



**HAL**  
open science

# Sur certaines équations fonctionnelles approchées, liées à la transformation de Gauss

Michel Balazard, Bruno Martin

► **To cite this version:**

Michel Balazard, Bruno Martin. Sur certaines équations fonctionnelles approchées, liées à la transformation de Gauss. *Aequationes Mathematicae*, 2019, 93 (3), pp.563-585. 10.1007/s00010-018-0594-z . hal-01835937

**HAL Id: hal-01835937**

**<https://hal.science/hal-01835937>**

Submitted on 11 Jul 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Sur certaines équations fonctionnelles approchées, liées à la transformation de Gauss

Michel Balazard et Bruno Martin\*

11 juillet 2018

## ABSTRACT

In the line of classical work by Hardy, Littlewood and Wilton, we study a class of functional equations involving the Gauss transformation from the theory of continued fractions. This allows us to reprove, among others, a convergence criterion for a diophantine series considered by Chowla, and to give additional information about the sum of this series.

## KEYWORDS

Fractional part, Continued fractions, Gauss transformation, Approximate functional equations  
MSC classification : 40A05 (11A55)

## 1 Introduction

Désignons par  $\{x\}$  la partie fractionnaire du nombre réel  $x$ , et par  $[x]$  sa partie entière, de sorte que

$$x = [x] + \{x\} \quad ; \quad [x] \in \mathbb{Z} \quad ; \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

À partir de la partie fractionnaire, nous définissons également la *première fonction de Bernoulli normalisée*,

$$B_1(x) = \begin{cases} \{x\} - 1/2 & (x \notin \mathbb{Z}) \\ 0 & (x \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

et la *transformation de Gauss*,

$$\alpha(x) = \{1/x\} \quad (0 < x < 1).$$

---

\*Bruno Martin is supported by ANR Grant MUDERA ANR-14-CE34-0009.

Les fonctions itérées de  $\alpha$  sont définies en posant

$$\begin{aligned}\alpha_0(x) &= x \\ \alpha_k(x) &= \alpha(\alpha_{k-1}(x)) \quad (k \geq 1).\end{aligned}$$

Lorsque  $x$  est rationnel,  $\alpha_k(x)$  est défini tant que  $k \leq K$ , où  $K$  est un entier, appelé *profondeur* de  $x$ , égal à la longueur de sa fraction continue (la définition précise est donnée au §2.2 ci-dessous); on a alors  $\alpha_K(x) = 0$ .

Nous introduisons également les fonctions

$$\beta_k(x) = \alpha_0(x)\alpha_1(x)\cdots\alpha_k(x)$$

(par convention,  $\beta_{-1} = 1$ ). Si  $x$  est rationnel, de profondeur  $K$ ,  $\beta_k(x)$  est donc défini si  $k \leq K$ .

L'étude présentée dans cet article a pour origine la question de la convergence des séries

$$\varphi_1(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{B_1(nx)}{n} \quad (1)$$

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \beta_{k-1}(x) \log(1/\alpha_k(x)), \quad (2)$$

où  $x \in \mathbb{R}$ . Pour la série  $\mathcal{W}(x)$ , nous adoptons les conventions suivantes : on pose  $\mathcal{W}(0) = 0$ ,  $\mathcal{W}(x)$  est limitée à la somme des termes d'indices  $< K$  si  $x$  est un nombre rationnel de profondeur  $K$  appartenant à l'intervalle  $]0, 1[$  (par exemple,  $\mathcal{W}(1/k) = \log k$  si  $k$  est entier,  $k \geq 2$ ), et  $\mathcal{W}$  est prolongée à  $\mathbb{R}$  par périodicité :  $\mathcal{W}(x) = \mathcal{W}(\{x\})$ .

Ces deux séries ont été considérées dans les années trente du siècle dernier. La première apparaît dans l'article de Chowla [12], p. 546, mais elle est très voisine d'un exemple donné par Riemann au §XIII de son mémoire d'habilitation sur les séries trigonométriques. La seconde apparaît dans l'article de Wilton [29] : il y montre que la série

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi nx), \quad (3)$$

où  $\tau(n)$  désigne le nombre de diviseurs du nombre entier naturel  $n$ , converge si, et seulement si la série  $\mathcal{W}(x)$  converge (assertion (20<sub>III</sub>), p. 221). Nous nommerons *points de Wilton* les nombres réels  $x$  irrationnels tels que la série  $\mathcal{W}(x)$  converge, et *fonction de Wilton* la somme de la série  $\mathcal{W}(x)$  en ses points de convergence. Sa propriété fondamentale est l'équation fonctionnelle

$$\mathcal{W}(x) = \log(1/x) - x\mathcal{W}(\{1/x\}), \quad (4)$$

valable quand  $x$  est un point de convergence,  $x \neq 0$ .

La série  $\psi_1(x)$  n'est autre que celle obtenue formellement à partir de la série  $\varphi_1(x)$  en remplaçant les termes  $B_1(nx)$  par leur développement en série de Fourier. Le fait que la série  $\varphi_1(x)$  de Chowla converge si, et seulement si la série  $\mathcal{W}(x)$  converge, ne fut démontré qu'en 2004 par la Bretèche et Tenenbaum (cf. [6], Théorème 4.4, p. 16), et, indépendamment, par Oskolkov en 2005 (cf. [21], Corollary 1, A, p. 210). L'identité  $\varphi_1(x) = \psi_1(x)$  en tout point de convergence est établie dans ces deux travaux. La Bretèche et Tenenbaum déduisent ce dernier résultat de leur théorie générale des séries trigonométriques à coefficients arithmétiques fondée sur la P-sommation (consistant à approcher l'ensemble des nombres entiers par celui des nombres dont tous les diviseurs premiers sont  $\leq y$ , avec  $y$  tendant vers l'infini), tandis qu'Oskolkov étudie une classe générale de procédés de sommation de la série double sous-jacente à  $\varphi_1$  et  $\psi_1$ .

Notre propos dans le présent article est, avant tout, méthodologique. Nous allons montrer que l'égalité des ensembles de convergence des séries  $\varphi_1$  de Chowla et  $\mathcal{W}$  de Wilton peut également être obtenue en suivant la méthode introduite en 1914 par Hardy et Littlewood dans [16] : celle de l'équation fonctionnelle approchée. C'est précisément cette méthode que Wilton utilisa en 1933 pour démontrer l'égalité des ensembles de convergence de  $\psi_1$  et  $\mathcal{W}$ .

La méthode de l'équation fonctionnelle fournit une expression de la somme  $\varphi_1(x) + \frac{1}{2}\mathcal{W}(x)$  en tout point de convergence. L'analyse de cette expression conduit au résultat nouveau suivant.

**Théorème** *La fonction  $G = \varphi_1 + \frac{1}{2}\mathcal{W}$  se prolonge en une fonction de période 1, bornée, continue en tout irrationnel, et ayant une discontinuité de première espèce en tout rationnel.*

La fonction  $G$  est l'objet du §5.2, où ses propriétés sont énoncées plus précisément. Son caractère borné est déjà mentionné par Oskolkov dans [21], Theorem 1, p. 200.

Le théorème et sa démonstration ont été décrits dans notre prépublication [3] de 2013. Signalons qu'une identité voisine de notre énoncé, exprimée en termes de la fonction  $\psi_1$ , a depuis été obtenue par Bettin (cf. [5], (1.8), p. 11422).

Nous connaissons deux applications de ce théorème. D'une part, il nous a permis de montrer que l'ensemble des points de dérivabilité de la fonction d'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire », donnée par

$$A(\lambda) = \int_0^\infty \{t\}\{\lambda t\} \frac{dt}{t^2} \quad (\lambda \geq 0), \quad (5)$$

et définie par Báez-Duarte *et al.* dans [1], est l'ensemble des points de Wilton. Ce résultat, qui sera l'objet d'une publication séparée, a été redémontré par la Bretèche et Tenenbaum dans [7] à partir de résultats obtenus dans [6].

D'autre part, le théorème et le fait que  $\mathcal{W}$  vérifie l'équation fonctionnelle (4) ont été utilisés par Maier et Rassias [17, 18] pour étudier le comportement asymptotique des moments de la fonction  $|\varphi_1|$ .

Voici quel est le plan de cet article. Nous rappelons d'abord au §2 les éléments de la théorie classique des fractions continues qui nous seront utiles. Le §3 donne un aperçu historique de la

méthode de l'équation fonctionnelle approchée. Le cœur de l'article est le §4, qui présente un résultat général de convergence. Le §5 contient l'application de cette théorie aux séries de Chowla et Wilton, et le §6 mentionne succinctement d'autres applications.

## 2 Fractions continues

### 2.1 Notation

Nous utilisons dans ce paragraphe la notation classique des fractions continues  $[b_0; b_1, \dots, b_k]$ . À partir d'une suite  $(b_k)$ , on définit les suites  $(p_k)$  et  $(q_k)$  par les formules de récurrence

$$\begin{aligned} p_{k+1} &= b_{k+1}p_k + p_{k-1} \\ q_{k+1} &= b_{k+1}q_k + q_{k-1} \quad (k \geq 0), \end{aligned}$$

et les valeurs initiales

$$p_{-1} = 1, q_{-1} = 0; p_0 = b_0, q_0 = 1, \tag{6}$$

de sorte que

$$[b_0; b_1, \dots, b_k] = \frac{p_k}{q_k}.$$

Dans cet article,  $b_0$  sera toujours égal à 0.

### 2.2 Profondeur d'un nombre réel de $]0, 1[$

Soit  $r$  un nombre rationnel,  $0 < r < 1$ , mis sous forme irréductible  $p/q$ . Il peut s'écrire d'une et une seule façon sous la forme

$$r = [0; b_1, \dots, b_k] \tag{7}$$

avec  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_i \in \mathbb{N}^*$  pour  $1 \leq i \leq k$ , et  $b_k \geq 2$ . Nous dirons que  $r$  est de profondeur  $k$ . On a alors  $\alpha_k(r) = 0$ .

Par convention, 0 est de profondeur 0, et tout irrationnel est de profondeur infinie. On voit que, pour tout  $x \in ]0, 1[$  de profondeur  $k$ ,  $\alpha(x)$  est de profondeur  $k - 1$ .

### 2.3 Cellules

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $b_0 = 0$  et  $b_1, \dots, b_k \in \mathbb{N}^*$ . Par définition, la cellule (de profondeur  $k$ )  $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$  est l'intervalle ouvert d'extrémités  $[b_0; b_1, \dots, b_k]$  et  $[b_0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k + 1]$ . Par convention, la seule cellule de profondeur 0 est  $]0, 1[$ .

Les extrémités de  $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$  sont

$$\frac{p_k}{q_k} \quad \text{et} \quad \frac{p_k + p_{k-1}}{q_k + q_{k-1}}$$

(dans cet ordre si  $k$  est pair ; dans l'ordre opposé si  $k$  est impair).

Inversement, soit  $r = p/q$  un nombre rationnel (avec  $(p, q) = 1$ ), appartenant à  $]0, 1[$ , représenté sous la forme (7). Écrivons  $[0; b_1, \dots, b_{k-1}]$  sous forme réduite  $p_{k-1}/q_{k-1}$  (si  $k = 1$ , on a  $p_0 = 0$  et  $q_0 = 1$ ). Le nombre rationnel  $r$  est une extrémité de deux cellules de profondeur  $k$  (qui sont donc contiguës) :

$$\mathfrak{c} \text{ d'extrémités } [0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k - 1] = \frac{p - p_{k-1}}{q - q_{k-1}} \text{ et } r;$$

$$\mathfrak{c}' \text{ d'extrémités } r \text{ et } [0; b_1, \dots, b_{k-1}, b_k + 1] = \frac{p + p_{k-1}}{q + q_{k-1}}.$$

Enfin, observons que les profondeurs des éléments d'une cellule de profondeur  $K$  sont (strictement) supérieures à  $K$ , et que tout nombre de  $]0, 1[$  de profondeur  $> K$  appartient à une unique cellule de profondeur  $K$ .

## 2.4 Les fonctions $a_k, p_k, q_k$

Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , nous définissons la fonction à valeurs dans  $\mathbb{N}^*$ ,  $a_k$ , sur l'ensemble des nombres  $x \in ]0, 1[$ , rationnels ou irrationnels, dont la profondeur est  $\geq k$ , par la relation

$$a_k(x) = \lfloor 1/\alpha_{k-1}(x) \rfloor.$$

On pose  $a_0(x) = 0$  pour tout  $x \in ]0, 1[$ , et on appelle  $a_k(x)$  le  $k^{\text{e}}$  quotient incomplet de  $x$ .

Les fonctions  $p_k, q_k$  sont définies pour les mêmes valeurs de  $x$  par le fait que  $p_k(x)/q_k(x)$  est la fraction irréductible égale à  $[0; a_1(x), \dots, a_k(x)]$ . Les nombres  $p_k(x)$  et  $q_k(x)$  sont, respectivement, le numérateur et le dénominateur de la  $k^{\text{e}}$  fraction réduite de  $x$ . Les fonctions  $p_{-1}, q_{-1}, p_0, q_0$ , sont définies sur  $]0, 1[$  par (6) (avec  $b_0 = 0$ ).

Dans une cellule de profondeur  $k$ ,  $\mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k)$ , les fonctions  $a_j, p_j, q_j$  sont donc définies pour  $j \leq k + 1$ , et constantes pour  $j \leq k$  :

$$a_j(x) = b_j, \quad \frac{p_j(x)}{q_j(x)} = [b_0; b_1, \dots, b_j] \quad (x \in \mathfrak{c}(b_1, \dots, b_k), 0 \leq j \leq k).$$

Rappelons quels sont les liens entre les fonctions  $p_k, q_k$ , d'une part, et les fonctions  $\alpha_k, \beta_k$ , d'autre part. Pour tout  $x \in ]0, 1[$ , dont la profondeur est  $\geq k$ , on a

$$\alpha_k(x) = -\frac{p_k(x) - xq_k(x)}{p_{k-1}(x) - xq_{k-1}(x)} \quad (8)$$

$$\beta_k(x) = (-1)^{k-1} (p_k(x) - xq_k(x)) = |p_k(x) - xq_k(x)|. \quad (9)$$

Si la profondeur de  $x$  est  $\geq k + 1$ , on a

$$\beta_k(x) = \frac{1}{q_{k+1}(x) + \alpha_{k+1}(x)q_k(x)}. \quad (10)$$

Si  $r = p/q \in ]0, 1[$  est un nombre rationnel de profondeur  $K \geq 1$ , écrit sous forme irréductible, alors (10) montre que  $\beta_{K-1}(r) = 1/q$ .

En omettant d'indiquer la variable  $x$  (de profondeur  $\geq k+1$ ), on déduit de (10) les encadrements

$$\frac{1}{q_{k+1} + q_k} \leq \beta_k \leq \frac{1}{q_{k+1}} \leq \frac{1}{F_{k+2}} \quad (k \geq -1), \quad (11)$$

où  $F_{k+2}$  est le  $(k+2)^e$  nombre de Fibonacci, et (cf. [2], proposition 1),

$$-\frac{\log(2q_k)}{q_k} \leq \beta_{k-1} \log(1/\alpha_k) - \frac{\log q_{k+1}}{q_k} \leq \frac{\log 2}{q_k}. \quad (12)$$

Pour tout irrationnel  $x \in ]0, 1[$  et tout  $s \in \mathbb{C}$ , nous noterons  $\rho(x, s)$  le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{k \geq 0} \beta_{k-1}(x)^s z^k.$$

Si  $\sigma = \Re s \geq 0$ , on voit que  $\rho(x, s) \geq ((1 + \sqrt{5})/2)^\sigma$ .

Nous utiliserons souvent le fait que, pour tout  $x \in ]0, 1[$ , la suite  $(\beta_k(x))$  est strictement décroissante. Enfin, notons que, si  $k \in \mathbb{N}$ , les fonctions  $\alpha_k$  et  $\beta_k$  sont continues en tout point de  $]0, 1[$  dont la profondeur est  $> k$ , en particulier en tout point irrationnel.

### 3 Aperçu historique de la méthode de l'équation fonctionnelle approchée

Pour étudier l'ordre de grandeur des sommes partielles d'une série numérique dont le terme général est oscillant, Hardy et Littlewood ont développé une méthode élégante et efficace qui consiste à exploiter une éventuelle équation fonctionnelle approchée vérifiée par les sommes partielles de la série étudiée. Pour formaliser cette idée, considérons une suite de fonctions  $(u_n)$  définies sur un ensemble  $X$  et à valeurs complexes ou vectorielles, et notons

$$f(x, v) = \sum_{1 \leq n \leq v} u_n(x) \quad (x \in X, v > 0).$$

ses sommes partielles.

Suivant les valeurs de  $x$ , on s'interroge sur le comportement asymptotique de  $f(x, v)$  lorsque  $v$  tend vers l'infini (caractère borné, convergence, ordre de grandeur). Il arrive dans certains cas que l'on puisse établir une relation entre les valeurs  $f(x, v)$  et  $f(T(x), v')$  où  $T$  est une certaine application définie sur  $X$  à valeurs dans  $X$ , et  $v'$  dépend de  $v$  et de  $x$ . Cette relation contient généralement un terme d'erreur dépendant de  $v$  et  $x$ , et prend ainsi le nom d'équation fonctionnelle approchée. Il s'agit ensuite de l'itérer convenablement pour atteindre l'objectif fixé. Dans la circonstance favorable où les valeurs successives  $v, v', v'', \dots$ , résultant de cette itération, décroissent

jusqu'à devenir  $< 1$ , on peut remplacer  $f(x, v)$  par une somme comportant arbitrairement peu de termes (somme que l'on peut estimer trivialement), voire plus aucun.

L'exemple initialement étudié par Hardy et Littlewood en 1914 est celui des sommes partielles de la fonction thêta de Jacobi,

$$\sum_{n \leq v} \exp(i\pi n^2 x),$$

et de certaines variantes de cette somme. Il résulte par exemple du théorème 2.128, p. 209 de [16] que

$$\sum_{n \leq v} \exp(i\pi n^2 x) - \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt{x}} \sum_{n \leq xv} \exp(-i\pi n^2/x) = O(\sqrt{1/x}) \quad (0 < x < 1, v > 0). \quad (13)$$

De plus, les propriétés de périodicité des diverses « sommes thêta » considérées leur permettent de remplacer la quantité  $1/x$  apparaissant dans l'exponentielle complexe de la seconde somme de la relation (13) par la partie fractionnaire<sup>1</sup>  $\alpha(x) = \{1/x\}$ . Avec nos notations, on a donc  $T = \alpha$  et  $v' = xv$  pour l'exemple (13). L'itération de (13) et de ses variantes permet alors à Hardy et Littlewood d'obtenir l'estimation

$$\sum_{n \leq v} \exp(i\pi n^2 x) \ll v\sqrt{\beta_k(x)} + 1/\sqrt{\beta_k(x)}, \quad (x \in ]0, 1[ \setminus \mathbb{Q}, k \in \mathbb{N}). \quad (14)$$

On voit que le terme  $v\sqrt{\beta_k(x)}$  peut être omis du second membre de (14) si l'on a  $v\beta_k(x) < 1$ , ce qui correspond d'ailleurs à une somme vide après  $k$  itérations. L'estimation (14) permet ensuite d'obtenir des informations sur l'ordre de grandeur de la somme partielle étudiée en fonction des propriétés du développement de  $x$  en fraction continue, dont on sait qu'il est régi par la suite des  $\alpha_k(x)$ . C'est l'un des « grands théorèmes du vingtième siècle » présentés par Choimet et Queffelec dans leur livre [10].

Plusieurs contemporains de Hardy et Littlewood précisèrent ces résultats ou en étudièrent diverses généralisations (cf. [13], [19], [20], [28]). En 1933, Wilton [29] mit cette méthode à profit pour retrouver certains résultats concernant les sommes partielles

$$\sum_{n \leq v} \tau(n) \exp(2i\pi nx)$$

étudiées un peu plus tôt par Chowla [11, 12] et Walfisz [27], et, comme nous l'avons évoqué dans l'introduction, donner un critère de convergence pour les parties réelle et imaginaire de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n} \exp(2i\pi nx).$$

---

1. Nous simplifions ici la présentation de leur raisonnement ; il faut en fait considérer simultanément trois « sommes thêta » (cf. [16] pour les détails).



Dans tous ces exemples, les sommes partielles satisfont à une équation fonctionnelle approchée où l'application  $T$  est la transformation de Gauss. Les majorations ou les critères de convergence obtenus pour ces séries font donc naturellement intervenir la nature diophantienne de  $x$ .

Après un relatif oubli<sup>2</sup>, cette méthode a connu récemment un regain d'intérêt, et a été notamment utilisée par Rivoal et ses co-auteurs pour traiter une grande variété de situations (cf. [22], [23], [24]).

À ce stade, il faut signaler que la principale difficulté dans la méthode de l'équation fonctionnelle approchée consiste précisément à établir une telle équation, qui est souvent le reflet d'une équation fonctionnelle exacte satisfaite par une certaine série génératrice associée à la série considérée (la fonction thêta de Jacobi et la fonction zêta de Riemann pour les exemples qui précèdent).

L'exploitation de cette équation fonctionnelle est *a priori* la partie du travail la plus aisée. Néanmoins, elle peut parfois s'avérer fastidieuse et il serait commode de disposer de certains résultats généraux pour déterminer rapidement les points de convergence de  $f(x, v)$ . Dans ce but, nous proposons au paragraphe suivant l'étude d'une famille spécifique d'équations fonctionnelles approchées.

## 4 Un critère de convergence pour les solutions de certaines équations fonctionnelles approchées

### 4.1 Forme de l'équation fonctionnelle approchée considérée

Soient  $a$  un nombre réel strictement positif,  $\theta$  et  $s$  des nombres complexes. On suppose qu'une application  $f : [0, 1[ \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  satisfait à l'équation

$$f(x, v) - \theta x^s f(\alpha(x), x^a v) = g(x) + \varepsilon(x, v) \quad (0 < x < 1, v > 0), \quad (15)$$

et nous étudions pour tout  $x \in [0, 1[$ , l'existence de

$$\mathfrak{F}(x) = \lim_{v \rightarrow \infty} f(x, v).$$

Une hypothèse assez naturelle pour espérer appliquer avec succès la méthode développée par Hardy et Littlewood est la convergence de  $\varepsilon(x, v)$  vers 0 lorsque  $v$  tend vers l'infini, pour tout  $x$  fixé.

Cette hypothèse est suffisante pour énoncer un critère quant à l'existence de  $\mathfrak{F}(x)$  lorsque  $x$  est rationnel, mais elle semble insuffisante pour aborder le cas où  $x$  est irrationnel. Nous proposons ci-dessous un jeu d'hypothèses sous lesquelles un critère d'existence pour  $\mathfrak{F}(x)$  peut être établi lorsque  $x$  est irrationnel.

---

2. Cf. cependant [9] dans le contexte des corps quadratiques.

Nous supposons dans toute la suite que la fonction  $\varepsilon$  figurant dans l'équation fonctionnelle approchée (15) satisfait l'hypothèse suivante :

**i)** pour tout  $x \in ]0, 1[$ , on a

$$\varepsilon(x, v) \rightarrow 0 \quad (v \rightarrow \infty).$$

En outre, nous considérons les trois hypothèses suivantes, portant sur les fonctions  $f$ ,  $g$  et  $\varepsilon$  figurant dans l'équation fonctionnelle approchée (15) :

**ii)**  $\varepsilon(x, v) \ll 1 \quad (0 < x < 1, x^a v \geq 1)$ ;

**iii)**  $f(x, 1) \ll 1 \quad (0 < x < 1)$ ;

**iv)**  $f(x, v) \ll 1 + |g(x)| \quad (0 < x < 1, x^a v < 1)$ .

Notons que (15) et **i)** entraînent, pour tout  $x \in ]0, 1[$  tel que  $\mathfrak{F}(x)$  existe, l'existence de  $\mathfrak{F}(\alpha(x))$  et la relation

$$\mathfrak{F}(x) - \theta x^s \mathfrak{F}(\alpha(x)) = g(x).$$

C'est l'équation fonctionnelle exacte associée à (15).

## 4.2 Une solution de l'équation fonctionnelle exacte associée

Pour toute fonction  $g : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{C}$ , on définit la série

$$\mathcal{S}_g(x) = \sum_{j \geq 0} \theta^j \beta_{j-1}(x)^s g(\alpha_j(x)) \quad (0 < x < 1), \quad (16)$$

en convenant que la somme est limitée aux indices  $j < K$  si  $x$  est un nombre rationnel de profondeur  $K$ . Nous omettons d'indiquer la dépendance en  $\theta$  et  $s$ , qui sont fixés dans toute cette étude.

Notons  $D_g$  l'ensemble des nombres réels  $x \in ]0, 1[$  tels que la série  $\mathcal{S}_g(x)$  converge. Cet ensemble contient donc tous les nombres rationnels de  $]0, 1[$  et, peut-être, certains nombres irrationnels. Par convention, 0 n'appartient pas à  $D_g$ , mais nous prolongeons la définition de  $\mathcal{S}_g$  en  $x = 0$  en posant  $\mathcal{S}_g(0) = 0$ .

La série  $\mathcal{S}_g$  a été définie de sorte que la proposition suivante soit vraie.

**Proposition 1** *La fonction  $\mathcal{S}_g$  est solution, sur  $D_g$ , de l'équation fonctionnelle exacte associée à (15) :*

$$\mathcal{S}_g(x) - \theta x^s \mathcal{S}_g(\alpha(x)) = g(x) \quad (x \in D_g).$$

**Démonstration**

Soit  $x \in D_g$ , et  $K$  sa profondeur (égale à  $\infty$ , si  $x$  est irrationnel). On a

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_g(x) - g(x) &= \sum_{0 \leq j < K-1} \theta^{j+1} \beta_j(x)^s g(\alpha_{j+1}(x)) \\ &= \theta x^s \sum_{0 \leq j < K-1} \theta^j \beta_{j-1}(\alpha(x))^s g(\alpha_j(\alpha(x))) \quad (\text{donc } \alpha(x) \in D_g \cup \{0\}) \\ &= \theta x^s \mathcal{S}_g(\alpha(x)), \end{aligned}$$

car  $\alpha(x)$  est de profondeur  $K - 1$ . □

### 4.3 Énoncé du résultat

Sous les hypothèses **i)**, **ii)**, **iii)** et **iv)** du §4.1, on a le résultat suivant :

**Proposition 2** *Si  $\mathfrak{F}(0) = z_0$  existe, alors la limite  $\mathfrak{F}(x)$  existe pour tout nombre rationnel  $x$  de l'intervalle  $]0, 1[$ , et on a*

$$\mathfrak{F}(x) = \mathcal{S}_g(x) + \theta \beta_{K-1}(x)^s z_0,$$

où  $K \in \mathbb{N}$  est la profondeur de  $x$ . Dans le cas contraire, la limite  $\mathfrak{F}(x)$  n'existe pour aucun nombre rationnel  $x$  de  $]0, 1[$ .

Si  $x \in ]0, 1[$  est irrationnel et tel que  $\rho(x, s) > |\theta|$ ,  $\mathfrak{F}(x)$  existe si et seulement si la série  $\mathcal{S}_g(x)$  est convergente, et dans ce cas on a

$$\mathfrak{F}(x) = \mathcal{S}_g(x).$$

Nous démontrons ce résultat dans les sous-paragraphes suivants en distinguant le cas rationnel (ou les hypothèses **ii)**, **iii)** et **iv)** ne seront pas employées) du cas irrationnel.

### 4.4 Le cas où $x$ est rationnel

Pour ce cas, la seule hypothèse **i)** suffit. Elle entraîne que, pour tout élément  $x$  de  $]0, 1[$ ,  $\mathfrak{F}(x)$  existe si et seulement si  $\mathfrak{F}(\alpha(x))$  existe, et dans ce cas, on a

$$\mathfrak{F}(x) - \theta x^s \mathfrak{F}(\alpha(x)) = g(x). \tag{17}$$

Nous allons conclure de cette simple remarque que la convergence ou la divergence de  $f(0, v)$  conditionne l'existence de  $\mathfrak{F}(x)$  pour tous les nombres rationnels de  $]0, 1[$ .

**Proposition 3** *S'il existe  $z_0 \in \mathbb{C}$  tel que  $\mathfrak{F}(0) = z_0$ , alors  $\mathfrak{F}(x)$  existe pour tout nombre rationnel  $x$  de  $]0, 1[$ , et on a*

$$\mathfrak{F}(x) = \mathcal{S}_g(x) + \theta^K z_0 q^{-s}, \tag{18}$$

où  $q$  est le dénominateur de la fraction irréductible égale à  $x$ , et  $K$  la profondeur de  $x$ .

Si en revanche,  $\mathfrak{F}(0)$  n'existe pas, alors il en est de même pour  $\mathfrak{F}(x)$  pour tout nombre rationnel  $x$  de  $]0, 1[$ .

## Démonstration

Dans (18), nous pouvons écrire  $\beta_{K-1}(x)^s$  au lieu de  $q^{-s}$ .

Lorsque  $f(0, v)$  converge, la convergence de  $f(x, v)$  et la relation (18) se démontrent par récurrence sur la profondeur  $K$  de  $x$ .

Le cas  $K = 0$  correspond à  $x = 0$ , et découle de l'hypothèse faite sur  $\mathfrak{F}(0)$ .

Supposons maintenant  $K \geq 1$ , et le résultat acquis pour tous les nombres rationnels de profondeur  $K - 1$ . Si  $x$  est de profondeur  $K$ ,  $\alpha(x)$  est de profondeur  $K - 1$ , et on utilise (17) pour en déduire l'existence de  $\mathfrak{F}(x)$ . De plus, on obtient la relation

$$\begin{aligned}\mathfrak{F}(x) &= g(x) + \theta x^s \mathfrak{F}(\alpha(x)) \\ &= g(x) + \theta x^s \left( \mathcal{S}_g(\alpha(x)) + \theta^{K-1} \beta_{K-2}(\alpha(x))^s z_0 \right) \text{ (hypothèse de récurrence)} \\ &= \mathcal{S}_g(x) + \theta^K \beta_{K-1}(x)^s z_0,\end{aligned}$$

d'après la proposition 1.

Réciproquement, si  $x_0$  est un nombre rationnel de profondeur minimale parmi les  $x$  tels que  $\mathfrak{F}(x)$  existe, la relation (17) entraîne  $x_0 = 0$ .  $\square$

## 4.5 Le cas irrationnel

### 4.5.1 Itération de l'équation fonctionnelle approchée

Avant de traiter le cas irrationnel, nous explicitons l'équation fonctionnelle obtenue par itération de l'identité (15). Le résultat est

$$f(x, v) - \theta^k \beta_{k-1}(x)^s f(\alpha_k(x), \beta_{k-1}(x)^a v) = \sum_{0 \leq j < k} \theta^j \beta_{j-1}(x)^s \left( g(\alpha_j(x)) + \varepsilon(\alpha_j(x), \beta_{j-1}(x)^a v) \right), \quad (19)$$

égalité valable pour tout  $x \in [0, 1[$  et tout  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $k$  soit inférieur ou égal à la profondeur de  $x$ .

Le cas  $k = 0$  est trivial. Le cas  $k = 1$  correspond à (15). Maintenant, si (19) est vraie au rang  $k \geq 1$ , et si la profondeur de  $x$  est supérieure ou égale à  $k + 1$ , alors l'identité (15) appliquée à  $\alpha_k(x)$  et  $\beta_{k-1}(x)^a v$  nous donne

$$f(\alpha_k(x), \beta_{k-1}(x)^a v) - \theta \alpha_k(x)^s f(\alpha_{k+1}(x), \beta_k(x)^a v) = g(\alpha_k(x)) + \varepsilon(\alpha_k(x), \beta_{k-1}(x)^a v). \quad (20)$$

En ajoutant (19) et  $\theta^k \beta_{k-1}(x)^s \times (20)$ , on obtient bien la relation (19) au rang  $k + 1$  au lieu de  $k$ .

Pour la solution  $\mathcal{S}_g$  de l'équation fonctionnelle exacte, on démontre de la même façon que, si  $x \in D_g$  et si le nombre entier  $k$  est inférieur ou égal à la profondeur de  $x$ , alors  $\alpha_k(x) \in D_g \cup \{0\}$  et

$$\mathcal{S}_g(x) - \theta^k \beta_{k-1}(x)^s \mathcal{S}_g(\alpha_k(x)) = \sum_{0 \leq j < k} \theta^j \beta_{j-1}(x)^s g(\alpha_j(x)). \quad (21)$$

### 4.5.2 Résultat préliminaire

Nous commençons en examinant le comportement de la partie de la somme de (19) où intervient la fonction  $\varepsilon$ . Comme  $x$  est fixé dans tout ce paragraphe, nous noterons simplement  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  pour  $\alpha_j(x)$  et  $\beta_j(x)$ .

**Proposition 4** *On suppose vérifiées les hypothèses **i**), **ii**). Soit  $x \in ]0, 1[$  un nombre irrationnel tel que  $\rho(x, s) > |\theta|$ . On a*

$$\sum_{0 \leq j < K} \theta^j \beta_{j-1}^s \varepsilon(\alpha_j, \beta_{j-1}^a v) \rightarrow 0 \quad (v \rightarrow \infty, K \geq 1, \beta_{K-1}^a v \geq 1). \quad (22)$$

**Démonstration** Soit  $(v_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres réels, et  $(K_n)_{n \geq 1}$  une suite de nombres entiers positifs, telles que

$$v_n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty),$$

et

$$\beta_{K_n-1}^a v_n \geq 1 \quad (n \geq 1).$$

On a<sup>3</sup>

$$\sum_{0 \leq j < K_n} \theta^j \beta_{j-1}^s \varepsilon(\alpha_j, \beta_{j-1}^a v_n) = \sum_{j \geq 0} \theta^j \beta_{j-1}^s \varepsilon(\alpha_j, \beta_{j-1}^a v_n) [j < K_n],$$

avec

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \theta^j \beta_{j-1}^s \varepsilon(\alpha_j, \beta_{j-1}^a v_n) [j < K_n] \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \text{ (d'après **i**)}$$

$$\forall j \in \mathbb{N}, \quad \theta^j \beta_{j-1}^s \varepsilon(\alpha_j, \beta_{j-1}^a v_n) [j < K_n] \ll |\theta|^j \beta_{j-1}^\sigma \text{ (d'après **ii**)}.$$

La conclusion (22) découle alors du théorème de la convergence dominée de Lebesgue.  $\square$

### 4.5.3 Condition nécessaire pour la convergence de $f(x, v)$

**Proposition 5** *On suppose vérifiées les hypothèses **i**), **ii**) et **iii**). Soit  $x \in ]0, 1[$  un nombre irrationnel tel que  $\rho(x, s) > |\theta|$ . Si la limite  $\mathfrak{F}(x)$  existe alors la série  $\mathcal{S}_g(x)$  est convergente et on a*

$$\mathfrak{F}(x) = \mathcal{S}_g(x).$$

**Démonstration** Pour  $K \in \mathbb{N}$ , on pose

$$v = v(x, K) = 1/(\beta_{K-1}^a v)$$

---

3. Nous employons ici la notation d'Iverson :  $[P] = 1$  si la propriété  $P$  est satisfaite, et  $[P] = 0$  sinon.

de sorte que  $v(x, K) \rightarrow \infty$  quand  $K \rightarrow \infty$ . En appliquant la relation (19) à  $k = K$ , on obtient

$$f(x, v) - \theta^K \beta_{K-1}^s f(\alpha_K, 1) = \sum_{0 \leq j < K} \theta^j \beta_{j-1}^s g(\alpha_j) + \sum_{0 \leq j < K} \theta^j \beta_{j-1}^s \varepsilon(\alpha_j, \beta_{j-1}^a v). \quad (23)$$

D'après **iii)**,

$$\theta^K \beta_{K-1}^s f(\alpha_K, 1) \ll |\theta|^K \beta_{K-1}^\sigma. \quad (24)$$

Comme  $|\theta| < \rho(x, s)$ , le majorant de (24) tend vers 0 quand  $K$  tend vers l'infini. Si  $f(x, v)$  converge vers  $\mathfrak{F}(x)$ , les relations (22), (23) et (24) mènent à la conclusion que la série  $\mathcal{S}_g(x)$  converge et a pour somme  $\mathfrak{F}(x)$ .  $\square$

#### 4.5.4 Condition suffisante pour la convergence de $f(x, v)$

**Proposition 6** *On suppose vérifiées les hypothèses **i)**, **ii)** et **iv)**. Soit  $x \in ]0, 1[$  un nombre irrationnel tel que  $\rho(x, s) > |\theta|$ . Si la série  $\mathcal{S}_g(x)$  est convergente alors la limite  $\mathfrak{F}(x)$  existe et on a*

$$\mathfrak{F}(x) = \mathcal{S}_g(x).$$

**Démonstration** Pour  $v > 1$ , définissons l'entier  $K = K(x, v) \geq 0$  par l'encadrement

$$\beta_{K-1}^a v \geq 1 > \beta_K^a v.$$

On voit que  $K(x, v) \rightarrow \infty$  si, et seulement si  $v \rightarrow \infty$ .

L'équation (23) reste valable. La condition **iv)** entraîne que

$$\theta^K \beta_{K-1}^s f(\alpha_K, \beta_{K-1}^a v) \ll |\theta|^K \beta_{K-1}^\sigma (1 + |g(\alpha_K)|). \quad (25)$$

Comme  $|\theta| < \rho(x, s)$ , les relations (22), (23), (25) et la convergence de  $\mathcal{S}_g(x)$  entraînent la convergence de  $f(x, v)$  vers  $\mathfrak{F}(x)$  lorsque  $v$  tend vers l'infini.  $\square$

#### 4.5.5 Conclusion

La proposition 2 résulte des propositions 3, 5 et 6.

### 4.6 Étude de $\mathcal{S}_g$ quand $g$ est continue sur $[0, 1]$

Dans ce paragraphe, nous supposons que  $\theta$  et  $s$  vérifient

$$\sigma = \Re s > 0 \quad ; \quad |\theta| < ((1 + \sqrt{5})/2)^\sigma. \quad (26)$$

Si  $g$  est bornée sur  $]0, 1[$ , la série définie par (16) converge alors normalement sur  $]0, 1[$ , où sa somme  $\mathcal{S}_g$  est donc définie et bornée. Rappelons que nous avons prolongé  $\mathcal{S}_g$  en 0 en posant  $\mathcal{S}_g(0) = 0$ .

**Proposition 7** *On suppose que la fonction  $g$  se prolonge continûment à l'intervalle  $[0, 1]$ . La fonction  $\mathcal{S}_g : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{C}$  est alors continue en chaque irrationnel. De plus,*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_g(x) &\rightarrow g(0) && (x \rightarrow 0, x > 0) \\ \mathcal{S}_g(x) &\rightarrow g(1) + \theta g(0) && (x \rightarrow 1, x < 1),\end{aligned}$$

*et, pour tout nombre rationnel  $r \in ]0, 1[$  de profondeur  $K \geq 1$  et dont le dénominateur de la fraction irréductible est  $q$ , les limites à droite et à gauche de  $\mathcal{S}_g(x)$  quand  $x$  tend vers  $r$  sont*

$$\mathcal{S}_g(r) + q^{-s}\theta^K g(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{S}_g(r) + q^{-s}\theta^K (g(1) + \theta g(0)),$$

*dans cet ordre si  $K$  est pair, dans l'ordre inverse, si  $K$  est impair.*

### Démonstration

Pour  $j \in \mathbb{N}$  et  $0 \leq x < 1$ , posons

$$\mu_j(x) = \begin{cases} \theta^j \beta_{j-1}(x)^s g(\alpha_j(x)) & \text{si } x \text{ est de profondeur } > j, \\ 0 & \text{si } x \text{ est de profondeur } \leq j. \end{cases}$$

On a donc

$$\mathcal{S}_g(x) = \sum_{j \geq 0} \mu_j(x) \quad (0 \leq x < 1). \quad (27)$$

Comme  $g$  est bornée, il découle de (26) que la série (27) est normalement convergente sur  $[0, 1[$ . De plus, la fonction  $\mu_j$  est continue en tout point de profondeur  $> j$ , en particulier en tout irrationnel. La fonction  $\mathcal{S}_g$  est donc continue en tout irrationnel.

On a ensuite

$$\begin{aligned}\mu_j(x) &\rightarrow \begin{cases} g(0) & (j = 0) \\ 0 & (j > 0) \end{cases} && (x \rightarrow 0, x > 0) \\ \mu_j(x) &\rightarrow \begin{cases} g(1) & (j = 0) \\ \theta g(0) & (j = 1) \\ 0 & (j > 1) \end{cases} && (x \rightarrow 1, x < 1)\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_g(x) &\rightarrow g(0) && (x \rightarrow 0, x > 0) \\ \mathcal{S}_g(x) &\rightarrow g(1) + \theta g(0) && (x \rightarrow 1, x < 1).\end{aligned}$$

À présent, soit

$$r = \frac{p}{q} = [0; a_1, \dots, a_K] \quad ((p, q) = 1, a_K \geq 2).$$

un nombre rationnel de profondeur  $K \geq 1$ . Considérons les cellules contigües de profondeurs respectives  $K$  et  $K + 1$ , auxquelles  $r$  est adhérent :

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K) \quad ; \quad \mathfrak{c}' = \mathfrak{c}(a_1, \dots, a_K - 1, 1).$$

Si  $K$  est pair (resp. impair), alors la cellule  $\mathfrak{c}$  se situe à droite (resp. à gauche) de  $r$ . Nous allons montrer que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow r \\ x \in \mathfrak{c}}} \mathcal{S}_g(x) = \mathcal{S}_g(r) + \theta^K g(0) q^{-s}$$

tandis que

$$\lim_{\substack{x \rightarrow r \\ x \in \mathfrak{c}'}} \mathcal{S}_g(x) = \mathcal{S}_g(r) + \theta^K (g(1) + \theta g(0)) q^{-s}.$$

Remarquons tout d'abord que tout nombre rationnel appartenant à la réunion  $\mathfrak{c} \cup \mathfrak{c}'$  est de profondeur supérieure ou égale à  $K + 1$ . Pour  $j < K$ , les fonctions  $\alpha_j$  et  $\beta_j$  sont continues sur  $\overline{\mathfrak{c} \cup \mathfrak{c}'}$ .

- Calcul de  $\lim_{\substack{x \rightarrow r \\ x \in \mathfrak{c}}} \mathcal{S}_g(x)$

Pour  $x \in \mathfrak{c}$ , on a  $p_K(x) = p$ ,  $q_K(x) = q$ , et par conséquent, d'après (8),

$$\begin{aligned} \alpha_K(x) &= -\frac{p - xq}{p_{K-1} - xq_{K-1}} = o(1) & (x \rightarrow r, x \in \mathfrak{c}) \\ \beta_K(x) &= |p - xq| = o(1) & (x \rightarrow r, x \in \mathfrak{c}). \end{aligned}$$

D'après (21), nous avons

$$\mathcal{S}_g(x) = \sum_{j \leq K} \theta^j \beta_{j-1}(x)^s g(\alpha_j(x)) + \theta^{K+1} \beta_K(x)^s \mathcal{S}_g(\alpha_{K+1}(x)) \quad (x \in \mathfrak{c}).$$

Comme  $\mathcal{S}_g$  est bornée sur  $[0, 1[$ , il suit

$$\lim_{\substack{x \rightarrow r \\ x \in \mathfrak{c}}} \mathcal{S}_g(x) = \sum_{j < K} \theta^j \beta_{j-1}(r)^s g(\alpha_j(r)) + \theta^K \beta_{K-1}(r)^s g(0) = \mathcal{S}_g(r) + \theta^K g(0) q^{-s}. \quad (28)$$

- Calcul de  $\lim_{\substack{x \rightarrow r \\ x \in \mathfrak{c}'}} \mathcal{S}_g(x)$

Tous les nombres rationnels de  $\mathfrak{c}'$  ont une profondeur supérieure ou égale à  $K + 2$ . Pour  $x \in \mathfrak{c}'$ , on a  $p_K(x) = p - p_{K-1}$ ,  $q_K(x) = q - q_{K-1}$ ,  $p_{K+1}(x) = p$  et  $q_{K+1}(x) = q$ , de sorte que

$$\begin{aligned} \alpha_K(x) &= -\frac{p - p_{K-1} - x(q - q_{K-1})}{p_{K-1} - xq_{K-1}} = 1 + o(1) & (x \rightarrow r, x \in \mathfrak{c}') \\ \alpha_{K+1}(x) &= -\frac{p - xq}{p - p_{K-1} - x(q - q_{K-1})} = o(1) & (x \rightarrow r, x \in \mathfrak{c}') \\ \beta_K(x) &= |p - p_{K-1} - x(q - q_{K-1})| = \frac{1}{q} + o(1) & (x \rightarrow r, x \in \mathfrak{c}'). \end{aligned}$$



D'après (21), nous avons

$$\mathcal{S}_g(x) = \sum_{j \leq K} \theta^j \beta_{j-1}(x)^s g(\alpha_j(x)) + \theta^{K+1} \beta_K(x)^s \mathcal{S}_g(\alpha_{K+1}(x)) \quad (x \in \mathfrak{c}').$$

Il suit

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{x \rightarrow r \\ x \in \mathfrak{c}'}} \mathcal{S}_g(x) &= \sum_{j < K} \theta^j \beta_{j-1}(r)^s g(\alpha_j(r)) + \theta^K q^{-s} g(1) + \theta^{K+1} q^{-s} g(0) \\ &= \mathcal{S}_g(r) + \theta^K (g(1) + \theta g(0)) q^{-s}. \end{aligned} \quad \square$$

## 5 Application aux séries de Chowla et de Wilton

### 5.1 La fonction de Wilton

La série de Wilton (2) n'est autre que (16) dans le cas particulier

$$\theta = -1 \quad ; \quad s = 1 \quad ; \quad g = \log :$$

$$\mathcal{W}(x) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \beta_{k-1}(x) \log(1/\alpha_k(x)),$$

avec la convention du §4.2 pour les nombres  $x$  rationnels. Sa somme, la fonction de Wilton vérifie donc l'équation fonctionnelle (4) sur l'ensemble de convergence, constitué des nombres rationnels et des nombres de Wilton. Le fait qu'un nombre irrationnel  $x$  soit un nombre de Wilton peut s'exprimer en termes des dénominateurs des réduites de  $x$ ; il équivaut à la convergence de la série

$$\sum_{k \geq 0} (-1)^k \frac{\log q_{k+1}(x)}{q_k(x)}.$$

C'est une conséquence directe de l'encadrement (12) et du fait que la série

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\log q_k}{q_k}$$

est convergente.

Si l'on prend  $\theta = 1$  au lieu de  $\theta = -1$  ci-dessus, on obtient la série et la fonction de Brjuno,

$$\Phi(x) = \sum_{k \geq 0} \beta_{k-1}(x) \log(1/\alpha_k(x)), \quad (29)$$

solution de l'équation fonctionnelle

$$\Phi(x) = \log(1/x) + x\Phi(\{1/x\}), \quad (30)$$

qui ne diffère de (4) que par un signe. La fonction de Brjuno, qui joue un rôle important dans la théorie de certains systèmes dynamiques (cf. [26]), apparaît déjà en filigrane dans l'article de Wilton (cf. [29] (7.32), p. 235).

## 5.2 La fonction $G$

Posons pour  $x > 0$ ,

$$F(x) = \frac{x+1}{2}A(1) - A(x) - \frac{x}{2} \log x, \quad (31)$$

où  $A$  est la fonction d'autocorrélation définie par (5). La fonction  $F$  est continue sur  $]0, \infty[$ , s'annule en  $x = 1$ , et se prolonge par continuité en 0 en posant<sup>4</sup>  $F(0) = A(1)/2$ .

Considérons ensuite la série  $\mathcal{S}_F$  et sa somme. Les résultats du §4.6 s'appliquent : la fonction  $\mathcal{S}_F$  est définie et bornée sur  $[0, 1[$ , continue en tout irrationnel, et ayant des limites à droite et à gauche en tout rationnel, comme énoncé dans la proposition 7. On définit ensuite la fonction  $G$  par périodicité à partir de  $\mathcal{S}_F$  :

$$G(x) = \mathcal{S}_F(\{x\}) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

En résumé :

- la fonction  $G$ , de période 1, est définie par

$$G(x) = \sum_{j \geq 0} (-1)^j \beta_{j-1}(x) F(\alpha_j(x)) \quad (0 < x < 1), \quad (32)$$

avec la convention du §4.2 pour les nombres  $x$  rationnels, en particulier on a  $G(0) = 0$  ;

- la fonction  $G$  vérifie l'équation fonctionnelle

$$G(x) = F(x) - xG(\alpha(x)) \quad (0 < x < 1); \quad (33)$$

- si  $r = p/q \in ]0, 1[$  est un nombre rationnel de profondeur  $K \geq 1$ , écrit sous forme irréductible, alors  $G$  a des limites à droite et à gauche au point  $r$ , données par

$$G(r) + (-1)^K \frac{A(1)}{2q} \quad \text{et} \quad G(r) + (-1)^{K+1} \frac{A(1)}{2q},$$

dans cet ordre si  $K$  est pair, dans l'ordre inverse, si  $K$  est impair. Pour  $K = 0$ , on obtient les limites à droite en 0 et à gauche en 1.

En particulier,  $G$  est *normalisée* : sa valeur en tout point est la moyenne de ses limites à gauche et à droite.

## 5.3 Équation fonctionnelle approchée pour les sommes partielles de $\varphi_1(x)$

Les sommes partielles de  $\varphi_1$  vérifient une équation fonctionnelle « asymptotiquement proche » de celle vérifiée par  $G - \mathcal{W}/2$ .

---

4. On a  $A(1) = \log 2\pi - \gamma$ , où  $\gamma$  désigne la constante d'Euler (cf. démonstration de la proposition 8 de [1]).

**Proposition 8** Pour  $0 < x < 1$  et  $v > 0$ , on a

$$\sum_{1 \leq m \leq v} \frac{B_1(mx)}{m} + x \sum_{1 \leq n \leq xv} \frac{B_1(n\alpha(x))}{n} = F(x) - \frac{1}{2} \log(1/x) + \varepsilon_1(x, v),$$

avec

$$\varepsilon_1(x, v) \ll \frac{1}{xv} \quad (xv \geq 1). \quad (34)$$

**Démonstration** Nous reproduisons la formule figurant en haut de la page 225 de [1] :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq m \leq v} \frac{B_1(mx)}{m} + x \sum_{1 \leq n \leq xv} \frac{B_1(n/x)}{n} = \\ \frac{x}{2} \int_0^v \{t\}^2 t^{-2} dt + \frac{1}{2} \int_0^{xv} \{t\}^2 t^{-2} dt - \int_0^v \{t\} \{xt\} t^{-2} dt + \frac{x-1}{2} \log(1/x) \\ + \frac{x-1}{2} \int_v^{xv} \{t\} t^{-2} dt + \frac{1}{2xv} (\{xv\} - x\{v\})^2 + \frac{x-1}{2xv} (\{xv\} - x\{v\}). \end{aligned} \quad (35)$$

Comme  $B_1(n/x) = B_1(n\alpha(x))$ , on reconnaît bien la formule annoncée, avec

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(x, v) = -\frac{x}{2} \int_v^\infty \{t\}^2 t^{-2} dt - \frac{1}{2} \int_{xv}^\infty \{t\}^2 t^{-2} dt + \int_v^\infty \{t\} \{xt\} t^{-2} dt \\ + \frac{x-1}{2} \int_v^{xv} \{t\} t^{-2} dt + \frac{1}{2xv} (\{xv\} - x\{v\})^2 + \frac{x-1}{2xv} (\{xv\} - x\{v\}). \end{aligned}$$

Chacun des six termes composant  $\varepsilon_1(x, v)$  est  $\ll 1/xv$  si  $v \geq 1/x$  (ce qui entraîne  $v \geq 1$ ).  $\square$

Signalons que la source de l'identité (35) est la troisième démonstration de la loi de réciprocité quadratique, proposée par Gauss en 1808 (cf. [15], §5). Eisenstein en 1844 (cf. [14]) en donna une présentation géométrique particulièrement intuitive à l'aide d'un comptage de points à coordonnées entières dans un rectangle. L'article d'Eisenstein fut traduit par Cayley et publié en 1857 dans le *Quarterly Journal of pure and applied Mathematics*, édité par Sylvester (cf. [8]). Trois ans plus tard, Sylvester publia une note au Comptes Rendus [25] où il généralisait l'argument d'Eisenstein à un rectangle  $[0, v] \times [0, xv]$  où  $v$  et  $x$  sont des réels quelconques. La relation (35) découle de l'identité de Sylvester par sommation partielle (cf. [1], p. 223-225).

## 5.4 Conclusion

Posons

$$f(x, v) = -2 \sum_{1 \leq m \leq v} \frac{B_1(mx)}{m} + 2G(x) \quad (0 \leq x < 1, v > 0).$$

La proposition 8 et la relation (33) fournissent l'équation fonctionnelle approchée

$$f(x, v) + xf(\alpha(x), xv) = \log(1/x) + \varepsilon(x, v) \quad (0 < x < 1, v > 0),$$

avec  $\varepsilon = -2\varepsilon_1$ . On est donc dans le cadre du §4.1, avec

$$\theta = -1 ; s = 1 ; a = 1 ; g(x) = \log(1/x).$$

On déduit immédiatement de la majoration  $\varepsilon(x, v) \ll (xv)^{-1}$  (pour  $xv \geq 1$ ), que les hypothèses **i**) et **ii**) sont vérifiées. L'hypothèse **iii**) résulte du fait que  $G$  et  $B_1$  sont bornées, et l'estimation  $\sum_{n \leq v} 1/n \ll 1 + \log v$  (pour  $v \geq 1$ ) entraîne **iv**). La proposition 2 s'applique donc. On en conclut que les séries  $\varphi_1(x)$  et  $\mathcal{W}(x)$  convergent pour les mêmes valeurs de  $x \in [0, 1[$  et que l'identité

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + G(x) \quad (36)$$

est valable en tout point de convergence. Compte tenu des propriétés de  $G$  vues au §5.2, cela termine la démonstration du théorème.

## 6 Autres applications

Dans cette section, nous montrons comment les résultats du §4 permettent de retrouver et parfois de préciser quelques résultats antérieurs pour certaines séries oscillantes.

### 6.1 Les séries $\sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi nx)$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n} \cos(2\pi nx)$

Dans [29], Wilton établit l'existence d'une fonction  $\mathfrak{F} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  continue, et telle que pour  $0 < x \leq 1$  et  $x^2v \geq 1$ , on a

$$\sum_{n \leq v} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi nx) + x \sum_{n \leq x^2v} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi n/x) = \frac{\pi}{2} \log(1/x) + \Im(\mathfrak{F}(x)) + O((x^2v)^{-1/5}) \quad (37)$$

et

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq v} \frac{\tau(n)}{n} \cos(2\pi nx) - x \sum_{n \leq x^2v} \frac{\tau(n)}{n} \cos(2\pi n/x) = \\ \frac{1}{2} \log^2(1/x) + (\gamma - \log 2\pi) \log(1/x) + \Re(\mathfrak{F}(x)) + O((x^2v)^{-1/5}). \end{aligned} \quad (38)$$

Dans l'article [4], où nous avons élaboré une nouvelle démonstration des relations (37) et (38), nous avons obtenu une expression de la fonction  $\mathfrak{F}$  en fonction de  $A$ . En particulier, on a pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$\Im(\mathfrak{F}(x)) = -\pi F(x). \quad (39)$$

Comme évoqué dans l'introduction, Wilton déduit de (37) que les points de convergence de la série  $\psi_1(x)$  définie en (3) sont les nombres rationnels et les nombres de Wilton. Les éléments réunis au §4 permettent de retrouver ce résultat et également d'obtenir une nouvelle démonstration de l'identité  $\varphi_1(x) = \psi_1(x)$ . Posons

$$h(x, v) = \frac{2}{\pi} \sum_{n \leq v} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi nx) + 2G(x),$$

où la fonction  $G$  est définie au §5.2. D'après (33), (37) et (39), on a

$$h(x, v) + xh(\alpha(x), x^2v) = \log(1/x) + \varepsilon(x, v) \quad (0 < x < 1, v > 0)$$

avec  $\varepsilon(x, v) = O((x^2v)^{-1/5})$ . Nous sommes dans le cadre du §4.1, avec

$$\theta = -1 ; s = 1 ; a = 2 ; g(x) = \log(1/x).$$

Les hypothèses **i)**, **ii)** et **iii)** sont, comme au §5.4, immédiatement vérifiées. Quant à l'hypothèse **iv)** elle résulte du fait que  $G$  est bornée et de l'estimation uniforme de Walfisz (cf. [27], (25<sub>VI</sub>), p. 566),

$$\sum_{n \leq v} \frac{\tau(n)}{n} \sin(2\pi nx) = \sum_{m \leq v} \frac{1}{m} \sum_{k \leq v/m} \frac{1}{k} \sin(2\pi kmx) \ll 1 + \log(v) \quad (v \geq 1, x \in ]0, 1]).$$

La proposition 2 s'applique et montre que les séries  $\psi_1(x)$  et  $\mathcal{W}(x)$  convergent pour les mêmes valeurs de  $x \in [0, 1[$  et que l'identité

$$\psi_1(x) = -\frac{1}{2}\mathcal{W}(x) + G(x) \tag{40}$$

est valable en tout point de convergence. Compte tenu de (36), nous obtenons bien  $\psi_1(x) = \varphi_1(x)$  en tout nombre rationnel et tout nombre de Wilton.

Un raisonnement similaire permet de retrouver le résultat de Wilton selon lequel pour tout  $x \in ]0, 1[$ , la série

$$\psi_2(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\tau(n)}{n} \cos(2\pi nx)$$

converge si et seulement si  $x$  est irrationnel et satisfait à

$$\sum_{k \geq 0} \beta_{k-1}(x) \log^2(1/\alpha_k(x)) < \infty. \tag{41}$$

On peut montrer que cette dernière condition est équivalente à

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\log^2(q_{k+1}(x))}{q_k(x)} < \infty.$$

De plus, si l'on pose pour tout  $x$  irrationnel de  $]0, 1[$

$$\Phi_2(x) = \sum_{k \geq 0} \beta_{k-1}(x) v(\alpha_k(x)),$$

avec  $v(x) = \frac{1}{2} \log^2(1/x) + (\gamma - \log(2\pi)) \log(1/x)$ , les résultats du §4 permettent de déduire de la continuité de  $\Re(\mathfrak{F})$  que la fonction  $\psi_2 - \Phi_2$ , définie en tout nombre irrationnel  $x \in ]0, 1[$  tel que (41), est bornée, et peut être prolongée à une fonction définie sur  $[0, 1]$ , continue en tout nombre irrationnel et admettant une limite à droite à gauche en tout nombre rationnel.

## 6.2 Une série étudiée par Rivoal et Roques

La série

$$\Psi(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin(2\pi n^2 x) \cot(\pi n x)}{n^2}$$

a été introduite et étudiée par Rivoal et Roques dans l'article [23]. Ils remarquent que  $\Psi(x)$  est divergente en tout nombre  $x$  rationnel et obtiennent (theorem 2, p. 100 de [23]) que pour tout nombre irrationnel  $x \in ]0, 1[$ , la série  $\Psi(x)$  est convergente si et seulement si  $x$  est un nombre de Brjuno, c'est-à-dire est tel que  $\Phi(x) < \infty$  où  $\Phi(x)$  est la fonction de Brjuno définie par (29). Compte tenu de (12), c'est encore équivalent à

$$\sum_{k \geq 0} \frac{\log q_{k+1}(x)}{q_k(x)} < \infty. \quad (42)$$

Rivoal et Roques déduisent cette caractérisation d'une équation fonctionnelle approchée pour les sommes partielles

$$\Psi(x, v) = \sum_{1 \leq n \leq v} \frac{\sin(2\pi n^2 x) \cot(\pi n x)}{n^2},$$

qui prend la forme suivante (theorem 1 de [23]) : pour tous  $x \in ]0, 1]$ ,  $v > 0$ , on a

$$\Psi(x, v) - x\Psi(1/x, xv) = \frac{1}{\pi x} \sum_{1 \leq m \leq v} \frac{\sin(2\pi m^2 x)}{m^3} + G(x, v), \quad (43)$$

où  $G : ]0, 1] \times ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est telle que :

- pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $\lim_{v \rightarrow \infty} G(x, v)$  existe, on la note  $G(x)$  ;
- il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $(x, v) \in ]0, 1] \times ]0, \infty[$ ,  $|G(x, v)| \leq C$ .

Des estimations élémentaires conduisent à la formule

$$\frac{1}{\pi x} \sum_{1 \leq m \leq v} \frac{\sin(2\pi m^2 x)}{m^3} = \log(1/x) + H(x) + O((xv^2)^{-1}),$$

valable pour  $x > 0$  et  $v > 0$  et où  $H : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est bornée. La série  $\mathcal{S}_{H+G}(x)$  avec  $\theta = s = 1$  (cf. (16)) définit une fonction bornée sur  $]0, 1[$ , et

$$F(x, v) = \Psi(x, v) - \mathcal{S}_{H+G}(x)$$

satisfait à l'équation fonctionnelle approchée

$$F(x, v) - xF(1/x, xv) = \log(1/x) + \varepsilon(x, v)$$

avec  $\varepsilon(x, v) = G(x, v) - G(x) + O((xv^2)^{-1})$ . Nous sommes donc dans le cadre du §4.1 avec

$$\theta = 1 \quad ; \quad s = 1 \quad ; \quad a = 1 \quad \text{et} \quad g(x) = \log(1/x).$$

L'expression de  $\varepsilon(x, v)$  montre que **i)** et **ii)** sont satisfaites. L'hypothèse **iii)** est vérifiée car la quantité  $\sin(2\pi x) \cot(\pi x) = 2 \cos^2(\pi x)$  est bornée. Quant à l'hypothèse **iv)**, elle découle de la majoration

$$\|nt\| \leq n \|t\| \quad (t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$$

où  $\|x\|$  désigne l'entier le plus proche du nombre réel  $x$ . Comme  $\sin(\pi x) \asymp \|x\|$ , on en déduit en effet que pour  $0 < x < 1$ ,  $xv < 1$ , on a

$$F(x, v) \ll 1 + \sum_{1 \leq n \leq v} \frac{1}{n^2} \frac{\|n^2 x\|}{\|nx\|} \leq 1 + \sum_{1 \leq n \leq 1/x} \frac{1}{n} \ll 1 + g(x).$$

Notons enfin que la série  $\Psi(0)$  est divergente. La proposition 2 redonne bien le critère obtenu par Rivoal et Roques pour la convergence de la série  $\Psi(x)$ , et le fait que la fonction  $\Psi - \mathcal{S}_{H+G}$ , définie en tout nombre de Brjuno, est bornée.

#### REMERCIEMENTS

Outre leurs laboratoires respectifs, les auteurs remercient les UMI 2615 (CNRS-UIM, Moscou) et 3457 (CNRS-CRM, Montréal), qui ont fourni des conditions idéales pour leur travail sur cet article.

## Références

- [1] L. BÁEZ-DUARTE, M. BALAZARD, B. LANDREAU et E. SAIAS – « Étude de l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » », *Ramanujan J.* **9** (2005), p. 215–240.
- [2] M. BALAZARD et B. MARTIN – « Comportement local moyen de la fonction de Brjuno », *Fund. Math.* **218** (2012), p. 193–224.

- [3] — — « Sur l'autocorrélation multiplicative de la fonction « partie fractionnaire » et une fonction définie par J. R. Wilton », <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00823899v1> (2013), 57 pp.
- [4] — — « Sur une équation fonctionnelle approchée due à J. R. Wilton », *Mosc. Math. J.* **15** (2015), p. 629–652.
- [5] S. BETTIN — « On the distribution of a cotangent sum », *Int. Math. Res. Not. IMRN* (2015), p. 11419–11432.
- [6] R. DE LA BRETÈCHE et G. TENENBAUM — « Séries trigonométriques à coefficients arithmétiques », *J. Anal. Math.* **92** (2004), p. 1–79.
- [7] — — « Dérivabilité ponctuelle d'une intégrale liée aux fonctions de Bernoulli », *Proc. Amer. Math. Soc.* **143** (2015), p. 4791–4796.
- [8] A. CAYLEY — « Eisenstein's geometrical proof of the fundamental theorem for quadratic residues », *Quarterly J. pure appl. Maths* **1** (1857), p. 186–192.
- [9] K. CHANDRASEKHARAN et R. NARASIMHAN — « An approximate reciprocity formula for some exponential sums », *Comment. Math. Helv.* **43** (1968), p. 296–310.
- [10] D. CHOIMET et H. QUEFFÉLEC — *Analyse mathématique, grands théorèmes du vingtième siècle*, Calvage & Mounet, Paris, 2009.
- [11] S. CHOWLA, « Note on a trigonometric sum », *J. London Math. Soc.* **5** (1930), p. 176–178.
- [12] — — « Some problems of diophantine approximation (I) », *Math. Z.* **1** (1931), p. 544–563.
- [13] J. G. VAN DER CORPUT — « Über Summen, die mit den elliptischen  $\vartheta$ -Funktionen zusammenhängen », *Math. Ann.* **87** (1922), p. 66–77.
- [14] G. EISENSTEIN — « Geometrischer Beweis des Fundamentaltheorems für die quadratischen Reste. », *J. Reine Angew. Math.* **28** (1844), p. 246–248.
- [15] C. F. GAUSS — « Theorematis arithmetici demonstratio nova », *Comm. Soc. regiae Sci. Göttingensis Class. Math.* **16** (1808), p. 69–74.
- [16] G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD — « Some problems of diophantine approximation », *Acta Math.* **37** (1914), p. 155–239.
- [17] H. MAIER et M. T. RASSIAS — « Asymptotics for moments of certain cotangent sums », *Houston J. Math* **43** (2017), p. 207–222.
- [18] — — « Asymptotics for moments of certain cotangent sums for arbitrary exponents », *Houston J. Math* **43** (2017), p. 1235–1249.
- [19] L. J. MORDELL — « The approximate functional formula for the theta function », *J. London Math. Soc.* **S1-1** (1926), p. 68–72.
- [20] A. OPPENHEIM — « The Approximate Functional Equation for the Multiple Theta-Function and the Trigonometric Sums Associated Therewith », *Proc. London Math. Soc.* **S2-28** (1928), p. 476–483.



- [21] K. I. OSKOLKOV – « The series  $\sum \sum \frac{e^{2\pi imnx}}{mn}$  and Chowla’s problem », *Proc. Steklov Inst. Mat.* **248** (2005), p. 197–215.
- [22] T. RIVOAL – « On the convergence of Diophantine Dirichlet series », *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)* **55** (2012), p. 513–541.
- [23] T. RIVOAL et J. ROQUES – « Convergence and modular type properties of a twisted riemann series », *Uniform Distribution Theory* **8** (2013), p. 97–119.
- [24] T. RIVOAL et S. SEURET – « Hardy-Littlewood series and even continued fractions », *J. Anal. Math.* **125** (2015), p. 175–225.
- [25] J. J. SYLVESTER – « Sur la fonction  $E(x)$  », *C.R.A.S. Paris* **50** (1860), p. 732–734.
- [26] J.-C. YOCCOZ – « Théorème de Siegel, nombres de Bruno et polynômes quadratiques », *Astérisque* **231** (1995), p. 3–88, Petits diviseurs en dimension 1.
- [27] A. WALFISZ – « Über einige trigonometrische Summen », *Math. Z.* **33** (1931), p. 564–601.
- [28] J. R. WILTON – « The approximate functional formula for the theta function », *J. London Math. Soc.* **S1-2** (1927), no. 3, p. 177–180.
- [29] — — « An approximate functional equation with applications to a problem of diophantine approximation », *J. reine angew. Math* **169** (1933), p. 219–237.

BALAZARD, Michel  
 Aix Marseille Univ, CNRS, Centrale Marseille, I2M, Marseille, France  
 Adresse électronique : `balazard@math.cnrs.fr`

MARTIN, Bruno  
 ULCO, LMPA, Calais, France  
 Adresse électronique : `Bruno.Martin@univ-littoral.fr`