établi dans [BGS, §4] une version géométrique de l'exemple du §3.3. Soit  $W$  le groupe de Weyl de  $G$ , et pour  $w \in W$ , notons  $\mathcal{L}_w^{\text{mix}} \in \text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  le faisceau pervers simple de poids 0 dont le support

est la variété de Schubert correspondant à  $w$ . Soient  $\mathcal{P}_w^{\text{mix}}$ , resp.  $\mathcal{S}_w^{\text{mix}}$ , sa couverture projective, resp. son enveloppe injective, dans  $\text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ . Les résultats de [BGS] impliquent qu'il existe une équivalence de catégories

$$\kappa : D^b \text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \rightarrow D^b \text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$$

qui vérifie

$$\kappa(\mathcal{F}\langle 1 \rangle) \cong \kappa(\mathcal{F})\langle -1 \rangle[1]$$

pour tout  $\mathcal{F}$  dans  $D^b \text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ . Par rapport au paramétrage "intrinsèque" des deux côtés, ce foncteur vérifie

$$\kappa(\mathcal{L}_w^{\text{mix}}) \cong \mathcal{P}_{w^{-1}w_0}^{\text{mix}}, \quad \kappa(\nabla_w^{\text{mix}}) \cong \Delta_{w^{-1}w_0}^{\text{mix}}, \quad \kappa(\mathcal{S}_w^{\text{mix}}) \cong \mathcal{L}_{w^{-1}w_0}^{\text{mix}}$$

pour tout  $w \in W$ , où  $w_0$  est l'élément le plus long de  $W$ .

#### 4. OBJETS BASCULANTS ET DUALITÉ DE RINGEL

**4.1. Objets basculants.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie de plus haut poids (pas nécessairement de type fini à ce stade). Un objet  $X \in \mathcal{A}$  est dit *basculant* s'il existe une suite de sous-objets  $0 = X_0 \subset X_1 \subset \dots \subset X_n = X$  telle que tout sous-quotient  $X_i/X_{i-1}$  est standard, ainsi qu'une autre suite  $0 = X'_0 \subset X'_1 \subset \dots \subset X'_m = X$  telle que tout sous-quotient  $X'_j/X'_{j-1}$  est costandard.

Le résultat suivant est dû à Ringel [Rin]. Pour une preuve dans le langage de cet article, on pourra consulter [R3, §7].

**Théorème 4.1** (Classification des objets basculants). *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie de plus haut poids. Pour tout  $i \in I$ , il existe un objet basculant indécomposable  $T_i$ , unique à isomorphisme près, tel que  $T_i \in \mathcal{A}_{\leq i}$  et  $[T_i : L_i] = 1$ . De plus, tout objet basculant indécomposable dans  $\mathcal{A}$  est isomorphe à  $T_i$  pour un unique  $i \in I$ .*

La classification dans le cas gradué est très similaire. En utilisant (3.4), on voit que tous les Ext supérieurs entre objets basculants s'annulent. De ce point de vue, le comportement des objets basculants ressemble à celui des objets projectifs (ou injectifs).

La *dualité de Ringel* transforme cette remarque en une équivalence de catégories. Supposons désormais que  $\mathcal{A}$  est de type fini. Il y a donc assez de projectifs (et d'injectifs) dans  $\mathcal{A}$ . Soit  $\mathcal{B}$  une autre catégorie de plus haut poids et de type fini. Soient  $(I_{\mathcal{A}}, \leq_{\mathcal{A}})$  et  $(I_{\mathcal{B}}, \leq_{\mathcal{B}})$  les ensembles partiellement ordonnés qui paramètrent leurs objets simples respectifs. Une *dualité de Ringel* entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  est un foncteur triangulé

$$\rho : D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{B})$$

qui vérifie

$$\rho(T_i^{\mathcal{A}}) \cong P_{\varphi(i)}^{\mathcal{B}}, \quad \rho(\Delta_i^{\mathcal{A}}) \cong \nabla_{\varphi(i)}^{\mathcal{B}}, \quad \rho(I_i^{\mathcal{A}}) \cong T_{\varphi(i)}^{\mathcal{B}}$$

pour tout  $i \in I_{\mathcal{A}}$ , pour un isomorphisme d'ensembles partiellement ordonnés

$$\varphi : (I_{\mathcal{A}}, \leq_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\sim} (I_{\mathcal{B}}, \leq_{\mathcal{B}}^{\text{op}}).$$

Dans le cas gradué, on impose de plus que  $\rho$  commute au décalage interne.

Étant donnée  $\mathcal{A}$ , une telle dualité existe toujours, comme affirmé dans l'énoncé suivant.

**Théorème 4.2** (Ringel [Rin]). *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie de plus haut poids et de type fini. Il existe une catégorie de plus haut poids et de type fini  $\mathcal{B}$  et une dualité de Ringel  $\rho : D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{B})$ .*

La preuve dans [Rin] est écrite dans le langage des anneaux quasi-héréditaires. Concrètement, si  $\mathcal{A} \cong A\text{-mod}$  pour un anneau quasi-héréditaire  $A$ , on peut prendre  $\mathcal{B} = A^\sharp\text{-mod}$ , où

$$(4.1) \quad A^\sharp = \text{End}\left(\bigoplus_{i \in I} T_i\right)^{\text{op}},$$

puis poser  $\rho := R\text{Hom}(\bigoplus_i T_i, -)$ . Le contenu principal du Théorème 4.2 est que l'anneau  $A^\sharp$  est quasi-héréditaire.

Pour la version graduée du Théorème 4.2, on définit  $A^\sharp$  et  $\rho$  en termes de End et Hom. Notons que dans ce cas,  $A^\sharp$  n'est pas nécessairement positivement graduée.

*Exemple 4.3.* Nous avons vu dans l'Exemple 3.7 que l'anneau  $R/(\alpha\beta)$  qui a été introduit au §2.3 est quasi-héréditaire. Les modules basculants indécomposables pour cet anneau sont :

$$T_1 = L_1 = \mathbb{k} \begin{array}{c} \xrightarrow{0} \\ \xleftarrow{0} \end{array} 0, \quad T_2 = P_1\langle 1 \rangle = I_1\langle -1 \rangle = (\mathbb{k}\langle -1 \rangle \oplus \mathbb{k}\langle 1 \rangle) \begin{array}{c} \xrightarrow{[0 \ 1]} \\ \xleftarrow{[1 \ 0]} \end{array} \mathbb{k}.$$

Il existe des morphismes non nuls  $\alpha^\sharp : T_1 \rightarrow T_2\langle 1 \rangle$  et  $\beta^\sharp : T_2 \rightarrow T_1\langle 1 \rangle$  qui vérifient  $\beta^\sharp \circ \alpha^\sharp = 0$ . On peut en déduire un isomorphisme  $(R/(\alpha\beta))^\sharp \cong R/(\alpha\beta)$ . Autrement dit, l'anneau  $R/(\alpha\beta)$  est auto-dual au sens de Ringel.

*Exemple 4.4* (Beilinson–Bezrukavnikov–Mirković). Soient  $G$ ,  $B$ , et  $\mathcal{X}$  comme dans l'Exemple 3.12. On a déjà vu que la catégorie  $\text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}, \mathbb{k})$  est de plus haut poids et de type fini, et on peut se demander quel est son dual au sens de Ringel. Un résultat remarquable de Beilinson–Bezrukavnikov–Mirković [BBM] affirme que cette catégorie est auto-duale au sens de Ringel. (Dans le cas particulier de  $G = \text{SL}_2$ , on peut déduire ce résultat de l'Exemple 4.3.) En fait, les auteurs donnent une construction “faisceutique” d'une équivalence de catégories

$$\rho : D^b \text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}, \mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} D^b \text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}, \mathbb{k})$$

qui vérifie

$$\rho(\mathcal{T}_w) \cong \mathcal{P}_{ww_0}, \quad \rho(\nabla_w) \cong \Delta_{ww_0}, \quad \rho(\mathcal{I}_w) \cong \mathcal{T}_{ww_0}$$

pour tout  $w \in W$ . Ici nous avons suivi la convention du §3.3 et utilisé le paramétrage intrinsèque des deux côtés.

**4.2. Composition des dualités de Koszul et de Ringel.** Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie graduée de plus haut poids, de type fini, et quasi-héréditairement de Koszul. Il existe alors une autre catégorie quasi-héréditairement de Koszul  $\mathcal{B}$  ainsi qu'une dualité de Koszul classique

$$\kappa : D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{B}).$$

Appliquons la version graduée et inversée du Théorème 4.2 à  $\mathcal{B}$  : il existe une catégorie de plus haut poids  $\mathcal{C}$  et une équivalence de catégories

$$\rho : D^b(\mathcal{C}) \rightarrow D^b(\mathcal{B})$$

qui envoie les objets basculants (resp. injectifs) sur des objets projectifs (resp. basculants). Le foncteur composé

$$\rho^{-1} \circ \kappa : D^b(\mathcal{A}) \rightarrow D^b(\mathcal{C})$$

à la propriété qu'il envoie  $L_i^{\mathcal{A}}$  sur  $T_{\varphi(i)}^{\mathcal{C}}$  pour une bijection convenable  $\varphi : I_{\mathcal{A}} \xrightarrow{\sim} I_{\mathcal{C}}$ .

En général, il n'est pas possible de prendre la composition des Théorèmes 3.5 et 4.2 (ou des foncteurs  $\kappa$  et  $\rho^{-1}$ ) dans l'autre sens : même si  $\mathcal{A}$  est quasi-héréditairement de Koszul, son dual au sens de Ringel n'est pas nécessairement de Koszul. Si celui-ci est effectivement quasi-héréditairement de Koszul, on dit (d'après [Ma]) que  $\mathcal{A}$  est *équilibrée*. Le résultat principal de [Ma] affirme que si  $\mathcal{A}$  est équilibrée, les dualités de Koszul et de Ringel commutent.

L'énoncé suivant est un résumé des remarques précédentes.

**Théorème 4.5** (Dualité de Koszul, 3ème version). *Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie de plus haut poids, de type fini, et quasi-héréditairement de Koszul, dont les objets simples sont paramétrés par  $(I_{\mathcal{A}}, \preceq_{\mathcal{A}})$ .*

*Alors il existe une catégorie graduée de plus haut poids  $\mathcal{B}$  (par rapport à un ensemble  $(I_{\mathcal{B}}, \preceq_{\mathcal{B}})$ ), un isomorphisme  $\varphi : (I_{\mathcal{A}}, \preceq_{\mathcal{A}}) \xrightarrow{\sim} (I_{\mathcal{B}}, \preceq_{\mathcal{B}})$ , et une équivalence de catégories triangulées*

$$\kappa : D^b(\mathcal{A}) \xrightarrow{\sim} D^b(\mathcal{B})$$

qui vérifie

$$\kappa(M\langle 1 \rangle) \cong \kappa(M)\langle -1 \rangle[1]$$

pour tout  $M$  dans  $D^b(\mathcal{A})$ , et telle que  $\kappa(L_i^{\mathcal{A}}) \cong T_{\varphi(i)}^{\mathcal{B}}$  pour tout  $i \in I_{\mathcal{A}}$ .

Si  $\mathcal{A}$  est équilibrée, alors  $\kappa$  vérifie également  $\kappa(T_i^{\mathcal{A}}) \cong L_{\varphi(i)}^{\mathcal{B}}$  pour tout  $i \in I_{\mathcal{A}}$ .

**4.3. Travaux de Bezrukavnikov–Yun.** Soient  $G$ ,  $B$ , et  $\mathcal{X}$  comme dans les Exemples 3.12 et 4.4. Les constructions de l'Exemple 4.4 se généralisent au cadre des faisceaux pervers mixtes (voir [AR1]), de sorte que le dual de Ringel de la catégorie  $\text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  est bien quasi-héréditairement de Koszul. Cette catégorie est donc équilibrée au sens de [Ma], et le Théorème 4.5 nous permet d'affirmer qu'il existe une équivalence de catégories triangulées

$$\kappa : D^b \text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} D^b \text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$$

qui vérifie

$$\kappa(\mathcal{F}\langle 1 \rangle) \cong \kappa(\mathcal{F})\langle -1 \rangle[1]$$

pour tout  $\mathcal{F}$  dans  $D^b \text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ , et telle que

$$\kappa(\mathcal{L}_w^{\text{mix}}) \cong \mathcal{T}_{w^{-1}}^{\text{mix}}, \quad \kappa(\mathcal{T}_w^{\text{mix}}) \cong \mathcal{L}_{w^{-1}}^{\text{mix}}$$

pour tout  $w \in W$ . Il est à noter que ni les objets projectifs, ni les objets injectifs ne figurent dans cet énoncé. Prenant cette observation (suggérée plus tôt par Beilinson–Ginzburg dans [BG]) comme point de départ, Bezrukavnikov–Yun ont établi une vaste généralisation de cet énoncé.

Ils travaillent dans le contexte d'un groupe de Kac–Moody  $\mathcal{G}$ . (Il existe plusieurs versions des “groupes de Kac–Moody” dans la littérature. On renvoie à [RW1, §9] pour une discussion de la version que nous utilisons. En particulier, pour nous un groupe de Kac–Moody est déterminé par une “donnée radicielle de Kac–Moody” ; cette donnée est sous-entendue quand on considère  $\mathcal{G}$ . La dualité de Langlands pour les groupes de Kac–Moody est définie par l'involution évidente sur l'ensemble des données radicielles de Kac–Moody.) Par définition ce groupe possède un sous-groupe de Borel canonique  $\mathcal{B}$ , et on notera  $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathcal{G}} := \mathcal{G}/\mathcal{B}$  sa variété de drapeaux. Alors la décomposition de Bruhat fournit une stratification naturelle

$$(4.2) \quad \mathcal{X}_{\mathcal{G}} = \bigsqcup_{w \in \mathcal{W}} \mathcal{X}_{\mathcal{G}, w}$$

où  $\mathcal{W}$  est le groupe de Weyl du groupe de Kac–Moody correspondant (muni de sa structure naturelle de groupe de Coxeter), et où  $\mathcal{X}_{\mathcal{G},w} \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$  pour tout  $w \in \mathcal{W}$ .

Si  $\mathcal{G}$  est de dimension infinie, alors  $\mathcal{X}$  l’est aussi, et il y a un nombre infini de strates. Cependant, l’adhérence de toute strate est la réunion d’un nombre fini de strates, ce qui permet de définir la catégorie des complexes constructibles  $D_{\text{Br}}^{\text{b}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$  ainsi que la sous-catégorie des faisceaux pervers  $\text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}, \mathbb{C})$ . Cette dernière catégorie est encore une catégorie de plus haut poids : on peut donc parler des objets standards, costandards, ou basculants dans cette catégorie.

Par contre, quand  $\mathcal{G}$  est de dimension infinie, la catégorie  $\text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C})$  n’a en général pas assez d’objets projectifs ni d’objets injectifs. Les Théorèmes 3.5 et 4.2 n’ont donc pas de sens pour  $\text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C})$ , mais leur “composée”, le Théorème 4.5, admet une généralisation.

**Théorème 4.6** (Bezrukavnikov–Yun). *Soit  $\mathcal{G}$  un groupe de Kac–Moody, et soit  $\mathcal{G}^{\vee}$  son dual de Langlands. Il existe une équivalence de catégories triangulées*

$$\kappa : D^{\text{b}}\text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\sim} D^{\text{b}}\text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}^{\vee}}, \mathbb{C})$$

qui vérifie

$$\kappa(\mathcal{F}\langle 1 \rangle) \cong \kappa(\mathcal{F})\langle -1 \rangle[1]$$

pour tout  $\mathcal{F}$  dans  $D^{\text{b}}\text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C})$ , et telle que

$$\kappa(\mathcal{L}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}) \cong \mathcal{T}_{\mathcal{G}^{\vee},w-1}^{\text{mix}}, \quad \kappa(\mathcal{T}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}) \cong \mathcal{L}_{\mathcal{G}^{\vee},w-1}^{\text{mix}}$$

pour tout  $w \in \mathcal{W}$ , où on identifie les groupes de Weyl de  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}^{\vee}$  de la façon canonique.

Si on remplace  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}^{\vee}}$  par la variété de drapeaux “opposée”  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}^{\vee}}^{\text{op}} := \mathcal{B}^{\vee} \backslash \mathcal{G}^{\vee}$ , on obtient un foncteur  $\kappa'$  vérifiant

$$\kappa'(\mathcal{L}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}) \cong \mathcal{T}_{\mathcal{G}^{\vee},\text{op},w}^{\text{mix}}, \quad \kappa'(\mathcal{T}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}) \cong \mathcal{L}_{\mathcal{G}^{\vee},\text{op},w}^{\text{mix}}$$

pour tout  $w \in \mathcal{W}$ .

*Remarque 4.7.* (1) Dans [BY] les auteurs ne considèrent pas des catégories du type  $D^{\text{b}}\text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{C})$ , mais plutôt certaines catégories dont la définition fait intervenir *tous* les faisceaux pervers mixtes au sens de Deligne. La version énoncée au Théorème 4.6 peut être obtenue par des méthodes similaires (ou être vue comme un cas particulier du Théorème 7.4 ci-dessous).

(2) Sous l’hypothèse où  $\mathcal{G}$  est symétrisable, le Théorème 4.6 reste vrai si on remplace  $\mathcal{G}^{\vee}$  par  $\mathcal{G}$ . Ceci explique pourquoi la dualité de Langlands n’apparaissait pas dans l’énoncé considéré au début de ce paragraphe.

Pour les faisceaux pervers  $\text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  à coefficients dans un corps général  $\mathbb{k}$ , le Théorème 4.6 tel qu’énoncé ici n’est pas vrai : si  $\mathbb{k}$  est de caractéristique positive, les faisceaux pervers mixtes standards et simples ne vérifient pas (3.2) en général.

Cependant, il est possible d’énoncer une version du Théorème 4.6 qui est valable en caractéristique positive si on remplace les faisceaux pervers simples par de nouveaux objets : les *faisceaux à parité* introduits dans [JMW]. Dans le §5 nous considérons une variante de cette construction, à savoir le concept d’*objets à parité* dans une catégorie triangulée munie d’une suite quasi-exceptionnelle.

## Partie 2. Dualité de Koszul formelle

### 5. OBJETS À PARITÉ

Dans cette partie nous développons une théorie d'*objets à parité* dans le cadre des catégories triangulées munies d'une collection quasi-exceptionnelle satisfaisant certaines conditions techniques. Cette théorie s'inspire de la théorie des *complexes à parité* considérés par Juteau–Mautner–Williamson [JMW], et les preuves des propriétés de nos objets suivent étroitement celles de ces auteurs. Cependant, le cadre considéré est un petit peu différent (voir le §5.5 pour une comparaison précise).

**5.1. Collections quasi-exceptionnelles.** Considérons une catégorie triangulée  $\mathcal{D}$ . Si  $X$  et  $Y$  sont deux objets de  $\mathcal{D}$ , on notera

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(X, Y) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y[n]),$$

et on considèrera ce groupe abélien comme gradué avec la graduation naturelle.

Soit  $(I, \preceq)$  un ensemble partiellement ordonné. Suivant Bezrukavnikov [B1], une *collection quasi-exceptionnelle* paramétrée par  $(I, \preceq)$  est une famille  $(\nabla_i : i \in I)$  d'objets de  $\mathcal{D}$  paramétrée par  $I$  et vérifiant les conditions suivantes :

- (1) si  $i, j \in I$  et  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\nabla_i, \nabla_j) \neq 0$ , alors  $i \succeq j$  ;
- (2) si  $i \in I$  alors  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_i[n]) = 0$  pour  $n < 0$ , et  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_i)$  est une algèbre à division.

Étant donnée une telle collection exceptionnelle, une famille  $(\Delta_i : i \in I)$  d'objets de  $\mathcal{D}$  sera dite *duale* de  $(\nabla_i : i \in I)$  si elle vérifie

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\Delta_i, \nabla_j) = 0 \quad \text{pour tous } i \succ j$$

et si de plus les images de  $\Delta_i$  et  $\nabla_i$  dans le quotient de Verdier  $\mathcal{D}/\mathcal{D}_{\{< i\}}$  (où  $\mathcal{D}_{\{< i\}}$  est la sous-catégorie triangulée pleine de  $\mathcal{D}$  engendrée par les objets  $\nabla_j$  avec  $j \prec i$ ) sont isomorphes. D'après [B1, Lemma 2], une collection duale est unique (à isomorphismes près) si elle existe, elle forme une collection quasi-exceptionnelle paramétrée par  $(I, \preceq^{\mathrm{op}})$  où  $\preceq^{\mathrm{op}}$  est l'ordre opposé à  $\preceq$ , et enfin on a :

- (1)  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\Delta_i, \nabla_j) = 0$  pour tous  $i, j \in I$  avec  $i \neq j$  ;
- (2) un isomorphisme d'anneaux gradués  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\nabla_i, \nabla_i) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\Delta_i, \Delta_i)$  pour tout  $i \in I$ .

*Exemple 5.1.* Les exemples principaux de collections quasi-exceptionnelles que nous rencontrerons seront les suivants.

- (1) Supposons que  $\mathcal{D}$  est linéaire sur un corps  $\mathbb{k}$ , et que pour tous  $X, Y$  dans  $\mathcal{D}$  le  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel  $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y[n])$  est de dimension finie. Suivant [B2], une collection quasi-exceptionnelle  $(\nabla_i : i \in I)$  est dite *exceptionnelle* si elle vérifie  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_i[n]) = 0$  pour  $n > 0$ , et  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_i) = \mathbb{k}$ . Sous ces conditions, si  $I$  est une réunion disjointe d'ensembles finis et de copies de  $\mathbb{Z}_{\geq 0}$  (avec son ordre naturel), la collection duale existe toujours d'après [B2, Proposition 1].
- (2) Soit  $\mathbb{k}$  un corps, soit  $X$  une variété algébrique complexe, munie d'une action d'un groupe algébrique complexe connexe  $H$ , et soit  $\mathcal{S}$  une stratification algébrique finie de  $X$  dont toute strate est connexe et stable par l'action de  $H$ . On notera  $j_s : X_s \rightarrow X$  l'inclusion. Soit  $\mathcal{D} = D_{H, \mathcal{S}}^b(X, \mathbb{k})$  la catégorie dérivée



$H$ -équivariante et  $\mathcal{S}$ -constructible des faisceaux de  $\mathbb{k}$ -espaces vectoriels sur  $X$ . On supposera que pour tout  $s \in \mathcal{S}$  et pour tous systèmes locaux simples  $H$ -équivariants non isomorphes  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}'$  on a

$$\mathrm{Hom}_{D_H^b(X_s, \mathbb{k})}^\bullet(\mathcal{L}, \mathcal{L}') = 0.$$

(Cette condition est bien sûr automatique si le système local constant est le seul système local  $H$ -équivariant simple sur  $X_s$ .) Soit alors  $I$  l'ensemble des paires  $(s, \mathcal{L})$  où  $s \in \mathcal{S}$  et  $\mathcal{L}$  est un(e classe d'isomorphisme de) système local  $H$ -équivariant simple sur  $X_s$ , muni de l'ordre induit par l'inclusion des adhérences de strates. Il est facile de vérifier que la collection définie par

$$\nabla_{s, \mathcal{L}} := (j_s)_* \mathcal{L}[\dim X_s]$$

est quasi-exceptionnelle, que la collection duale existe, et qu'elle est donnée par

$$\Delta_{s, \mathcal{L}} := (j_s)! \mathcal{L}[\dim X_s].$$

Dans la suite, on supposera toujours que  $(I, \preceq)$  est bien ordonné (c'est-à-dire que l'ordre est total, et que tout sous-ensemble non vide de  $I$  admet un élément minimal), et on notera  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$ , resp.  $\mathcal{D}_{\{\prec i\}}$ , la sous-catégorie triangulée de  $\mathcal{D}$  engendrée par les objets  $\nabla_j$  avec  $j \preceq i$ , resp.  $j \prec i$ . D'après [B1, Lemma 2(f)], notre hypothèse implique que  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$  est également engendrée par les objets  $\Delta_j$  avec  $j \preceq i$ , et de même pour  $\mathcal{D}_{\{\prec i\}}$ .

Sous cette hypothèse, et si  $\mathcal{D}$  est engendrée comme catégorie triangulée par les objets  $(\nabla_i : i \in I)$ , il existe une (unique) t-structure sur  $\mathcal{D}$  telle que  $\mathcal{D}^{\geq 0}$  est la sous-catégorie pleine engendrée par extension par les objets de la forme  $\nabla_i[n]$  avec  $i \in I$  et  $n \in \mathbb{Z}_{\leq 0}$ , et  $\mathcal{D}^{\leq 0}$  est la sous-catégorie pleine engendrée par extension par les objets de la forme  $\Delta_i[n]$  avec  $i \in I$  et  $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ; voir [B1, Proposition 1]. Cette t-structure se restreint en une t-structure sur chacune des sous-catégories  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$  et  $\mathcal{D}_{\{\prec i\}}$  (plus précisément, en la t-structure associée aux collections quasi-exceptionnelles  $(\nabla_j : j \preceq i)$  et  $(\nabla_j : j \prec i)$  respectivement).

*Exemple 5.2.* Dans le cas particulier de l'Exemple 5.1(2), la t-structure ainsi construite est la t-structure perverse.

**5.2. Objets à parité : définition.** Soit  $\mathcal{D}$  une catégorie triangulée qui est de Krull-Schmidt (c'est-à-dire que tout objet s'écrit comme somme directe d'objets indécomposables dont l'anneau des endomorphismes est local), et soit  $(I, \preceq)$  un ensemble bien ordonné.

Si  $(\nabla_i : i \in I)$  est une collection quasi-exceptionnelle qui admet une collection duale  $(\Delta_i : i \in I)$ , on dira que  $(\nabla_i : i \in I)$  est à *parité* si elle vérifie

$$(5.1) \quad \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_i[n]) = 0 \quad \text{pour tout } i \in I \text{ et tout } n \text{ impair.}$$

Dans la suite, on fixe une telle collection, et on suppose de plus que la famille  $(\nabla_i : i \in I)$  (ou, de façon équivalente, la famille  $(\Delta_i : i \in I)$ ) engendre  $\mathcal{D}$  comme catégorie triangulée.

La définition suivante est inspirée par [JMW]. (Voir le §5.5 ci-dessous pour une comparaison détaillée.)

**Définition 5.3.** Considérons une fonction  $\dagger : I \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . On dira qu'un objet  $X$  de  $\mathcal{D}$  est :

- (1)  $(\dagger, *)$ -pair si pour tout  $i \in I$  le  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\nabla_i, \nabla_i)$ -module à gauche  $\mathbb{Z}$ -gradué
- $$\text{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(X, \nabla_i)$$
- est libre de rang fini et concentré en degrés dont la classe modulo 2 est  $\dagger(i)$  ;
- (2)  $(\dagger, !)$ -pair si pour tout  $i \in I$  le  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\Delta_i, \Delta_i)$ -module à droite  $\mathbb{Z}$ -gradué
- $$\text{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\Delta_i, X)$$
- est libre de rang fini et concentré en degrés dont la classe modulo 2 est  $\dagger(i)$  ;
- (3)  $\dagger$ -pair si  $X$  est  $(\dagger, *)$ -pair et  $(\dagger, !)$ -pair ;
- (4)  $(\dagger, *)$ -impair si  $X[1]$  est  $(\dagger, *)$ -pair ;
- (5)  $(\dagger, !)$ -impair si  $X[1]$  est  $(\dagger, !)$ -pair ;
- (6)  $\dagger$ -impair si  $X[1]$  est  $\dagger$ -pair ;
- (7) à  $\dagger$ -parité si  $X$  est isomorphe à une somme  $X' \oplus X''$  avec  $X'$   $\dagger$ -pair et  $X''$   $\dagger$ -impair.

Dans la suite, la fonction  $\dagger$  sera souvent sous-entendue, et omise des notations.

*Remarque 5.4.* (1) Dans la situation de l'Exemple 5.1(1), la condition d'être libre de rang fini est bien sûr automatique.

- (2) La sous-catégorie pleine de  $\mathcal{D}$  dont les objets sont les objets à  $\dagger$ -parité est stable par le décalage cohomologique [1].
- (3) Par le lemme de Nakayama gradué, tout facteur direct d'un  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\nabla_i, \nabla_i)$ -module gradué libre de rang fini est également libre de rang fini ; on en déduit qu'un facteur direct d'un objet  $(\dagger, *)$ -pair est  $(\dagger, *)$ -pair, et qu'un facteur direct d'un objet  $(\dagger, !)$ -pair est  $(\dagger, !)$ -pair.
- (4) Il est clair que ces définitions dépendent du choix de la collection quasi-exceptionnelle. Par exemple, si  $(\nabla_i : i \in I)$  est une collection quasi-exceptionnelle et si  $\ddagger : I \rightarrow \mathbb{Z}$  est une fonction, alors  $(\nabla_i[\ddagger(i)] : i \in I)$  est également une collection quasi-exceptionnelle (pour le même ordre sur  $I$ ), pour laquelle les notions de parité seront différentes en général. Par exemple, un objet  $X$  sera  $(\dagger, *)$ -pair par rapport à  $(\nabla_i : i \in I)$  ssi il est  $(\dagger + (\ddagger \bmod 2), *)$ -pair pour  $(\nabla_i[\ddagger(i)] : i \in I)$ . Cette idée suggère de ne pas mentionner de fonction  $\dagger$  dans la définition, puisqu'elle peut être modifiée en "renormalisant" la collection quasi-exceptionnelle. Cependant, les collections quasi-exceptionnelles qu'on rencontrera ci-dessous auront une "normalisation" naturelle, et changer celle-ci risque d'amener à des confusions.

**5.3. Le cas des éléments minimaux.** Avant d'étudier les objets à parité en général, nous devons considérer le cas de la catégorie  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$  où  $i$  est l'élément minimal de  $I$ .

**Lemme 5.5.** *Si  $i$  est minimal dans  $I$  (de sorte que  $\Delta_i = \nabla_i$ ), alors pour un objet  $X$  de  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$  les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1)  $X$  est  $*$ -pair ;
- (2)  $X$  est  $!$ -pair ;
- (3)  $X$  est isomorphe à une somme directe d'objets de la forme  $\nabla_i[n] = \Delta_i[n]$  où  $n \bmod 2 = \dagger(i)$ .

*Démonstration.* On va montrer que (1) implique (3); l'implication opposée est claire par définition (et d'après notre hypothèse (5.1)), et l'équivalence entre (2) et (3) s'obtient par des arguments duaux.

On raisonne par récurrence sur le rang de  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(X, \nabla_i)$ . Si ce rang est nul alors  $X = 0$  (car  $\nabla_i$  engendre  $\mathcal{D}_{\{\leq i\}}$ ) et il n'y a rien à démontrer. Sinon, soit  $n$  l'entier minimal tel que  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \nabla_i[n]) \neq 0$ . (En particulier,  $n \bmod 2 = \dagger(i)$ .) On considère la t-structure sur  $\mathcal{D}_{\{\leq i\}}$  associée à la collection quasi-exceptionnelle  $(\nabla_i)$ . Alors  $\nabla_i$  est l'unique objet simple dans le coeur de cette t-structure (voir par exemple [B1, Proposition 2]); notre hypothèse (5.1) implique donc que tout objet dans le coeur de cette t-structure est une somme directe de copies de  $\nabla_i$ . On en déduit que  $n$  est l'entier minimal tel que  $\mathcal{H}^{-n}(X) \neq 0$  (pour cette t-structure), et que  $\mathcal{H}^{-n}(X)$  est une somme directe de copies de  $\nabla_i$ .

Considérons le triangle distingué de troncation

$$\tau_{< -n}(X) \rightarrow X \rightarrow \mathcal{H}^{-n}(X)[n] \xrightarrow{[1]} .$$

Alors le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\mathcal{H}^{-n}(X)[n], \nabla_i) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(X, \nabla_i)$$

induit par la deuxième flèche de ce triangle est l'inclusion du facteur direct engendré par  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, \nabla_i[n])$ , de sorte que  $\tau_{< -n}(X)$  est \*-pair également. Par récurrence c'est une somme directe d'objets de la forme  $\nabla_i[m]$  avec  $m \bmod 2 = \dagger(i)$ . En utilisant encore (5.1) on voit que le triangle considéré ci-dessus est scindé, et le résultat suit.  $\square$

**5.4. Objets à parité : classification.** Les hypothèses du §5.2 restent en vigueur. Puisque  $\mathcal{D}$  est supposée de Krull–Schmidt, et au vu de la Remarque 5.4(3), tout objet à parité dans  $\mathcal{D}$  est une somme directe d'objets à parité indécomposables. Le résultat suivant (une variante de [JMW, Theorem 2.12], dont la preuve est essentiellement identique) classe ces derniers objets à isomorphisme près.

**Théorème 5.6** (Juteau–Mautner–Williamson). *Pour tout  $i \in I$ , il existe au plus un objet à parité indécomposable  $E_i$  qui appartient à  $\mathcal{D}_{\{\leq i\}}$  et dont l'image dans  $\mathcal{D}_{\{\leq i\}}/\mathcal{D}_{\{< i\}}$  est isomorphe à celle de  $\nabla_i$ . De plus, tout objet à parité indécomposable est isomorphe à  $E_i[n]$  pour un unique couple  $(i, n) \in I \times \mathbb{Z}$  tel que  $E_i$  existe.*

Lorsqu'il existe, l'objet  $E_i$  sera appelé l'objet à parité indécomposable *normalisé* associé à  $i$ .

*Remarque 5.7.* (1) Notons que le Théorème 5.6 n'affirme rien quant à l'existence des objets  $E_i$ . En fait, dans [JMW] les auteurs donnent des exemples pour lesquels de tels objets n'existent pas.

(2) Considérons le cas particulier où  $\mathcal{D}$  est la catégorie dérivée d'une catégorie de plus haut poids  $\mathcal{A}$  avec objets standards  $(\Delta_i : i \in I)$  et objets costandard  $(\nabla_i : i \in I)$  paramétrés par un ensemble bien ordonné  $I$ . Alors  $(\nabla_i : i \in I)$  est une collection exceptionnelle dans  $\mathcal{D}$ , et  $(\Delta_i : i \in I)$  est la collection duale. Les objets basculants de  $\mathcal{A}$  sont alors pairs au sens de la Définition 5.3 pour la fonction  $\dagger$  constante égale à 0; d'après le Théorème 5.6 on en déduit que dans ce cas les objets à parité sont les sommes directes de décalés cohomologiques d'objets basculants de  $\mathcal{A}$ .

(3) Par définition, un objet à parité indécomposable est soit pair, soit impair. Avec nos conventions, l'objet  $E_i$  est pair si  $\dagger(i) = \bar{0}$ , et impair si  $\dagger(i) = \bar{1}$ .

L'étape-clé de la démonstration du théorème sera le lemme suivant.

**Lemme 5.8.** *Si  $X$  est  $*$ -pair et  $Y$  est  $!$ -pair, alors on a  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y[n]) = 0$  pour tout  $n$  impair.*

*Démonstration.* On raisonne par récurrence (transfinie) sur un élément  $i \in I$  tel que  $X$  est dans  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$ . Si  $i$  est minimal, le résultat découle du Lemme 5.5 et de la définition des objets  $!$ -pairs.

Soit maintenant  $i \in I$ , et supposons que le résultat est vrai si  $X$  appartient à  $\mathcal{D}_{\{\prec i\}}$ . Rappelons que d'après [B1, Lemma 4] le foncteur de projection

$$\Pi : \mathcal{D}_{\{\preceq i\}} \rightarrow \mathcal{D}_{\{\preceq i\}} / \mathcal{D}_{\{\prec i\}}$$

admet un adjoint à gauche  $\Pi^l$  vérifiant  $\Pi^l \Pi(\Delta_i) \cong \Delta_i$  et un adjoint à droite  $\Pi^r$  vérifiant  $\Pi^r \Pi(\nabla_i) \cong \nabla_i$ , et que l'inclusion

$$\iota : \mathcal{D}_{\{\prec i\}} \rightarrow \mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$$

admet également un adjoint à gauche  $\iota^l$  et un adjoint à droite  $\iota^r$ . De plus, ces données vérifient les axiomes de "recollement" de [BBD, §1.4]; en particulier on a un triangle distingué fonctoriel

$$(5.2) \quad \Pi^l \Pi(Z) \rightarrow Z \rightarrow \iota^l(Z) \xrightarrow{[1]}$$

pour tout  $Z$  dans  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$ .

Il n'est pas difficile de vérifier que l'objet  $\iota^l(X)$  est  $*$ -pair, de sorte qu'on a  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\iota^l(X), Y[n]) = 0$  pour  $n$  impair par récurrence. D'un autre côté, puisque  $\Pi^r \Pi(\nabla_i) \cong \nabla_i$  l'objet  $\Pi(X)$  est  $*$ -pair dans  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}} / \mathcal{D}_{\{\prec i\}}$  (pour la suite quasi-exceptionnelle  $(\Pi(\nabla_i))$ ); d'après le Lemme 5.5 ceci implique que  $\Pi(X)$  est une somme directe d'objets  $\Pi(\Delta_i)[n]$  avec  $n \bmod 2 = \dagger(i)$ , et donc que  $\Pi^l \Pi(X)$  est une somme directe d'objets  $\Delta_i[n]$  avec  $n \bmod 2 = \dagger(i)$ . Le résultat voulu suit en considérant la suite exacte longue obtenue en appliquant le foncteur  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, Y)$  au triangle (5.2) (appliqué à  $Z = X$ ).  $\square$

*Démonstration du Théorème 5.6.* Supposons qu'il existe deux objets  $E_i$  et  $F_i$  satisfaisant les conditions de l'énoncé. Soient  $\Pi$  et  $\iota$  comme dans la preuve du Lemme 5.8, et fixons des isomorphismes  $\Pi(E_i) \cong \Pi(\nabla_i)$  et  $\Pi(F_i) \cong \Pi(\nabla_i)$ . Considérons le triangle distingué (5.2) pour  $Z = E_i$  :

$$\Pi^l \Pi(E_i) \rightarrow E_i \rightarrow \iota^l(E_i) \xrightarrow{[1]} .$$

Comme dans la preuve du Lemme 5.8 l'objet  $\iota^l(E_i)$  est  $*$ -pair, de sorte que le Lemme 5.8 implique que le morphisme naturel

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}(E_i, F_i) &\rightarrow \mathrm{Hom}(\Pi^l \Pi(E_i), F_i) \cong \mathrm{Hom}(\Pi(E_i), \Pi(F_i)) \\ &= \mathrm{Hom}(\Pi(\nabla_i), \Pi(\nabla_i)) = \mathrm{Hom}(\nabla_i, \nabla_i) \end{aligned}$$

est surjectif. Choisissons un morphisme  $f : E_i \rightarrow F_i$  dont l'image est  $\mathrm{id}_{\nabla_i}$ . De même, il existe un morphisme  $g : F_i \rightarrow E_i$  tel que  $\Pi(g) = \Pi(\mathrm{id}_{\nabla_i})$ . Alors  $g \circ f$  est un élément de l'anneau local  $\mathrm{End}(E_i)$  dont l'image dans son quotient  $\mathrm{End}(\nabla_i)$  est inversible, et donc  $g \circ f$  est un isomorphisme. De même,  $f \circ g$  est un isomorphisme, donc  $f$  et  $g$  également.

Pour un objet à parité indécomposable  $E$  général, on choisit  $i$  minimal tel que  $E$  appartient à  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$ . Alors l'image de  $E$  dans  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}} / \mathcal{D}_{\{\prec i\}}$  est non nulle, à parité et indécomposable par le même argument que ci-dessus; il est donc isomorphe à

l'image de  $\nabla_i[n]$  pour un  $n \in \mathbb{Z}$  d'après le Lemme 5.5. On en déduit que  $E \cong E_i[n]$ .  $\square$

**5.5. L'exemple des faisceaux constructibles.** Notre définition des objets à parité est inspirée de celle considérée dans [JMW]. Le contexte que ces auteurs considèrent est celui de l'Exemple 5.1(2). Pour que la collection quasi-exceptionnelle considérée dans cet exemple soit à parité, il faut supposer que pour tout  $s \in \mathcal{S}$  et tout système local  $H$ -équivariant simple  $\mathcal{L}$  sur  $X_s$  on a

$$\mathrm{Hom}_{D_H^b(X_s, \mathbb{k})}(\mathcal{L}, \mathcal{L}[n]) = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair.}$$

Les définitions des objets pairs et impairs dans la Définition 5.3 (dans ce cas particulier) sont formellement différentes de celles données dans [JMW, Définition 2.4], mais les deux définitions sont équivalentes. (Ce fait peut se démontrer par récurrence sur un élément  $i$  tel que  $X$  appartient à  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$ , en utilisant le Lemme 5.5, le triangle distingué (5.2), et le triangle “dual” faisant intervenir les adjoints à droite.)

Les normalisations que nous utilisons sont également différentes de celles utilisées dans [JMW] : par exemple, un objet  $X$  de  $D_{H, \mathcal{S}}^b(X, \mathbb{k})$  est  $(\dagger, *)$ -pair au sens du présent article ssi il est  $(\dagger', *)$ -pair au sens de [JMW], où  $\dagger'(s) = \dagger(s) + (\dim(X_s) \bmod 2)$ . Dans la pratique, le cas qui intervient dans toutes les applications connues de cette théorie est celui où on prend  $\dagger(s) = \dim(X_s) \bmod 2$  (correspondant au cas de la “pariversité constante”  $\natural$  dans les conventions de [JMW]).

*Remarque 5.9.* Dans ce contexte particulier, les auteurs de [JMW] considèrent une situation un petit peu plus générale : ils autorisent des anneaux de coefficients plus généraux, et font l'hypothèse plus faible que

$$\mathrm{Hom}_{D_H^b(X_s, \mathbb{k})}(\mathcal{L}, \mathcal{L}'[n]) = 0 \quad \text{si } n \text{ est impair}$$

pour tous  $s \in \mathcal{S}$  et  $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$  systèmes locaux  $H$ -équivariants simples sur  $X_s$ . Sans nos hypothèses supplémentaires, ce cadre ne rentre pas dans le formalisme des collections quasi-exceptionnelles (mais on dispose tout de même d'un formalisme de recollement qui permet de considérer des constructions similaires).

**5.6. Version graduée.** En plus du contexte étudié aux §§5.2–5.4, il est utile de considérer une situation “graduée” dans laquelle la catégorie triangulée  $\mathcal{D}$  admet un automorphisme triangulé  $\langle 1 \rangle$ . Pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ , on notera alors  $\langle n \rangle$  la puissance  $n$ -ième de  $\langle 1 \rangle$ . On supposera de nouveau que  $\mathcal{D}$  est de Krull–Schmidt. Si  $X$  et  $Y$  sont dans  $\mathcal{D}$  on notera

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(X, Y) := \bigoplus_{n, m \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y \langle n \rangle [m]),$$

avec la  $\mathbb{Z}^2$ -graduation évidente. On considérera également l'automorphisme

$$\{1\} := \langle -1 \rangle [1]$$

de  $\mathcal{D}$ .

Si  $(I, \preceq)$  est un ensemble bien ordonné, une *collection quasi-exceptionnelle graduée* est une collection  $(\nabla_i : i \in I)$  telle que

- (1) si  $i, j \in I$  et  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\nabla_i, \nabla_j) \neq 0$ , alors  $i \succeq j$ ;
- (2) si  $i \in I$  alors  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_i \langle m \rangle [n]) = 0$  pour tous  $m, n \in \mathbb{Z}$  tels que  $n < 0$  ou  $n = 0$  et  $m \neq 0$ , et  $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_i)$  est une algèbre à division.

On définit alors  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$  et  $\mathcal{D}_{\{\prec i\}}$  comme les sous-catégories triangulées engendrées par les objets de la forme  $\nabla_j\langle m \rangle$  avec  $j \preceq i$  et  $m \in \mathbb{Z}$  et avec  $j \prec i$  et  $m \in \mathbb{Z}$  respectivement. On peut définir de façon évidente la collection duale, et la théorie développée dans [B1] s'étend aisément à ce cadre.

Si  $(\nabla_i : i \in I)$  est une collection quasi-exceptionnelle graduée admettant une collection duale  $(\Delta_i : i \in I)$ , on dira que  $(\nabla_i : i \in I)$  est à *parité* si

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_i\{m\}[n]) = 0 \quad \text{si } n \neq 0 \text{ ou si } m \text{ est impair.}$$

Sous ces conditions, l'anneau  $\mathbb{Z}^2$ -gradué  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\nabla_i, \nabla_i) = \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\Delta_i, \Delta_i)$  est concentré sur  $\{(n, -n) : n \in 2\mathbb{Z}_{\geq 0}\} \subset \mathbb{Z}^2$ . Dans la suite, on supposera de plus que la famille  $(\nabla_i\langle m \rangle : i \in I, m \in \mathbb{Z})$  engendre  $\mathcal{D}$  comme catégorie triangulée.

Si on se fixe une fonction  $\dagger : I \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , on dira alors qu'un objet  $X$  de  $\mathcal{D}$  est

- (1)  $(\dagger, *)$ -pair si pour tout  $i \in I$  le  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\nabla_i, \nabla_i)$ -module à gauche  $\mathbb{Z}^2$ -gradué

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(X, \nabla_i)$$

est libre de rang fini et concentré sur  $\{(n, -n) : n \in \mathbb{Z}, n \bmod 2 = \dagger(i)\} \subset \mathbb{Z}^2$  ;

- (2)  $(\dagger, !)$ -pair si pour tout  $i \in I$  le  $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\Delta_i, \Delta_i)$ -module à droite  $\mathbb{Z}^2$ -gradué

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{D}}^{\bullet}(\Delta_i, X)$$

est libre de rang fini et concentré sur  $\{(n, -n) : n \in \mathbb{Z}, n \bmod 2 = \dagger(i)\} \subset \mathbb{Z}^2$  ;

- (3)  $\dagger$ -pair si  $X$  est  $(\dagger, *)$ -pair et  $(\dagger, !)$ -pair ;  
(4)  $(\dagger, *)$ -impair si  $X\{1\}$  est  $(\dagger, *)$ -pair ;  
(5)  $(\dagger, !)$ -impair si  $X\{1\}$  est  $(\dagger, !)$ -pair ;  
(6)  $\dagger$ -impair si  $X\{1\}$  est  $\dagger$ -pair ;  
(7) à  $\dagger$ -parité si  $X$  est isomorphe à une somme  $X' \oplus X''$  avec  $X'$   $\dagger$ -pair et  $X''$   $\dagger$ -impair.

Comme dans le cas non gradué, la fonction  $\dagger$  sera souvent omise des notations.

*Remarque 5.10.* (1) Cette notion a déjà été considérée, dans le cas particulier où  $\mathcal{D}$  est la catégorie dérivée d'une catégorie de plus haut poids graduée  $\mathcal{A}$  (pour la suite quasi-exceptionnelle graduée formée par les objets costandard de  $\mathcal{A}$ ), dans [AHR].

- (2) La sous-catégorie pleine de  $\mathcal{D}$  dont les objets sont les objets à  $\dagger$ -parité est stable par le décalage  $\{1\}$ .

Dans ce contexte le Théorème 5.6 admet la variante suivante, dont la preuve est essentiellement identique.

**Théorème 5.11.** *Pour tout  $i \in I$ , il existe au plus un objet à parité indécomposable  $E_i$  qui appartient à  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}$  et dont l'image dans  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}}/\mathcal{D}_{\{\prec i\}}$  est isomorphe à celle de  $\nabla_i$ . De plus, tout objet à parité indécomposable est isomorphe à  $E_i\{n\}$  pour un unique couple  $(i, n) \in I \times \mathbb{Z}$  tel que  $E_i$  existe.*

*Remarque 5.12.* Comme dans la Remarque 5.7(3), l'objet  $E_i$  est pair si  $\dagger(i) = \bar{0}$ , et impair si  $\dagger(i) = \bar{1}$ .

*Exemple 5.13.* Soit  $\mathcal{A}$  une catégorie de plus haut poids graduée, d'objets costandard et standards associés  $(\nabla_i : i \in I)$  et  $(\Delta_i : i \in I)$  respectivement. Posons  $\mathcal{D} := D^b(\mathcal{A})$  et considérons la collection quasi-exceptionnelle graduée formée par

les  $(\nabla_i : i \in I)$ . Supposons qu'il existe une fonction  $\dagger : I \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  telle que les objets basculants indécomposables normalisés  $(T_i : i \in I)$  vérifient

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(\Delta_i, T_j\langle n \rangle) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad n \bmod 2 = \dagger(i) + \dagger(j).$$

Plutôt que de considérer l'automorphisme de  $\mathcal{D}$  induit par l'automorphisme  $\langle 1 \rangle$  de  $\mathcal{A}$  (qu'on notera similairement), considérons l'automorphisme  $\langle\langle 1 \rangle\rangle := \langle -1 \rangle[1]$ . Alors puisque

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Delta_i, T_j\langle\langle n \rangle\rangle[m]) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Delta_i, T_j\langle -n \rangle[n+m]),$$

si le terme de gauche est non nul on doit avoir  $n+m=0$  et  $(n \bmod 2) + \dagger(j) = \dagger(i)$ . Donc  $T_j$  est pair si  $\dagger(j) = \bar{0}$ , et impair si  $\dagger(j) = \bar{1}$ . On en déduit que, dans ce contexte, pour tout  $i \in I$  l'objet  $E_i$  du Théorème 5.11 existe, et est isomorphe à  $T_i$ .

**5.7. Foncteurs de dégradation.** Soit  $\mathcal{C}$  une catégorie triangulée munie d'un automorphisme  $\langle 1 \rangle$  comme au §5.6, et soit  $\overline{\mathcal{D}}$  une autre catégorie triangulée. Un *foncteur de dégradation* (par rapport à l'automorphisme  $\langle 1 \rangle$ ) est un foncteur triangulé  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$  muni d'un isomorphisme naturel

$$\varepsilon : \Phi \circ \langle 1 \rangle \xrightarrow{\sim} \Phi$$

qui vérifie les deux conditions suivantes :

- (1) les objets dans l'image essentielle de  $\Phi$  engendrent  $\overline{\mathcal{D}}$  en tant que catégorie triangulée ;
- (2) si  $X$  et  $Y$  sont dans  $\mathcal{C}$ , alors l'application

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{C}}(X, Y) = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y\langle n \rangle) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{D}}}(\Phi(X), \Phi(Y))$$

induite par  $\Phi$  et  $\varepsilon$  est un isomorphisme.

Moralement, un foncteur de dégradation est "aussi proche que possible d'être une équivalence de catégories" entre  $\mathcal{C}$  et  $\overline{\mathcal{D}}$ , compte tenu du fait que ces catégories ont des structures différentes : la condition (1) ci-dessus remplace la condition d'être essentiellement surjectif, et la condition (1) remplace la condition d'être pleinement fidèle.

*Exemple 5.14.* Soit  $A$  un anneau gradué Noetherien. Si  $A\text{-gmod}$  désigne la catégorie des  $A$ -modules gradués de type fini et  $A\text{-mod}$  celle des  $A$ -modules de type fini, alors le foncteur d'oubli  $\mathrm{For} : D^b(A\text{-gmod}) \rightarrow D^b(A\text{-mod})$  vérifie toujours la propriété (2) ci-dessus. Si  $A$  est Artinien (comme anneau non gradué), alors la catégorie triangulée  $D^b(A\text{-mod})$  est engendrée par les  $A$ -modules simples, et ceux-ci appartiennent à l'image essentielle de  $\mathrm{For}$  (voir [GG, Proposition 3.5]). Celui-ci est donc un foncteur de dégradation.

Considérons encore  $\mathcal{C}$ ,  $\overline{\mathcal{D}}$  et  $\Phi$  comme ci-dessus. Il est clair que si  $(\nabla_i : i \in I)$  est une collection quasi-exceptionnelle graduée dans  $\mathcal{C}$ , alors  $(\Phi(\nabla_i) : i \in I)$  est une collection quasi-exceptionnelle dans  $\overline{\mathcal{D}}$ . Il est clair également que, pour ces collections, l'image par  $\Phi$  d'un objet  $(\dagger, *)$ -pair, resp.  $(\dagger, !)$ -pair, resp. pair, est  $(\dagger, *)$ -pair, resp.  $(\dagger, !)$ -pair, resp. pair, et de même pour les objets impairs ou à parité.

## 6. DUALITÉ DE KOSZUL FORMELLE

**6.1. Contexte.** On considérera à partir de maintenant le contexte suivant :  $\mathbb{k}$  désignera un corps,  $\mathcal{D}$  sera une catégorie triangulée  $\mathbb{k}$ -linéaire munie d'un automorphisme  $\langle 1 \rangle$ . On supposera donnés un ensemble bien ordonné  $(I, \preceq)$  isomorphe à  $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \leq)$  et deux familles d'objets  $(\Delta_i : i \in I)$  et  $(\nabla_i : i \in I)$  vérifiant les conditions suivantes :

- (1) la famille  $(\nabla_i \langle n \rangle : i \in I, n \in \mathbb{Z})$  engendre  $\mathcal{D}$  comme catégorie triangulée ;
- (2) si  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_j) \neq 0$  alors  $i \succeq j$  ;
- (3) pour tout  $i \in I$  et tous  $n, m \in \mathbb{Z}$  on a  $\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\nabla_i, \nabla_i \langle n \rangle [m]) = 0$  si  $(n, m) \neq (0, 0)$ , et de plus  $\text{End}_{\mathcal{D}}(\nabla_i) = \mathbb{k}$  ;
- (4) pour tous  $i \succ j$  on a  $\underline{\text{Hom}}_{\mathcal{D}}(\Delta_i, \nabla_j) = 0$ , et  $\Delta_i$  et  $\nabla_i$  ont des images isomorphes dans  $\mathcal{D}_{\{\preceq i\}} / \mathcal{D}_{\{\prec i\}}$  ;
- (5) pour tous  $i, j \in I$  et tous  $n, m \in \mathbb{Z}$ , si  $\text{Hom}(\nabla_i, \nabla_j \langle m \rangle [n]) \neq 0$  alors  $n \geq 0$ , et de même si  $\text{Hom}(\Delta_i, \Delta_j \langle m \rangle [n]) \neq 0$  alors  $n \geq 0$ .

En particulier, ces conditions impliquent que pour tous  $X, Y$  dans  $\mathcal{D}$  le  $\mathbb{k}$ -espace vectoriel

$$\bigoplus_{n, m \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(X, Y \langle n \rangle [m])$$

est de dimension finie, et donc que  $\mathcal{D}$  est de Krull–Schmidt (voir notamment [CYZ, Corollary A.2]). De plus  $(\nabla_i : i \in I)$  est une collection exceptionnelle graduée dans  $\mathcal{D}$  (voir l'Exemple 5.1(1)), de collection duale  $(\Delta_i : i \in I)$ . Notre condition (5) implique que les objets  $\Delta_i$  et  $\nabla_i$  appartiennent au coeur  $\mathcal{A}$  de la t-structure associée à cette collection exceptionnelle, et des arguments standards montrent alors que  $\mathcal{A}$  est une catégorie graduée de plus haut poids au sens du §3.4, pour la restriction de  $\langle 1 \rangle$  à  $\mathcal{A}$ , et avec objets costandard les  $(\nabla_i : i \in I)$  et objets standard les  $(\Delta_i : i \in I)$ . En particulier, ceci permet de considérer les objets basculants indécomposables  $(\mathbb{T}_i : i \in I)$  dans cette catégorie.

Ci-dessous nous considérerons les objets à parité dans cette catégorie au sens du §5.6, principalement par rapport au choix de l'automorphisme  $\langle 1 \rangle$  et de la collection quasi-exceptionnelle  $(\nabla_i : i \in I)$ . Mais on peut également considérer ces objets pour le choix d'automorphisme  $\langle\langle 1 \rangle\rangle := \{1\} = \langle -1 \rangle [1]$  plutôt que  $\langle 1 \rangle$  (et la même collection quasi-exceptionnelle graduée). L'énoncé suivant est une sorte de réciproque de la situation considérée dans l'Exemple 5.13.

**Lemme 6.1.** *Soit  $\dagger : I \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  une fonction. Tout objet à parité  $E$  pour la fonction  $\dagger$  et l'automorphisme  $\langle\langle 1 \rangle\rangle$  appartient à  $\mathcal{A}$ , et est basculant dans cette catégorie. En particulier, s'il existe un objet indécomposable  $E_i$  comme dans le Théorème 5.11 pour la fonction  $\dagger$  et l'automorphisme  $\langle\langle 1 \rangle\rangle$ , alors  $E_i \cong \mathbb{T}_i$ .*

*Démonstration.* Soit  $E$  comme dans l'énoncé. Par définition, pour tout  $j \in I$  l'espace

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(\Delta_j, E \langle k \rangle [l]) = \text{Hom}_{\mathcal{D}}(\Delta_j, E \langle\langle -k \rangle\rangle [l + k])$$

s'annule sauf si  $l = 0$ . De même, on a

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}}(E, \nabla_j \langle k \rangle [l]) = 0$$

sauf si  $l = 0$ . D'après un argument classique (voir [B2, Lemma 4]), ceci implique que  $E$  appartient à  $\mathcal{A}$  et est basculant. Si  $E = E_i$  pour un  $i$ , il est facile de voir que cet objet vérifie les conditions qui caractérisent  $\mathbb{T}_i$ .  $\square$



*Remarque 6.2.* Le Lemme 6.1 montre que l'existence d'objets à parité impose de fortes contraintes sur la fonction  $\dagger$ . Dans la pratique, cette fonction sera toujours imposée par le contexte étudié.

**6.2. Définition.** On considère maintenant deux catégories  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$  munies des structures considérées au §6.1. Par souci de clarté, les données associées seront notées avec un indice  $\mathcal{C}$  ou  $\mathcal{D}$ .

**Définition 6.3.** Une *dualité de Koszul formelle* est un foncteur triangulé  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  qui vérifie les conditions suivantes :

- (1)  $\Phi \circ \langle 1 \rangle_{\mathcal{C}} \cong \{1\}_{\mathcal{D}} \circ \Phi$ ;
- (2) pour tout  $i \in I_{\mathcal{C}}$ , il existe un indice  $\varphi(i) \in I_{\mathcal{D}}$  tel que
$$\Phi(\Delta_i^{\mathcal{C}}) \cong \Delta_{\varphi(i)}^{\mathcal{D}} \quad \text{et} \quad \Phi(\nabla_i^{\mathcal{C}}) \cong \nabla_{\varphi(i)}^{\mathcal{D}};$$

- (3) la fonction  $\varphi$  déterminée par la condition (2) est une bijection  $I_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} I_{\mathcal{D}}$  qui identifie les ordres  $\preceq_{\mathcal{C}}$  et  $\preceq_{\mathcal{D}}$ .

### 6.3. Propriétés.

**Lemme 6.4.** *Si  $\Phi$  est une dualité de Koszul formelle, alors c'est une équivalence de catégories, et  $\Phi^{-1}$  est également une dualité de Koszul formelle.*

*Démonstration.* Les conditions imposées dans la Définition 6.3 montrent que pour tout  $i \in I_{\mathcal{C}}$  on a  $\Phi(\mathcal{C}_{\{\prec_{\mathcal{C}} i\}}) \subset \mathcal{D}_{\{\prec_{\mathcal{D}} \varphi(i)\}}$ . Comme le cône de tout morphisme non nul  $\Delta_i^{\mathcal{C}} \rightarrow \nabla_i^{\mathcal{C}}$  appartient à  $\mathcal{C}_{\{\prec_{\mathcal{C}} i\}}$ , ceci montre que le cône de son image par  $\Phi$  appartient à  $\mathcal{D}_{\{\prec_{\mathcal{D}} \varphi(i)\}}$ ; en particulier, ce morphisme est non nul. Donc  $\Phi$  induit un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\Delta_i^{\mathcal{C}}, \nabla_j^{\mathcal{C}} \langle m \rangle_{\mathcal{C}}[n]) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\Phi(\Delta_i^{\mathcal{C}}), \Phi(\nabla_j^{\mathcal{C}} \langle m \rangle_{\mathcal{C}}[n]))$$

pour tous  $i, j \in I_{\mathcal{C}}$  et  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Comme les objets  $(\nabla_i^{\mathcal{C}} \langle m \rangle_{\mathcal{C}} : i \in I, m \in \mathbb{Z})$  et les objets  $(\Delta_i^{\mathcal{C}} \langle m \rangle_{\mathcal{C}} : i \in I, m \in \mathbb{Z})$  engendrent chacun  $\mathcal{C}$  comme catégorie triangulée, par un argument classique on en déduit que  $\Phi$  est pleinement fidèle. Enfin, puisque les objets  $(\nabla_i^{\mathcal{D}} \langle m \rangle_{\mathcal{D}} : i \in I, m \in \mathbb{Z})$  engendrent  $\mathcal{D}$  comme catégorie triangulée,  $\Phi$  est également essentiellement surjective.

L'assertion concernant  $\Phi^{-1}$  est évidente.  $\square$

**Proposition 6.5.** *Soit  $\dagger : I_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  une fonction, et soit  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  une dualité de Koszul formelle. Alors pour tout objet  $E$  à  $\dagger$ -parité dans  $\mathcal{C}$ ,  $\Phi(E)$  appartient à  $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$  et est basculant. En particulier, si  $i \in I$  et s'il existe un objet indécomposable  $E_i^{\mathcal{C}}$  comme dans le Théorème 5.11, alors  $\Phi(E_i^{\mathcal{C}}) \cong T_{\varphi(i)}^{\mathcal{D}}$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\Phi \circ \langle 1 \rangle_{\mathcal{C}} \cong \{1\}_{\mathcal{D}} \circ \Phi$ , si  $E$  est à  $\dagger$ -parité dans  $\mathcal{C}$  alors  $\Phi(E)$  est à  $\dagger$ -parité dans  $\mathcal{D}$ , pour le choix de foncteur de décalage  $\langle\langle 1 \rangle\rangle := \{1\}_{\mathcal{D}}$ . L'énoncé découle alors du Lemme 6.1.  $\square$

**6.4. Version non graduée.** On considère maintenant une catégorie triangulée  $\mathcal{C}$  comme au §6.1, et une catégorie triangulée  $\overline{\mathcal{D}}$  munie d'une structure similaire mais *non graduée*, c'est-à-dire de collections  $(\overline{\nabla}_i : i \in \overline{I})$  et  $(\overline{\Delta}_i : i \in \overline{I})$ , telles que

- (1) la famille  $(\overline{\nabla}_i : i \in \overline{I})$  engendre  $\overline{\mathcal{D}}$  comme catégorie triangulée;
- (2) si  $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{D}}}^{\bullet}(\overline{\nabla}_i, \overline{\nabla}_j) \neq 0$  alors  $i \succeq j$ ;

- (3) pour tout  $i \in I$  on a  $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{\nabla}_i, \overline{\nabla}_i[m]) = 0$  si  $m \neq 0$ , et de plus  $\mathrm{End}_{\overline{\mathcal{D}}}(\overline{\nabla}_i) = \mathbb{k}$ ;
- (4) pour tous  $i \succ j$  on a  $\mathrm{Hom}_{\overline{\mathcal{D}}}^{\bullet}(\overline{\Delta}_i, \overline{\nabla}_j) = 0$ , et  $\overline{\Delta}_i$  et  $\overline{\nabla}_i$  ont des images isomorphes dans  $\overline{\mathcal{D}}_{\{\preceq i\}} / \overline{\mathcal{D}}_{\{\prec i\}}$ ;
- (5) pour tous  $i, j \in I$ , si  $\mathrm{Hom}(\overline{\nabla}_i, \overline{\nabla}_j[n]) \neq 0$  alors  $n \geq 0$ , et de même si  $\mathrm{Hom}(\overline{\Delta}_i, \overline{\Delta}_j[n]) \neq 0$  alors  $n \geq 0$ .

Comme au §6.1, ces conditions impliquent que  $(\overline{\nabla}_i : i \in I)$  est une collection quasi-exceptionnelle, avec collection duale  $(\overline{\Delta}_i : i \in I)$  et que le coeur  $\mathcal{A}_{\overline{\mathcal{D}}}$  de la t-structure associée a une structure naturelle de catégorie de plus haut poids. Les objets basculants indécomposables dans cette catégorie seront notés  $(\overline{T}_i : i \in I)$ .

**Définition 6.6.** Une *dualité de Koszul formelle dégraduante* est un foncteur triangulé  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$  qui vérifie les conditions suivantes :

- (1)  $\Phi \circ \langle 1 \rangle \cong [1] \circ \Phi$ ;
- (2) pour tout  $i \in I$ , il existe un indice  $\varphi(i) \in \overline{I}$  tel que

$$\Phi(\Delta_i) \cong \overline{\Delta}_{\varphi(i)} \quad \text{et} \quad \Phi(\nabla_i) \cong \overline{\nabla}_{\varphi(i)};$$

- (3) la fonction  $\varphi$  déterminée par la condition (2) est une bijection  $I \xrightarrow{\sim} \overline{I}$  qui identifie les ordres correspondant.

Moralement, on considérera une dualité de Koszul dégraduante comme “la composée d’une dualité de Koszul formelle et d’un foncteur de dégradation” (comme défini au §5.7).

Les énoncés suivants sont des analogues du Lemme 6.4 et de la Proposition 6.5, et découlent d’arguments similaires.

**Lemme 6.7.** *Si  $\Phi$  est une dualité de Koszul formelle dégraduante, alors c’est un foncteur de dégradation pour l’automorphisme  $\langle -1 \rangle [1]$ .*

**Proposition 6.8.** *Soit  $\dagger : I \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  une fonction, et soit  $\Phi : \mathcal{C} \rightarrow \overline{\mathcal{D}}$  une dualité de Koszul formelle dégraduante. Alors pour tout objet  $E$  à  $\dagger$ -parité dans  $\mathcal{C}$ ,  $\Phi(E)$  appartient à  $\mathcal{A}_{\overline{\mathcal{D}}}$  et est basculant. En particulier, si  $i \in I$  et s’il existe un objet indécomposable  $E_i$  comme dans le Théorème 5.11, alors  $\Phi(E_i) \cong \overline{T}_{\varphi(i)}$ .*

### Partie 3. Exemples et applications

#### 7. EXEMPLES

**7.1. Catégories dérivées mixtes pour les variétés de drapeaux des groupes de Kac–Moody.** Soit  $\mathcal{G}$  un groupe de Kac–Moody, et soit  $\mathcal{W}$  son groupe de Weyl. (Voir le §4.3 pour des rappels et le détail des notations que nous utiliserons ci-dessous). Choisissons un ordre  $\preceq$  sur  $\mathcal{W}$  étendant l’ordre de Bruhat et tel que  $(\mathcal{W}, \preceq)$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \leq)$ .

Soit  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$  la variété de drapeaux de  $\mathcal{G}$ , et notons  $D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{b}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  la catégorie des complexes de  $\mathbb{k}$ -faisceaux sur  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$ , constructibles par rapport à la stratification (4.2). Cette catégorie possède une collection exceptionnelle naturelle, donnée par

$$\nabla_{\mathcal{G}, w} := i_{w*} \mathbb{k}_{\mathcal{X}_{\mathcal{G}, w}}[\ell(w)],$$

où  $i_w : \mathcal{X}_{\mathcal{G}, w} \rightarrow \mathcal{X}_{\mathcal{G}}$  est l’inclusion (voir l’Exemple 5.1(2)). La collection duale est donnée par  $\Delta_{\mathcal{G}, w} := i_w! \mathbb{k}_{\mathcal{X}_{\mathcal{G}, w}}[\ell(w)]$ , et la t-structure associée est la t-structure perverse.

Considérons la fonction  $\dagger : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  associant à  $w \in \mathcal{W}$  la classe de  $\ell(w)$ . Alors les résultats de [JMW, §4.1] (voir également le §5.5 pour une comparaison avec nos conventions) montrent que pour tout  $w \in \mathcal{W}$  il existe un objet à  $\dagger$ -parité  $\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}$  dans  $D_{\text{Br}}^{\text{b}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  comme dans le Théorème 5.6. Nous noterons  $\text{Par}_{\text{Br}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  la sous-catégorie pleine de  $D_{\text{Br}}^{\text{b}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  dont les objets sont les objets à  $\dagger$ -parité. Suivant [AR2] on pose alors

$$D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k}) := K^{\text{b}}\text{Par}_{\text{Br}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k}).$$

Le décalage cohomologique dans  $D_{\text{Br}}^{\text{b}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  induit un automorphisme de la catégorie  $\text{Par}_{\text{Br}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$ , et donc de  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$ ; cet automorphisme sera noté  $\langle 1 \rangle$ . On définit alors le “décalage de Tate” par  $\langle 1 \rangle := \{-1\}[1]$ .

La théorie développée dans [AR2] fournit des objets  $\Delta_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}$  et  $\nabla_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}$  dans la catégorie  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$ . Pour  $w \in \mathcal{W}$ , nous noterons  $\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}$  le complexe concentré en degré 0, et formé par l’objet  $\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}$  en ce degré.

**Proposition 7.1.** *La catégorie  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$ , munie des structures définies ci-dessus, vérifie les conditions du §6.1. De plus, si  $\dagger : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  est la fonction associant à  $w \in \mathcal{W}$  la classe de  $\dim(\mathcal{X}_{\mathcal{G},w})$ , alors pour tout  $w \in \mathcal{W}$  l’objet  $\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}$  est un objet à  $\dagger$ -parité indécomposable satisfaisant les conditions du Théorème 5.11 (dans  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  munie de l’automorphisme  $\langle 1 \rangle$  et de la suite exceptionnelle graduée ci-dessus).*

*Démonstration.* Notons  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G},w}, \mathbb{k})$  la catégorie dérivée mixte construite comme ci-dessus pour la variété  $\mathcal{X}_{\mathcal{G},w}$  au lieu de  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$ . Dans [AR2] on construit un formalisme de “recollement” (au sens de [BBD, §1.4]), qui fournit notamment des foncteurs  $i_{w*}, i_{w!} : D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G},w}, \mathbb{k}) \rightarrow D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  et  $i_w^*, i_w^! : D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k}) \rightarrow D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G},w}, \mathbb{k})$  qui vérifient les adjonctions habituelles. Par définition on a alors

$$\Delta_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}} := i_{w!}\mathbb{k}_{\mathcal{X}_{\mathcal{G},w}}\{\ell(w)\}, \quad \nabla_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}} := i_{w*}\mathbb{k}_{\mathcal{X}_{\mathcal{G},w}}\{\ell(w)\}.$$

Le fait que la collection  $(\nabla_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}} : w \in \mathcal{W})$  est une collection exceptionnelle graduée découle du formalisme de recollement. Le fait qu’elle vérifie la condition (5) du §6.1 est le contenu de [AR2, Theorem 4.7].

Pour  $y, w \in \mathcal{W}$  et  $m, n \in \mathbb{Z}$ , par adjonction on a

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})}(\Delta_{\mathcal{G},y}^{\text{mix}}, \mathcal{E}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}\langle m \rangle[n]) &\cong \\ &\text{Hom}_{D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G},y}, \mathbb{k})}(\mathbb{k}_{\mathcal{X}_{\mathcal{G},y}}\{\ell(y)\}, i_y^!\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}\{-m\}[m+n]). \end{aligned}$$

D’après [AR2, Remark 2.7] le complexe  $i_y^!\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}$  est concentré en degré 0, avec en ce degré l’objet  $i_y^!\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}$  (où ici  $i_y^!$  est le foncteur d’image inverse exceptionnelle usuel). L’espace ci-dessus s’annule donc si  $n + m \neq 0$ , et est isomorphe à

$$\text{Hom}_{D_{\text{Br}}^{\text{b}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})}(\Delta_{\mathcal{G},y}, \mathcal{E}_{\mathcal{G},w}\{-m\})$$

si  $m + n = 0$ . Puisque  $\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}$  a la même parité que  $\ell(w)$ , par définition cet espace s’annule si  $m$  n’a pas la même parité que  $\ell(y) + \ell(w)$ .

On vérifie par des arguments similaires que

$$\text{Hom}_{D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})}(\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}, \nabla_{\mathcal{G},y}^{\text{mix}}\langle m \rangle[n])$$

s’annule sauf si  $m + n = 0$  et  $m$  a la même parité que  $\ell(y) + \ell(w)$ , ce qui entraîne que  $\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}$  est à parité (plus précisément, pair si  $\ell(w)$  est pair et impair sinon). Cet

objet est clairement indécomposable ; il coïncide donc avec l'objet caractérisé dans le Théorème 5.11.  $\square$

Suivant la terminologie de [AR2], nous appellerons “t-structure perverse” la t-structure associée à la collection exceptionnelle  $(\nabla_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}} : w \in \mathcal{W})$ . Son coeur sera noté  $\text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$ . La Proposition 7.1 assure que cette catégorie possède une structure naturelle de catégorie de plus haut poids graduée. En particulier, on dispose d'objets basculants indécomposables “normalisés”  $\mathcal{T}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}$  pour  $w \in \mathcal{W}$ .

*Exemple 7.2.* Si  $s$  est une réflexion simple, l'objet  $\mathcal{T}_{\mathcal{G},s}^{\text{mix}}$  peut se décrire explicitement comme le complexe

$$\cdots \rightarrow 0 \rightarrow \mathcal{E}_e\{-1\} \rightarrow \mathcal{E}_s \rightarrow \mathcal{E}_e\{1\} \rightarrow 0 \rightarrow \cdots$$

où  $\mathcal{E}_s$  est en degré 0, et les différentielles sont les applications naturelles.

*Remarque 7.3.* (1) Notre notation  $\{1\}$  est bien sûr compatible avec celles utilisées dans la Partie 6 (si l'automorphisme de décalage interne est  $\langle 1 \rangle$ ).

- (2) Une partie de la théorie développée dans [AR2] s'applique à des variétés très générales (la seule hypothèse importante étant que les strates de la stratification considérée sont des espaces affines). Cependant, nous ne savons pas si la condition (5) du §6.1 est vraie en générale. Dans [AR2], cette condition n'est démontrée que dans le cas des variétés de drapeaux (éventuellement paraboliques) des groupes de Kac–Moody. (La preuve s'applique également aux “variantes” considérées au §7.2 ci-dessous.)
- (3) Nous considérerons la catégorie  $\text{Perv}_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  comme une “version graduée” de la catégorie des faisceaux pervers ordinaires  $\text{Perv}_{\text{Br}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$ . Notons cependant qu'il n'existe aucun foncteur naturel “d'oubli” reliant ces catégories.

Ci-dessous on considérera également la variété de drapeaux “opposée”  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}^{\text{op}} = \mathcal{B} \backslash \mathcal{G}$ . Toutes les constructions ci-dessus s'appliquent de la même façon à cette variété ; on utilisera des notations similaires, en remplaçant les indices “ $\mathcal{G}, w$ ” par “ $\mathcal{G}, \text{op}, w$ ”. Bien sûr, l'application  $g \cdot \mathcal{B} \mapsto \mathcal{B} \cdot g^{-1}$  induit des équivalences de catégories

$$D_{\text{Br}}^{\text{b}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} D_{\text{Br}}^{\text{b}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}^{\text{op}}, \mathbb{k}) \quad \text{et} \quad D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}^{\text{op}}, \mathbb{k})$$

envoyant  $\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}$  sur  $\mathcal{E}_{\mathcal{G},\text{op},w^{-1}}$ ,  $\Delta_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}$  sur  $\Delta_{\mathcal{G},\text{op},w^{-1}}^{\text{mix}}$ , etc. ; mais comme on le verra il est parfois utile de distinguer ces deux versions.

**7.2. Variante : les variétés de drapeaux affines.** Soit  $G$  un groupe algébrique complexe réductif connexe,  $B \subset G$  un sous-groupe de Borel, et  $T \subset B$  un tore maximal. Posons  $\mathcal{H} := \mathbb{C}((z))$ ,  $\mathcal{O} := \mathbb{C}[[z]]$ , et notons  $G_{\mathcal{H}}$ , resp.  $G_{\mathcal{O}}$  le ind-schéma en groupe, resp. schéma en groupe, sur  $\mathbb{C}$  qui représente le foncteur

$$R \mapsto G(R((z))), \quad \text{resp.} \quad R \mapsto G(R[[z]]).$$

On a un morphisme d'évaluation  $G_{\mathcal{O}} \rightarrow G$  (correspondant à  $z \mapsto 0$ ), et on note  $I$  l'image inverse de  $B$  par ce morphisme. La *variété de drapeaux affine* de  $G$  est la ind-variété complexe

$$\text{Fl}_G := G_{\mathcal{H}}/I.$$

Si  $G$  est quasi-simple et simplement connexe, cette ind-variété est la variété de drapeaux d'un groupe de Kac–Moody (affine, non tordu), et on peut donc lui appliquer les constructions du §7.1. Dans le cas général,  $\text{Fl}_G$  n'est pas la variété de

drapeaux d'un groupe de Kac–Moody ; cependant elle possède une structure très similaire. En particulier on a une “décomposition de Bruhat” décrivant les  $I$ -orbites sur  $\mathrm{Fl}_G$ , qui sont isomorphes à des espaces affines et paramétrées par le “groupe de Weyl affine étendu”  $W_{\mathrm{ext}} := W \ltimes X_*(T)$  (voir le §8.3 ci-dessous pour plus de détails sur ce groupe). On peut donc considérer les complexes à parité sur cette variété (pour la fonction  $\dagger$  donnée par la parité de la dimension de l'orbite), la catégorie dérivée mixte associée  $D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Fl}_G, \mathbb{k})$ , et sa t-structure perverse. Les objets à parité indécomposables dans  $D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Fl}_G, \mathbb{k})$  sont paramétrés par  $W_{\mathrm{ext}} \times \mathbb{Z}$ , et on notera  $\mathcal{E}_{\mathrm{Fl}_G, w}$  l'objet associé à  $(w, 0)$  (pour  $w \in W_{\mathrm{ext}}$ ) et  $\mathcal{E}_{\mathrm{Fl}_G, w}^{\mathrm{mix}}$  son image dans  $D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Fl}_G, \mathbb{k})$ . Les objets standards et costandards associés à  $w \in W_{\mathrm{ext}}$  seront notés  $\Delta_{\mathrm{Fl}_G, w}^{\mathrm{mix}}$  et  $\nabla_{\mathrm{Fl}_G, w}^{\mathrm{mix}}$  respectivement ; alors l'analogie de la Proposition 7.1 est vrai, et se prouve de façon similaire. Les faisceaux pervers basculants indécomposables dans  $D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Fl}_G, \mathbb{k})$  sont également paramétrés par  $W_{\mathrm{ext}} \times \mathbb{Z}$ , et on notera  $\mathcal{S}_{\mathrm{Fl}_G, w}^{\mathrm{mix}}$  l'objet associé à  $(w, 0)$ .

De même on considérera la variété de drapeaux affine “opposée”

$$\mathrm{Fl}_G^{\mathrm{op}} = I \backslash G_{\mathcal{X}},$$

et la catégorie dérivée mixte associée  $D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Fl}_G^{\mathrm{op}}, \mathbb{k})$ . Les objets à parité indécomposables normalisés, leurs images dans  $D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Fl}_G^{\mathrm{op}}, \mathbb{k})$ , et les faisceaux pervers basculants normalisés seront notés respectivement  $\mathcal{E}_{\mathrm{Fl}_G^{\mathrm{op}}, w}$ ,  $\mathcal{E}_{\mathrm{Fl}_G^{\mathrm{op}}, w}^{\mathrm{mix}}$  et  $\mathcal{S}_{\mathrm{Fl}_G^{\mathrm{op}}, w}^{\mathrm{mix}}$ . Les objets standards et costandards seront notés  $\Delta_{\mathrm{Fl}_G^{\mathrm{op}}, w}^{\mathrm{mix}}$  et  $\nabla_{\mathrm{Fl}_G^{\mathrm{op}}, w}^{\mathrm{mix}}$  respectivement.

Ces variétés ont également des analogues paraboliques (souvent appelées plutôt “parahoriques” dans ce contexte). Le cas qui nous intéressera sera celui de la “Grassmannienne affine” et sa version opposée, définies respectivement par

$$\mathrm{Gr}_G := G_{\mathcal{X}} / G_{\emptyset}, \quad \mathrm{Gr}_G^{\mathrm{op}} := G_{\emptyset} \backslash G_{\mathcal{X}}.$$

Dans ce cas on peut considérer les orbites de l'action naturelle de  $I$  sur  $\mathrm{Gr}_G$  ou  $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{op}}$  ; la combinatoire associée sera rappelée au §8.4. Mais on peut également considérer l'action du sous-groupe d'Iwahori “opposé”  $\mathrm{Iw}$ , défini comme l'image inverse par le morphisme d'évaluation  $G_{\emptyset} \rightarrow G$  du sous-groupe de Borel  $B^+ \subset G$  opposé à  $B$  (par rapport à  $T$ ). Dans ce cadre-là on paramétrera les orbites par  $X_*(T)$ , en envoyant  $\lambda$  sur l'orbite de la classe de l'image de  $z \in \mathcal{X}^\times$  par le morphisme  $\mathcal{X}^\times \rightarrow T_{\mathcal{X}}$  induit par  $\lambda$ . On obtient ainsi une stratification algébrique

$$\mathrm{Gr}_G = \bigsqcup_{\lambda \in X_*(T)} \mathrm{Gr}_{G, \lambda},$$

où chaque  $\mathrm{Gr}_{G, \lambda}$  est isomorphe à un espace affine. On notera  $D_{(\mathrm{Iw})}^{\mathrm{b}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{k})$  la catégorie dérivée des  $\mathbb{k}$ -faisceaux constructibles par rapport à cette stratification, et  $D_{(\mathrm{Iw})}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{k})$  la catégorie dérivée mixte associée. Cette catégorie possède une t-structure perverse, dont on notera  $\mathrm{Perv}_{(\mathrm{Iw})}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{k})$  le coeur. Les objets standards et costandards associés à  $\lambda \in X_*(T)$  seront notés  $\Delta_{\mathrm{Gr}_G, \lambda}^{\mathrm{mix}}$  et  $\nabla_{\mathrm{Gr}_G, \lambda}^{\mathrm{mix}}$  respectivement, et les complexes à parité indécomposables normalisés et leurs images dans  $D_{(\mathrm{Iw})}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_G, \mathbb{k})$  seront notés  $\mathcal{E}_{\mathrm{Gr}_G, \lambda}$  et  $\mathcal{E}_{\mathrm{Gr}_G, \lambda}^{\mathrm{mix}}$  respectivement. Encore une fois, l'analogie de la Proposition 7.1 est vrai, et se prouve de façon similaire. Les faisceaux pervers indécomposables normalisés seront notés  $\mathcal{S}_{\mathrm{Gr}_G, \lambda}^{\mathrm{mix}}$ .

Nous utiliserons des notations similaires pour  $\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{op}}$  à la place de  $\mathrm{Gr}_G$ .

**7.3. Dualité de Koszul pour les faisceaux constructibles.** On revient aux notations du §7.1 : on suppose donc que  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$  est la variété de drapeaux d’un groupe de Kac–Moody  $\mathcal{G}$ . On considère également la variété de drapeaux opposée  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}^{\vee}}^{\text{op}}$  du groupe de Kac–Moody  $\mathcal{G}^{\vee}$  dual de  $\mathcal{G}$  au sens de Langlands (c’est-à-dire dont la donnée radicielle de Kac–Moody est duale de celle de  $\mathcal{G}$ ). On peut alors considérer les catégories  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}, \mathbb{k})$  et  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}^{\vee}}^{\text{op}}, \mathbb{k})$ . Notons que les groupes de Weyl associés à  $\mathcal{G}$  et  $\mathcal{G}^{\vee}$  sont canoniquement isomorphes ; ils seront tous deux notés  $\mathcal{W}$ .

Le théorème suivant est le résultat principal de [AMRW2].

**Théorème 7.4.** *Supposons que  $\text{char}(\mathbb{k})$  est différent de 2. Il existe une dualité de Koszul formelle*

$$\kappa : D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}^{\vee}}^{\text{op}}, \mathbb{k}),$$

dont la bijection associée sur les ensembles de paramètres est  $\text{id}_{\mathcal{W}}$ .

Notons que la Proposition 6.5 nous assure que l’équivalence du Théorème 7.4 vérifie

$$(7.1) \quad \kappa(\mathcal{E}_{\mathcal{G}, w}^{\text{mix}}) \cong \mathcal{T}_{\mathcal{G}^{\vee}, \text{op}, w}^{\text{mix}} \quad \text{et} \quad \kappa(\mathcal{T}_{\mathcal{G}, w}^{\text{mix}}) \cong \mathcal{E}_{\mathcal{G}^{\vee}, \text{op}, w}^{\text{mix}}$$

pour tout  $w \in \mathcal{W}$ .

*Remarque 7.5.* (1) Dans [AMRW2] nous travaillons en fait sous une hypothèse plus faible (mais plus technique à énoncer) sur  $\text{char}(\mathbb{k})$ . Puisque cette hypothèse est vérifiée dès que  $\text{char}(\mathbb{k})$  est différent de 2, ici nous avons simplifié l’énoncé en nous restreignant à ce cas.

- (2) Il devrait être possible de généraliser les constructions du Théorème 7.4 au contexte du §7.2 (pour  $G$  réductif quelconque). Cependant les méthodes utilisées dans [AMRW2] reposent sur les constructions de [EW], qui n’ont été développées que pour les groupes de Coxeter (et non pour leurs “cousins” que sont les groupes de Weyl affines étendus) ; cette généralisation demanderait donc comme préalable de généraliser ces outils, ce que nous ne ferons pas ici. Cependant la “trace combinatoire” de cette équivalence se généralise facilement au cadre du §7.2 ; voir le §8.3 ci-dessous. Ceci est suffisant pour toutes les applications considérées jusque-là.

**7.4. Faisceaux cohérents sur la résolution de Springer et t-structure exotique.** On suppose maintenant que  $\mathbb{k}$  est algébriquement clos, et on note  $\mathfrak{G}$  un groupe algébrique connexe réductif sur  $\mathbb{k}$  dont le sous-groupe dérivé est simplement connexe. On choisit un sous-groupe de Borel  $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$  et un tore maximal  $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{B}$ , et on pose  $\mathbf{X} := X^*(\mathfrak{T})$ .

Soit  $\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}}$  l’espace cotangent à la variété de drapeaux  $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ . Cette variété possède une action naturelle de  $\mathfrak{G} \times \mathbb{G}_m$ , où  $\mathfrak{G}$  agit via l’action induite par l’action naturelle sur  $\mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ , et  $z \in \mathbb{G}_m$  agit par multiplication par  $z^{-2}$  le long des fibres de la projection  $\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}} \rightarrow \mathfrak{G}/\mathfrak{B}$ . On considère alors la catégorie dérivée bornée

$$D^{\text{b}}\text{Coh}^{\mathfrak{G} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}})$$

de la catégorie des faisceaux cohérents  $\mathfrak{G} \times \mathbb{G}_m$ -équivariants sur  $\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}}$ . On note <sup>3</sup>  $\langle 1 \rangle$  l’automorphisme donné par le produit tensoriel avec le  $\mathbb{G}_m$ -module de dimension 1 et de poids  $-1$ .

3. La convention adoptée ici est opposée à celle utilisée dans [MR2, AR4, AHR].

Dans [B2] (voir aussi [MR1]), Bezrukavnikov construit une collection exceptionnelle graduée  $(\nabla_\lambda^{\text{Coh}} : \lambda \in \mathbf{X})$  dans  $D^b\text{Coh}^{\mathfrak{G} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}})$ , pour un certain ordre  $\preceq$  sur  $\mathbf{X}$ . (Cet ordre n'est pas uniquement déterminé; dans la suite on le fixe, en supposant en particulier que  $(\mathbf{X}, \preceq)$  est isomorphe à  $(\mathbb{Z}, \leq)$ . Ce choix n'affecte aucune des constructions considérées.) On notera  $(\Delta_\lambda^{\text{Coh}} : \lambda \in \mathbf{X})$  la collection duale, et  $\dagger : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  la fonction envoyant  $\lambda$  sur la classe de

$$(7.2) \quad \sum_{\alpha \in R^+} |\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle| - \ell(v_\lambda),$$

où  $R$  est le système de racines de  $(\mathfrak{G}, \mathfrak{T})$ ,  $R^+ \subset R$  est le système de racines positives tel que  $\mathfrak{B}$  est le sous-groupe de Borel négatif,  $\alpha^\vee$  est la coracine associée à  $\alpha$ , et enfin  $v_\lambda$  est l'élément du groupe de Weyl  $W$  de  $(\mathbf{G}, \mathbf{T})$  de longueur minimale tel que  $v_\lambda(\lambda)$  est dominant (pour la structure de groupe de Coxeter sur  $W$  déterminée par  $R^+$ ). (Voir la Remarque 7.9 ci-dessous pour une interprétation plus naturelle de cette fonction.)

**Proposition 7.6.** *La catégorie  $D^b\text{Coh}^{\mathfrak{G} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}})$ , munie des structures ci-dessus, vérifie les conditions du §6.1. Soit  $\dagger : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  la fonction considérée ci-dessus. Alors, de plus, pour tout  $\lambda \in \mathbf{X}$  il existe un objet à  $\dagger$ -parité indécomposable  $\mathcal{E}_\lambda$  dans  $D^b\text{Coh}^{\mathfrak{G} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}})$  vérifiant les conditions du Théorème 5.11.*

*Démonstration.* Comme expliqué ci-dessus, la collection  $(\nabla_\lambda^{\text{Coh}} : \lambda \in \mathbf{X})$  est exceptionnelle graduée par construction. Le fait qu'elle vérifie la condition (5) du §6.1 est le contenu de [MR1, Corollary 3.11] (voir également [ARd, Proposition 8.5]). Enfin, l'existence des objets à parité est démontrée dans [AHR, §3.4].  $\square$

La  $t$ -structure associée à la collection exceptionnelle graduée  $(\nabla_\lambda^{\text{Coh}} : \lambda \in \mathbf{X})$  est appelée la *t-structure exotique*. La Proposition 7.6 implique que le coeur de cette  $t$ -structure est une catégorie graduée de plus haut poids; on peut donc considérer ses objets basculants indécomposables. Ceux-ci sont paramétrés par  $\mathbf{X} \times \mathbb{Z}$ , et on notera  $\mathcal{T}_\lambda$  l'objet associé à  $(\lambda, 0)$  (pour  $\lambda \in \mathbf{X}$ ).

**7.5. Dualité de Koszul constructibles-cohérents.** On continue avec les notations du §7.4, et on suppose de plus que la caractéristique de  $\mathbb{k}$  est bonne pour  $\mathfrak{G}$ , et que l'algèbre de Lie de  $\mathfrak{G}$  possède une forme bilinéaire  $\mathfrak{G}$ -invariante non-dégénérée. On notera  $G^\vee$  le groupe réductif connexe complexe qui est dual de  $\mathfrak{G}$  au sens de Langlands, avec le tore maximal et le sous-groupe de Borel  $T^\vee \subset B^\vee \subset G^\vee$  qui sont duaux de  $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{B} \subset \mathfrak{G}$ , et  $\text{Gr}_{G^\vee}$  la Grassmannienne affine de  $G^\vee$ . On a alors, par définition  $\mathbf{X} = X^*(\mathfrak{T}) = X_*(T^\vee)$ . Comme au §7.2 on considère l'action sur  $\text{Gr}_{G^\vee}$  du sous-groupe d'Iwahori  $\text{Iw}$  défini par le sous-groupe de Borel opposé à  $B^\vee$  (par rapport à  $T^\vee$ ), et la catégorie dérivée mixte associée  $D_{(\text{Iw})}^{\text{mix}}(\text{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k})$ .

L'énoncé suivant est le résultat principal de [ARd] (voir également [MR2] pour une preuve alternative, sous des hypothèse légèrement plus fortes).

**Théorème 7.7.** *Il existe une dualité de Koszul formelle*

$$\Psi : D^b\text{Coh}^{\mathfrak{G} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}}) \xrightarrow{\sim} D_{(\text{Iw})}^{\text{mix}}(\text{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k})$$

dont la bijection associée sur les ensembles de paramètres est  $\text{id}_{\mathbf{X}}$ .

Notons que la Proposition 6.5 nous assure que l'équivalence du Théorème 7.7 vérifie

$$\Psi(\mathcal{E}_\lambda) \cong \mathcal{I}_{\text{Gr}_{G^\vee}, \lambda}^{\text{mix}} \quad \text{et} \quad \Psi(\mathcal{T}_\lambda) \cong \mathcal{O}_{\text{Gr}_{G^\vee}, \lambda}^{\text{mix}}$$

pour tout  $\lambda \in \mathbf{X}$ .

**7.6. Des faisceaux cohérents aux représentations.** Comme aux §§7.4–7.5 on suppose que  $\mathbb{k}$  est un corps algébriquement clos, mais on suppose maintenant que sa caractéristique  $p$  est positive. Pour tout  $\mathbb{k}$ -groupe algébrique affine  $\mathbf{H}$ , on notera  $\dot{\mathbf{H}}$  le décalé de Frobenius de  $\mathbf{H}$  (voir par exemple [Ja, §I.9.2]).

Soit  $\mathbf{G}$  un groupe algébrique connexe réductif sur  $\mathbb{k}$ , à sous-groupe dérivé simplement connexe, et soient  $\mathbf{T} \subset \mathbf{B} \subset \mathbf{G}$  un tore maximal et un sous-groupe de Borel. Dans ce paragraphe on supposera que  $p > h$ , où  $h$  est le nombre de Coxeter de  $\mathbf{G}$ . Alors le groupe  $\mathfrak{G} := \dot{\mathbf{G}}$  vérifie les hypothèses du §7.5. On appliquera les constructions de ce paragraphe pour le tore maximal  $\mathfrak{T} = \dot{\mathbf{T}}$  et le sous-groupe de Borel  $\mathfrak{B} = \dot{\mathbf{B}}$ . On identifiera le groupe des caractères de  $\mathbf{T}$  à  $\mathbf{X} = X^*(\dot{\mathbf{T}})$  de sorte que la composition avec le morphisme de Frobenius  $\mathbf{T} \rightarrow \dot{\mathbf{T}}$  correspond à la multiplication par  $p$  sur  $\mathbf{X}$ .

*Remarque 7.8.* Il est plus courant en théorie des représentations d'imposer l'hypothèse  $p \geq h$  plutôt que  $p > h$ . On peut vérifier (en consultant la table des nombres de Coxeter par exemple) que cette dernière condition est équivalente à demander que :

- (1)  $p \geq h$  ;
- (2)  $p$  est très bon pour  $\mathbf{G}$ .

On notera  $\text{Rep}(\mathbf{G})$  la catégorie des représentations algébriques de dimension finie de  $\mathbf{G}$ . Si  $\mathbf{X}^+ \subset \mathbf{X}$  est le sous-ensemble des poids dominants (pour le choix de racines positives tel que  $\mathbf{B}$  est le sous-groupe de Borel *néгатif*), alors pour  $\lambda \in \mathbf{X}^+$  on notera  $\mathbf{N}(\lambda)$  le module induit de plus haut poids  $\lambda$  (noté  $H^0(\lambda)$  dans [Ja]) et  $\mathbf{M}(\lambda)$  le module de Weyl de plus haut poids  $\lambda$ . Si  $w_0$  est l'élément de plus grande longueur dans le groupe de Weyl  $W$  de  $(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ , alors on a  $\mathbf{M}(\lambda) = \mathbf{N}(-w_0\lambda)^*$ . Il existe (à scalaire près) un unique morphisme de  $\mathbf{G}$ -modules non nul  $\mathbf{M}(\lambda) \rightarrow \mathbf{N}(\lambda)$  ; son image est l'unique sous-module simple de  $\mathbf{N}(\lambda)$ , qu'on notera  $\mathbf{L}(\lambda)$ .

D'après [Ja, §II.4.13, Remark 2], les objets  $(\mathbf{N}(\lambda) : \lambda \in \mathbf{X}^+)$  forment une collection exceptionnelle dans la catégorie triangulée  $D^b\text{Rep}(\mathbf{G})$  pour l'ordre naturel sur  $\mathbf{X}^+$  (voir par exemple [Ja, §II.1.5]). La famille duale est la famille  $(\mathbf{M}(\lambda) : \lambda \in \mathbf{X}^+)$  (voir [Ja, Proposition II.4.13]), et la t-structure associée est la t-structure tautologique. Puisque les objets  $\mathbf{N}(\lambda)$  et  $\mathbf{M}(\lambda)$  sont concentrés en degré 0, la catégorie  $\text{Rep}(\mathbf{G})$  possède une structure naturelle de catégorie de plus haut poids, et on peut donc considérer ses objets basculants ; les objets basculants indécomposables sont classifiés (à isomorphisme près) par  $\mathbf{X}^+$ , et on notera  $\mathbf{T}(\lambda)$  l'objet associé à  $\lambda$  (voir également [Ja, Appendice E]).

Considérons maintenant le groupe de Weyl affine étendu

$$W_{\text{ext}} := W \ltimes \mathbf{X}$$

et son sous-groupe  $W_{\text{aff}} := W \ltimes \mathbb{Z}R$  (où  $R$  est le système de racines de  $(\mathbf{G}, \mathbf{T})$ , et  $\mathbb{Z}R \subset \mathbf{X}$  est le réseau radiciel). On notera  $t_\lambda$  l'image dans  $W_{\text{ext}}$  d'un élément  $\lambda \in \mathbf{X}$ . Alors  $W_{\text{aff}}$  possède une structure naturelle de groupe de Coxeter (voir [Ja, Chap. II.6]). Sa fonction de longueur vérifie

$$\ell(w \cdot t_\lambda) = \sum_{\substack{\alpha \in R^+ \\ w(\alpha) \in R^+}} |\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle| + \sum_{\substack{\alpha \in R^+ \\ w(\alpha) \in -R^+}} |1 + \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle|$$



pour  $w \in W$  et  $\lambda \in \mathbb{Z}R$ . Cette formule a un sens plus généralement pour  $\lambda \in \mathbf{X}$ , ce qui permet d'étendre  $\ell$  en une fonction sur  $W_{\text{ext}}$  (qu'on notera de la même façon). En utilisant cette fonction on peut également étendre de façon naturelle l'ordre de Bruhat sur  $W_{\text{aff}}$  en un ordre partiel sur  $W_{\text{ext}}$ .

On considère l'action de  $W_{\text{ext}}$  sur  $\mathbf{X}$  définie par

$$(wt_\lambda) \cdot_p \mu = w(\mu + p\lambda + \rho) - \rho$$

pour  $\lambda, \mu \in \mathbf{X}$  et  $w \in W$ , où  $\rho$  est la demi-somme des racines positives de  $\mathbf{G}$ . Alors il est bien connu que, sous nos hypothèses, pour  $w \in W_{\text{ext}}$  le poids  $w \cdot_p 0$  est dominant si et seulement si  $w$  appartient au sous-ensemble  ${}^0W_{\text{ext}} \subset W_{\text{ext}}$  formé des éléments  $y$  de longueur minimale dans  $W \cdot y$ . De plus, on a des bijections naturelles

$$\mathbf{X} \xrightarrow{\sim} W \backslash W_{\text{ext}} \xrightarrow{\sim} {}^0W_{\text{ext}};$$

leur composée sera notée  $\lambda \mapsto w_\lambda$ . On utilise cette bijection pour transférer l'ordre  $\preceq$  sur  $\mathbf{X}$  en un ordre sur  ${}^0W_{\text{ext}}$ , qu'on notera par le même symbole. (Par construction, cet ordre étend la restriction à  ${}^0W_{\text{ext}}$  de l'ordre de Bruhat sur  $W_{\text{ext}}$ .)

*Remarque 7.9.* Une fois ces notations introduites, on peut interpréter la quantité (7.2) comme  $\ell(w_\lambda)$ ; voir par exemple [MR1, Lemma 2.4].

Pour  $w \in {}^0W_{\text{ext}}$ , on pose maintenant

$$\mathbf{L}_w := \mathbf{L}(w \cdot_p 0), \quad \mathbf{N}_w := \mathbf{N}(w \cdot_p 0), \quad \mathbf{M}_w := \mathbf{M}(w \cdot_p 0), \quad \mathbf{T}_w := \mathbf{T}(w \cdot_p 0).$$

Le ‘‘linkage principle’’ (voir [Ja, Corollary II.6.17]) assure que la sous-catégorie de Serre  $\text{Rep}_\emptyset(\mathbf{G})$  de  $\text{Rep}(\mathbf{G})$  engendrée par les modules simple  $(\mathbf{L}_w : w \in {}^0W_{\text{ext}})$  est un facteur direct de  $\text{Rep}(\mathbf{G})$ , qui contient les représentations  $\mathbf{N}_w, \mathbf{M}_w$  et  $\mathbf{T}_w$  pour  $w \in {}^0W_{\text{ext}}$ . De plus, la catégorie  $\text{Rep}_\emptyset(\mathbf{G})$ , munie des objets  $(\mathbf{N}_w : w \in {}^0W_{\text{ext}})$  et  $(\mathbf{M}_w : w \in {}^0W_{\text{ext}})$ , est encore une catégorie de plus haut poids pour l'ordre  $\preceq$  sur  ${}^0W_{\text{ext}}$  (voir notamment [Ja, Proposition II.6.16] et [AR4, Lemma 10.1]).

L'énoncé suivant est le résultat principal de [AR4].

**Théorème 7.10.** *Il existe une dualité de Koszul formelle dégradante*

$$\Xi : D^b \text{Coh}^{\mathbf{G} \times \mathbf{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathbf{G}}) \rightarrow D^b \text{Rep}_\emptyset(\mathbf{G})$$

dont la bijection associée sur les espaces de paramètres est  $\lambda \mapsto w_\lambda$ .

La Proposition 6.8 nous assure que l'équivalence  $\Xi$  du Théorème 7.10 vérifie

$$\Xi(\mathcal{E}_\lambda) \cong \mathbf{T}_{w_\lambda}$$

pour tout  $\lambda \in \mathbf{X}$ .

## 8. TRACES COMBINATOIRES

Dans cette partie on interprète les résultats du §7 en termes de la ‘‘base  $p$ -canonique’’ de Williamson.

**8.1. Base  $p$ -canonique.** Considérons le cadre du §7.1 :  $\mathcal{G}$  est un groupe de Kac–Moody,  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$  la variété de drapeaux correspondante, et  $\mathcal{W}$  son groupe de Weyl, qu'on munit de sa structure naturelle de groupe de Coxeter. On choisit un corps  $\mathbb{k}$  de caractéristique  $p \neq 2$ .

À  $\mathcal{W}$  on peut associer son algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ . (On suivra les conventions de notation de [So2]; en particulier la base standard de  $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$  sera notée  $(H_w : w \in \mathcal{W})$ , et sa base de Kazhdan–Lusztig sera notée  $(\underline{H}_w : w \in \mathcal{W})$ .) Si on note

$[D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})]$  le groupe de Grothendieck de la catégorie triangulée  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$ , il n'est pas difficile de vérifier qu'il existe un unique isomorphisme de  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -modules

$$\varphi_{\mathcal{G}}^{\mathbb{k}} : [D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}$$

envoyant  $[\Delta_{\mathcal{G}, w}^{\text{mix}}\{n\}]$  sur  $v^n H_w$ . Sous cet isomorphisme, pour toute réflexion simple  $s$  l'action de  $\underline{H}_s$  sur  $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$  correspond au foncteur induit par la convolution à droite avec le complexe à parité  $\mathbb{k}_{\mathcal{X}_{\mathcal{G}, s}}\{1\}$  (un complexe  $\mathcal{B}$ -équivariant).

De façon plus concrète, si  $\mathcal{E}$  est un complexe à parité sur  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$ , qu'on identifie à l'objet de  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}, \mathbb{k})$  donné par le complexe concentré en degré 0, avec  $\mathcal{E}$  en degré 0, alors on a

$$(8.1) \quad \varphi_{\mathcal{G}}^{\mathbb{k}}([\mathcal{E}]) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ w \in \mathcal{W}}} \dim_{\mathbb{k}} \mathbf{H}^{-\ell(w)-n}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}, w}, \mathcal{E}|_{\mathcal{X}_{\mathcal{G}, w}}) \cdot v^n H_w.$$

**Définition 8.1.** Pour  $w \in \mathcal{W}$ , on pose

$${}^p \underline{H}_w^{\mathcal{G}} := \varphi_{\mathcal{G}}^{\mathbb{k}}(\mathcal{E}_{\mathcal{G}, w}^{\text{mix}}).$$

Il est facile de vérifier que :

- (1) les éléments  ${}^p \underline{H}_w^{\mathcal{G}}$  ne dépendent pas de  $\mathbb{k}$  lui-même, mais uniquement de sa caractéristique (ce qui justifie la notation) ;
- (2) la famille  $({}^p \underline{H}_w^{\mathcal{G}} : w \in \mathcal{W})$  est une base de  $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ .

La famille  $({}^p \underline{H}_w^{\mathcal{G}} : w \in \mathcal{W})$  est la *base  $p$ -canonique* de Williamson (voir [JW] ; le lien entre la définition adoptée dans [JW] et celle considérée ici—qui est suggérée dans [JMW]—est établi dans [RW1, Partie III]). Dans le cas où  $p = 0$ , des résultats de Kazhdan–Lusztig [KL2] (voir également [Sp]) montrent que  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}, w}$  est le complexe de cohomologie d'intersection de  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$ , et que  ${}^0 \underline{H}_w^{\mathcal{G}} = \underline{H}_w$  pour tout  $w \in \mathcal{W}$ . Il est connu également que pour tout  $w \in \mathcal{W}$  il existe  $N(w) \in \mathbb{Z}_{>0}$  tel que  ${}^p \underline{H}_w^{\mathcal{G}} = \underline{H}_w$  pour tout nombre premier  $p \geq N(w)$  ; mais l'entier  $N(w)$  n'est pas connu, et semble difficile à décrire (sauf dans des cas très particuliers).

De même que les polynômes de Kazhdan–Lusztig se définissent à partir de la base de Kazhdan–Lusztig de  $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$ , on définit les  *$p$ -polynômes de Kazhdan–Lusztig*  $({}^p h_{x,y}^{\mathcal{G}} : x, y \in \mathcal{W})$  comme les coefficients des éléments de la base  $p$ -canonique dans la base standard, c'est-à-dire par l'égalité

$${}^p \underline{H}_y^{\mathcal{G}} = \sum_{x \in \mathcal{W}} {}^p h_{x,y}^{\mathcal{G}} \cdot H_x$$

pour  $y \in \mathcal{W}$ . Contrairement aux polynômes de Kazhdan–Lusztig usuels, ces polynômes n'appartiennent pas nécessairement à  $\mathbb{Z}[v]$  (mais plutôt à  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ ). Par contre, d'après (8.1), ils ont des coefficients positifs ou nuls.

*Remarque 8.2.* Le groupe  $\mathcal{W}$  est le même pour  $\mathcal{G}$  et pour le groupe dual  $\mathcal{G}^{\vee}$  considéré au §7.3. Dans tous les exemples donnés ci-dessus, on a  ${}^p \underline{H}_w^{\mathcal{G}} = {}^p \underline{H}_w^{\mathcal{G}^{\vee}}$ . Cependant, cette égalité est fautive en général ; voir [JW] pour des exemples explicites.

Bien sûr, on peut considérer des constructions similaires pour la variété de drapeaux opposée  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}^{\text{op}}$  à la place de  $\mathcal{X}_{\mathcal{G}}$ . On a alors un isomorphisme

$$\varphi_{\mathcal{G}, \text{op}}^{\mathbb{k}} : [D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\mathcal{X}_{\mathcal{G}}^{\text{op}}, \mathbb{k})] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\mathcal{W}}$$

envoyant  $[\Delta_{\mathcal{G},\text{op},w}^{\text{mix}}\{n\}]$  sur  $v^n H_w$ . En utilisant le fait que les objets  $\mathcal{E}_{\mathcal{G},w}$  se “relèvent” dans la catégorie  $\mathcal{B}$ -équivariante, on peut vérifier sans difficulté qu’on a encore

$$(8.2) \quad {}^p H_w^{\mathcal{G}} = \varphi_{\mathcal{G},\text{op}}^{\text{k}}(\mathcal{E}_{\mathcal{G},\text{op},w}^{\text{mix}})$$

pour tout  $w \in \mathcal{W}$ . (Au vu des commentaires à la fin du §7.1, cela revient à dire que  ${}^p h_{x,y}^{\mathcal{G}} = {}^p h_{x^{-1},y^{-1}}^{\mathcal{G}}$  pour tous  $x, y \in \mathcal{W}$ .)

**8.2. Dualité de Koszul et base  $p$ -canonique.** On considère maintenant le groupe de Kac–Moody  $\mathcal{G}^\vee$  qui est dual de  $\mathcal{G}$  au sens de Langlands, sa variété de drapeaux opposée  $\mathcal{X}_{\text{op}}^\vee$ , et l’équivalence  $\kappa$  du Théorème 7.4.

**Lemme 8.3.** *L’automorphisme de  $\mathcal{H}_{\mathcal{W}}$  donné par  $\varphi_{\mathcal{G}^\vee,\text{op}}^{\text{k}} \circ [\kappa] \circ (\varphi_{\mathcal{G}}^{\text{k}})^{-1}$  coïncide avec l’involution d’anneau donnée par*

$$\iota(v^n H_w) = (-v)^{-n} H_w$$

pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $w \in \mathcal{W}$ .

*Démonstration.* La formule découle du fait que

$$\kappa(\Delta_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}\{n\}) \cong \Delta_{\mathcal{G}^\vee,\text{op},w}^{\text{mix}}\langle n \rangle = \Delta_{\mathcal{G}^\vee,\text{op},w}^{\text{mix}}\{-n\}[n]$$

pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $w \in \mathcal{W}$ . □

Le résultat suivant est une traduction de (7.1) dans les groupes de Grothendieck. (On peut considérer ce fait comme la “trace combinatoire” de la dualité de Koszul.)

**Proposition 8.4.** *Pour tout  $w \in \mathcal{W}$  on a*

$$\varphi_{\mathcal{G}^\vee,\text{op}}^{\text{k}}([\mathcal{T}_{\mathcal{G}^\vee,\text{op},w}^{\text{mix}}]) = \iota({}^p H_w^{\mathcal{G}}).$$

*Remarque 8.5.* (1) Considérons le cas particulier où  $p = 0$ . Dans ce cas, comme expliqué au §8.1, on a  ${}^0 H_w^{\mathcal{G}} = H_w$  pour tout  $w \in \mathcal{W}$ . Dans les conventions de Kazhdan–Lusztig [KL1], la base  $(H_w : w \in \mathcal{W})$  est notée  $(C'_w : w \in \mathcal{W})$ . Kazhdan et Lusztig considèrent également une autre base, notée  $(C_w : w \in \mathcal{W})$ . Avec nos notations, on a  $C_w = \iota(C'_w)$ . En d’autres termes, pour  $p$  général, la base  $(\iota({}^p H_w^{\mathcal{G}}) : w \in \mathcal{W})$  peut être considérée comme une “version  $p$ -canonique” de “l’autre” base de Kazhdan–Lusztig.

(2) Toujours dans le cas particulier où  $p = 0$ , les “caractères” des faisceaux pervers mixtes basculants sur les variétés de drapeaux ont été déterminés par Yun [Yu]. Dans ce cas particulier, notre formule est identique à la sienne. (Yun utilise une autre notion de “faisceaux pervers mixtes” ; voir [AR1] pour le lien avec notre définition.)

(3) Revenons au cas où  $p$  est quelconque. En utilisant (8.2) pour le groupe  $\mathcal{G}^\vee$ , et le fait que  $\iota$  est une involution, on trouve aussi que  $\varphi_{\mathcal{G},w}^{\text{k}}([\mathcal{T}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}]) = \iota({}^p H_w^{\mathcal{G}^\vee})$  pour tout  $w \in \mathcal{W}$ . En comparant avec la formule de la Proposition 8.4 (appliquée au groupe  $\mathcal{G}^\vee$ ), il s’ensuit que

$$\varphi_{\mathcal{G},w}^{\text{k}}([\mathcal{T}_{\mathcal{G},w}^{\text{mix}}]) = \varphi_{\mathcal{G},\text{op}}^{\text{k}}([\mathcal{T}_{\mathcal{G},\text{op},w}^{\text{mix}}])$$

pour tout  $w \in \mathcal{W}$ . Cette égalité peut également se démontrer directement (c’est-à-dire sans utiliser le Théorème 7.4) en utilisant les “objets libre-monodromiques” considérés dans [AMRW1].

**8.3. Le cas particulier des variétés de drapeaux affines.** Considérons le cadre du §7.2, et supposons de plus que  $G$  est quasi-simple et simplement connexe. Alors  $\text{Fl}_G$  est la variété de drapeaux d'un groupe de Kac–Moody, et on peut donc lui appliquer les résultats considérés au §7.3 et au §8.1. Le “groupe de Weyl”  $\mathcal{W}$  correspondant est le groupe de Weyl affine non étendu associé à  $G$  (ou au groupe dual, selon les conventions choisies) et qui se décrit comme  $W_{\text{aff}} = W \ltimes \mathbb{Z}R^\vee$ , où  $\mathbb{Z}R^\vee$  est le réseau des coracines de  $(G, T)$ .

Cependant, le groupe de Kac–Moody dual du groupe affine non tordu associé à  $G$  n'est pas toujours du même type : il s'agit d'un groupe de Kac–Moody affine, mais tordu si  $G$  n'est pas simplement lacé. Cependant, si on suppose que  $p$  est très bon pour  $G$  (et, comme toujours, différent de 2), la catégorie des complexes à parité sur la variété de drapeaux de ce groupe dual s'identifie canoniquement à celle des complexes à parité sur  $\text{Fl}_G^{\text{op}}$  ; voir [AMRW2, §7.1] pour plus de détails. L'algèbre de Hecke associée sera notée  $\mathcal{H}_{\text{aff}}^G$ , et sa base  $p$ -canonique  $({}^p H_w : w \in W_{\text{aff}})$ .

Plutôt que d'énoncer les résultats du §8.2 dans ce cadre, nous allons les étendre au cas des groupes réductifs généraux. Considérons donc le contexte du §7.2, où  $G$  est maintenant un groupe réductif connexe complexe quelconque. Le “groupe de Weyl affine étendu” associé est défini par  $W_{\text{ext}} = W \ltimes X_*(T)$ . Il contient le groupe  $W_{\text{aff}} := W \ltimes \mathbb{Z}R^\vee$  comme sous-groupe distingué (où, comme ci-dessus,  $\mathbb{Z}R^\vee$  est le réseau des coracines de  $(G, T)$ ). Comme au §7.6 le groupe  $W_{\text{aff}}$  admet une structure naturelle de groupe de Coxeter, dont la fonction de longueur vérifie

$$\ell(w \cdot t_\lambda) = \sum_{\substack{\alpha \in R^+ \\ w(\alpha) \in R^+}} |\langle \lambda, \alpha \rangle| + \sum_{\substack{\alpha \in R^+ \\ w(\alpha) \in -R^+}} |1 + \langle \lambda, \alpha \rangle|.$$

Cette formule permet d'étendre  $\ell$  à  $W_{\text{ext}}$ . De plus  $\Omega := \{w \in W_{\text{ext}} \mid \ell(w) = 0\}$  est un sous-groupe abélien de  $W_{\text{ext}}$ , isomorphe à  $X_*(T)/\mathbb{Z}R^\vee$ , dont l'action sur  $W_{\text{aff}}$  (par conjugaison) préserve les générateurs de Coxeter, et tel que la multiplication induit un isomorphisme

$$\Omega \ltimes W_{\text{aff}} \xrightarrow{\sim} W_{\text{ext}}.$$

*Remarque 8.6.* Dans le contexte considéré au §7.6, avec le groupe “ $G$ ” considéré ici égal au groupe  $G^\vee$  dual de Langlands de  $\mathbf{G}$ , le groupe de Weyl affine étendu s'identifie canoniquement avec celui noté de la même manière au §7.6. (Dans ce cas particulier le quotient  $X^*(T)/\mathbb{Z}R$  est sans torsion ; cette hypothèse n'est pas nécessaire pour les résultats considérés ici.)

On notera  $\mathcal{H}_{\text{ext}}^G$  l'algèbre de Hecke affine “étendue”, c'est-à-dire la  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -algèbre engendrée par des éléments  $(H_w : w \in W_{\text{ext}})$ , soumis aux relations

- (1)  $(H_s + v)(H_s - v^{-1}) = 0$  si  $s \in W_{\text{aff}}$  et  $\ell(s) = 1$  ;
- (2)  $H_x \cdot H_y = H_{xy}$  si  $x, y \in W_{\text{ext}}$  et  $\ell(xy) = \ell(x) + \ell(y)$ .

L'application  $\omega \mapsto H_\omega$  induit un morphisme de groupes de  $\Omega$  vers le groupe des éléments inversibles de  $\mathcal{H}_{\text{ext}}^G$ . D'autre part, l'algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_{\text{aff}}^G$  du groupe de Coxeter  $W_{\text{aff}}$  est naturellement une sous-algèbre de  $\mathcal{H}_{\text{ext}}^G$ , et la multiplication induit un isomorphisme

$$\Omega \ltimes \mathcal{H}_{\text{aff}}^G \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\text{ext}}^G$$

(où l'action de  $\Omega$  sur  $\mathcal{H}_{\text{aff}}^G$  est induite par l'action sur  $W_{\text{aff}}$ ). On notera encore  $\iota$  l'involution d'anneau de  $\mathcal{H}_{\text{ext}}^G$  déterminée par  $\iota(v^n H_w) = (-v)^{-n} H_w$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $w \in W_{\text{ext}}$ .

On “étend” la base  $p$ -canonique de  $\mathcal{H}_{\text{aff}}^G$  en une base de  $\mathcal{H}_{\text{ext}}^G$  en posant

$${}^p\mathbf{H}_w := H_\omega \cdot {}^p\mathbf{H}_y \quad \text{si } w = y'\omega' \text{ avec } \omega \in \Omega \text{ et } y \in W_{\text{aff}}.$$

(On peut vérifier que si  $w = y'\omega'$  avec  $y' \in W_{\text{aff}}$  et  $\omega' \in \Omega$ , alors on a aussi  ${}^p\mathbf{H}_w = {}^p\mathbf{H}_{y'} \cdot H_{\omega'}$ .)

Du point de vue géométrique, on peut considérer comme au §7.2 les variétés de drapeaux affines  $\text{Fl}_G$  et  $\text{Fl}_G^{\text{op}}$ , leurs catégories dérivées mixtes  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Fl}_G, \mathbb{k})$  et  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Fl}_G^{\text{op}}, \mathbb{k})$ , et les isomorphismes naturels

$$\varphi_{\text{Fl}_G}^{\mathbb{k}} : [D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Fl}_G, \mathbb{k})] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\text{ext}}^G, \quad \varphi_{\text{Fl}_G^{\text{op}}}^{\mathbb{k}} : [D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Fl}_G^{\text{op}}, \mathbb{k})] \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_{\text{ext}}^G$$

déterminés par  $\varphi_{\text{Fl}_G}^{\mathbb{k}}(\Delta_{\text{Fl}_G, w}^{\text{mix}}\{n\}) = v^n H_w$  et  $\varphi_{\text{Fl}_G^{\text{op}}}^{\mathbb{k}}(\Delta_{\text{Fl}_G^{\text{op}}, w}^{\text{mix}}\{n\}) = v^n H_w$  pour  $n \in \mathbb{Z}$  et  $w \in W_{\text{ext}}$ .

**Proposition 8.7.** *Supposons que  $p$  est très bon pour  $G$  et différent de 2. Pour tout  $w \in W_{\text{ext}}$  on a*

$$\varphi_{\text{Fl}_G}^{\mathbb{k}}([\mathcal{E}_{\text{Fl}_G, w}^{\text{mix}}]) = {}^p\mathbf{H}_w, \quad \varphi_{\text{Fl}_G^{\text{op}}}^{\mathbb{k}}([\mathcal{F}_{\text{Fl}_G^{\text{op}}, w}^{\text{mix}}]) = \iota({}^p\mathbf{H}_w).$$

*Démonstration.* On se ramène facilement au cas où  $w \in W_{\text{aff}}$ . Dans ce cas les formules voulues découlent du Théorème 7.4, puisque la composante connexe  $\text{Fl}_G^{\circ}$  de  $\text{Fl}_G$  contenant le point de base s’identifie à la variété de drapeaux affine du recouvrement simplement connexe du sous-groupe dérivé de  $G$ , qui lui-même est un produit de groupes quasi-simples et simplement connexes (voir [AMRW2, §7.1] pour plus de détails).  $\square$

**8.4. Dualité de Koszul constructible parabolique.** Dans [AMRW2] nous démontrons également une version “parabolique” du Théorème 7.4. Pour simplifier, ici nous n’énonçons ce résultat que dans un cas particulier, dans le cadre des variétés de drapeaux affines.

On continue de supposer que  $G$  est un groupe réductif connexe complexe quelconque, et on considère comme au §7.2 sa “Grassmannienne affine opposée”  $\text{Gr}_G^{\text{op}} := G_{\mathcal{O}} \backslash G_{\mathcal{X}}$ . Cette variété admet une décomposition de Bruhat en terme d’orbites pour l’action du sous-groupe d’Iwahori  $I$  induite par multiplication à droite sur  $G_{\mathcal{X}}$ ; ses strates sont paramétrées par le sous-ensemble  ${}^0W_{\text{ext}} \subset W_{\text{ext}}$  formé des éléments  $w$  qui sont de longueur minimale dans  $W \cdot w$ . Comme pour les variétés de drapeaux des groupes de Kac–Moody, on lui associe une catégorie dérivée mixte, qu’on notera  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Gr}_G^{\text{op}}, \mathbb{k})$ . Les objets standards et costandards dans cette catégorie seront notés  $\Delta_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w}^{\text{mix}}$  et  $\nabla_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w}^{\text{mix}}$  respectivement ( $w \in {}^0W_{\text{ext}}$ ).

Fixons maintenant un corps  $\mathbb{F}$  algébriquement clos de caractéristique positive  $\ell \neq p$ , et supposons qu’il existe une racine primitive  $\ell$ -ième de l’unité dans  $\mathbb{k}$  (qu’on fixe). Notons  $G_{\mathbb{F}}$  le  $\mathbb{F}$ -groupe algébrique réductif connexe dont la donnée radicielle est la même que celle de  $(G, T)$ . Notons également  $B_{\mathbb{F}} \subset G_{\mathbb{F}}$  le sous-groupe de Borel et  $T_{\mathbb{F}} \subset B_{\mathbb{F}}$  le tore maximal correspondant à  $B$  et  $T$ . Nous noterons  $B_{\mathbb{F}}^+$  le sous-groupe de Borel de  $G_{\mathbb{F}}$  qui est opposé à  $B_{\mathbb{F}}$  par rapport à  $T_{\mathbb{F}}$ , et  $U_{\mathbb{F}}^+$  son radical unipotent. En fixant une trivialisations de chacun des sous-espaces radiciels de  $U_{\mathbb{F}}^+$  correspondant à une racine simple, et en composant avec le morphisme somme, on obtient un “caractère additif non dégénéré”

$$\chi : U_{\mathbb{F}}^+ \rightarrow \mathbb{G}_{\mathbb{a}, \mathbb{F}}.$$

Notre choix de racine primitive  $\ell$ -ième de l’unité dans  $\mathbb{k}$  définit un faisceau d’Artin–Schreier sur  $\mathbb{G}_{\mathbb{a}, \mathbb{F}}$ , qu’on notera  $\mathcal{L}_{\text{AS}}$ .

Considérons maintenant la variété de drapeaux affine

$$\mathrm{Fl}_{G_{\mathbb{F}}} = G_{\mathbb{F}((z))}/I_{\mathbb{F}}$$

définie comme précédemment, en remplaçant  $\mathbb{C}$  par  $\mathbb{F}$ . On considérera également le sous-groupe d'Iwahori  $I_{\mathbb{F}}^+ \subset G_{\mathbb{F}[[z]]}$  associé à  $B_{\mathbb{F}}^+$ , dont on notera  $I_{u,\mathbb{F}}^+$  le radical pro-unipotent. Il existe une surjection naturelle  $I_{u,\mathbb{F}}^+ \rightarrow U_{\mathbb{F}}^+$ , dont on notera  $\chi_I$  la composée avec  $\chi$ . Nous noterons alors

$$D_{\mathcal{I}\mathcal{W}}^b(\mathrm{Fl}_G, \mathbb{k})$$

la catégorie dérivée des  $\mathbb{k}$ -faisceaux étales sur  $\mathrm{Fl}_{G_{\mathbb{F}}}$  qui sont  $(I_{u,\mathbb{F}}^+, \chi_I^* \mathcal{L}_{\mathrm{AS}})$ -équivariants. (Ici, la notation  $\mathcal{I}\mathcal{W}$  est un symbole pour ‘‘Iwahori–Whittaker’’.) Dans cette catégorie on peut considérer les objets à parité, puis définir la catégorie dérivée mixte associée  $D_{\mathcal{I}\mathcal{W}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Fl}, \mathbb{k})$  et sa  $t$ -structure perverse. Les orbites de  $I_{u,\mathbb{F}}^+$  sur  $\mathrm{Fl}$  sont paramétrées naturellement par  $W_{\mathrm{ext}}$ ; celles qui supportent un système local  $(I_{u,\mathbb{F}}^+, \chi_I^* \mathcal{L}_{\mathrm{AS}})$ -équivariant non nul sont celles paramétrées par les éléments de  ${}^0W_{\mathrm{ext}}$ . Les objets standards et costandards associés à  $w \in {}^0W_{\mathrm{ext}}$  dans  $D_{\mathcal{I}\mathcal{W}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Fl}, \mathbb{k})$  seront notés  $\Delta_{\mathcal{I}\mathcal{W},w}^{\mathrm{mix}}$  et  $\nabla_{\mathcal{I}\mathcal{W},w}^{\mathrm{mix}}$  respectivement.

Dans [AMRW2, Theorem 7.4], sous l’hypothèse où  $G$  est quasi-simple et simplement connexe, on construit une dualité de Koszul formelle

$$(8.3) \quad D_{\mathcal{I}\mathcal{W}}^b(\mathrm{Fl}, \mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{op}}, \mathbb{k})$$

dont la bijection associée sur les ensembles de paramètres est  $\mathrm{id}_{{}^0W_{\mathrm{aff}}}$ .

Cette dualité admet l’interprétation ‘‘combinatoire’’ suivante, qui s’étend en fait au cas des groupes réductifs arbitraires. Considérons l’algèbre de Hecke  $\mathcal{H}_W$  associée à  $W$  (pour sa structure de groupe de Coxeter déterminée par  $B$ ). Alors  $\mathcal{H}_W$  est une sous-algèbre de  $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^G$ , et elle possède deux actions naturelles sur  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ : l’action ‘‘triviale’’, pour laquelle  $H_w$  agit par multiplication par  $v^{-\ell(w)}$  (pour tout  $w \in W$ ), et l’action ‘‘signe’’, pour laquelle  $H_w$  agit par multiplication par  $(-v)^{\ell(w)}$  (pour tout  $w \in W$ ). Les modules correspondants seront notés  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathrm{triv}}$  et  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathrm{sgn}}$ . On considère alors les modules ‘‘sphérique’’ et ‘‘antisphérique’’ de  $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^G$  définis par

$$\mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{sph}} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathrm{triv}} \otimes_{\mathcal{H}_W} \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^G \quad \text{et} \quad \mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{asph}} := \mathbb{Z}[v, v^{-1}]_{\mathrm{sgn}} \otimes_{\mathcal{H}_W} \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^G$$

respectivement. L’automorphisme  $\iota$  induit un isomorphisme  $\mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{sph}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{asph}}$ , qu’on notera encore  $\iota$ , et qui vérifie

$$(8.4) \quad \iota(x \cdot h) = \iota(x) \cdot \iota(h)$$

pour  $x \in \mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{sph}}$  et  $h \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^G$ .

Chacun de ces modules possède une ‘‘base standard’’ paramétrée par  ${}^0W_{\mathrm{ext}}$ , et définie par

$$M_w := 1 \otimes H_w \in \mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{sph}}, \quad N_w := 1 \otimes H_w \in \mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{asph}}.$$

Ils possèdent également des bases  $p$ -canoniques ( ${}^pM_w$  :  $w \in {}^0W_{\mathrm{ext}}$ ) et ( ${}^pN_w$  :  $w \in {}^0W_{\mathrm{ext}}$ ) qui sont reliées à la base canonique de  $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^G$  de la façon suivante. (Ces bases peuvent être définies indépendamment des relations qui suivent, mais elles sont caractérisées par celles-ci.) Notons  $\xi : \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^G \rightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{asph}}$  l’application naturelle (avec  $\xi(H) = 1 \otimes H$ ) et  $\eta : \mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{sph}} \rightarrow \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}^G$  l’application déterminée par  $\eta(1 \otimes H) = \underline{H}_{w_0} \cdot H$ ,

où  $w_0$  est l'élément de plus grande longueur dans  $W$ . Alors pour  $w \in W_{\text{ext}}$  on a

$$(8.5) \quad \xi({}^p\underline{H}_w) = \begin{cases} {}^p\underline{N}_w & \text{si } w \in {}^0W_{\text{ext}}; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et pour  $w \in {}^0W_{\text{ext}}$  on a

$$(8.6) \quad \eta({}^p\underline{M}_x) = {}^p\underline{H}_{w_0x}.$$

Ces bases déterminent des  $p$ -polynômes de Kazhdan–Lusztig sphériques et anti-sphériques respectivement, définis par les égalités

$${}^p\underline{M}_y = \sum_{x \in {}^0W_{\text{ext}}} {}^p m_{x,y} \cdot M_x, \quad {}^p\underline{N}_y = \sum_{x \in {}^0W_{\text{ext}}} {}^p n_{x,y} \cdot N_x.$$

(Comme dans le cas des bases  $p$ -canoniques des algèbres de Hecke au §8.1, ces bases dépendent du groupe  $G$  et pas seulement du groupe  $W_{\text{ext}}$ . Mais pour alléger les notations nous ne ferons pas apparaître cette dépendance.)

On a des isomorphismes canoniques

$$(8.7) \quad [D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Gr}_G^{\text{op}}, \mathbb{k})] \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{sph}}, \quad [D_{\text{IW}}^{\text{b}}(\text{Fl}, \mathbb{k})] \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{asph}}$$

envoyant  $[\Delta_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w}^{\text{mix}}\{n\}]$  sur  $v^n M_w$  et  $[\Delta_{\text{IW}, w}^{\text{mix}}\{n\}]$  sur  $v^n N_w$  respectivement. Les images des objets à parité indécomposables associés à  $w \in {}^0W_{\text{ext}}$  dans  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Gr}_G^{\text{op}}, \mathbb{k})$  et  $D_{\text{IW}}^{\text{b}}(\text{Fl}, \mathbb{k})$  seront notés  $\mathcal{E}_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w}^{\text{mix}}$  et  $\mathcal{E}_{\text{IW}, w}^{\text{mix}}$  respectivement. Pour  $w \in {}^0W_{\text{ext}}$ , on notera également  $\mathcal{T}_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w}^{\text{mix}}$  et  $\mathcal{T}_{\text{IW}, w}^{\text{mix}}$  les faisceaux pervers basculants associés à  $w$  dans  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Gr}_G^{\text{op}}, \mathbb{k})$  et  $D_{\text{IW}}^{\text{b}}(\text{Fl}, \mathbb{k})$  respectivement.

*Remarque 8.8.* Les formules (8.5) et (8.6) ont des interprétations en termes de complexes à parité sur les variétés de drapeaux affines : voir [RW1, Corollary 11.10] pour (8.5) et [ACR, Lemma A.5] pour (8.6).

Le résultat suivant découle des propriétés de l'équivalence (8.3), suivant les mêmes arguments que pour la Proposition 8.7.

**Proposition 8.9.** *Via les identifications (8.7), les classes  $[\mathcal{E}_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w}^{\text{mix}}]$  et  $[\mathcal{T}_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w}^{\text{mix}}]$  correspondent à  ${}^p\underline{M}_w$  et  $\iota^{-1}({}^p\underline{N}_w)$  respectivement, et les classes  $[\mathcal{E}_{\text{IW}, w}^{\text{mix}}]$  et  $[\mathcal{T}_{\text{IW}, w}^{\text{mix}}]$  correspondent à  ${}^p\underline{N}_w$  et  $\iota({}^p\underline{M}_w)$  respectivement.*

*Remarque 8.10.* Au §7.2 on a considéré la catégorie dérivée mixte  $D_{(\text{Iw})}^{\text{mix}}(\text{Gr}_G, \mathbb{k})$  des faisceaux sur la Grassmannienne affine ‘‘usuelle’’  $\text{Gr}_G = G_{\mathcal{X}}/G_{\emptyset}$  munie de la stratification par les orbites du sous-groupe d'Iwahori *positif*  $\text{Iw}$ . Cette catégorie est reliée à catégorie  $D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Gr}_G^{\text{op}}, \mathbb{k})$  (définie pour la stratification par les orbites du sous-groupe d'Iwahori *néгатif*) considérée ici de la façon suivante. Considérons un anti-automorphisme de  $G$  qui se restreint à l'identité sur  $T$ , et qui échange les sous-groupes de Borel positif et négatif. Cet anti-automorphisme induit un anti-automorphisme de  $G_{\mathcal{X}}$  qui stabilise  $G_{\emptyset}$ , et donc un isomorphisme de ind-variétés  $\text{Gr}_G \xrightarrow{\sim} \text{Gr}_G^{\text{op}}$ . Cet isomorphisme échange la Iw-orbite paramétrée par  $\lambda \in X_*(T)$  et la I-orbite paramétrée par  $w_\lambda$ ; elle induit donc une équivalence de catégories

$$D_{(\text{Iw})}^{\text{mix}}(\text{Gr}_G, \mathbb{k}) \xrightarrow{\sim} D_{\text{Br}}^{\text{mix}}(\text{Gr}_G^{\text{op}}, \mathbb{k})$$

envoyant  $\Delta_{\text{Gr}_G, \lambda}^{\text{mix}}$  sur  $\Delta_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w_\lambda}^{\text{mix}}$ ,  $\nabla_{\text{Gr}_G, \lambda}^{\text{mix}}$  sur  $\nabla_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w_\lambda}^{\text{mix}}$ ,  $\mathcal{E}_{\text{Gr}_G, \lambda}^{\text{mix}}$  sur  $\mathcal{E}_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w_\lambda}^{\text{mix}}$  et  $\mathcal{F}_{\text{Gr}_G, \lambda}^{\text{mix}}$  sur  $\mathcal{F}_{\text{Gr}_G^{\text{op}}, w_\lambda}^{\text{mix}}$ . On en déduit un isomorphisme

$$(8.8) \quad [D_{(\text{Iw})}^{\text{mix}}(\text{Gr}_G, \mathbb{k})] \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{sph}}$$

envoyant  $[\Delta_{\text{Gr}_G, \lambda}^{\text{mix}}\{n\}]$  sur  $v^n M_{w_\lambda}$ ,  $[\mathcal{E}_{\text{Gr}_G, \lambda}^{\text{mix}}]$  sur  ${}^p M_{w_\lambda}$  et  $[\mathcal{F}_{\text{Gr}_G, \lambda}^{\text{mix}}]$  sur  $\iota^{-1}({}^p N_{w_\lambda})$ , pour tout  $\lambda \in X_*(T)$ .

**8.5. Base  $p$ -canonique et faisceaux exotiques.** Reprenons les notations introduites au §7.4. La base  $p$ -canonique du module  $\mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{sph}}$  encode également la combinatoire des objets basculants et à parité pour la  $t$ -structure exotique sur  $D^{\text{b}}\text{Coh}^{\mathfrak{G} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}})$ . En effet, en combinant l'isomorphisme (8.8) avec celui induit par l'équivalence du Théorème 7.7, on obtient un isomorphisme

$$[D^{\text{b}}\text{Coh}^{\mathfrak{G} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathfrak{G}})] \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{sph}}$$

envoyant  $[\Delta_\lambda^{\text{Coh}}\langle n \rangle]$  sur  $v^n M_{w_\lambda}$ ,  $[\mathcal{T}_\lambda]$  sur  ${}^p M_{w_\lambda}$  et  $[\mathcal{E}_\lambda]$  sur  $\iota^{-1}({}^p N_{w_\lambda})$ , pour tout  $\lambda \in \mathbf{X}$  et tout  $n \in \mathbb{Z}$ . (Ici l'algèbre de Hecke considérée est celle associée au groupe réductif complexe  $G^\vee$  dual de  $\mathfrak{G}$  au sens de Langlands.) Sous cet isomorphisme, l'action de  $\mathcal{H}_{\text{ext}}$  est induite par l'action catégorique du groupe de tresses affine étudiée dans [BR, R1]; plus précisément, l'action (à droite) de  $H_w$  est induite par le foncteur noté  $\mathcal{J}_{(T_{w^{-1}})^{-1}}$  dans [MR1].

## 9. APPLICATIONS EN THÉORIE DES REPRÉSENTATIONS

**9.1. Formule de caractères pour les modules basculants.** Notre motivation principale pour développer les travaux exposés au §7 était une application à un calcul de caractères dans la théorie des représentations des groupes réductifs, qu'on présente maintenant.

Comme au §7.6, soit  $\mathbf{G}$  un groupe algébrique réductif dont le sous-groupe dérivé est simplement connexe, soit  $\mathbf{B} \subset \mathbf{G}$  un sous-groupe de Borel, et soit  $\mathbf{T} \subset \mathbf{B}$  un tore maximal. Si on considère les constructions du §8.4 pour le groupe  $G = G^\vee$  qui est dual de  $\mathbf{G}$  au sens de Langlands, le groupe  $W_{\text{aff}}$  s'interprète comme le "groupe de Weyl affine" associé à  $\mathbf{G}$  comme dans [Ja]. L'algèbre de Hecke affine étendue associée sera notée simplement  $\mathcal{H}_{\text{ext}}$ . On supposera que  $p > h$ , où  $h$  est le nombre de Coxeter de  $\mathbf{G}$ .

La formule suivante a été conjecturée par G. Williamson et le second auteur dans [RW1]. Dans cet énoncé on considère la base  $p$ -canonique du module antisphérique définie comme au §8.4, pour le groupe  $G^\vee$ , et on note  $(\mathbb{T}_w : \mathbb{N}_y)$  le nombre d'occurrences de  $\mathbb{N}_y$  dans une filtration costandard de  $\mathbb{T}_w$ .

**Conjecture 9.1.** *Pour tous  $y, w \in {}^0W_{\text{ext}}$  on a*

$$(\mathbb{T}_w : \mathbb{N}_y) = {}^p n_{y, w}(1).$$

*Remarque 9.2.* (1) Plus précisément, dans [RW1] cette formule est conjecturée sous l'hypothèse où  $y, w$  sont dans  ${}^0W_{\text{ext}}$ . Cependant, en utilisant les propriétés usuelles des foncteurs de translation (voir [Ja]) on voit que les deux versions sont équivalentes.

(2) La formule énoncée dans la Conjecture 9.1 est très proche de (et inspirée par) la formule de multiplicités pour les modules basculants des groupes quantiques de Lusztig en une racine de l'unité conjecturée par Soergel dans [So2] puis démontrée peu après par lui-même dans [So3] (voir également [So4]).



Une extension de cette formule au cas des représentations modulaires des groupes réductifs a été proposée par Andersen (voir notamment [An]). Mais la Conjecture 9.1 est différente de celle d’Andersen dans la mesure où elle s’exprime en termes des  $p$ -polynômes de Kazhdan–Lusztig, et non des polynômes de Kazhdan–Lusztig ordinaires. D’autre part, elle n’impose aucune condition sur  $w$ . (Cette propriété est liée au fait que les  $p$ -polynômes de Kazhdan–Lusztig antisphériques “intègrent” la formule de Donkin modulaire, alors que leurs analogues ordinaires n’intègrent “que” sa version quantique ; voir le §9.3 ci-dessous pour plus de détails.)

- (3) Une remarque d’Andersen (basée sur des travaux antérieurs de Jantzen et de Donkin) montre que si on connaît les multiplicités  $(\mathbf{T}_w : \mathbf{N}_y)$  pour certaines valeurs de  $w$ , on peut en déduire une formule de caractères pour les modules simples  $L_x$  (pour tous les  $x \in {}^0W_{\text{ext}}$ ) ; voir [RW1, §1.8] pour des détails et des références. Cependant, la formule obtenue suivant cette approche s’avère assez peu éclairante. Pour une formule plus satisfaisante, on pourra consulter [RW2].
- (4) Considérons l’isomorphisme de groupes abéliens

$$\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]} \mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{asph}} \xrightarrow{\sim} [\text{Rep}_{\emptyset}(\mathbf{G})]$$

(où  $\mathbb{Z}$  est vu comme  $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -module via  $v \mapsto 1$ ) envoyant  $1 \otimes N_w$  sur  $[\mathbf{N}_w] = [\mathbf{M}_w]$  pour tout  $w \in {}^0W_{\text{ext}}$ . L’action de  $\mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}[v, v^{-1}]} \mathcal{H}_{\text{ext}}$  sur le membre de gauche se réalise en termes du membre de droite de la façon suivante : pour tout  $s \in W_{\text{aff}}$  tel que  $\ell(s) = 1$ , la multiplication by  $\underline{H}_s$  correspond au morphisme induit par le foncteur  $\Theta_s$ <sup>4</sup> de “croisement des murs” associé à  $s$ . La Conjecture 9.1 peut se reformuler en disant que cet isomorphisme envoie  $1 \otimes {}^pN_w$  sur  $[\mathbf{T}_w]$ , pour tout  $w \in {}^0W_{\text{ext}}$ .

L’article [RW1] contient un plan de preuve de la Conjecture 9.1 (suivant des idées de “représentations catégoriques” dues à Rouquier et Khovanov–Lauda), ainsi que sa mise en oeuvre effective dans le cas particulier où  $\mathbf{G} = \text{GL}_n(\mathbb{k})$ . Cependant, cette approche semble très difficile à mettre en pratique pour d’autres groupes. L’application principale des travaux présentés au §7 est une preuve générale de cette conjecture, basée sur des idées différentes inspirées de certains travaux de Bezrukavnikov (avec divers collaborateurs) consacrés aux groupes quantiques (et notamment [ABG]).

Nous obtenons finalement le résultat suivant.

**Théorème 9.3.** *La conjecture 9.1 est vraie.*

*Démonstration.* En combinant les foncteurs des Théorèmes 7.7 et 7.10 on obtient un foncteur de dégradation (au sens du §5.7, et par rapport à  $\langle 1 \rangle$ ) de  $D_{(\mathbb{I}w)}^{\text{mix}}(\text{Gr}_{G^v}, \mathbb{k})$  vers  $D^b \text{Rep}_{\emptyset}(\mathbf{G})$ . Ce foncteur envoie  $\nabla_{\text{Gr}_{G^v}, \lambda}^{\text{mix}}$  sur  $\mathbf{N}_{w_\lambda}$ ,  $\Delta_{\text{Gr}_{G^v}, \lambda}^{\text{mix}}$  sur  $\mathbf{M}_{w_\lambda}$ , et  $\mathcal{T}_{\text{Gr}_{G^v}, \lambda}^{\text{mix}}$  sur  $\mathbf{T}_{w_\lambda}$ , pour tout  $\lambda \in \mathbf{X}$ . On en déduit que pour tous  $w, y \in {}^0W_{\text{ext}}$  on a

$$(\mathbf{T}_w : \mathbf{N}_y) = (\mathbf{T}_w : \mathbf{M}_y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\mathcal{T}_{\text{Gr}_{G^v}, \lambda}^{\text{mix}} : \Delta_{\text{Gr}_{G^v}, \mu}^{\text{mix}} \langle n \rangle),$$

où  $\lambda$  et  $\mu$  sont les poids tels que  $w = w_\lambda$  et  $y = w_\mu$ . Le résultat voulu découle alors de la Remarque 8.10.  $\square$

4. Avec les notations de [AR4], on a  $\Theta_s := T_{\{s\}}^{\emptyset} \circ T_{\emptyset}^{\{s\}}$ .

**9.2. Support des modules basculants et conjecture de Humphreys.** On continue dans le cadre du §9.1. Soit  $\text{Fr} : \mathbf{G} \rightarrow \dot{\mathbf{G}}$  le morphisme de Frobenius, et notons  $\mathbf{G}_1$  son noyau (un  $\mathbb{k}$ -schéma en groupes fini). Dans ce paragraphe nous présentons une application des constructions du §7.6 au calcul de la cohomologie

$$\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{G}_1, M) = \text{Ext}_{\mathbf{G}_1}^\bullet(\mathbb{k}, M)$$

de  $\mathbf{G}_1$  à coefficients dans un  $\mathbf{G}$ -module  $M$  (ou plus généralement dans un complexe de  $\mathbf{G}$ -modules). Dans le cas où  $M$  est un  $\mathbf{G}$ -module basculant, cette approche permet de démontrer une conjecture de Humphreys sur le support de cette cohomologie.

Notons que pour tout  $M$  dans  $D^b\text{Rep}(\mathbf{G})$ , l'espace vectoriel gradué  $\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{G}_1, M)$  admet une action naturelle de  $\mathbf{G}$ , qui se factorise via une action de  $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{G}/\mathbf{G}_1$ .

**Proposition 9.4.** *Pour tout  $\mathcal{F} \in D^b\text{Coh}^{\dot{\mathbf{G}} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}})$  et tout  $k \in \mathbb{Z}$ , il existe un isomorphisme canonique et  $\dot{\mathbf{G}}$ -équivariant*

$$\mathbf{H}^k(\mathbf{G}_1, \Xi(\mathcal{F})) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} R^{n+k}\Gamma(\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}}, \mathcal{F})_{-n}.$$

Ici  $\Xi$  est le foncteur du Théorème 7.10, et le “ $-n$ ” en indice dans le membre de droite désigne la composante graduée de degré  $-n$ . (Notons que les espaces vectoriels  $R^i\Gamma(\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}}, \mathcal{F})$  ont une structure naturelle de  $\dot{\mathbf{G}} \times \mathbb{G}_m$ -module. La graduation provient de l'action de  $\mathbb{G}_m$ .)

*Démonstration.* Par adjonction, pour tout  $\mathbf{G}$ -module  $M$ , on a

$$\text{Ext}_{\mathbf{G}_1}^\bullet(\mathbb{k}, M) \cong \text{Ext}_{\mathbf{G}}^\bullet(\mathbb{k}, M \otimes \text{Fr}^*\mathbb{k}[\dot{\mathbf{G}}]),$$

où  $\mathbb{k}[\dot{\mathbf{G}}]$  est l'anneau des fonctions sur  $\dot{\mathbf{G}}$ . Ensuite, nous exploitons l'amplification suivante du Théorème 7.10 : si  $V$  est un  $\mathbf{G}$ -module, alors pour tout  $\mathcal{F} \in D^b\text{Coh}^{\dot{\mathbf{G}} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}})$  il existe un isomorphisme naturel

$$\Xi(\mathcal{F} \otimes V) \cong \Xi(\mathcal{F}) \otimes \text{Fr}^*(V)$$

(voir [AR4]). Supposons désormais que  $M = \Xi(\mathcal{F})$ . Puisque  $\Xi$  est un foncteur de dégradation pour  $\langle -1 \rangle[1]$  (voir le Lemme 6.7), on a

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{\mathbf{G}_1}^k(\mathbb{k}, M) &\cong \text{Ext}_{\mathbf{G}}^k(\Xi(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}}}), \Xi(\mathcal{F}) \otimes \text{Fr}^*\mathbb{k}[\dot{\mathbf{G}}]) \\ &\cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{D^b\text{Coh}^{\dot{\mathbf{G}} \times \mathbb{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}})}(\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}}}, \mathcal{F} \otimes \mathbb{k}[\dot{\mathbf{G}}]\langle -n \rangle[n+k]) \\ &\cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}_{D^b\text{Rep}(\dot{\mathbf{G}} \times \mathbb{G}_m)}(\mathbb{k}, R\Gamma(\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}}, \mathcal{F})\langle -n \rangle[n+k] \otimes \mathbb{k}[\dot{\mathbf{G}}]). \end{aligned}$$

La proposition est alors une conséquence du fait que pour tout  $\dot{\mathbf{G}}$ -module  $M$ , l'espace  $\text{Hom}_{\mathbf{G}}(\mathbb{k}, M \otimes \mathbb{k}[\dot{\mathbf{G}}])$  s'identifie canoniquement à l'espace vectoriel sous-jacent à  $M$ .  $\square$

Soit  $\mathcal{N}_{\dot{\mathbf{G}}}$  le cône nilpotent dans l'algèbre de Lie de  $\dot{\mathbf{G}}$ , et notons

$$\pi : \tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}} \rightarrow \mathcal{N}_{\dot{\mathbf{G}}}$$

la *résolution de Springer*. Rappelons que c'est une résolution *rationnelle* ; en d'autres termes on a  $\pi_*\mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}}} \cong \mathcal{O}_{\mathcal{N}_{\dot{\mathbf{G}}}}$ , ou, puisque  $\mathcal{N}_{\dot{\mathbf{G}}}$  est une variété affine,  $R\Gamma(\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}}, \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\dot{\mathbf{G}}}}) \cong$

$\mathbb{k}[\mathcal{N}_{\mathbf{G}}]$  (voir [KLT, Theorem 2]). Par conséquent, dans le cas où  $\mathcal{F} = \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{N}}_{\mathbf{G}}}$ , la Proposition 9.4 nous donne un isomorphisme

$$\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{G}_1, \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}[\mathcal{N}_{\mathbf{G}}],$$

dont on vérifie facilement qu'il s'agit d'un isomorphisme d'anneaux (où le membre de gauche est muni du produit de Yoneda.) On retrouve ainsi un célèbre résultat d'Andersen–Jantzen [AJ] (démontré également par Friedlander–Parshall [FP] sous des hypothèses légèrement plus fortes).

Pour tout  $\mathbf{G}$ -module  $M$ , la cohomologie  $\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{G}_1, M)$  est munie d'une structure de module sur  $\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{G}_1, \mathbb{k})$ , et donc sur  $\mathbb{k}[\mathcal{N}_{\mathbf{G}}]$ , et par là peut s'interpréter comme un faisceau quasi-cohérent sur  $\mathcal{N}_{\mathbf{G}}$ . Le support de ce dernier (une sous-variété fermée de  $\mathcal{N}_{\mathbf{G}}$ ) est appelé la *variété de support relative* de  $M$ . La *variété de support* ordinaire (i.e., non relative) est définie de la même façon en remplaçant  $\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{G}_1, M)$  par  $\text{Ext}_{\mathbf{G}_1}^\bullet(M, M)$ . Les idées de la preuve de la Proposition 9.4 s'adaptent aisément pour démontrer l'énoncé suivant.

**Proposition 9.5.** *Pour tout  $\mathcal{F} \in D^b\text{Coh}^{\mathbf{G} \times \mathbf{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathbf{G}})$ , la variété de support relative de  $\Xi(\mathcal{F})$  est le support de l'objet  $\pi_*\mathcal{F} \in D^b\text{Coh}^{\mathbf{G} \times \mathbf{G}_m}(\mathcal{N}_{\mathbf{G}})$ .*

Considérons maintenant les variétés de support relatives des  $\mathbf{G}$ -modules basculants  $\mathbb{T}_w$  avec  $w \in W_{\text{aff}}$ . Il n'est pas difficile de voir que si  $\lambda \in \mathbb{Z}R$  n'est pas antidominant, alors  $\mathbf{H}^\bullet(\mathbf{G}_1, \mathbb{T}_{w_\lambda}) = 0$ , et donc sa variété de support relative est vide. La *conjecture de Humphreys relative* propose une description de la variété de support relative de  $\mathbb{T}_{w_\lambda}$  pour  $\lambda \in (-\mathbf{X}^+) \cap \mathbb{Z}R$ .<sup>5</sup> Pour expliquer cette conjecture, rappelons que  $W_{\text{aff}}$  se répartit en *cellules bilatères*, et que ces dernières sont en bijection naturelle avec les  $\mathbf{G}$ -orbites dans  $\mathcal{N}_{\mathbf{G}}$  [Lu2]. Pour  $\lambda \in \mathbf{X}$ , posons

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_\lambda &:= \text{la cellule bilatère qui contient } w_\lambda, \\ C_{\mathbf{c}_\lambda} &:= \text{la } \mathbf{G}\text{-orbite dans } \mathcal{N}_{\mathbf{G}} \text{ qui correspond à } \mathbf{c}_\lambda. \end{aligned}$$

Ces notations permettent d'énoncer le théorème suivant, qui est l'un des résultats principaux de [AHR].

**Théorème 9.6** (Conjecture de Humphreys relative). *Si la caractéristique  $p$  de  $\mathbb{k}$  est assez grande, ou si  $\mathbf{G} = \text{SL}_n$  et  $p > n + 1$ , alors pour tout  $\lambda \in (-\mathbf{X}^+) \cap \mathbb{Z}R$  la variété de support relative de  $\mathbb{T}_{w_\lambda}$  est  $\overline{C_{\mathbf{c}_\lambda}}$ .*

*Remarque 9.7.* (1) Dans [AHR] on démontre également une version non relative de ce résultat, pour  $p$  assez grand.

- (2) Dans le cas  $\mathbf{G} = \text{SL}_n$  (et  $p > n + 1$ ), ce théorème est obtenu comme corollaire de sa version non relative, démontrée par W. Hardesty dans [Ha].
- (3) Dans le cas général, les méthodes utilisées dans [AHR] ne permettent pas de déterminer explicitement une borne sur  $p$  au-delà de laquelle la conjecture est vraie.

---

<sup>5</sup> La conjecture telle qu'énoncée dans [Hu] concerne les variétés de support ordinaires, mais celles-ci sont étroitement liées aux variétés de support relatives : voir notamment [AHR, Lemma 8.11 et Remark 9.4].

**9.3. Une “formule de Donkin” pour la base  $p$ -canonique antisphérique.** Continuons avec les notations du §9.1. Pour  $\lambda \in \mathbf{X}$ , on notera  $\vartheta_\lambda$  l’élément de Bernstein de  $\mathcal{H}_{\text{ext}}$  associé, qui est défini par

$$\vartheta_\lambda = (H_{t_\mu}) \cdot (H_{t_\nu})^{-1} = (H_{t_\nu})^{-1} \cdot H_{t_\mu}$$

où  $\lambda = \mu - \nu$  avec  $\mu, \nu \in \mathbf{X}^+$ ; voir par exemple [Lu1]. (Il est bien connu que cet élément ne dépend pas du choix de  $\mu$  et  $\nu$ .) Pour tout  $V$  dans  $\text{Rep}(\dot{\mathbf{G}})$ , on posera

$$\vartheta_V := \sum_{\lambda \in \mathbf{X}} \dim(V_\lambda) \cdot \vartheta_\lambda.$$

(Ici,  $V_\lambda$  désigne le sous-espace de poids  $\lambda$  dans  $V$ , où on a identifié  $\mathbf{X}$  aux caractères de  $\dot{\mathbf{T}}$  comme au §7.6. Cette somme est bien sûr finie, et a donc un sens.) Puisque  $\dim(V_{w\lambda}) = \dim(V_\lambda)$  pour tous  $\lambda \in \mathbf{X}$  et  $w \in W$ , des résultats de Bernstein et Lusztig (voir [Lu1]) montrent que cet élément est central dans  $\mathcal{H}_{\text{ext}}$ . En particulier, on considérera ces éléments quand  $V = \dot{\mathbf{T}}(\lambda)$  est le  $\dot{\mathbf{G}}$ -module basculant indécomposable de plus haut poids  $\lambda$ .

Choisissons un poids  $\varsigma \in \mathbf{X}$  tel que  $\langle \varsigma, \alpha^\vee \rangle = 1$  pour toute racine simple  $\alpha$ . (Un tel poids existe grâce à notre hypothèse que le sous-groupe dérivé de  $\mathbf{G}$  est simplement connexe.) Nous dirons qu’un élément  $x \in {}^0W_{\text{ext}}$  est *restreint* si le poids dominant  $x \cdot_p 0$  est restreint. (Bien sûr, cette définition ne dépend pas de la caractéristique  $p$  sur laquelle on travaille, sous notre hypothèse où  $p > h$ .) Le résultat suivant est un analogue de la “formule de Donkin” pour les  $\mathbf{G}$ -modules basculants (voir [Ja, §E.9]).

**Proposition 9.8.** *Supposons que  $p \geq 2h - 1$ . Alors pour tout  $x \in {}^0W_{\text{ext}}$  tel que  $t_{-\varsigma}x$  appartient à  ${}^0W_{\text{ext}}$  et est restreint, et pour tout  $\lambda \in \mathbf{X}^+$ , on a*

$${}^pN_{t_\lambda \cdot x} = {}^pN_x \cdot \vartheta_{\dot{\mathbf{T}}(\lambda)}.$$

- Remarque 9.9.* (1) Il n’est pas difficile de voir que notre hypothèse sur  $x$  ne dépend pas du choix de  $\varsigma$ .
- (2) Puisque  $p$  est premier, l’hypothèse “ $p \geq 2h - 1$ ” est équivalente à demander que  $p \geq 2h - 2$  et  $p > h$ . Ces dernières seront les deux conditions dont nous aurons besoin.
- (3) L’hypothèse que  $p \geq 2h - 1$  n’est probablement pas nécessaire. Elle est utilisée dans la preuve pour se ramener à la formule de Donkin en théorie des représentations; mais une approche géométrique (qui serait de toute façon plus satisfaisante) devrait permettre de s’en passer.

Avant de donner la preuve de la Proposition 9.8 nous devons faire quelques rappels (pour lesquels l’hypothèse sur  $p$  n’est pas nécessaire). Considérons la catégorie  $\text{Perv}_{G^\vee}(\text{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k})$  des  $\mathbb{k}$ -faisceaux pervers  $G^\vee$ -équivariants sur  $\text{Gr}_{G^\vee}$ . Cette catégorie peut être munie d’un “produit de convolution”  $\star^{G^\vee}$  qui en fait une catégorie monoïdale, et l’équivalence de Satake géométrique fournit une équivalence de catégories monoïdales

$$\text{Sat} : (\text{Perv}_{G^\vee}(\text{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k}), \star^{G^\vee}) \xrightarrow{\sim} (\text{Rep}(\dot{\mathbf{G}}), \otimes).$$

(Voir [MV] pour la preuve originale dans cette généralité, et [BaR] pour une version plus détaillée et des remarques historiques. Cette équivalence ne nécessite aucune hypothèse sur  $p$ , ni sur  $\mathbf{G}$ .)

Si on suppose que  $p$  est très bon pour  $\mathbf{G}$ , alors la théorie des complexes à parité de [JMW] s'applique dans la catégorie dérivée équivariante  $D_{G^\vee}^b(\mathrm{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k})$ . Puisque les  $G^\vee$ -orbites dans  $\mathrm{Gr}_{G^\vee}$  sont paramétrées par  $\mathbf{X}^+$ , les complexes à parité indécomposables dans  $D_{G^\vee}^b(\mathrm{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k})$  sont paramétrés par  $\mathbf{X}^+ \times \mathbb{Z}$ ; on notera  $\mathcal{E}_\lambda^{\mathrm{sph}}$  l'objet associé à  $(\lambda, 0)$ . Les résultats de [MR2] montrent que  $\mathcal{E}_\lambda^{\mathrm{sph}}$  est un faisceau pervers, et que  $\mathrm{Sat}(\mathcal{E}_\lambda^{\mathrm{sph}})$  est isomorphe à  $\dot{\mathbb{T}}(\lambda)$ . (Voir [JMW2] pour une preuve antérieure, sous des hypothèses plus fortes.)

Continuons de supposer que  $p$  est très bon pour  $\mathbf{G}$ . Pour tout  $\lambda \in \mathbf{X}^+$ , la convolution à gauche avec  $\mathcal{E}_\lambda^{\mathrm{sph}}$  définit un endofoncteur de la catégorie  $D_{\mathrm{Br}}^b(\mathrm{Gr}_{G^\vee}^{\mathrm{op}}, \mathbb{k})$  qui stabilise les complexes à parité (grâce aux résultats de [JMW, §4.1]); elle induit donc un foncteur

$$(9.1) \quad \mathcal{E}_\lambda^{\mathrm{sph}} \star^{G^\vee} (-) : D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_{G^\vee}^{\mathrm{op}}, \mathbb{k}) \rightarrow D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_{G^\vee}^{\mathrm{op}}, \mathbb{k}).$$

**Lemme 9.10.** *Via le premier isomorphisme de (8.7), l'endomorphisme induit par le foncteur (9.1) sur  $[D_{\mathrm{Br}}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_{G^\vee}^{\mathrm{op}}, \mathbb{k})]$  est l'action de  $\vartheta_{\dot{\mathbb{T}}(\lambda)} \in \mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$  sur  $\mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{sph}}$ .*

*Démonstration.* Les deux applications considérées sont des endomorphismes de  $\mathcal{H}_{\mathrm{ext}}$ -modules à droite. Puisque  $\mathcal{M}_{\mathrm{ext}}^{\mathrm{sph}}$  est un module cyclique, il suffit donc de vérifier qu'elles coïncident sur l'élément  $M_e$ .

Pour tout  $\mu \in \mathbf{X}^+$ , on notera  $x_\mu$  l'élément de plus grande longueur dans  $Wt_\mu W$ . (Cet élément est noté  $n_\mu$  dans [Lu1].) Avec cette notation, l'image de  $M_e$  par le morphisme induit par (9.1) est  $[\mathcal{E}_\lambda^{\mathrm{sph}}] = [\mathcal{E}_{\mathrm{Gr}_G^{\mathrm{op}}, w_0 x_\lambda}^{\mathrm{mix}}]$ , c'est-à-dire  ${}^p M_{w_0 x_\lambda}$ . En comparant l'équivalence de Satake géométrique sur  $\mathbb{k}$  et en caractéristique 0, et en notant  $\dot{\mathbb{N}}(\mu)$  le  $\dot{\mathbf{G}}$ -module induit de plus haut poids  $\mu$ , on voit que

$${}^p M_{w_0 x_\lambda} = \sum_{\mu \in \mathbf{X}^+} (\dot{\mathbb{T}}(\lambda) : \dot{\mathbb{N}}(\mu)) \cdot M_{w_0 x_\mu}$$

(voir par exemple [JMW2, Remark 4.2]). D'un autre côté, on peut interpréter [Lu1, Proposition 8.6] comme disant que pour tout  $\mu \in \mathbf{X}^+$  on a

$$M_{w_0 x_\mu} = M_e \cdot \vartheta_{\dot{\mathbb{N}}(\mu)}.$$

On en déduit que

$${}^p M_{w_0 x_\lambda} = \sum_{\mu \in \mathbf{X}^+} (\dot{\mathbb{T}}(\lambda) : \dot{\mathbb{N}}(\mu)) \cdot M_e \cdot \vartheta_{\dot{\mathbb{N}}(\mu)} = M_e \cdot \vartheta_{\dot{\mathbb{T}}(\lambda)},$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

*Démonstration de la Proposition 9.8.* On a vu au cours de la preuve du Théorème 9.3 qu'il existe un foncteur de dégradation  $D_{(\mathrm{Iw})}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k}) \rightarrow D^b \mathrm{Rep}_\emptyset(\mathbf{G})$ . Ce foncteur est t-exact pour la t-structure perverse sur sa source et la t-structure tautologique sur son but. Il induit donc un foncteur exact

$$\mathbf{F} : \mathrm{Perv}_{(\mathrm{Iw})}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k}) \rightarrow \mathrm{Rep}_\emptyset(\mathbf{G}).$$

Dans [AR4, §11] on considère le foncteur de convolution à droite avec  $\mathcal{E}_\lambda^{\mathrm{sph}}$  sur  $D_{(\mathrm{Iw})}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k})$  (défini comme ci-dessus pour (9.1)). On vérifie que ce foncteur est t-exact, et induit donc un foncteur entre catégories de faisceaux pervers, et que de plus  $\mathbf{F}$  a les propriétés suivantes :

- (1)  $\mathbf{F}(\mathcal{F} \star^{G^\vee} \mathcal{E}_\lambda^{\mathrm{sph}}) \cong \mathbf{F}(\mathcal{F}) \otimes_{\mathbb{k}} \mathrm{Fr}^*(\dot{\mathbb{T}}(\lambda))$  pour  $\mathcal{F}$  dans  $\mathrm{Perv}_{(\mathrm{Iw})}^{\mathrm{mix}}(\mathrm{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k})$  et  $\lambda \in \mathbf{X}^+$ ;

- (2) un objet  $\mathcal{F}$  de  $\text{Perv}_{(Iw)}^{\text{mix}}(\text{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k})$  est basculant (resp. basculant et indécomposable) ssi son image  $F(\mathcal{F})$  est un  $\mathbf{G}$ -module basculant (resp. un  $\mathbf{G}$ -module basculant et indécomposable).

Sous nos hypothèses un résultat de Donkin (voir [Ja, §II.E.9]) assure que

$$\mathbb{T}_x \otimes \text{Fr}^*(\dot{\mathbb{T}}(\lambda)) \cong \mathbb{T}_{t_\lambda x}$$

pour  $x$  comme dans l'énoncé et  $\lambda \in \mathbf{X}^+$ . En utilisant les propriétés de  $F$  rappelées ci-dessus, on en déduit que

$$\mathcal{T}_{\text{Gr}_{G^\vee}, \mu}^{\text{mix}} \star^{G_\sigma^\vee} \mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}} \cong \mathcal{T}_{\text{Gr}_{G^\vee}, \nu}^{\text{mix}}$$

où  $\mu, \nu \in \mathbf{X}$  sont les poids tels que  $w_\mu = x$  et  $w_\nu = t_\lambda x$ . On utilise ensuite la Remarque 8.10 pour “transférer” cet isomorphisme en un isomorphisme

$$\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}} \star^{G_\sigma^\vee} \mathcal{T}_{\text{Gr}_{G^\vee}^{\text{op}}, x}^{\text{mix}} \cong \mathcal{T}_{\text{Gr}_{G^\vee}^{\text{op}}, t_\lambda x}^{\text{mix}}$$

En utilisant le Lemme 9.10 et la Proposition 8.9, cet isomorphisme implique que

$$\iota^{-1}(p\underline{N}_x) \cdot \vartheta_{\dot{\mathbb{T}}(\lambda)} = \iota^{-1}(p\underline{N}_{t_\lambda x}).$$

En appliquant  $\iota$  et en utilisant (8.4) et le fait que  $\iota(\vartheta_\nu) = \vartheta_\nu$  pour tout  $\nu \in \mathbf{X}$ , on en déduit l'égalité voulue.  $\square$

Une fois l'égalité de la Proposition 9.8 établie, on peut la “relever” en un énoncé sur les complexes à parité de la façon suivante. Dans cet énoncé, on note

$$\mathbf{Z} : \text{Perv}_{G_\sigma^\vee}(\text{Gr}_{G^\vee}, \mathbb{k}) \rightarrow \text{Perv}_{I^\vee}(\text{Fl}_{G^\vee}, \mathbb{k})$$

(où  $I^\vee$  est le sous-groupe d'Iwahori noté  $I$  au §8.3, pour notre groupe  $G^\vee$ ) le “foncteur central” construit par Gaitsgory dans [Ga] (ou sa variante considérée par Zhu dans [Zh]). D'autre part, la catégorie dérivée  $I^\vee$ -équivariante  $D_{I^\vee}^b(\text{Fl}_{G^\vee}, \mathbb{k})$  possède un produit de convolution qui en fait une catégorie monoïdale, et qu'on notera  $\star^{I^\vee}$ . Cette catégorie agit naturellement par convolution à droite sur  $D_{\mathcal{I}\mathcal{W}}^b(\text{Fl}_{G^\vee}, \mathbb{k})$ ; le bifoncteur associé sera noté  $\star^{I^\vee}$  également.

**Proposition 9.11.** *Supposons que  $p \geq 2h - 1$ , et soient  $x$  et  $\lambda$  comme dans la Proposition 9.8. Alors on a*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, x} \star^{I^\vee} \mathbf{Z}(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}}) \cong \mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_\lambda x}.$$

*Remarque 9.12.* (1) Comme pour la Proposition 9.8, l'hypothèse sur  $p$  dans la Proposition 9.11 n'est probablement pas nécessaire. En fait ici on va déduire la Proposition 9.11 de la Proposition 9.8. Une stratégie plus satisfaisante serait de démontrer la Proposition 9.11 par des arguments géométriques, et sous une hypothèse plus faible, et d'en déduire la Proposition 9.8.

- (2) Signalons qu'il n'est *pas* vrai que  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, x} \star^{I^\vee} \mathbf{Z}(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}})$  est un complexe à parité pour tous  $x \in {}^0W_{\text{ext}}$  et  $\lambda \in \mathbf{X}^+$ .

*Démonstration.* Notons  $E$  le sous- $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ -module de  $\mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{asph}}$  engendré par les éléments  $p\underline{N}_x$  avec  $x \in {}^0W_{\text{ext}}$  tel que  $t_{-\varsigma}x \in {}^0W_{\text{ext}}$ . Alors  $E$  est un sous- $\mathcal{H}_{\text{ext}}$ -module de  $\mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{asph}}$ . En effet, pour justifier cela il suffit de montrer que pour tout  $x$  comme ci-dessus et pour toute réflexion simple  $s$ ,  $p\underline{N}_x \cdot \underline{H}_s$  appartient à  $E$ . Mais  $p\underline{N}_x \cdot \underline{H}_s$  est la classe d'un complexe à parité (considéré comme un complexe dans  $D_{\mathcal{I}\mathcal{W}}^{\text{mix}}(\text{Fl}_{G^\vee}, \mathbb{k})$  concentré en degré 0); ses coefficients dans la base  $(p\underline{N}_y : y \in {}^0W_{\text{ext}})$  sont donc des polynômes à coefficients positifs ou nuls. Donc, pour démontrer notre affirmation,

il suffit de voir que les valeurs en 1 des coefficients de  ${}^pN_x \cdot H_s$  sur les éléments  ${}^pN_y$  tels que  $t_{-\zeta}y$  n'appartient pas à  ${}^0W_{\text{ext}}$  s'annulent. En utilisant la Remarque 9.2(4), ce qu'on doit démontrer est donc que si  $x$  est comme ci-dessus et si  $\Theta_s$  est le foncteur de "croisement des murs" associé à  $s$ , alors  $\Theta_s(\mathbb{T}_x)$  est une somme directe d'objets  $\mathbb{T}_y$  avec  $y \in {}^0W_{\text{ext}}$  tel que  $t_{-\zeta}y \in {}^0W_{\text{ext}}$ . Mais les modules basculants indécomposables  $\mathbb{T}_y$  avec  $y$  vérifiant cette condition sont exactement ceux qui sont projectifs comme  $\mathbf{G}_1$ -modules; voir [Ja, Lemma E.8]. Il suffit donc de remarquer que cette propriété est stable par les foncteurs de translation, ce qui découle de la discussion de [Ja, §II.9.22].

Cette discussion montre également que  $E$  est un  $\mathcal{H}_{\text{ext}}$ -module cyclique, engendré par  ${}^pN_{t_\zeta} = [\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_\zeta}]$ ; plus précisément, tout complexe à parité de la forme  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, x}$  avec  $x \in {}^0W_{\text{ext}}$  tel que  $t_{-\zeta}x \in {}^0W_{\text{ext}}$  apparaît comme facteur direct d'un complexe à parité de la forme  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_\zeta} \star^{I^\vee} \mathcal{F}$  avec  $\mathcal{F}$  un complexe à parité  $I^\vee$ -équivariant sur  $\text{Fl}_{G^\vee}$ . En utilisant [Zh, Theorem 7.3] on voit que

$$\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_\zeta} \star^{I^\vee} \mathcal{F} \star^{I^\vee} Z(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}}) \cong \mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_\zeta} \star^{I^\vee} Z(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}}) \star^{I^\vee} \mathcal{F}.$$

D'autre part, d'après [BGMRR, Proposition 4.18] l'objet  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_\zeta} \star^{I^\vee} Z(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}})$  est un complexe à parité. On en déduit qu'il en est de même pour  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_\zeta} \star^{I^\vee} \mathcal{F} \star^{I^\vee} Z(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}})$ , et donc pour  $\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, x} \star^{I^\vee} Z(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}})$ .

Ce qu'on vient donc de montrer implique en particulier que le foncteur  $(-)\star^{I^\vee} Z(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}})$  induit un endomorphisme de  $\mathcal{H}_{\text{ext}}$ -module de  $E$ . Puisque, d'après [BGMRR, Proposition 4.18], on a

$$[\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_\zeta} \star^{I^\vee} Z(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}})] = [\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_{\lambda+\zeta}}] = {}^pN_{t_{\lambda+\zeta}} = {}^pN_{t_\zeta} \cdot \vartheta_{\dagger(\lambda)},$$

cet endomorphisme coïncide avec l'action de  $\vartheta_{\dagger(\lambda)}$ . Donc, pour  $x$  comme dans l'énoncé, on a

$$[\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, x} \star^{I^\vee} Z(\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}})] = {}^pN_x \cdot \vartheta_{\dagger(\lambda)} = {}^pN_{t_{\lambda x}} = [\mathcal{E}_{\mathcal{I}\mathcal{W}, t_{\lambda x}}].$$

On en déduit l'isomorphisme de la proposition.  $\square$

#### 9.4. Une "formule de Steinberg" pour la base $p$ -canonique sphérique.

Considérons un élément  $\zeta \in \mathbf{X}$  comme au §9.3. Dans l'article [RW2], G. Williamson et le second auteur considèrent l'unique morphisme de  $\mathcal{H}_{\text{ext}}$ -modules à droite  $\varphi : \mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{sph}} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{ext}}^{\text{asph}}$  envoyant  $M_e$  sur  $\underline{N}_{t_\zeta}$ . Ils démontrent que ce morphisme est injectif et vérifie

$$\varphi({}^pM_w) = {}^pN_{t_\zeta w}$$

pour tout  $w \in {}^0W_{\text{ext}}$ , sous l'hypothèse où  $p$  est bon pour  $\mathbf{G}$ . En utilisant cet résultat, la Proposition 9.8 est équivalente au résultat suivant, qu'on peut voir comme une "formule de Steinberg" pour la base  $p$ -canonique sphérique.

**Proposition 9.13.** *Supposons que  $p \geq 2h - 1$ . Alors pour tout  $x \in {}^0W_{\text{ext}}$  restreint et tout  $\lambda \in \mathbf{X}^+$ , on a*

$${}^pM_{t_{\lambda \cdot x}} = {}^pM_x \cdot \vartheta_{\dagger(\lambda)}.$$

Une fois cette égalité établie, comme pour la Proposition 9.11 on peut obtenir les isomorphismes suivants (sous l'hypothèse  $p \geq 2h - 1$ ) :

- (1) dans  $D_{\text{Br}}^{\text{b}}(\text{Gr}_{G^\vee}^{\text{op}}, \mathbb{k})$ , si  $x \in {}^0W_{\text{ext}}$  est restreint et si  $\lambda \in \mathbf{X}^+$  alors

$$\mathcal{E}_\lambda^{\text{sph}} \star^{G^\vee} \mathcal{E}_{\text{Gr}_{G^\vee}^{\text{op}}, x} \cong \mathcal{E}_{\text{Gr}_{G^\vee}^{\text{op}}, t_{\lambda x}};$$

- (2) dans  $D^b\mathrm{Coh}^{\mathbf{G}\times\mathbf{G}_m}(\tilde{\mathcal{N}}_{\mathbf{G}})$ , si  $\mu \in \mathbf{X}$  est tel que  $w_\mu$  est restreint et si  $\lambda \in \mathbf{X}^+$ , alors

$$\mathcal{T}_\mu \otimes \dot{\mathbb{T}}(\lambda) \cong \mathcal{T}_\nu,$$

où  $\nu \in \mathbf{X}$  est le poids tel que  $w_\nu = t_\lambda w_\mu$ .

(Pour le cas (1), le fait que notre objet est un complexe à parité découle des résultats de [JMW, §4.1], et on utilisera le Lemme 9.10. Pour le cas (2), le fait que notre objet est un faisceau exotique basculant découle de [MR1, Proposition 4.10], et on peut identifier l'action du foncteur  $\dot{\mathbb{T}}(\lambda) \otimes (-)$  sur le groupe de Grothendieck en utilisant [MR1, Proposition 4.6] et la relation entre les  $q$ -analogues de Lusztig et les polynômes de Kazhdan–Lusztig, voir [Ka]. Alternativement, on peut déduire ce cas du cas (1) en utilisant l'équivalence du Théorème 7.7, dont la version construite dans [ARd] est compatible avec l'équivalence de Satake au sens approprié.)

- Remarque 9.14.* (1) Les isomorphismes énoncés en (1) et (2) ci-dessus peuvent être considérés comme des analogues de la “formule de Steinberg” pour les  $\mathbf{G}$ -modules simples ; voir [Ja, Proposition II.3.16]. (Cependant, ils font intervenir un produit tensoriel avec un module *basculant* et non un module simple.)
- (2) Comme pour la Proposition 9.11, il serait plus satisfaisant de démontrer les isomorphismes ci-dessus par des arguments géométriques. Pour des coefficients de caractéristique 0, un analogue de l'isomorphisme présenté en (1) est démontré dans [ABGM, Theorem 1.3.5].

#### RÉFÉRENCES

- [ACR] P. Achar, N. Cooney, et S. Riche, *The parabolic exotic  $t$ -structure*, prépublication [arXiv:1805.05624](#).
- [AHR] P. Achar, W. Hardesty, et S. Riche, *On the Humphreys conjecture on support varieties of tilting modules*, prépublication [arXiv:1707.07740](#), à paraître dans *Transform. Groups*.
- [AMRW1] P. Achar, S. Makisumi, S. Riche, et G. Williamson, *Free-monodromic mixed tilting sheaves on flag varieties*, prépublication [arXiv:1703.05843](#).
- [AMRW2] P. Achar, S. Makisumi, S. Riche, et G. Williamson, *Koszul duality for Kac–Moody groups and characters of tilting modules*, prépublication [arXiv:1706.00183](#), à paraître dans *J. Amer. Math. Soc.*
- [AR1] P. Achar et S. Riche, *Koszul duality and semisimplicity of Frobenius*, *Ann. Inst. Fourier* **63** (2013), 1511–1612.
- [AR2] P. Achar et S. Riche, *Modular perverse sheaves on flag varieties II : Koszul duality and formality*, *Duke Math. J.* **165** (2016), 161–215.
- [AR3] P. Achar et S. Riche, *Modular perverse sheaves on flag varieties III : positivity conditions*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **370** (2018), 447–485.
- [AR4] P. Achar et S. Riche, *Reductive groups, the loop Grassmannian, and the Springer resolution*, prépublication [arXiv:1602.04412](#), à paraître dans *Invent. Math.*
- [ARd] P. Achar et L. Rider, *The affine Grassmannian and the Springer resolution in positive characteristic*, avec un appendice en collaboration avec S. Riche, *Compos. Math.* **152** (2016), 2627–2677.
- [ADL] I. Ágoston, V. Dlab, et E. Lukács, *Quasi-hereditary extension algebras*, *Algebr. Represent. Theory* **6** (2003), 97–117.
- [An] H. H. Andersen, *Tilting modules for algebraic groups*, dans *Algebraic groups and their representations (Cambridge, 1997)*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 517, Kluwer Acad. Publ., 1998, 25–42.



- [AJ] H. H. Andersen et J. C. Jantzen, *Cohomology of induced representations for algebraic groups*, Math. Ann. **269** (1984), 487–525.
- [ABBG] S. Arkhipov, R. Bezrukavnikov, A. Braverman, D. Gaitsgory, et I. Mirković, *Modules over the small quantum group and semi-infinite flag manifold*, Transform. Groups **10** (2005), 279–362.
- [ABG] S. Arkhipov, R. Bezrukavnikov, et V. Ginzburg, *Quantum groups, the loop Grassmannian, and the Springer resolution*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 595–678.
- [Bac] E. Backelin, *Koszul duality for parabolic and singular category  $\mathcal{O}$* , Represent. Theory **3** (1999), 139–152.
- [BaR] P. Baumann et S. Riche, *Notes on the geometric Satake equivalence*, prépublication [arXiv:1703.07288](https://arxiv.org/abs/1703.07288), à paraître dans Lecture Notes in Mathematics 2221.
- [BBD] A. Beilinson, J. Bernstein, et P. Deligne, *Faisceaux pervers*, dans *Analyse et topologie sur les espaces singuliers, I (Luminy, 1981)*, 5–172, Astérisque **100** (1982).
- [BBM] A. Beilinson, R. Bezrukavnikov, et I. Mirković, *Tilting exercises*, Moscow Math. J. **4** (2004), 547–557, 782.
- [BG] A. Beilinson et V. Ginzburg, *Wall-crossing functors and  $\mathcal{D}$ -modules*, Represent. Theory **3** (1999), 1–31.
- [BGS] A. Beilinson, V. Ginzburg, et W. Soergel, *Koszul duality patterns in representation theory*, J. Amer. Math. Soc. **9** (1996), 473–527.
- [BGG] J. Bernstein, I. M. Gelfand, et S. I. Gelfand, *A certain category of  $\mathfrak{g}$ -modules*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **10** (1976), 1–8.
- [B1] R. Bezrukavnikov, *Quasi-exceptional sets and equivariant coherent sheaves on the nilpotent cone*, Represent. Theory **7** (2003), 1–18.
- [B2] R. Bezrukavnikov, *Cohomology of tilting modules over quantum groups and  $t$ -structures on derived categories of coherent sheaves*, Invent. Math. **166** (2006), 327–357.
- [BGMRR] R. Bezrukavnikov, D. Gaitsgory, I. Mirković, S. Riche, et L. Rider, *An Iwahori-Whittaker model for the Satake category*, prépublication [arXiv:1806.06527](https://arxiv.org/abs/1806.06527).
- [BR] R. Bezrukavnikov et S. Riche, *Affine braid group actions on Springer resolutions*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **45** (2012), 535–599.
- [BY] R. Bezrukavnikov et Z. Yun, *On Koszul duality for Kac–Moody groups*, Represent. Theory **17** (2013), 1–98.
- [CYZ] X. W. Chen, Y. Ye, et P. Zhang, *Algebras of derived dimension zero*, Comm. Algebra **36** (2008), 1–10.
- [CG] N. Chriss et V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Birkhäuser, 1997.
- [CPS] E. Cline, B. Parshall, et L. Scott, *Finite-dimensional algebras and highest-weight categories*, J. Reine Angew. Math. **391** (1988), 85–99.
- [ES] M. Ehrig et C. Stroppel, *Koszul gradings on Brauer algebras*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2016** (2016), 3970–4011.
- [EW] B. Elias et G. Williamson, *Soergel calculus*, Represent. Theory **20**, 295–374.
- [FP] E. Friedlander et B. Parshall, *Cohomology of Lie algebras and algebraic groups*, Amer. J. Math. **108** (1986), 235–253.
- [Ga] D. Gaitsgory, *Construction of central elements in the affine Hecke algebra via nearby cycles*, Invent. Math. **144** (2001), 253–280.
- [GG] R. Gordon et E. L. Green, *Graded Artin algebras*, J. Algebra **76** (1982), 111–137.
- [Ha] W. Hardesty, *On support varieties and the Humphreys conjecture in type A*, Adv. Math. **329** (2018), 392–421.
- [Hu] J. E. Humphreys, *Comparing modular representations of semisimple groups and their Lie algebras*, Modular interfaces (Riverside, CA, 1995), AMS/IP Stud. Adv. Math., vol. 4, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 69–80.

- [Ja] J. C. Jantzen, *Representations of algebraic groups, second edition*, Mathematical surveys and monographs 107, Amer. Math. Soc., 2003.
- [JW] L. T. Jensen et G. Williamson, *The  $p$ -canonical basis for Hecke algebras*, dans *Categorification in Geometry, Topology and Physics*, Contemp. Math. 583 (2017), 333–361.
- [JMW] D. Juteau, C. Mautner, et G. Williamson, *Parity sheaves*, J. Amer. Math. Soc. **27** (2014), 1169–1212.
- [JMW2] D. Juteau, C. Mautner, et G. Williamson, *Parity sheaves and tilting modules*, Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. **49** (2016), 257–275.
- [Ka] S. Kato, *Spherical functions and a  $q$ -analogue of Kostant’s weight multiplicity formula*, Invent. Math. **66** (1982), 461–468.
- [KL1] D. Kazhdan et G. Lusztig, *Representations of Coxeter groups and Hecke algebras*, Invent. Math. **53** (1979), 191–213.
- [KL2] D. Kazhdan et G. Lusztig, *Schubert varieties and Poincaré duality*, dans *Geometry of the Laplace operator*, pp. 185–203, Proc. Sympos. Pure Math. 36, Amer. Math. Soc., 1980.
- [KLT] S. Kumar, N. Lauritzen, et J. F. Thomsen, *Frobenius splitting of cotangent bundles of flag varieties*, Invent. Math. **136** (1999), 603–621.
- [Lu1] G. Lusztig, *Singularities, character formulas, and a  $q$ -analog of weight multiplicities*, in *Analysis and topology on singular spaces, II, III (Luminy, 1981)*, 208–229, Astérisque **101–102**, Soc. Math. France, 1983.
- [Lu2] G. Lusztig, *Cells in affine Weyl groups. IV*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. **36** (1989), 297–328.
- [MR1] C. Mautner et S. Riche, *On the exotic  $t$ -structure in positive characteristic*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2016** (2016), 5727–5774.
- [MR2] C. Mautner et S. Riche, *Exotic tilting sheaves, parity sheaves on affine Grassmannians, and the Mirković–Vilonen conjecture*, prépublication [arXiv:1501.07369](https://arxiv.org/abs/1501.07369), à paraître dans J. Eur. Math. Soc.
- [Ma] V. Mazorchuk, *Koszul duality for stratified algebras I. Balanced quasi-hereditary algebras*, Manuscripta Math. **131** (2010), 1–10.
- [MV] I. Mirković et K. Vilonen, *Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings*, Ann. of Math. **166** (2007), 95–143.
- [R1] S. Riche, *Geometric braid group action on derived categories of coherent sheaves* (avec un appendice en collaboration avec R. Bezrukavnikov), Represent. Theory **12** (2008), 131–169.
- [R2] S. Riche, *Koszul duality and modular representations of semisimple Lie algebras*, Duke Math. J. **154** (2010), 31–134.
- [R3] S. Riche, *Geometric Representation Theory in positive characteristic*, thèse d’habilitation, disponible sur <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01431526>.
- [RSW] S. Riche, W. Soergel, et G. Williamson, *Modular Koszul duality*, Compos. Math. **150** (2014), 273–332.
- [RW1] S. Riche et G. Williamson, *Tilting modules and the  $p$ -canonical basis*, Astérisque **397** (2018).
- [RW2] S. Riche et G. Williamson, *A simple character formula*, en préparation.
- [Rin] C. M. Ringel, *The category of modules with good filtrations over a quasi-hereditary algebra has almost split sequences*, Math. Z. **208** (1991), 209–223.
- [SVV] P. Shan, M. Varagnolo, et É. Vasserot, *Koszul duality of affine Kac–Moody algebras and cyclotomic rational double affine Hecke algebras*, Adv. Math. **262** (2014), 370–435.
- [So1] W. Soergel, *Gradings on representation categories*, Proc. I.C.M., Zürich, Switzerland, 1994, vol. 2, 800–806.
- [So2] W. Soergel, *Kazhdan–Lusztig polynomials and a combinatoric[s] for tilting modules*, Represent. Theory **1** (1997), 83–114.

- [So3] W. Soergel, *Character formulas for tilting modules over Kac–Moody algebras*, Represent. Theory **2** (1998), 432–448.
- [So4] W. Soergel, *Character formulas for tilting modules over quantum groups at roots of one*, dans *Current developments in mathematics, 1997 (Cambridge, MA)*, Int. Press, 1999, 161–172.
- [So5] W. Soergel, *Modulare Koszul-Dualität*, prépublication [arXiv:1109.0563](https://arxiv.org/abs/1109.0563).
- [Sp] T. A. Springer, *Quelques applications de la cohomologie d'intersection*, in *Séminaire N. Bourbaki, Vol. 1981/82*, Astérisque **92–93** (1982), Exp. 589, 249–273.
- [Yu] Z. Yun, *Weights of mixed tilting sheaves and geometric Ringel duality*, Sel. Math., New. ser. **14** (2009), 299–320.
- [Zh] X. Zhu, *On the coherence conjecture of Pappas and Rapoport*, Ann. of Math. **180** (2014), 1–85.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, LOUISIANA STATE UNIVERSITY, BATON ROUGE, LA 70803, U.S.A.

*Adresse courriel* : [pramod@math.lsu.edu](mailto:pramod@math.lsu.edu)

UNIVERSITÉ CLERMONT AUVERGNE, CNRS, LMBP, F-63000 CLERMONT-FERRAND, FRANCE.

*Adresse courriel* : [simon.riche@uca.fr](mailto:simon.riche@uca.fr)