HAL
open science

Une preuve analytique de la conjecture de J. Rosenberg

Michel Hilsum

To cite this version:

Michel Hilsum. Une preuve analytique de la conjecture de J. Rosenberg. 2018. hal-01841905

HAL Id: hal-01841905

https://hal.science/hal-01841905

Preprint submitted on 17 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNE PREUVE ANALYTIQUE DE LA CONJECTURE DE J. ROSENBERG

Michel Hilsum
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche
U.M.R. 7586 du C.N.R.S.

1. INTRODUCTION

La conjecture de Novikov énonce l'invariance rationnelle par homotopie de l'image, dans le groupe de K-homologie de l'espace classifiant du groupe fondamental d'une variété, et par l'application classifiante, de l'élément déterminé par l'opérateur de signature dans le groupe de K-homologie de cette variété.

Par analogie, J. Rosenberg a formulé une conjecture analogue pour les variétés complexes, en remplaçant l'équivalence d'homotopie par l'équivalence birationnelle, et l'opérateur de signature par l'opérateur de Dolbeault (voir théorème ci-dessous).

Cette conjecture a été résolue par J. Rosenberg sous l'hypothèse que le groupe fondamental de la variété vérifie la conjecture de Novikov forte, et par J. Block et S. Weinberger [5] dans le cas général. La démonstration de [5] utilise le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch à valeurs dans la K-homologie démontré par Baum-Fulton-McPherson [3]. Ici la K-homologie est la K-homologie "topologique" c'est à dire le dual d'Alexander de la K-théorie.

La K-homologie topologique est isomorphe à la K-homologie analytique de G.G. Kasparov, au moins pour les complexe cellulaire localement finis, et donc cette propriété d'invariance birationnelle reste vraie en K-homologie analytique. Toutefois, il reste intéressant de donner une preuve directe de cette propriété, sans recours à la tranformation fonctorielle de [3].

La K-homologie analytique a été définie par G.G. Kasparov [14], et permet une grande souplesse aux calculs. Rappelons que si V est une variété analytique complexe hermitienne, l'opérateur de Dolbeault-Dirac D_V agit sur les formes différentielles de type $(0,*)$ et détermine une classe fondamentale notée $\mathcal{T}_V \in K_0(V)$. L'énoncé principal de ce travail est le :

Théorème 1.1. *Soit $\varphi : V \to W$ une équivalence birationnelle de variétés analytiques complexes projectives , et $f : V \to B$, $g : W \to B$ des applications continues telles que f est égale à $g \circ \varphi$ sur un ouvert Zariski dense où φ est défini. Il y a alors égalité dans le groupe de K-homologie analytique $K_*(B)$: $f_*(\mathcal{T}_V) = g_*(\mathcal{T}_W)$.*

Soit W une variété algébrique projective complexe : la K-homologie de W n'est pas connue. Une conséquence de ce théorème est l'existence naturelle d'une classe quasi-fondamentale dans $K_0(W)$ qui généralise la notion de classe fondamentale définie pas l'opérateur de Dolbeault sur une variété complexe. Toutefois, cette classe quasi-fondamentale ne donne pas en général un générateur de $K_0(W)$ comme module sur la K-théorie.

Pour démontrer ces résultats, il sera établi une généralisation du théorème d'indice relatif de Gromov-Lawson [9] pour les familles. Le théorème de Gromov-Lawson calcule la différence d'indice de deux opérateurs de Dirac agissant sur des variétés distinctes, mais qui coïncident sur des ouverts isomorphes et co-compacts. Dans le cas de familles d'opérateurs indéxées par un espace de paramètres T, l'analoque de la quantité calculée par Gromov-Lawson est alors dans le groupe de K-théorie $K^*(T)$.

Notons qu'une généralisation du théorème de Gromov-Lawson à valeurs dans la K-théorie de la C*-algèbre d'un certain groupe discret a été obtenue par U. Bunke [**?**] et Z.Xie et G.Yu [**?**].

Une variante d'un résultat classique est également établie ici : Boos et Wojcieszowsky ont démontré que le double de l'opérateur de Dirac sur une variété à bord est inversible [6]. Ici il est établi un résultat en K-théorie bivariante : le double d'un module Hilbert à bord sur un couple de C*-algèbres $(\mathcal{A},\mathcal{B})$ donne une classe nulle dans $KK(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Pour démontrer le résultat principal, il faut regarder d'abord le cas particulier d'une équivalence birationnelle donné par un éclatement à centre lisse : dans ce cas, ce sont les résultats mentionnés plus haut qui s'appliquent (corollaire .

Dans le cas général, nous utilisons le théorème de factorisation faible de Wlodarczik [24, 23], qui apparait déjà dans les démonstrations de Rosenberg. et Block-Weinberger, qui permet de se ramener au cas d'un éclatement à centre lisse.

2. Rappels et Notations

Etant données deux C*-algèbres $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, on note $KK^*(\mathcal{A},\mathcal{B})$ $(*=0,1)$ le groupe de K-théorie bivariante G.G. Kasparov [14, 4]. Le groupe de K-homologie analytique de $\mathcal{A}$ est par définition $K^*(\mathcal{A}) = KK^*(\mathcal{A},\mathbb{C})$, et si $\mathcal{A} = C_0(V)$ est commutative, alors on notera $K_*(V) = K^*(C_0(V))$.

Le groupe $K^0(\mathcal{A})$ est engendré par les classes des *modules de Fredhom* sur $\mathcal{A}$, c'est à dire les triplets $(\mathcal{H},F,\tau)$ où $\mathcal{H}$ est un espace de Hilbert, $F\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$ un opérateur autoadjoint tel que les opérateurs F^2-1, $[F,a]$, $a\in\mathcal{A}$ soient compacts, et τ est une involution unitaire qui anticommute à F. Ce groupe est aussi généré par les classes modules de Fredholm *non bornés*, c'est à dire les triplets $(\mathcal{H},D,\tau)$ où cette fois D est un opérateur autoadjoint densément défini tel que les opérateurs $a(i+D)^{-1}$, pour $a\in\mathcal{A}$ soient compacts et tel que la sous-algèbre involutive $\mathcal{L}(D)\subset\mathcal{A}$, formée des $a\in\mathcal{A}$ tels que les commutateurs $[D,a]$ soient définis sur dom D et bornés [12, section 2], soit dense dans $\mathcal{A}$ [2, 4].

Une variété complexe est une variété topologique munie d'une structure analytique complexe. L'espace projectif complexe de dimension N est noté $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$.

Etant donné W, V deux variétés analytiques complexes compactes, une *équivalence birationnelle* $\varphi : W \to V$ est la donnée d'ouverts de Zariski $\mathcal{V} \subset V$ et $\mathcal{W} \subset W$ et $\varphi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ un difféomorphisme biméromorphe. Une équivalence birationnelle est déterminée à équivalence près au choix des $\mathcal{V}, \mathcal{W}$; un morphisme birationnel de V dans W est un morphisme qui est en même temps équivalence birationnelle

Etant donné une structure hermitienne h sur la variété complexe V, l'espace de Hilbert obtenu en complétant $C_c^\infty(V, \Lambda^{p,q}(V))$ au moyen de la norme donnée par la métrique hermitienne h est noté $\Omega^{p,q}(V,h)$ (ou $\Omega^{p,q}(V)$ lorsqu'aucune confusion n'est à craindre) . Cet espace s'identifie à l'espace des (classes de) sections mesurables pour la classe de Lebesgue, et de carré intégrable de formes différentielles de type p,q, modulo les sections négligeables [22].

Soit $\bar\partial_\mu$ la fermeture dans $\Omega^{p,q}(V)$ de l'opérateur différentiel de Dolbeault $\bar\partial$: $C_c^\infty(V, \Lambda^{p,q}(V)) \to C_c^\infty(V, \Lambda^{p,q+1}(V))$ et soit $\bar\partial_M$ l'opérateur transposé de $\bar\partial_\mu$ pour la dualité :

$$(\alpha, \beta) \to \int_V \alpha \wedge \bar\beta$$

En général l'inclusion $\bar\partial_\mu \subset \bar\partial_M$ est stricte et si V est complète, alors $\bar\partial_\mu = \bar\partial_M$. L'opérateur de Dirac-Dolbeault est l'opérateur autoadjoint $D = \bar\partial_\mu + *\bar\partial_\mu *$, agissant sur $\Omega^{0,*}(V) = \sum_q \Omega^{0,q}(V)$ avec $\operatorname{dom} D = \operatorname{dom} \bar\partial_\mu \cap * \operatorname{dom} \bar\partial_M$.

Si V est sans bord le triplet $(\Omega(V), D, \varepsilon)$, où ε est la $\mathbb{Z}_2$-graduation donnée par le degré des formes, est un triplet spectral non borné sur $C_0(V)$ [8] qui détermine une classe notée $\mathcal{T}_V$ dans le groupe de K-homologie analytique de V. Si en plus V est compacte, alors $\mathcal{T}_V$ est un générateur de $K_0(V)$ vu comme module sur $K^0(V)$ et est appelée habituellement la classe fondamentale de V [15, 7].

Si V est compacte sans bord, le noyau de D s'identifie à la $\bar\partial$-cohomologie de V. Si $\varphi : W \to V$ est un morphisme birationnel de variétés compactes hermitiennes, alors $\varphi^* : C^\infty(V, \Lambda^{n,*}) \to C^\infty(W, \Lambda^{n,*})$ s'étend par continuité en $\varphi^* : \Omega^{n,*}(V) \to \Omega^{n,*}(W)$ qui commute à l'opérateur de Dolbeault, et induit un morphisme naturel des groupes de $\bar\partial$-cohomologie [19, 20]. Comme $\Omega^{0,p}$ est le dual de $\Omega^{n,n-p}$, on a par dualité la transposée de $\varphi^* : \varphi_* : \Omega^{0,p}(W) \to \Omega^{0,p}(V)$ et comme les noyaux et image de $\bar\partial$ sont préservés, les flêches suivantes sont des isomorphismes [19, 20] :

$$\varphi^* : H^{n,p}(V) \to H^{n,p}(W) \tag{2.1}$$

$$\varphi_* : H^{0,p}(W) \to H^{0,p}(V) \tag{2.2}$$

Soit Z le bord non vide d'une variété analytique complexe hermitienne : on a sur Z une structure de contact qui détermine une structure spin^c sur Z et l'opérateur de Dirac associé à cette structure spin^c est l'opérateur de Cauchy-Riemann « ramassé » [21]. On notera encore $\mathcal{T}_Z \in K^1(Z)$ la classe de K-homologie associée ; c'est une classe fondamentale, c'est à dire un générateur de $K_1(Z)$ comme module du $K^0(Z)$.

3. Fibrés analytiques

Nous rappelons la définition selon Kodaira-Spencer d'une famille différentiable de variétés complexes [16, chapter 4].

Définition 3.1. *Soit $B, \mathcal{U}$ des variétés analytiques complexes compactes et $f : \mathcal{U} \to B$ une submersion. La submersion f est une famille différentiable de variétés complexes si, pour tout $y \in B$, $L_y = f^{-1}(y)$ est une sous-variété complexe de $\mathcal{U}$, et s'il existe un recouvrement localement fini $U_j, j \in N$, de $\mathcal{U}$ et des fonctions C^∞ : $z_{j,1}(p), \cdots, z_{j,n}(p)$ définies sur U_j, tel que pour tout $y \in B$ le recouvrement ouvert de L_y donné par $U_j \cap L_y$ forme un système de coordonnées complexes locales, avec l'homéomorphisme local donné par $p \to (z_{j,1}(p), \cdots, z_{j,n}(p))$ lorsque $U_j \cap L_y$ n'est pas vide.*

Une famille différentiable de variétés complexes (resp. de variétés de Cauchy-Riemmann) à bord est définie de façon analogue.

Notons qu'une famille différentiable de variétés complexes compactes est une fibration différentiable localement triviale (toutes les variétés L_y sont difféomorphes) [16]. L'espace total d'un fibré vectoriel complexe de rang N sur B est une famille différentiable de variétés complexes, la fibre étant isomorphe à $\mathbb{C}^N$.

Par exemple, soit V une variété analytique complexe et $B \subset V$ une sous-variété complexe. Il n'existe pas en général de voisinage tubulaire holomorphe de B, c'est à dire un voisinage ouvert de B holomorphiquement équivalent à l'espace total du fibré vectoriel complexe normal à B dans V. On a cependant un résultat plus faible conséquence immédiate d'un résultat de M. Atiyah et F. Hirzebruch [1] qui établit l'existence d'un voisinage tubulaire analytique réel verticalement holomorphe :

Proposition 3.2. *Soit V, B des variétés analytiques complexes et $j : B \to V$ un plongement holomorphe. Il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $j(B)$ qui est l'espace total d'une famille différentiable de variétés complexes à bord, isomorphe à l'espace total du fibré (complexe) normal à $j(B)$ dans V.*

Démonstration. Soit $N = j^*(TV)/TB$ le fibré vectoriel complexe normal de rang p. Par [1, prop 2.2], il existe un voisinage $\mathcal{V}$ de $j(B)$, un voisinage $\mathcal{O}$ de la section nulle de

N et un homéomorphisme analytique réel $\psi : \mathcal{O} \to \mathcal{V}$, qui est holomorphe sur $N_y \cap \mathcal{O}$ pour tout $y \in B$. On peut supposer que $\mathcal{O}$ est un fibré en boules, donc analytiquement isomorphe à l'espace total de N.

□

Soit $\pi : \mathcal{U} \to B$ une famille différentiable de variétés complexes et considérons la K-orientation de π provenant de la structure complexe sur les fibres de π.

Dans [7], A. Connes et G. Skandalis ont construit un élément $\pi_! \in KK(\mathcal{U}, B)$ qui est représenté par la famille des opérateurs de Dirac-Dolbeault sur les fibres de π. Comme les K-orientations sur $T^*\mathcal{U}$, $\pi^*(T^*B) \oplus \pi^*(N^*)$ associées aux structures complexes coïncident, il se déduit alors de [7, theorem 2.6] l'égalité dans $KK(\mathcal{U}, \mathbb{C})$:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{U}} = \pi_! \otimes_B \mathcal{T}_B \tag{3.1}$$

L'égalité analogue subsiste dans le cas où $\mathcal{U}$ est une famille différentiable de variétés de contact.

4. L'INDICE DU DOUBLE D'UN MODULE DE HILBERT À BORD

Nous rappelons ici la notion de *module de Hilbert à bord* telle qu'introduite dans [11, Definition 6.1]. Soit $\mathcal{B}$ une C*-algèbre, A un opérateur autoadjoint régulier sur un $\mathcal{B}$-module de Hilbert $\mathcal{E}_b$. Le cylindre de $(\mathcal{E}_b, A)$ (cf. [11, Section 4]) est le couple $(\mathcal{E}^c, \Psi(A))$ où $\mathcal{E}^c = L^2([0,+\infty[) \otimes \mathcal{E}_b \otimes \mathbf{C}^2$, muni de la graduation naturelle

$$\tau^c = 1 \otimes 1 \otimes \tau_0$$

où τ_0 est l'involution de $\mathbb{C}^2$ donnée par la matrice :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $\Psi(A)$ est la fermeture sur $\mathcal{E}^c$ de l'opérateur :

$$\frac{\partial}{\partial u} \otimes 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 1 \otimes A \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec domaine essentiel $C_c^\infty(]0,+\infty[) \otimes \mathcal{E}_b \otimes \mathbb{C}^2$. Donc, pour $\xi, \eta \in C_c^\infty(]0,+\infty[) \otimes \mathcal{E}_b$:

$$\Psi(A) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} (u) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \eta}{\partial u} + A(\eta(u)) \\ \frac{\partial \xi}{\partial u} + A(\xi(u)) \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

.

Soit alors $\mathcal{E}$ un module de Hilbert sur $\mathcal{B}$, $\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ une involution unitaire et $D : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ un opérateur symétrique anticommutant à τ (resp. autoadjoint) régulier. On dit que $(\mathcal{E}_b, A)$ est le bord du module symétrique $(\mathcal{E}, D, \tau)$ s'il existe un projecteur $r \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$

et un unitaire $\theta \in \mathcal{L}(\operatorname{im} r, \mathcal{E}_b \otimes L^2([0,1]) \otimes \mathbb{C}^2$ tels que, en notant pour $\varphi \in C([0,1])$, $b(\varphi) \in \mathcal{L}(\mathcal{E})$ l'opérateur donné par $b(\varphi) = \theta^*(1 \otimes \varphi)r + \varphi(1)(1-r)$:

(1) Si $\varphi \in C_c^\infty(]0,1])$ et $\xi \in \operatorname{dom} T^*$, alors $b(\varphi)\operatorname{dom} T^* \subset \operatorname{dom} T$ and $T^* b(\varphi)\xi = Tb(\varphi)\xi$.

(2) Si $\varphi, \psi \in C^\infty([0,1])$ avec support $\psi \cap$ support $\varphi = \emptyset$, alors $b(\varphi)T^* b(\psi) = 0$.

(3) Si $\varphi \in C_c^\infty(]0,1[)$, alors $1 \otimes \varphi(\operatorname{dom} \Psi(A)) = \theta \circ b(\varphi)(\operatorname{dom} T)$, et pour $\xi \in b(\varphi)\operatorname{dom} T$, on a $\theta T \xi = \Psi(A)\theta\xi$

Etant donné un module fermé $(\mathcal{E}_b, A)$, la grassmannienne $\chi_0^+(A)$ joue schématiquement le rôle de l'ensemble des projecteurs autoadjoints p tels que $p - \chi_A([0,+\infty[) \in \mathcal{K}(\mathcal{E})$, où $\chi_A([0,+\infty[)$ serait le projecteur spectral de A sur le demi-axe réel positif. Il peut arriver aussi que $\chi_0^+(A)$ soit vide, et c'est pourquoi la notion de grassmannienne stabilisée $\chi^+(A)$ est introduite dans [11]. La grassmannienne stabilisée n'est jamais vide dès que $[\mathcal{E}_b, A] = 0$ dans $K_1(B)$ et réciproquement, si $\chi^+(A) \neq \emptyset$, alors $[\mathcal{E}_b, A] = 0$ dans $K_1(B)$.

Soit $(\mathcal{E}, D, \tau)$ un module de Hilbert symétrique sur $\mathcal{B}$ à bord $(\mathcal{E}_b, A)$. Un des résultats principaux de [11] est que les extensions autoadjointes graduées de D sont en correspondance biunivoque avec $\chi^+(A)$. Etant donné $p \in \chi^+(A)$, on note D^p l'extension autoadjointe associée.

Le *module symétrique opposé* de $Z = (\mathcal{E}, D, \tau)$ est le triplet $\check{Z} = (\mathcal{E}, D, -\tau)$ et a pour bord $(\mathcal{E}_b, -A)$; si Z_1, Z_2 sont deux modules de Hilbert à bord avec le même bord, on peut alors former le module fermé $\check{Z}_1 \# Z_2$ obtenue par recollement. Le double de Z est le module fermé $\mathcal{N}(Z) = \check{Z} \# Z$ obtenu en recollant Z avec son opposé. Notons que la somme directe de $Z = (\mathcal{E}, D, \tau)$ et de son opposé a pour bord $(\mathcal{E}_b \otimes \mathbb{C}^2, A \oplus -A)$ et que le double $\mathcal{N}(Z)$ est une extension autodjointe de cette somme directe, et il est déterminé par un projecteur autoadjoint $Q \in \chi_0^+(A \oplus -A)$. Une conséquence est alors que la classe dans $K_0(\mathcal{B})$ du double de Z est nulle [11, corollary 7.5] :

$$[\mathcal{N}(Z)] = 0 \tag{4.2}$$

Cette notion de double et d'opposé apparait déjà dans le travail de B. Booß-Bavnbek et K. Wojciechowski[6], dans le cas de l'opérateur de Dirac classique sur une variété V, c'est à dire $\mathcal{A} = C(V)$ et $\mathcal{B} = \mathbb{C}$. Dans ce cas, il est démontré une propriété plus forte que (4.2) : en effet l'opérateur sur le double est alors inversible [6, ch. 5].

Toutefois, la relation (4.2) n'est valable dans le groupe $K_0(\mathcal{B})$. Qu'en est-il s'il est supposé en outre que les modules de Hilbert sont aussi des modules à gauche sur une

C*-algèbre $\mathcal{A}$? Dans le cas où $\mathcal{A} = C(V)$, où V est une variété spin^c à bord, la réponse est affirmative. Rappelons que si W est le bord d'une variété V, on dit que W est colleté s'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de W dans V et un difféomorphisme $\mathcal{U} \simeq [0,1] \times W$. Dans ce cas, si V est spin^c, alors il y a sur W une structure spin^c induite de celle sur V [10, Definition 11.2.14].

Lemme 4.1. *Soit V une variété spin^c à bord $\partial V = W$, et $\mathcal{B}$ une C*-algèbre. L'homomorphisme d'excision $KK(C(V),\mathcal{B}) \to KK(C(\dot{V}),\mathcal{B})$ est injectif.*

Démonstration. Soit $\dot{V} = V - W$ l'intérieur de V. Par la suite hexagonale associée à la suite exacte

$$\{0\} \to C_0(\dot{V}) \to C(V) \to C(W) \to \{0\}$$

il suffit de montrer que la flêche de bord $\partial : KK^1(C_0(\dot{V}),\mathcal{B}) \to KK^0(C(W),\mathcal{B})$ est surjective. Soit $\mathcal{N}_{\dot{V}} \in K_0(\dot{V})$ l'élément donné par l'opérateur de Dirac associé à la structure spin^c : par [10, Proposition 11.2.15], on a l'égalité $\partial(\mathcal{N}_{\dot{V}}) = \mathcal{N}_W$ où $\mathcal{N}_W$ est la classe fondamentale associée à la structure spin^c induite sur W.

La surjectivité de ∂ résulte alors de la dualité de Poincaré en K-théorie bivariante démontrée dans [7, Corollaries 3.7 & 3.8].

□

Soit alors $Z = (\mathcal{E}, D, \tau)$ un module de Hilbert sur $\mathcal{B}$ à bord $(\mathcal{E}_b, A)$ et supposons donc que $\mathcal{A} = C(V)$ agisse à gauche sur $\mathcal{E}$, et que $\mathcal{C} = C(\partial V)$ agisse sur $\mathcal{E}_b$. Avec les notations de 4, supposons que l'action de $\mathcal{A}$ sur $\mathcal{E}$ commute à r, et, avec $\mathcal{J}$ le noyau de $rC(V)$, que $\mathcal{A}/\mathcal{J} = C([0,1]) \otimes \mathcal{C}$ et que la représentation induite de $C([0,1]) \otimes \mathcal{C}$ soit la représentation naturelle sur $L^2([0,1]) \otimes \mathcal{E}_b \otimes \mathbb{C}^2$. Soit $\mathcal{L}(D)$ [12, p. 74] la sous-algèbre involutive formée des $a \in \mathcal{A}$ tels que $[a,D]$ soit défini sur dom D et borné, et supposons que $\mathcal{L}(D)$ est dense dans $\mathcal{A}$. Dans ce cas le module double $\mathcal{N}(Z)$ détermine une classe dans le groupe bivariant $KK(\mathcal{A},\mathcal{B})$.

Proposition 4.2. *Avec ces notations, on a l'égalité $\mathcal{N}(Z) = 0$ dans $KK(\mathcal{A},\mathcal{B})$.*

Démonstration. Soit $Z^c = (\mathcal{E}^c, \Psi(A), \tau^c)$, le cylindre de $(\mathcal{E}, A)$ (cf. (4.1)), qui est un module à bord, et Z^∞ le bimodule obtenu en recollant Z avec l'opposé de Z^c. Soit $\tilde{\mathcal{A}}$ l'algèbre obtenue en recollant $C_0(]-\infty,0]) \otimes \mathcal{C}$ avec $\mathcal{A}$, c'est à dire la sous-algèbre de $C_0(]-\infty,0],\mathcal{C}) \oplus \mathcal{A}$, déterminée par les couples $f \oplus a$ tels que $f(0)$ soit égal à la projection de a . On a une suite exacte :

$$\{0\} \to \mathcal{J} \to \tilde{\mathcal{A}} \to C_0(]-\infty,0] \otimes \mathcal{C}) \to \{0\}$$

On a d'une part $[Z]+[\check{Z}]=0$, et d'autre part $[Z^\infty]+[\check{Z}^\infty]=[\mathcal{N}(Z)]-[\check{Z}^c\#Z^c]$, par [12, Proposition 10.1]. Or l'élément $[\check{Z}^c\#Z^c]$ provient du groupe $KK(C_0(]-\infty,0]\otimes\mathcal{C},\mathcal{B})$ et est donc nul car l'algèbre $C_0(]-\infty,0])$ est K-contractile, et donc $\mathcal{N}(Z)=0$ dans le groupe $KK(\tilde{\mathcal{A}},\mathcal{B})$. Mais, comme le morphisme naturel $KK(\tilde{\mathcal{A}},\mathcal{B})\to KK(C_0(\dot{V}),\mathcal{B})$ est bijectif (encore par K-contractilité), l'application $KK(\mathcal{A},\mathcal{B})\to KK(\tilde{\mathcal{A}},\mathcal{B})$ est injective par le lemme 4.1, d'où le résultat.

□

Exemple 4.3. *Fibration localement triviale en variétés à bord.*

Soit M un espace localement compact $p:\bar{\mathcal{U}}\to M$ une famille différentiable de variétés complexes à bord. C'est en particulier une fibration localement triviale ; fixons une famille différentiable de structures hermitiennes sur les fibrezs. Le bord topologique $Z=\partial\bar{\mathcal{U}}$ est aussi une fibration localement triviale sur M dont la fibre est une variété de Cauchy-Riemann, ou variété CR en abrégé, et on fait l'hypothèse qu'il est colleté fibre à fibre et que la structure riemannienne est un produit dans le collet. La famille $\mathcal{D}$ des opérateurs de Dirac-Dolbeault est alors un module de Hilbert à bord sur $C_0(M)$, et le bord est $(\mathcal{E}_Z,\mathcal{A})$. Par le théorème du cobordisme [11], $[\mathcal{E}_Z,\mathcal{A}]=0$ dans $K^1(Z)$, et donc $\chi_+(\mathcal{A})$ est non vide. Mais en fait on peut montrer que déjà $\chi_+^0(\mathcal{A})$ est non vide. En effet R. Melrose et P. Piazza ont montré l'existence de *sections spectrales* [17, Proposition 1, p.107] et une section spectrale est un projecteur de la grassmannienne de $\mathcal{A}$.

5. Indice analytique relatif avec paramètres

Soit M une variété complexe, et $\bar{\mathcal{U}}_j$ pour $j=1,2$ une variété complexe compacte à bord, $\mathcal{U}_j$ son intérieur, Z_j son bord . Supposons que pour $j=1,2$, $\pi_j:\bar{\mathcal{U}}_j\to M$ soit famille différentiable de variétés complexes à bord (Definition 3.1). Soit $Y_j\subset\subset\mathcal{U}_j$ un ouvert propre et $\varphi:\bar{\mathcal{U}}_1-\bar{Y}_1\to\bar{\mathcal{U}}_2-\bar{Y}_2$ un difféomorphisme réel, holomorphe sur chaque fibre, tel que $\pi_2=\pi_1\circ\varphi$ sur $\bar{\mathcal{U}}_2-Y_2$; autrement dit φ envoie exactement et holomorphiquement les fibres de la fibration restreinte à $\bar{\mathcal{U}}_1-\bar{Y}_1\to M$ sur celles de $\bar{\mathcal{U}}_2-\bar{Y}_2\to M$.

La restriction de π_j à $Z_j=\partial\bar{\mathcal{U}}_j$ est une famille différentiable de variétés de Cauchy-Riemman et on suppose que Z_j a un voisinage colleté dans $\bar{\mathcal{U}}_j$ pour $j=1,2$, compatible avec la fibration. Soit h_j une structure hermitienne sur chaque fibre de π_j qui varie lissement, qui est un produit au voisinage colleté de Z_j, $\Re h_j=dt^2\oplus h_j^0$, où h_j^0 est une famille lisse de métriques riemanniennes sur les fibres de Z_j et telle que φ restreint à chaque fibre de $\bar{\mathcal{U}}_1-\bar{Y}_1$ est une isométrie.

La famille $\mathcal{D}_j$ des opérateurs de Dirac sur les fibres de $\mathcal{U}_j$ détermine un module de Hilbert à bord sur $C_0(M)$ au sens la section 4, dont le bord est le module fermé $(\mathcal{E},\mathcal{D}(Z_j))$ défini par la famille des opérateurs de Dirac sur les fibres de Z.

Soit enfin $\mathcal{W} \to M$ une famille différentiable de variétés complexes (Definition 3.1). On suppose le bord $Z = \partial W$ est isomorphe à Z_j en préservant fibre à fibre la structure CR, et $\mathcal{D}_j^W$ la famille d'opérateurs obtenue par recollement de $\mathcal{W}$ avec $\bar{\mathcal{U}}_j$, ce qui détermine encore une classe dans $K^0(C_0(M))$. Comme mentionné ci-dessus, on a $\chi_+^0(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ et tout projecteur $p \in \chi_+^0(\mathcal{A})$ détermine une extension autoadjointe graduée $\mathcal{D}_1^p$ de $\mathcal{D}_1$ et une extension autadjointe graduée $\check{\mathcal{D}}_2^{1-p}$ de l'opposé $\check{\mathcal{D}}_2$.

Proposition 5.1. *Soit p un projecteur autoadjoint dans la grassmannienne de Z. Il y a égalité dans $K_0(C_0(M))$:*

$$[\mathcal{D}_1 \sharp \check{\mathcal{D}}_2] = [\mathcal{D}_1^W \oplus \check{\mathcal{D}}_2^W] = [\mathcal{D}_1^p \oplus \check{\mathcal{D}}_2^{1-p}]$$

Démonstration. L'égalité

$$[\mathcal{D}_1 \sharp \check{\mathcal{D}}_2] - [\mathcal{D}_1^p \oplus \check{\mathcal{D}}_2^{1-p}]$$

résulte du fait que $[\mathcal{D}_1 \sharp \check{\mathcal{D}}_2]$ est une extension autoadjointe de $\mathcal{D}_1 \oplus \check{\mathcal{D}}_2$ associée au projecteur de recollement $Q \in \chi(\mathcal{D}_1 \oplus \check{\mathcal{D}}_2)$ défini dans [11, section 5]. Par [11, Corollary 7.6], on a alors $[\mathcal{D}_1 \sharp \check{\mathcal{D}}_2] - [\mathcal{D}_1^p \oplus \check{\mathcal{D}}_2^{1-p}] = [Q - P \oplus 1 - P]$ et par [11, Proposition 5.2] cette classe est nulle.

Par , on a $[\ \mathcal{D}_1^W \oplus \check{\mathcal{D}}_2^W] = [\mathcal{D}_1 \sharp \check{\mathcal{D}}_2] - [\mathcal{D}(W) \sharp \mathcal{D}(W)]$, et le dernier terme est nul en K-théorie car c'est le double d'un module à bord (équation (4.2)).

□

Définition 5.2. *Avec les notations précédentes, on définit l'indice analytique relatif comme étant l'image dans $K^0(M)$, par le morphisme trivial $\mathbb{C} \to \mathcal{B}$, de la classe de K-théorie donnée par la proposition précédente et on le note* $\mathrm{Ind}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \varphi)$.

6. Exemple de calcul d'un indice relatif

Un exemple important pour la suite provient de l'éclatement à centre lisse. Avec les notations précédentes, supposons en outre que $j_1 : M \hookrightarrow \mathcal{U}_1$ est un plongement holomorphe, que $\mathcal{U}_1$ un voisinage tubulaire analytique réel de $M_1 = j_1(M)$ et que $\mathcal{U}_2$ est obtenu en éclatant $\mathcal{U}_1$ le long de M_1. Le morphisme $\varphi : \mathcal{U}_2 \to \mathcal{U}_1$ est alors un isomorphisme en dehors de M_1.

Soit $\mathcal{D}_j$ la famille des opérateurs de Dirac-Dolbeault sur les fibres de $\mathcal{U}_j \to M$. Notons que pour tout $x \in M$, la fibre $\mathcal{U}_{2,x}$ est l'éclaté en x de la fibre $\mathcal{U}_{1,x}$.

Proposition 6.1. *Avec ces notations, on l'égalité :*

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \varphi) = 0$$

Démonstration. Soit $p_W : W \to M$ une variété analytique complexe à bord fibré sur M et telle que $\partial W = Z \simeq \partial \bar{\mathcal{U}}_1 \simeq \partial \bar{\mathcal{U}}_2$, et W_j la variété obtenue en recollant $\bar{\mathcal{U}}_j$ et W selon leur bord. Supposons que W_j est une variété analytique complexe qui induit sur $\mathcal{U}_j$ et W les structures complexes initiales. Une telle variété existe : il suffit de prendre $\bar{\mathcal{U}}_2$.

Supposons d'abord que M est connexe de dimension 0, c'est à dire un point $x_{i_0} \in V$ et soit $M_2 = \zeta^{-1}(\{x_0\}) \simeq \mathbb{P}^N(\mathbb{C})$. Alors φ_W^* induit un isomorphisme en $\bar{\partial}$ - cohomologie. Cela résulte du thérorème de Dolbeault qui permet d'identifier la $\bar{\partial}$ - cohomologie avec la cohomologie du faisceau des formes différentielles holomorphes.

Les suites exactes : $\{0\} \to C_0(W_j \setminus M) \to C(W_j) \to F_j$ induisent des suites exactes de groupe de $\bar{\partial}$-cohomologie et on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
H^{0,k-1}(M_2) & \longrightarrow & H^{0,k}(W_2 \setminus M_2) & \longrightarrow & H^{0,k}(W_2) & \longrightarrow & H^{0,k}(M_2) & \longrightarrow & H^{0,k+1}(W_2 \setminus M_2) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
H^{0,k-1}(M_1) & \longrightarrow & H^{0,k}(W_1 \setminus M_1) & \longrightarrow & H^{0,k}(W_1) & \longrightarrow & H^{0,k}(M_1) & \longrightarrow & H^{0,k+1}(W_1 \setminus M_1)
\end{array}$$

Comme les groupes de $\bar{\partial}$-cohomologie de l'espace projectif complexe sont nuls sauf en degré 0, la projection $M_2 \to M$ induit un isomorphisme des groupes de $\bar{\partial}$-cohomologie. L'isomorphisme $H^{0,k}(W_2) \to H^{0,k}(W_1)$ est alors une conséquence du « lemme des cinq » .

Dans le cas général $\dim M \geq 1$, notons que W_2 n'est autre que l'éclatée de W_1 selon l'image canonique de M dans W_1, et on a un morphisme birationnel $\zeta : W_2 \to W_1$. La famille des noyaux des opérateurs de Dirac-Dolbeault sur les fibres de W_j est donnée par $x \to H^{0,pair}(W_{j,x})$ et la famille des conoyaux par $H^{0,impair}(W_{j,x})$, et ce sont des fibrés vectoriels. Soit $\mathcal{D}(W_j)$ la famille des opérateurs de Dolbeault - Dirac gradués sur les fibres de $W_j \to M$. Comme les noyaux et conoyaux s'identifient à la $\bar{\partial}$-cohomologie des fibres, ils forment tous les deux un fibré vectoriel, et par ce qui précède p_W^* induit des isomorphismes de ces fibrés.

Donc $\mathrm{Ind}(\mathcal{D}(W_1)) = \mathrm{Ind}(\mathcal{D}(W_2))$ dans $K_0(M)$, d'où le résultat par la proposition qui précède.

□

6.1. **Opérateurs inversibles à l'infini.** Un autre exemple important est la version famille du théorème de Gromov-Lawson dans le cas de métrique riemanniennes à courbure scalaire positive. Bien qu'il est seulement envisagé ici le cas complexe, les résultats qui suivent s'appliquent au cas des variétés spin considéré dans [9]. Soit pour $i = 1, 2$, $f_i : \mathcal{U}_i \to V$ une famille différentiable de variétés complexes et supposons que

les fibres de f_i soient munies d'une structure hermitienne dont la courbure scalaire vérifie la condition de [13, Theorem 1.1, page 6]. Pour chaque $\varphi \in V$, l'opérateur de Dirac-Dolbeault $D_{i,v}$ sur la fibre $f_i^{-1}(\{v\})$ est alors un opérateur de Fredholm. La famille $\mathcal{D}_i$ de ces opérateurs, avec la $\mathbb{Z}_2$-graduation paire-impaire donne un élément de $K^0(V)$. Supposons que en dehors d'ensembles compacts $K_j \subset \mathcal{U}_i$, il y ait un isomophisme des variétés spin^c ($\mathcal{U}_1 - K_1$ et $\mathcal{U}_2 - K_2$ et soit D_3 la famille des opérateurs de Dirac obtenus en recollant convenablement des voisinages compacts de K_i. Il y a alors égalité dans $K^*(V)$ $\operatorname{Ind} D_3 = \operatorname{Ind} D_1 - \operatorname{Ind} D_2$.

7. Eclatement à centre lisse

Soit V_j pour $i = 1,2$ une variété complexe hermitienne, D_j l'opérateur de Dirac-Dolbeault et soit $\varphi : V_2 \to V_1$ un morphisme de classe C^∞. Soit M une variété complexe et $j_j : M \subset V_j$ une plongement holomorphe et $\pi_j : \bar{\mathcal{U}}_j \to M$ un voisinage tubulaire comme dans la proposition 3.2. On suppose que $\pi_1 \circ \varphi = \pi_2$ et que la restriction de φ à $V_2 - \varphi^{-1}(M)$ est un isomorphisme holomorphe avec $V_1 - M$.

Proposition 7.1. *Avec ces notations, et $j : M \to V_1$ le plongement canonique. On a l'égalité dans $K_0(V)$:*

$$\varphi_*(\mathcal{T}_2) - \mathcal{T}_1 = j_*(\operatorname{Ind}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \varphi) \otimes \mathcal{T}_M)$$

Démonstration. Soit $\mathcal{U} = \bar{\mathcal{U}_1} \cup_{\partial \bar{\mathcal{U}}_1} \bar{\mathcal{U}_2})$, et $\mathcal{V} = (V_1 - \mathcal{U}_1) \cup_{\partial \bar{\mathcal{U}}_1} (V_2 - \mathcal{U}_2)$. Soit D l'opérateur de Dirac sur $\mathcal{U}$ et $\tilde{D}$ l'opérateur de Dirac sur $\mathcal{V}$. La classe de D dans $K_0(\mathcal{U}) = KK(C(\mathcal{U}), \mathbb{C})$ est égale au produit intersection de D_M avec la classe de $\mathcal{D}$. Il y a des homomorphismes canoniques u et v de $C(V_1)$ dans $C(\mathcal{U})$ et dans $C(\mathcal{V})$.

On a alors l'égalité $D_1 - \varphi_*(D_2) = u^*(D) + v^*(\tilde{D})$ par [12, Corollary 10.2]. Or $\tilde{D}$ est le double d'un opérateur de Dirac comme défini par B. Booß-Bavnbek et K. Wojciechowski, edonc $v^*(\tilde{D})$ représente la classe nulle dans $K_0(V)$ par la proposition 4.2. L'indice relatif $\operatorname{Ind}(\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \varphi)$ est représenté $\mathcal{D}$. La classe de D dans $K_0(\mathcal{U}) = KK(C(\mathcal{U}), \mathbb{C})$ est égale au produit intersection de D_M avec la classe de $\mathcal{D}$, d'où le résultat.

□

Une conséquence immédiate est le :

Corollaire 7.2. *Soit V une variété analytique complexe, et W la variété obtenue par éclatement de V le long d'une sous-variété complexe $M \subset V$ et $\varphi : W \to V$ le morphisme associé. On a l'égalité dans $K_0(V)$:*

$$\phi_*(\mathcal{T}_W) = \mathcal{T}_V$$

Démonstration. C'est une conséquence à présent de la proposition précédente et de la proposition 7.1.

□

8. Invariance birationnelle en général

Soit V, W deux variétés analytiques complexes. Rappelons qu'une équivalence birationnelle φ entre V et W est la donnée d'ouverts au sens de Zariski $\mathcal{V} \subset V$, $\mathcal{W} \subset W$ et d'un difféomorphisme holomorphe $\varphi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$. Si $f : V \to Z$, $g : W \to Z$ sont deux fonctions à valeurs dans un ensemble Z, la notation $g \circ \varphi \approx f$ signifiera conventionnellement $g \circ \varphi(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{V}$.

Théorème 8.1. *Soit V, W deux variétés analytiques complexes et φ une équivalence birationnelle entre V et W, B un espace localement compact et $f : V \to B$ et $g : W \to B$ des applications continues et $g \circ \phi \approx f$ au sens précédent.*

Il y a égalité dans $K_0(B)$:

$$f_*(\mathcal{T}_V) = g_*(\mathcal{T}_W)$$

Démonstration. Il existe une variété analytique complexe Z et deux morphismes birationnels $\phi : Z \to V$, $\psi : Z \to W$ tels que φ soit l'équivalence birationnelle déterminée par l'inverse de ψ composé avec ϕ. En effet, soit $\tilde{Z}$ l'espace complexe obtenu en prenant l'adhérence du graphe de φ dans $W \times V$. Par le théorème d'Hironaka, il existe une variété analytique complexe Z et un morphisme birationnel de $Z \to \tilde{Z}$. On peut donc supposer que φ est un morphisme, et il suffit alors de montrer l'énoncé dans le cas $T = V$ et $f = \mathrm{Id}_V, g = \varphi$.

Par le théorème de factorisation faible énoncé dans [24, Theorem 0.1.1] ou [23, Theroem 1], il existe une suite :

$$Z_0 \overset{s_0}{\dashrightarrow} Z_1 \overset{s_1}{\dashrightarrow} Z_2 \cdots \overset{s_{k-1}}{\dashrightarrow} Z_k \overset{s_k}{\dashrightarrow} Z_{k+1}$$

où Z_j est une variété analytique complexe, $Z_0 = V, Z_{k+1} = W$ et où chaque symbole $\overset{s_j}{\dashrightarrow}$ désigne une équivalence birationnelle qui est égale soit à la projection canonique d'un éclatement avec centre lisse $Z_{j+1} \to Z_j$, soit à l'inverse de la projection d'un éclatement avec centre lisse $Z_j \to Z_{j+1}$ et tels qu'il existe $t_j : Z_j \to V$ avec $t_0 = \mathrm{Id}_V$, $t_k = \varphi$ et, ou $t_j \circ s_j = t_{j+1}$, ou bien $t_j = t_{j+1} \circ s_j$ selon le cas. Par la proposition précédente,en notant $\mathcal{T}_j$ la classe fondamentale de Z_j, on a alors soit $s_{j,*}(\mathcal{T}_j) = \mathcal{T}_{j+1}$, ou alors $\mathcal{T}_j = s_{j,*}(\mathcal{T}_{j+1})$ pour $0 \leq j \leq k$, et donc $\mathcal{T}_V = t_{0,*}(\mathcal{T}_V) = t_{1,*}(\mathcal{T}_1) = \cdots t_{k,*}(\mathcal{T}_{k+1}) = \varphi_*(\mathcal{T}_W)$.

□

9. La classe quasi-fondamentale d'un espace complexe

Les résultats précédents permettent de définir la classe fondamentale d'un espace complexe :

Définition 9.1. *Soit V un espace complexe. On définit la classe fondamentale $\mathcal{T}_V \in K_0(V)$ comme égale à $\psi_*(\mathcal{T}_W)$ où W est une variété analytique complexe tel qu'il existe un morphisme birationnel $\psi : W \to V$.*

Cette définition a bien un sens et est non vide. En effet l'image de la classe fondamentale ne dépend pas du choix de W. Soit $\tilde{W}$ une autre variété analytique complexe et $\tilde{\psi} : \tilde{W} \to V$ un morphisme birationnel. On a alors une équivalence birationnelle φ telle que $\tilde{\varphi} \circ \psi \approx \varphi$, et donc $\psi_*(\mathcal{T}_W) = \tilde{\psi}_*(\mathcal{T}_{\tilde{W}})$ par le théorème 8.1.

De plus, le théorème de désingularisation d'Hironaka établit l'existence d'une variété analytique complexe avec un morphisme birationnel sur V, ce qui montre que la classe fondamentale est bien définie et non triviale. En effet, si V est une variété complexe, alors sa classe fondamentale est égale à la classe fondamentale de sa structure complexe.

Soit $s : \hat{V} \to V$ et $t : \hat{W} \to W$ des résolutions respectivement de V et W. Il existe alors une équivalence birationnelle ψ qui relève ϕ par s et t. Par le théorème 8.1, on alors :

$$f_*(\mathcal{T}_V) = f_* \circ s_*(\mathcal{T}_{\hat{V}}) = g_* \circ t_*(\mathcal{T}_{\hat{W}}) = g_*(\mathcal{T}_W)$$

Enfin, notons que la classe fondamentale ici définie ne coïncide pas en général avec la classe d'orientation de Baum-Fulton-McPherson [3], sauf dans le cas de lisse.

Références

1. M. F. Atiyah and F. Hirzebruch, *The Riemann-Roch theorem for analytic embeddings*, Topology **1** (1962), 151–166.
2. Saad Baaj and Pierre Julg, *Théorie bivariante de Kasparov et opérateurs non bornés dans les C^*-modules hilbertiens*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **296** (1983), no. 21, 875–878.
3. Paul Baum, William Fulton, and Robert MacPherson, *Riemann-Roch and topological K theory for singular varieties*, Acta Math. **143** (1979), no. 3-4, 155–192.
4. Bruce Blackadar, *K-theory for operator algebras*, second ed., Mathematical Sciences Research Institute Publications, vol. 5, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
5. Jonathan Block and Shmuel Weinberger, *Higher Todd classes and holomorphic group actions*, Pure Appl. Math. Q. **2** (2006), no. 4, 1237–1253.
6. Bernhelm Booß-Bavnbek and Krzysztof P. Wojciechowski, *Elliptic boundary problems for Dirac operators*, Mathematics : Theory & Applications, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.

7. A. Connes and G. Skandalis, *The longitudinal index theorem*, Tohôku Journal of Math. **317** (1994), 521–526.
8. Alain Connes, *Geometry from the spectral point of view*, Lett. Math. Phys. **34** (1995), no. 3, 203–238.
9. M. Gromov and H.B. Lawson, *Positive scalar curvature and Dirac operator on complete Riemannian manifolds*, Pub. Math. I.H.E.S. **58** (1983), 83–196.
10. Nigel Higson and John Roe, *Analytic K-homology*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, 2000, Oxford Science Publications.
11. M. Hilsum, *Index classes of Hilbert modules with boundary*, Prépublication de l'Institut de Mathématiques de Jussieu n. 281, 2001.
12. Michel Hilsum, *Bordism invariance in KK-theory*, Math. Scand. **107** (2010), no. 1, 73–89.
13. Nigel Hitchin, *Harmonic spinors*, Advances in Math. **14** (1974), 1–55.
14. G. G. Kasparov, *The operator K-functor and extensions of C^*-algebras*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **44** (1980), no. 3, 571–636, 719.
15. _____, *K-theory, group C^*-algebras, and higher signatures (conspectus)*, Novikov conjectures, index theorems and rigidity, Vol. 1 (Oberwolfach, 1993), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 226, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 101–146.
16. Kunihiko Kodaira, *Complex manifolds and deformation of complex structures*, english ed., Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005, Translated from the 1981 Japanese original by Kazuo Akao.
17. Richard B. Melrose and Paolo Piazza, *An index theorem for families of Dirac operators on odd-dimensional manifolds with boundary*, J. Differential Geom. **46** (1997), no. 2, 287–334.
18. Liviu I. Nicolaescu, *Geometric connections and geometric Dirac operators on contact manifolds*, Differential Geom. Appl. **22** (2005), no. 3, 355–378.
19. William L. Pardon and Mark A. Stern, *L^2–$\overline{\partial}$-cohomology of complex projective varieties*, J. Amer. Math. Soc. **4** (1991), no. 3, 603–621.
20. J. Ruppenthal, *L^2-theory for the $\overline{\partial}$-operator on compact complex spaces*, Duke Math. J. **163** (2014), no. 15, 2887–2934.
21. Christoph Stadtmüller, *Adapted connections on metric contact manifolds*, J. Geom. Phys. **62** (2012), no. 11, 2170–2187.
22. Raymond O. Wells, Jr., *Differential analysis on complex manifolds*, third ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 65, Springer, New York, 2008, With a new appendix by Oscar Garcia-Prada.
23. Jarosław Włodarczyk, *Birational cobordisms and factorization of birational maps*, J. Algebraic Geom. **9** (2000), no. 3, 425–449.
24. _____, *Simple constructive weak factorization*, Algebraic geometry—Seattle 2005. Part 2, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 80, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009, pp. 957–1004.