



**HAL**  
open science

## Polygones fondamentaux d'une courbe modulaire

Karim Belabas, Dominique Bernardi, Bernadette Perrin-Riou

► **To cite this version:**

Karim Belabas, Dominique Bernardi, Bernadette Perrin-Riou. Polygones fondamentaux d'une courbe modulaire. 2018. hal-01828430v1

**HAL Id: hal-01828430**

**<https://hal.science/hal-01828430v1>**

Preprint submitted on 3 Jul 2018 (v1), last revised 4 Oct 2019 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Polygones fondamentaux d'une courbe modulaire

Karim Belabas<sup>\*</sup>, Dominique Bernardi<sup>\*\*</sup> et Bernadette Perrin-Riou<sup>\*\*\*</sup>

<sup>\*</sup>Univ. Bordeaux, CNRS, INRIA, IMB, UMR 5251, F-33400 Talence, France

<sup>\*\*</sup>IMJ-PRG, UPMC, 4 place Jussieu, F-75005 Paris, France

<sup>\*\*\*</sup>Laboratoire de Mathématiques d'Orsay, Univ. Paris-Sud, CNRS, Université Paris-Saclay, F-91405 Orsay, France.

3 juillet 2018

## Abstract

A few pages in Siegel [7] p. 115 (§2) describe how, starting with a fundamental polygon for a compact Riemann surface, one can construct a symplectic basis of its homology. This note retells that construction, specializing to the case where the surface is associated to a congruence subgroup  $\Gamma$  of  $SL_2(\mathbb{Z})$ . One then obtains by classical procedures a generating system for  $\Gamma$  with a minimal number of hyperbolic elements and a presentation of the  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module  $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]_0$ .

Quelques pages de Siegel [7] p. 115 (§2) décrivent la construction d'une base symplectique de l'homologie d'une surface de Riemann compacte à partir d'un polygone fondamental. Cette note reprend cette construction en l'appliquant au cas de la surface de Riemann associée à un sous-groupe de congruence  $\Gamma$  de  $SL_2(\mathbb{Z})$ . On en déduit par des procédés classiques un système de générateurs indépendants de  $\Gamma$  ayant un nombre minimal d'éléments hyperboliques et une présentation du  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module  $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]_0$ .

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Polygone fondamental associé à un sous-groupe de congruence</b>	<b>2</b>
1.1	Lemme préliminaire . . . . .	2
1.2	Symbole de Farey . . . . .	3
1.3	Système de Farey normalisé . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Construction d'un symbole de Farey étendu normalisé</b>	<b>9</b>
2.1	Notations . . . . .	10
2.2	Opération de base (cas non elliptique) . . . . .	10
2.3	Opération de base (cas elliptique) . . . . .	11
2.4	Étape de Siegel . . . . .	11
2.5	Algorithme complet . . . . .	13
2.6	Résultat de l'algorithme . . . . .	14

3	Structure de $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]_0$	14
4	Conclusion	16
A	Exemples	16

# 1 Polygone fondamental associé à un sous-groupe de congruence

On note  $\mathcal{H}$  le demi-plan de Poincaré et  $\mathcal{H}^* = \mathcal{H} \sqcup \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ .

## 1.1 Lemme préliminaire

Si  $r$  et  $s$  sont deux éléments distincts de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ , on note  $a = (r, s)$  l'arc géodésique dans  $\mathcal{H}^*$  reliant  $r$  et  $s$ ,  $A_a = \begin{pmatrix} x_a & y_a \\ z_a & t_a \end{pmatrix}$  une matrice de  $M_2(\mathbb{Z})$  primitive et de déterminant strictement positif représentant  $a$  : on a donc  $r = \frac{x_a}{z_a}$  et  $s = \frac{y_a}{t_a}$  avec  $\gcd(x_a, z_a) = \gcd(y_a, t_a) = 1$ . La matrice  $A$  est unique au signe près. Son déterminant est appelé la largeur de l'arc  $a$ . La matrice

$$A_a^- = \begin{pmatrix} y_a & -x_a \\ t_a & -z_a \end{pmatrix} = A_a \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

représente l'arc  $\bar{a} = (s, r)$  opposé à  $a$ .

On dit que des éléments  $r_1, \dots, r_n$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  sont dans l'ordre circulaire si leurs images  $R_1, \dots, R_n$  dans le cercle unité par la transformation  $z \mapsto \frac{i-z}{i+z}$  sont dans cet ordre lorsqu'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique. On note alors abusivement  $r_1 \leq \dots \leq r_n$ .

**Lemme 1.1.** Soient  $r$  et  $s$ ,  $t$  et  $u$  quatre éléments de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  tels que  $r \neq s$ ,  $t \neq u$  et tels que  $r, s, t, u$  soient dans l'ordre circulaire. On pose  $a = (r, s)$  et  $a^* = (t, u)$ .

1. La matrice  $\gamma = A_a(A_{a^*}^-)^{-1}$  de  $GL_2(\mathbb{Q})$  vérifie  $a = \gamma\bar{a}^*$ .
  - (a) Si  $s \neq t$ , alors la matrice  $\gamma$  est hyperbolique.
  - (b) Si  $s = t$ , alors la matrice  $\gamma$  est parabolique si et seulement si  $\gamma$  est de déterminant 1 et hyperbolique sinon.
2. La matrice  $\gamma = A_a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A_a^{-1} = A_a(A_a^-)^{-1}$  est une matrice de  $SL_2(\mathbb{Q})$  vérifiant  $a = \gamma\bar{a}$ . Elle est d'ordre 2 dans  $PSL_2(\mathbb{Q})$ .
3. La matrice

$$\gamma = A_a^- \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} A_a^{-1} = A_a \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (A_a^-)^{-1}$$

est d'ordre 3 et vérifie  $1 + \gamma + \gamma^2 = 0$ . Les arcs  $(a, \gamma a, \gamma^2 a)$  forment un chemin fermé.

*Démonstration.* Nous utiliserons les faits suivants : si  $\gamma$  appartient à  $GL_2^+(\mathbb{Q})$ , elle est parabolique si  $\text{trace}(\gamma)^2 = 4\det(\gamma)$  et hyperbolique si elle a deux points fixes dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . Elle est elliptique si  $\text{trace}(\gamma)^2 < 4\det(\gamma)$  c'est-à-dire si elle n'a pas de points fixes dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ .

1. On vérifie que dans chacun des cas, la matrice  $\gamma$  vérifie la propriété annoncée.
  - (a) Si  $s \neq t$ , montrons que  $\gamma$  est hyperbolique. Elle induit une application continue de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ . L'image par  $\gamma^{-1}$  du segment  $[r, s]$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$  est le segment  $[u, t]$  qui contient  $[r, s]$ ; par le théorème des valeurs intermédiaires,  $\gamma^{-1}$  a un point fixe dans le segment  $[r, s]$ , donc  $\gamma$  a un point fixe dans le segment  $[s, r]$ . De même, l'image du segment  $[t, u]$  par  $\gamma$  est le segment  $[s, r]$  qui contient  $[t, u]$ , donc  $\gamma$  a un point fixe dans le segment  $[t, u]$ . Ayant deux points fixes dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ ,  $\gamma$  est hyperbolique.
  - (b) Si  $s = t$ , un calcul explicite montre que la trace de  $\gamma$  est  $(\det(A_a) + \det(A_{a^*})) / \det(A_{a^*})$  et que son déterminant est  $\det(A_a) / \det(A_{a^*})$ . On en déduit que  $\text{trace}(\gamma)^2 = 4 \det(\gamma)$  si et seulement si  $\det(A_a) = \det(A_{a^*})$ , et donc que  $\gamma$  est parabolique si et seulement si elle est de déterminant 1. Dans le cas contraire, comme  $\gamma$  a un point fixe dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ , elle est nécessairement hyperbolique.
2. La vérification de (2) et (3) est facile.

□

**Remarque 1.2.** Les formules dans le cas elliptique sont obtenues de la manière suivante.

1. La matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  est d'ordre 2 et transforme  $(\infty, i, 0)$  en  $(0, i, \infty)$ . La matrice

$$\gamma = A_a \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} A_a^{-1}$$

transforme  $(r, A_a(i), s)$  en  $(s, A_a(i), r)$ .

2. Posons  $\rho = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . La matrice  $\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  est d'ordre 3, laisse fixe  $\rho$  et envoie  $(\infty, 0, 1)$  sur  $(0, 1, \infty)$ . Si  $T = (0, \rho, \infty)$ , le triangle  $(\infty, 0, 1)$  fixe par  $\tau$  est réunion des trois triangles hyperboliques  $T$ ,  $\tau T$  et  $\tau^2 T$  et contient l'unique point fixe  $\rho$  de  $\tau$ . Ainsi, la matrice  $\gamma = A_a^- \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} (A_a^-)^{-1}$  de  $SL_2(\mathbb{Q})$  laisse fixe le triangle hyperbolique  $(s, r, A_a^-(1))$ .

## 1.2 Symbole de Farey

**Définition 1.3.** On appelle *symbole de Farey étendu* la donnée  $(\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$

- (F1) d'un polygone hyperbolique convexe orienté dont les sommets  $(r_1, \dots, r_n)$  sont dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ ; son bord est donc une suite  $\mathcal{V}$  d'arcs consécutifs  $(a_1, \dots, a_n)$  avec  $a_1 = (r_1, r_2)$ ,  $a_2 = (r_2, r_3)$ ,  $\dots$ ,  $a_n = (r_n, r_1)$ ; on suppose que l'un des  $a_i$  est l'arc  $\{\infty, 0\}$ ;
- (F2) d'une involution  $*$ :  $a \mapsto a^*$  de  $\mathcal{V}$ ;
- (F3) d'une application  $\mu_{ell}$  de l'ensemble  $\mathcal{V}_{ell}$  des points fixes de  $*$  à valeurs dans  $\{2, 3\}$ .

tels que

- (F4) si  $a \in \mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}$ , la matrice  $\gamma_a = A_a A_{a^*}^{-1}$  est dans  $SL_2(\mathbb{Z})$ ;

- si  $a \in \mathcal{V}_{ell}$  et  $\mu_{ell}(a) = 2$ , la matrice  $\gamma_a = A_a A_a^{-1}$  est dans  $SL_2(\mathbb{Z})$  ;  
si  $a \in \mathcal{V}_{ell}$  et  $\mu_{ell}(a) = 3$ ,  $\gamma_a = A_a^{-1} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} A_a^{-1}$  est dans  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

On appelle les éléments de  $\mathcal{V}$  les arcs du symbole de Farey étendu et les  $\gamma_a$  pour  $a \in \mathcal{V}$  ses données de recollement. Pour  $n \in \{2, 3\}$ , on note  $\mathcal{V}_{ell,n}$  l'image réciproque de  $n$  par  $\mu_{ell}$ . Si  $a \in \mathcal{V}_{ell}$ , on dit que  $a$  est un arc elliptique d'ordre  $\mu_{ell}(a)$ . On a donc

1.  $a = \gamma_a \bar{a}^*$  pour  $a \notin \mathcal{V}_{ell,3}$  ;
2.  $(1 + \gamma_a + \gamma_a^2)a = 0$  pour  $a \in \mathcal{V}_{ell,3}$ .

Le groupe du symbole de Farey étendu est le sous-groupe  $\Gamma \subset SL_2(\mathbb{Z})$  engendré par les données de recollement  $\gamma_a$ ,  $a \in \mathcal{V}$ .

**Définition 1.4** ([2]). Un symbole de Farey étendu  $\mathcal{F} = (\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$  est unimodulaire si les arcs de  $\mathcal{F}$  sont de largeur 1, autrement dit si les matrices  $A_a$  pour  $a \in \mathcal{V}$  sont de déterminant 1. La condition (F4) est alors trivialement vérifiée.

**Remarque 1.5.** — Dans [2], un symbole de Farey unimodulaire est simplement appelé symbole de Farey.

- Dans la suite, nous partirons d'un symbole de Farey unimodulaire et les opérations effectuées conserveront la propriété  $\gamma_a \in SL_2(\mathbb{Z})$ , même si ce n'est pas le cas des matrices  $A_a$  associées aux arcs  $a$  de  $\mathcal{V}$ .
- Appliquer une rotation sur les indices  $1, \dots, n$  ne change pas le symbole de Farey.

Si  $\mathcal{V} = (a_1, \dots, a_n)$ , on définit la distance de  $a_i$  à  $a_j$  par  $d(a_i, a_j) = \min(|j - i|, |n - i + j|)$ . Par exemple,  $d(a_1, a_n)$  est égale à 1. Le lemme suivant est une conséquence du lemme 1.1.

**Lemme 1.6.** Soit  $\mathcal{F} = (\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$  un symbole de Farey étendu de groupe  $\Gamma$ . Si  $d(a, a^*) \geq 2$ , alors  $\gamma_a$  est une matrice hyperbolique. Si  $d(a, a^*) = 1$ , alors  $\gamma_a$  est une matrice parabolique. Si  $d(a, a^*) = 0$ , alors  $\gamma_a$  est une matrice elliptique.

On note  $\mathcal{V}_{hyp}$  (resp.  $\mathcal{V}_{par}$ ) l'ensemble des arcs  $a$  à distance  $\geq 2$  (resp. 1) de leur image par  $*$ . L'ensemble  $\mathcal{V}_{ell}$  déjà défini est l'ensemble des arcs à distance 0 de leur image par  $*$ .

**Définition 1.7.** Si  $\mathcal{F} = (\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$  est un symbole de Farey étendu, on définit le polygone hyperbolique  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  de  $\mathcal{H}^*$  dont les côtés sont

- les arcs géodésiques  $a \in \mathcal{V}$  tels que  $a$  n'est pas un point fixe de  $*$  ;
- les arcs géodésiques  $(r, t)$  et  $(t, s)$  où  $(r, t, s)$  est l'image de  $(0, i, \infty)$  (resp. de  $(0, \rho, \infty)$ ) par un élément de  $PSL_2(\mathbb{Q})$  et où  $(r, s)$  appartient à  $\mathcal{V}_{ell,2}$  (resp. à  $\mathcal{V}_{ell,3}$ ).

On note  $\mathcal{U}(\mathcal{F})$  l'enveloppe convexe de  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  dans  $\mathcal{H}^*$ .

Le polygone  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  est un polygone spécial au sens de [2] à condition d'enlever la condition d'unimodularité.

**Remarque 1.8.** Le choix de définir  $\gamma_a$  par  $a = \gamma_a \bar{a}^*$  (voir [6]) plutôt que par  $\bar{a}^* = \gamma_a a$  (voir [2]) permet de voir  $\gamma_a$  comme l'unique élément de  $\Gamma$  modulo  $\pm \text{Id}$  tel que le côté  $a$  du polygone  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  soit un côté commun de  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  et de  $\gamma_a \mathcal{P}(\mathcal{F})$ .

**Théorème 1.9.** [2], [3] Soit  $\Gamma$  un sous-groupe de congruence de  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

1. Il existe un symbole de Farey unimodulaire de groupe  $\Gamma$ .
2. Soit  $\mathcal{F}$  un symbole de Farey étendu de groupe  $\Gamma$  contenu dans  $SL_2(\mathbb{Z})$ . Alors,  $\mathcal{U}(\mathcal{F})$  est un domaine fondamental admissible au sens de [2] pour l'action de  $\Gamma$  sur  $\mathcal{H}$ .

Autrement dit, les  $\gamma_a$  pour  $a \in \mathcal{V}$  forment un système indépendant de générateurs de  $\Gamma$ . On dit aussi que  $\mathcal{P}(\mathcal{F})$  est un polygone fondamental pour  $\Gamma$ .

*Démonstration.* On peut trouver une démonstration de l'existence du symbole de Farey unimodulaire  $\mathcal{F}$  de groupe  $\Gamma$  dans [2] (théorème 3.3). Lorsque  $\Gamma = \Gamma_0(N)$ , on trouve dans [6] un algorithme de construction. Des implémentations ont été faites dans Sage et plus récemment dans Pari/GP ([4]). C'est cette dernière implémentation que nous utiliserons pour nos exemples. La deuxième partie se démontre comme le théorème 3.2 de [2].  $\square$

### 1.3 Système de Farey normalisé

**Définition 1.10.** Soit  $\mathcal{F} = (\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$  un symbole de Farey étendu. Deux éléments distincts  $a$  et  $b$  de  $\mathcal{V}$  sont dits liés si  $a, b, a^*$  et  $b^*$  sont dans l'ordre  $a, b, a^*, b^*$  ou  $a, b^*, a^*, b$  dans  $\mathcal{V}$  (à permutation circulaire près).

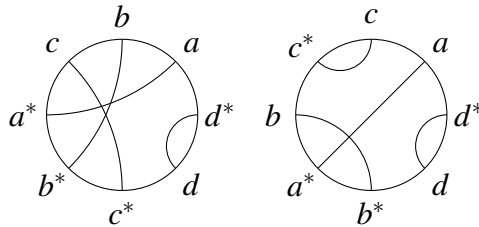
Cette notion est symétrique et stable par  $*$ .

**Définition 1.11.** Un symbole de Farey étendu  $\mathcal{F} = (\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$  est dit désentrelacé si pour tout couple  $(a, b)$  d'éléments liés, les distances de  $a$  à  $a^*$  et de  $b$  à  $b^*$  sont égales à 2. Il est dit normalisé si pour tout élément  $a$ , la distance de  $a$  à  $a^*$  est inférieure ou égale à 2, l'égalité ayant lieu si et seulement si  $a$  est lié à un autre élément.

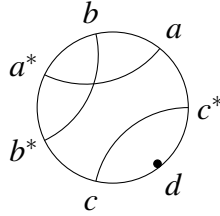
Un symbole de Farey étendu normalisé est désentrelacé.

**Exemple.** Soient  $a, b$  et  $c$  des arcs qui ne sont pas de points fixes pour  $*$  et  $d$  un arc fixe par  $*$ .

1.  $abca^*b^*c^*dd^*$  ou  $acc^*ba^*b^*dd^*$  ne sont pas désentrelacés :  $a$  et  $b$  sont liés mais  $d(a, a^*) = 3$  dans le premier cas et 4 dans le second.



2.  $aba^*b^*cdc^*$  est désentrelacé et n'est pas normalisé car  $d(c, c^*) = 2$ , mais  $c$  n'est pas lié à un autre élément.



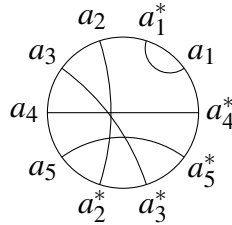
Comme dans [2], on représente dans la suite un symbole de Farey étendu en marquant les arcs elliptiques par un point creux (resp. plein) selon que l'arc est d'ordre 2 (resp. 3). Les exemples suivants se déduisent des calculs que nous détaillerons plus tard.

**Exemple**  $(\Gamma_0(15))$ . Le système de Farey unimodulaire

$$1 \underset{a_1}{\smile} \overset{\infty}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} 0 \underset{a_2}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_4}{\smile} \underset{a_5}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_3^*}{\smile} \underset{a_5^*}{\smile} \underset{a_4^*}{\smile} 1$$

est associé à  $\Gamma_0(15)$ . Les arcs  $a_2$  et  $a_3$  sont liés mais la distance entre  $a_2$  et  $a_2^*$  est strictement supérieure à 2 et le symbole de Farey étendu n'est pas désentrelacé. On a

$$\mathcal{V}_{par}/* = \{a_1\}, \mathcal{V}_{hyp}/* = \{a_2, a_3, a_4, a_5\}, \mathcal{V}_{ell} = \emptyset.$$



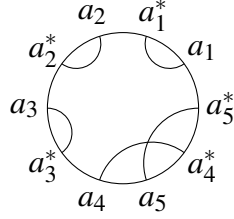
Le symbole de Farey étendu

$$1 \underset{a_1}{\smile} \overset{\infty}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} 0 \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\smile} \underset{a_4}{\smile} \underset{a_5}{\smile} \underset{a_4^*}{\smile} \underset{a_5^*}{\smile} 1$$

est aussi associé à  $\Gamma_0(15)$  et est normalisé. Remarquons au passage que l'on voit sur ce symbole de Farey étendu qu'il y a 3 pointes non équivalentes autres que la pointe 0, qu'il n'y a pas de points elliptiques et que le genre de la courbe est 1 :

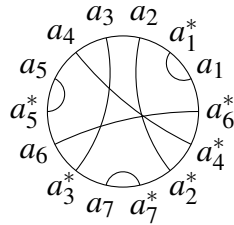
$$\mathcal{V}_{par}/* = \{a_1, a_2, a_3\}, \mathcal{V}_{hyp}/* = \{a_4, a_5\}, \mathcal{V}_{ell} = \emptyset.$$

$$1 \underset{a_1}{\smile} \overset{\infty}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} 0 \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\smile} \underset{a_4}{\smile} \underset{a_5}{\smile} \underset{a_4^*}{\smile} \underset{a_5^*}{\smile} 1$$



**Exemple** ( $\Gamma_0(20)$ ). Le symbole de Farey étendu suivant associé à  $\Gamma_0(20)$  est unimodulaire mais non normalisé :

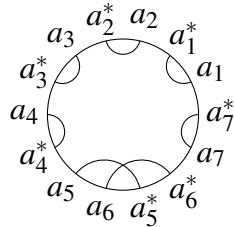
$$1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\frown} \infty \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\frown} 0 \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\frown} \frac{1}{5} \underset{a_4}{\smile} \underset{a_4^*}{\frown} \frac{1}{4} \underset{a_5}{\smile} \underset{a_5^*}{\frown} \frac{2}{7} \underset{a_6}{\smile} \underset{a_6^*}{\frown} \frac{3}{10} \underset{a_7}{\smile} \underset{a_7^*}{\frown} \frac{1}{3} \underset{a_8}{\smile} \underset{a_8^*}{\frown} \frac{3}{8} \underset{a_9}{\smile} \underset{a_9^*}{\frown} \frac{2}{5} \underset{a_{10}}{\smile} \underset{a_{10}^*}{\frown} \frac{1}{2} \underset{a_{11}}{\smile} \underset{a_{11}^*}{\frown} \frac{3}{5} \underset{a_{12}}{\smile} \underset{a_{12}^*}{\frown} \frac{2}{3} \underset{a_{13}}{\smile} \underset{a_{13}^*}{\frown} \frac{3}{4} \underset{a_{14}}{\smile} 1$$



$$\mathcal{V}_{par}/* = \{a_1, a_5, a_7\}, \mathcal{V}_{hyp}/* = \{a_2, a_3, a_4, a_6\}, \mathcal{V}_{ell} = \emptyset.$$

Le symbole de Farey étendu suivant associé à  $\Gamma_0(20)$  est normalisé :

$$1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\frown} \infty \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\frown} 0 \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\frown} \frac{1}{5} \underset{a_4}{\smile} \underset{a_4^*}{\frown} \frac{4}{19} \underset{a_5}{\smile} \underset{a_5^*}{\frown} \frac{3}{14} \underset{a_6}{\smile} \underset{a_6^*}{\frown} \frac{11}{51} \underset{a_7}{\smile} \underset{a_7^*}{\frown} \frac{107}{496} \underset{a_8}{\smile} \underset{a_8^*}{\frown} \frac{524}{2429} \underset{a_9}{\smile} \underset{a_9^*}{\frown} \frac{8}{37} \underset{a_{10}}{\smile} \underset{a_{10}^*}{\frown} \frac{3}{11} \underset{a_{11}}{\smile} \underset{a_{11}^*}{\frown} \frac{73}{253} \underset{a_{12}}{\smile} \underset{a_{12}^*}{\frown} \frac{20}{69} \underset{a_{13}}{\smile} \underset{a_{13}^*}{\frown} \frac{3}{10} \underset{a_{14}}{\smile} 1$$



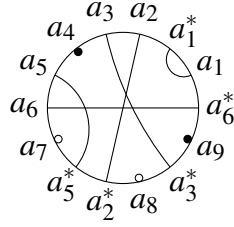
$$\mathcal{V}_{par}^{norm}/* = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_7\}, \mathcal{V}_{hyp}^{norm}/* = \{a_5, a_6\}, \mathcal{V}_{ell} = \emptyset.$$

On voit que la taille des rationnels intervenant dans le symbole de Farey étendu a augmenté.

**Exemple** ( $\Gamma_0(37)$ ). Le système de Farey unimodulaire suivant pour  $\Gamma_0(37)$

$$1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\frown} \infty \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\frown} 0 \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\frown} \frac{1}{5} \underset{a_4}{\smile} \underset{a_4^*}{\frown} \frac{1}{4} \underset{a_5}{\smile} \underset{a_5^*}{\frown} \frac{1}{3} \underset{a_6}{\smile} \underset{a_6^*}{\frown} \frac{3}{8} \underset{a_7}{\smile} \underset{a_7^*}{\frown} \frac{2}{5} \underset{a_8}{\smile} \underset{a_8^*}{\frown} \frac{3}{7} \underset{a_9}{\smile} \underset{a_9^*}{\frown} \frac{1}{2} \underset{a_{10}}{\smile} \underset{a_{10}^*}{\frown} \frac{4}{7} \underset{a_{11}}{\smile} \underset{a_{11}^*}{\frown} \frac{3}{5} \underset{a_{12}}{\smile} \underset{a_{12}^*}{\frown} \frac{2}{3} \underset{a_{13}}{\smile} \underset{a_{13}^*}{\frown} \frac{3}{4} \underset{a_{14}}{\smile} 1$$





représenté plus simplement par

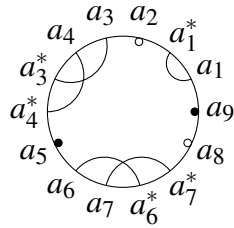
$$a_1 \ a_1^* \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_5^* \ a_2^* \ a_8 \ a_3^* \ a_9 \ a_6^*$$

est un système de Farey associé à  $\Gamma_0(37)$ . Il n'est pas désentrelacé car, par exemple,  $a_2$  et  $a_3$  sont liés mais la distance de  $a_2$  à  $a_2^*$  est strictement supérieure à 2. Dans cet exemple, il n'y a que deux points non équivalents. Par contre, il n'y a que deux matrices paraboliques correspondant à  $a_1$  et à  $a_1^*$ . On a

$$\mathcal{V}_{par}/^* = \{a_1\}, \mathcal{V}_{hyp}/^* = \{a_2, a_3, a_5, a_6\}, \mathcal{V}_{ell} = \{a_4, a_7, a_8, a_9\}.$$

Un symbole de Farey étendu normalisé obtenu par notre algorithme est

$$1 \overset{\infty}{\underbrace{\quad}} \underset{a_1}{0} \overset{1}{\underbrace{\quad}} \underset{a_1^*}{\underset{\circ}{0}} \overset{2}{\underbrace{\quad}} \underset{a_2}{\underset{\circ}{6}} \overset{1}{\underbrace{\quad}} \underset{a_3}{\underset{\circ}{11}} \overset{1}{\underbrace{\quad}} \underset{a_4}{\underset{\circ}{5}} \overset{1}{\underbrace{\quad}} \underset{a_3^*}{\underset{\circ}{4}} \overset{11}{\underbrace{\quad}} \underset{a_4^*}{\underset{\circ}{43}} \overset{21}{\underbrace{\quad}} \underset{a_5}{\underset{\circ}{82}} \overset{10}{\underbrace{\quad}} \underset{a_6}{\underset{\circ}{39}} \overset{6}{\underbrace{\quad}} \underset{a_7}{\underset{\circ}{23}} \overset{5}{\underbrace{\quad}} \underset{a_6^*}{\underset{\circ}{19}} \overset{51}{\underbrace{\quad}} \underset{a_7^*}{\underset{\circ}{193}} \overset{7}{\underbrace{\quad}} \underset{a_8}{\underset{\circ}{26}} \underset{a_9}{\underset{\circ}{1}}$$



On a

$$\mathcal{V}_{par}/^* = \{a_1\}, \mathcal{V}_{hyp}/^* = \{a_3, a_4, a_6, a_7\}, \mathcal{V}_{ell} = \{a_2, a_5, a_8, a_9\}.$$

**Lemme 1.12.** Soit  $\mathcal{F} = (\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$  un symbole de Farey étendu normalisé de groupe  $\Gamma$ .

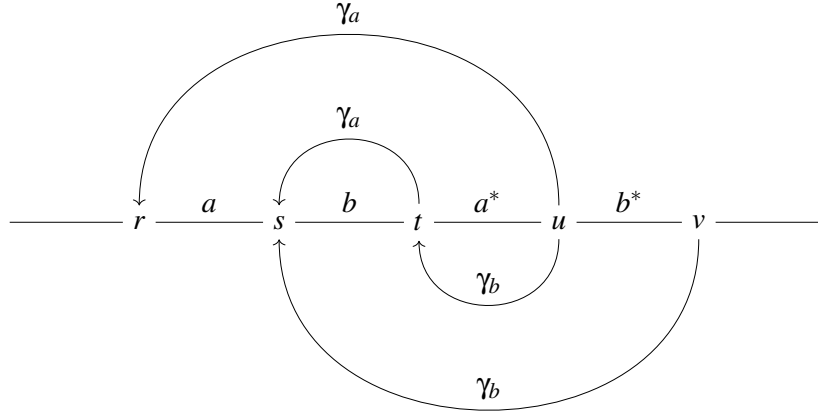
1. Les extrémités des arcs qui sont à la distance 0 ou 2 de leur image par  $*$  sont toutes équivalentes modulo  $\Gamma$  ainsi que les extrémités externes des mots  $cc^*$  pour  $c \in \mathcal{V}_{par}$ .
2. Soit  $P_0$  la classe d'équivalence commune. L'application

$$\mathcal{V}_{par}/^* \rightarrow \Gamma \backslash \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}) - \{P_0\}$$

qui associe à  $c$  la classe de son extrémité commune avec  $c^*$  est une bijection.

*Démonstration.*  $\mathcal{V}$  est formé de mots de la forme  $aba^*b^*$ ,  $cc^*$  et  $d$  avec  $d = d^*$ . Dans le cas  $aba^*b^*$ , on a  $\overline{a^*} = \gamma_a a$  et  $\overline{b^*} = \gamma_b b$ . Si  $a = (r, s)$  et  $b = (s, t)$ , on a nécessairement

$$u = \gamma_a^{-1} r, \quad s = \gamma_a \gamma_b \gamma_a^{-1} r, \quad t = \gamma_a^{-1} \gamma_b r, \quad v = \gamma_b^{-1} \gamma_a \gamma_b \gamma_a^{-1} r.$$



Donc les extrémités des arcs  $a, b, a^*, b^*$  sont toutes équivalentes modulo  $\Gamma$ . Dans le cas d'un mot de la forme  $d$  avec  $d = d^*$ , on a soit  $d = \gamma_d \bar{d}$ , soit  $d + \gamma_d d + \gamma_d^2 d = 0$ ; dans les deux cas, les extrémités de  $d$  sont équivalentes modulo  $\Gamma$ . Finalement, dans le cas d'un mot de la forme  $cc^*$ , les extrémités externes sont équivalentes puisque  $\gamma_c^{-1}c = \bar{c}^*$ .

On en déduit que toutes les extrémités externes de tous les mots de la forme  $aba^*b^*, cc^*$  et  $d = d^*$  sont équivalentes ainsi que les extrémités internes des mots de la forme  $aba^*b^*$ . Cela termine la démonstration de la partie (1).

Il reste à regarder ce qui se passe pour la seconde extrémité de  $c$  lorsque  $c \in \mathcal{V}_{par}$  (mot du type  $cc^*$  avec  $c \neq c^*$ ). Les éléments de  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  qui ne sont pas équivalents à  $P_0$  sont nécessairement équivalents modulo  $\Gamma$  à une des extrémités des arcs de  $\mathcal{V}$  et donc à une extrémité de  $c$  pour un  $c$  de  $\mathcal{V}_{par}$ . Il suffit donc de démontrer que pour deux mots distincts du type  $c_1c_1^*$  et  $c_2c_2^*$ , le point  $s_1$  commun à  $c_1$  et  $c_1^*$  et le point  $s_2$  commun à  $c_2$  et  $c_2^*$  ne sont pas équivalents modulo  $\Gamma$ .

Prenons un petit disque épointé, voisinage de  $s_1$  dans  $\mathcal{H}^*$ . L'image dans la surface  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  est un disque épointé et ne peut pas contenir des points de l'image d'un point proche de  $s_2$ . Par continuité,  $s_1$  et  $s_2$  ne peuvent pas être équivalents modulo  $\Gamma$ .  $\square$

**Remarque 1.13.** D'après [2], le nombre d'arcs d'un domaine fondamental associé à  $\Gamma$  est *minimal* pour le polygone fondamental associé à un symbole de Farey et vaut alors

$$2(2g + t - 1) + 2\#\mathcal{V}_{ell,2} + 2\#\mathcal{V}_{ell,3}$$

où  $g$  est le nombre de mots de la forme  $aba^*b^*$  et  $t$  le cardinal de  $\Gamma \backslash \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  (les arcs elliptiques sont dédoublés). Le groupe  $\Gamma$  est isomorphe à un produit libre de  $\#\mathcal{V}_{ell,2}$  exemplaires de  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ , de  $\#\mathcal{V}_{ell,3}$  exemplaires de  $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$  et de  $r$  exemplaires de  $\mathbb{Z}$  avec  $r = 2g + t - 1$  où  $t$  est le nombre de pointes de  $\Gamma \backslash \mathcal{H}$  ([2], prop. 3.4, prop.7).

## 2 Construction d'un symbole de Farey étendu normalisé

**Construction.** L'algorithme décrit dans ce paragraphe permet de construire à partir d'un symbole de Farey étendu  $\mathcal{F}$  de groupe  $\Gamma$  un symbole de Farey étendu normalisé  $\mathcal{F}^{norm}$  de même groupe  $\Gamma$ .

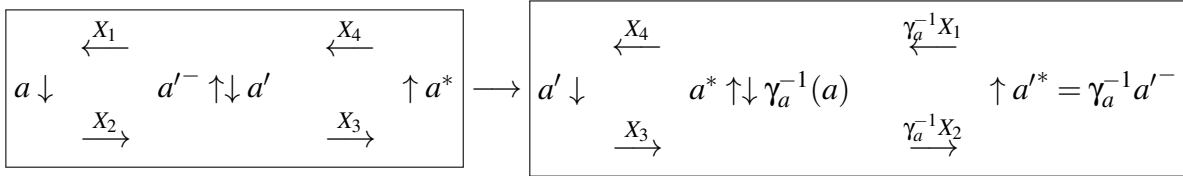
Cette construction est inspirée d'un paragraphe de Siegel dans [7], p. 115 (§2) et met en oeuvre l'opération de dissection sur les surfaces de Riemann ([1]).

## 2.1 Notations

Dans la suite,  $(\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$  désigne un symbole de Farey étendu. On pose  $\mathcal{V} = (a_1, \dots, a_n)$ . Soient les données de recollement  $(\gamma_a)_{a \in \mathcal{V}}$  associées. Les lettres majuscules désigneront des mots formés d'arcs consécutifs (facteurs) de  $\mathcal{V}$ . En particulier,  $V$  est le mot  $a_1 a_2 \dots a_n$ . On note  $e_1(Y)$  (resp.  $e_2(Y)$ ) la première (resp. la deuxième) extrémité du mot  $Y$ .

## 2.2 Opération de base (cas non elliptique)

Choisissons un élément  $a$  de  $\mathcal{V}$  tel que  $a \neq a^*$  et un découpage de  $V$  de la forme suivante  $V = (X_1 a X_2 X_3 a^* X_4)$ . On construit un nouveau symbole de Farey étendu  $\mathcal{F}' = (\mathcal{V}', *, \mu'_{ell})$  par une opération de base de découpage et recollement de la manière suivante : on introduit l'arc  $a'$  reliant l'extrémité  $e_2(X_4) = e_1(X_1)$  à  $e_2(X_2) = e_1(X_3)$  et on recolle les arcs opposés  $a^*$  et  $\gamma_a^{-1}(a)$  :

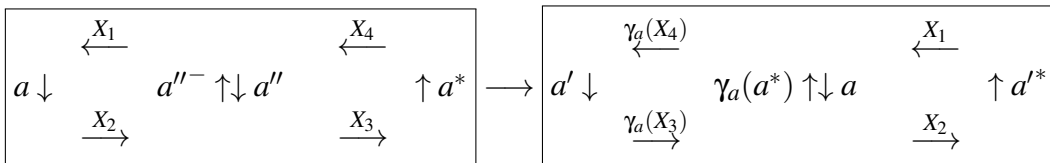


Décrivons le nouveau symbole de Farey étendu  $\mathcal{F}' = (\mathcal{V}', *, \mu'_{ell})$ . On a

$$V' = (a' X_3 \gamma_a^{-1}(X_2) a^* \gamma_a^{-1}(X_1) X_4)$$

Si  $v$  est un élément de  $\mathcal{V}$ , notons  $v'$  l'élément correspondant dans  $\mathcal{V}'$ . Pour  $v$  différent de  $a$  et  $a^*$ , selon la position de  $v$ , on a  $v' = v$  ou  $v' = \gamma_a^{-1}v$ . L'involution  $*$  sur  $\mathcal{F}'$  respecte la transformation  $v \mapsto v'$ , autrement dit  $v'^* = v^*$ . Les données de recollement se déduisent de celles de  $\mathcal{F}$ . On a par construction  $\gamma_{a'} = \gamma_a$ . Pour  $v$  différent de  $a$  et  $a^*$ , selon les positions respectives de  $v$  et de  $v^*$ , on a  $\gamma_{v'} = \gamma_v$ ,  $\gamma_a^{-1}\gamma_v$  ou  $\gamma_a^{-1}\gamma_v\gamma_a$ . On en déduit que  $\gamma_{v'}$  appartient encore à  $SL_2(\mathbb{Z})$  (et bien sûr à  $\Gamma$ ) et donc que le nouveau symbole de Farey étendu vérifie la propriété (F4). Si  $v$  est différent de  $a$  et de  $a^*$ , la largeur de  $v'$  (déterminant de  $A_{v'}$ ) est égale à la largeur de  $v$ . Cela n'est pas vrai pour  $a'$  et  $a^*$ . Le groupe associé au nouvel symbole de Farey étendu  $\mathcal{F}'$  est encore  $\Gamma$ .

Il est possible de faire une autre transformation en choisissant d'appliquer  $\gamma_a$  au deuxième quadrilatère avec  $a' = \gamma_a(a'')$ , ce qui revient à échanger les rôles de  $a$  et de  $a^*$  :



Nous représentons ces opérations de la manière suivante

$$(\widetilde{aX_2} \mid X_3 \widetilde{a^*X_4} \mid \widetilde{X_1}) \mapsto (a' X_3 \gamma_a^{-1}(X_2) a^* \gamma_a^{-1}(X_1) X_4)$$

resp.

$$\left( \underline{a}X_2 \mid \widetilde{X_3 \underline{a}^* X_4} \mid X_1 \right) \mapsto (a' \gamma_a(X_3) X_2 a'^* X_1 \gamma_a(X_4))$$

Les pivots  $a$  et  $a^*$  que l'on remplace sont soulignés. Les coupures sont indiquées par un trait vertical. La partie  $\widetilde{\dots}$  entre deux coupures indique les chemins transformés par  $\gamma_a^{-1}$  (resp.  $\gamma_a$ ). De manière équivalente, les opérations peuvent être représentées par

$$\left( \widetilde{X_1 \underline{a} X_2} \mid X_3 \underline{a}^* X_4 \mid \right) \mapsto (X_4 a' X_3 \gamma_a^{-1}(X_2) a'^* \gamma_a^{-1}(X_1))$$

resp.

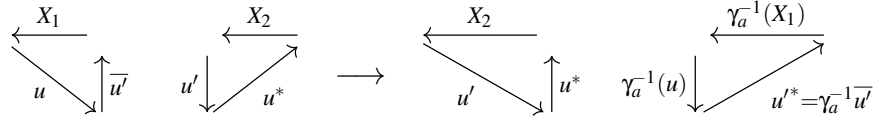
$$\left( X_1 \underline{a} X_2 \mid \widetilde{X_3 \underline{a}^* X_4} \mid \right) \mapsto (\gamma_a(X_4) a' \gamma_a(X_3) X_2 a'^* X_1)$$

### 2.3 Opération de base (cas elliptique)

Supposons maintenant que  $a^* = a$ . Les opérations de base sont les suivantes

$$\left( X_1 \underline{a} \mid \widetilde{X_2} \right) \rightarrow (a' \gamma_a(X_1) X_2) \quad \text{resp.} \quad \left( \widetilde{X_1 \underline{a}} \mid X_2 \right) \rightarrow (a' X_1 \gamma_a^{-1}(X_2))$$

Pour comprendre l'opération, il faut se souvenir que le polygone fondamental construit à partir de  $\mathcal{F}$  ne contient pas  $a = (r, s)$  comme bord, mais les arcs  $u = (r, t)$  et  $u^* = (t, s)$  où  $t$  appartient au demi-plan de Poincaré  $\mathcal{H}$ . La dissection faite sur ce polygone est alors (dans le premier cas)



Si  $a' = u' u'^*$ , on a  $\gamma_{a'} = \gamma_a$ . Le second cas se traite de la même manière.

### 2.4 Étape de Siegel

L'étape de Siegel permet d'augmenter la longueur  $n$  du segment initial  $W$  du système de Farey qui est normalisé (c'est-à-dire formé de mots de la forme  $aba^*b^*$ ,  $aa^*$  ou  $a$  avec  $a = a^*$ ) en (au plus) 4 opérations de base. Dans la suite, on omettra les ' dans la notation : par exemple,

$$\left( \widetilde{X_1 \underline{a} X_2} \mid X_3 \underline{a}^* X_4 \mid \right) \mapsto (X_4 a' X_3 \gamma_a(X_2) a'^* \gamma_a(X_1)) = (X_4' a' X_3' X_2' a'^* X_1')$$

sera simplement écrit

$$\left( \widetilde{X_1 \underline{a} X_2} \mid X_3 \underline{a}^* X_4 \mid \right) \mapsto (X_4 a X_3 X_2 a^* X_1)$$

Le choix de la coupure qui sera modifiée par un élément de  $\Gamma$  est fait de manière à ne pas transformer l'arc  $\{\infty, 0\}$ . Celui-ci étant dès le début dans  $W$ , cela revient donc à ne pas appliquer un élément de  $\Gamma$  sur  $W$ . Expérimentalement, cela diminue de manière drastique la taille des coefficients des matrices et le temps de calcul.

À une rotation près, on peut supposer que la partie normalisée  $W$  de  $V$  est au début de  $V$ .

1. Cas parabolique. On considère un arc  $a$  à distance 1 de  $a^*$  (appelé pivot). On peut supposer qu'il précède  $a^*$  quitte à changer de notation. La longueur  $n$  de  $W$  augmente de 2 avec l'une des deux opérations suivantes.

$$(WXaa^*Y) = (WX\underline{a} | \widetilde{a^*Y} |) \rightarrow (aa^*WXY)$$

ou

$$(WXaa^*Y) = (W | \widetilde{X\underline{a}} | \underline{a^*Y}) \rightarrow (aa^*XYW) \xrightarrow{\text{rotation}} (Waa^*XY)$$

2. Cas hyperbolique. On considère deux arcs  $a$  et  $b$  liés avec  $a$  précédant  $b$  dans  $V$  (appelés pivots de l'étape). Plusieurs suites d'opérations sont possibles. Quand il y a plusieurs choix possibles, les coupures sont choisies de manière à ce que le pivot non utilisé soit dans le même mot que son image par l'involution. Dans tous les cas, la longueur  $n$  de  $W$  augmente de 4. En pratique, nous n'avons utilisé que le premier cas.

(a)  $b$  suit  $a$ .

$$\begin{aligned} (WXabYa^*Zb^*T) &= (WX\underline{abY} | \widetilde{a^*Zb^*T} |) \\ &\rightarrow (ba^*ZYb^*WXaT) = (\widetilde{ba^*ZY} | b^*WX\underline{aT} |) \\ &\rightarrow (a^*b^*WXZYabT) = (a^*\underline{b^*}WXZYa | \widetilde{bT} |) \\ &\rightarrow (b^*WXZYaba^*T) = (b^*WXZY\underline{a} | \widetilde{ba^*T} |) \\ &\rightarrow (aba^*b^*WXZYT) \end{aligned}$$

(b)  $b$  suit  $a$  (autre méthode).

$$\begin{aligned} (WXabYa^*Zb^*T) &= (W | \widetilde{XabY} | a^*Zb^*T) \\ &\rightarrow (ba^*ZYb^*XaTW) = (\widetilde{ba^*ZY} | b^*X\underline{aTW} |) \\ &\rightarrow (a^*b^*XZYabTW) = (\widetilde{a^*b^*} | XZY\underline{abTW} |) \\ &\rightarrow (b^*XZYaba^*TW) = (b^*\widetilde{XZY\underline{ab}} | \underline{a^*TW} |) \\ &\rightarrow (aba^*b^*XZYT) \xrightarrow{\text{rotation}} (Waba^*b^*XZYT) \end{aligned}$$

(c) Cas général.

$$\begin{aligned} (WXaUbYa^*Zb^*T) &= (WX\underline{aUb} | \widetilde{Ya^*Z} | b^*T) \\ &\rightarrow (aYUba^*b^*TWXZ) = (aYU\underline{b} | \widetilde{a^*b^*T} | WXZ) \\ &\rightarrow (ba^*b^*WXZaYUT) = (\widetilde{ba^*b^*W} | XZ\underline{aYUT} |) \\ &\rightarrow (a^*XZb^*WabYUT) = (\widetilde{a^*XZ\underline{b^*}} | W\underline{abYUT} |) \\ &\rightarrow (b^*Waba^*XZYUT) = (\widetilde{b^*W\underline{ab}} | \underline{a^*XZYUT} |) \\ &\rightarrow (aba^*b^*WXZYUT) \end{aligned}$$

(d) Cas général avec moins d'étapes.

$$\begin{aligned}
(WXaUbYa^*Zb^*T) &= (W \mid \widetilde{Xa} \mid UbYa^*Zb^*T) \\
\rightarrow (WaUbYa^*XZb^*T) &= (W \mid a\widetilde{UbYa^*} \mid XZb^*T) \\
\rightarrow (TWbXZYa^*b^*aU) &= (TWb \mid \widetilde{XZYa^*} \mid b^*aU) \\
\rightarrow (UTWbab^*a^*XZY) &\xrightarrow{\text{rotation}} (Wbab^*a^*XZYUW)
\end{aligned}$$

3. Cas elliptique. Le pivot est ici un élément  $a$  de  $\mathcal{V}_{ell}$ .

$$(|WX\widetilde{aY}) \rightarrow (WXYa) \xrightarrow{\text{rotation}} (aWXY)$$

Deuxième possibilité :

$$(W \mid \widetilde{XaY}) \rightarrow (aWXY)$$

La longueur  $n$  de  $W$  augmente de 1.

## 2.5 Algorithme complet

Finalement on a l'algorithme suivant.

---

### Algorithm 1 mspolygon

---

**Entrée:** Un symbole de Farey étendu  $(\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$ .

**Sortie:** Un symbole de Farey étendu normalisé

$n \leftarrow 0$

**tant que**  $n < \text{longueur}(V)$  **faire**

**si** il existe  $a$  suivant  $W$  tel que  $d(a, a^*) = 0$  **alors**

    appliquer l'opération de Siegel elliptique de pivot  $a$ .  $\{n$  augmente de 1. $\}$

**sinon si** il existe  $a$  suivant  $W$  tel que  $d(a, a^*) = 1$  **alors**

    appliquer l'opération de Siegel parabolique de pivot  $a$ .  $\{n$  augmente de 2. $\}$

**sinon si** il existe deux arcs entrelacés  $a$  et  $b$  **alors**

    appliquer l'opération de Siegel parabolique de pivot  $a$  et  $b$ .  $\{n$  augmente de 4. $\}$

**retourner** le symbole de Farey étendu obtenu.

---

Pour voir que l'algorithme se termine, il suffit de remarquer que tant que  $W$  est différent de  $V$  ( $n < \text{longueur}(V)$ ), au moins l'une des trois conditions a lieu. En effet, si aucune des deux premières conditions n'est vérifiée, on cherche le premier arc  $f$  suivant  $W$  tel que  $f^*$  précède  $f$ . Ni  $f$ , ni  $f^*$  ne sont dans  $W$ . On prend alors comme pivot  $a = f^*$  et  $b$  l'arc suivant  $a$ , les arcs  $a$  et  $b$  étant alors nécessairement entrelacés.

## 2.6 Résultat de l'algorithme

En utilisant l'existence et la construction d'un système de Farey unimodulaire associé à  $\Gamma_0(N)$ , on obtient donc le résultat suivant.

Soit  $N$  un entier  $> 1$ . Soit  $g_0(N)$  le genre de  $X_0(N)$ ,  $c_\infty(N)$  le nombre de pointes de  $X_0(N)$ ,  $\mu_{0,2}(N)$  et  $\mu_{0,3}(N)$  le nombre de points elliptiques d'ordre 2 et 3.

1. On construit un symbole de Farey étendu  $\mathcal{F} = (\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$  normalisé définissant un domaine fondamental de  $X_0(N)$ .
2. Autrement dit,  $\mathcal{V}$  est formé de
  - (a)  $g_0(N)$  mots du type  $aba^*b^*$  avec les  $a, b, a^*$  et  $b^*$  distincts deux à deux ( $a$  et  $b \in \mathcal{V}_{hyp}$ );
  - (b)  $c_\infty(N) - 1$  mots de type  $cc^*$  avec  $c \neq c^*$  ( $c \in \mathcal{V}_{par}$ );
  - (c)  $\mu_{0,2}(N) + \mu_{0,3}(N)$  points fixes  $c$  par l'involution  $*$  ( $c \in \mathcal{V}_{ell}$ );
3. les extrémités de tous les arcs hyperboliques et elliptiques sont équivalentes modulo  $\Gamma_0(N)$  ainsi que les extrémités de  $c$  et  $c^*$  autres que leur extrémité commune; notons  $P$  la pointe en question;
4. l'ensemble des arcs paraboliques modulo  $*$  est en bijection avec l'ensemble des pointes modulo  $\Gamma_0(N)$  différentes de  $P$ ; plus précisément, si  $c$  est parabolique, l'image de  $c$  par cette bijection est l'extrémité commune à  $c$  et  $c^*$ .

## 3 Structure de $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]_0$

Soit  $\Delta = \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]$  le groupe des diviseurs sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  et  $\Delta_0$  le sous-groupe des diviseurs de degré 0. L'action naturelle de  $G = GL_2(\mathbb{Q})$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$  induit une action de  $G$  sur  $\Delta$ . Si  $c \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ , on note  $\{c\}$  le diviseur associé à  $c$  dans  $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]$ . Si  $c_1$  et  $c_2$  sont dans  $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ , on note  $(c_1, c_2)$  le diviseur  $\{c_2\} - \{c_1\}$  associé dans  $\Delta_0$ . On parlera aussi du chemin  $(c_1, c_2)$ : dans l'interprétation géométrique, il s'agit du chemin géodésique reliant les deux pointes  $c_1$  et  $c_2$  du demi-plan de Poincaré compactifié  $\mathcal{H}^*$ . Le groupe  $\Delta_0$  est engendré par les diviseurs de la forme  $(c_1, c_2) = \{c_2\} - \{c_1\}$  avec  $c_1, c_2 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{Q})$ .

**Théorème 3.1.** *Soit  $\mathcal{F}$  un symbole de Farey étendu  $(\mathcal{V}, *, \mu_{ell})$  et  $(\gamma_a)$  ses données de recollement pour  $a \in \mathcal{V}$ . Le  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module  $\Delta_0$  est défini par générateurs et relations de la manière suivante : l'image de  $\mathcal{V}$  dans  $\Delta_0$  forme un système de générateurs vérifiant les relations*

1.  $\sum_{a \in \mathcal{V}} a = 0$ ;
2.  $a + \gamma_a a^* = 0$  si  $a \notin \mathcal{V}_{ell,3}$ ;
3.  $a + \gamma_a a + \gamma_a^2 a = 0$  si  $a \in \mathcal{V}_{ell,3}$ .

Pour la démonstration, voir [6]. On peut facilement extraire un système de générateurs minimal. Soit  $(\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell})/*$  un ensemble formé de représentants du quotient de  $\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}$  par l'involution  $*$ . Le premier élément de  $(\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell})/*$  est supposé être le chemin  $(\infty, 0)$ .

**Corollaire 3.2.** *Le  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module  $\Delta_0 = \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{Q})]_0$  est le quotient du  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module libre engendré par les éléments de  $(\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}) / * \sqcup \mathcal{V}_{ell}$  par les relations*

$$\begin{cases} \sum_{a \in (\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}) / * \sqcup \mathcal{V}_{ell}} \lambda_a a & = 0 \\ \mu_a a & = 0 \text{ pour } a \in \mathcal{V}_{ell} \end{cases}$$

avec

1.  $\lambda_a = 1 - \gamma_a^{-1}$  pour  $a \in (\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}) / *$  et  $\lambda_a = 1$  pour  $a \in \mathcal{V}_{ell}$  ;
2.  $\mu_a = \sum_{s=0}^{\mu-1} \gamma_a^s$  pour  $a \in \mathcal{V}_{ell, \mu}$ .

On en déduit que  $\Delta_0$  admet une présentation en tant que  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module de la forme

$$\mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_0 \rightarrow \Delta_0 \rightarrow 0$$

où  $\mathcal{W}_1$  et  $\mathcal{W}_0$  sont des  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules libres :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 &= \bigoplus_{a \in (\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}) / *} \mathbb{Z}[\Gamma] \bigoplus \bigoplus_{a \in \mathcal{V}_{ell}} \mathbb{Z}[\Gamma] \\ \mathcal{W}_1 &= \mathbb{Z}[\Gamma] \bigoplus \bigoplus_{a \in \mathcal{V}_{ell}} \mathbb{Z}[\Gamma] \end{aligned}$$

La flèche de  $\mathcal{W}_0$  dans  $\Delta_0$  est donnée par

$$(w_a)_{a \in (\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}) / * \sqcup \mathcal{V}_{ell}} \mapsto \sum_{a \in (\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}) / * \sqcup \mathcal{V}_{ell}} w_a a$$

La flèche de  $\mathcal{W}_1$  dans  $\mathcal{W}_0$  est donnée par

$$(v, (w_a)_{a \in \mathcal{V}_{ell}}) \mapsto v(\lambda_a)_{a \in (\mathcal{V} - \mathcal{V}_{ell}) / * \sqcup \mathcal{V}_{ell}} + (w_a \mu_a)_{a \in \mathcal{V}_{ell}}$$

Plus précisément, le  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -module  $\Delta_0$  admet une résolution projective de la forme

$$\cdots \rightarrow \mathcal{W}_n \rightarrow \cdots \rightarrow \mathcal{W}_2 \rightarrow \mathcal{W}_1 \rightarrow \mathcal{W}_0 \rightarrow \Delta_0 \rightarrow 0$$

où les  $\mathcal{W}_n$  sont des  $\mathbb{Z}[\Gamma]$ -modules libres avec

$$\mathcal{W}_n = \bigoplus_{a \in \mathcal{V}_{ell}} \mathbb{Z}[\Gamma] \text{ pour } n \geq 2.$$

Les flèches de  $\mathcal{W}_{2m}$  dans  $\mathcal{W}_{2m-1}$  pour  $m \geq 1$  sont données par

$$(w_a)_{a \in \mathcal{V}_{ell}} \mapsto (w_a(\gamma_a - 1))_{a \in \mathcal{V}_{ell}}$$

Les flèches de  $\mathcal{W}_{2m+1}$  dans  $\mathcal{W}_{2m}$  pour  $m \geq 1$  sont données par

$$(w_a)_{a \in \mathcal{V}_{ell}} \mapsto (w_a \mu_a)_{a \in \mathcal{V}_{ell}} .$$



## 4 Conclusion

La taille des rationnels  $p/q$  intervenant dans le système de Farey normalisé augmente exponentiellement dans notre implantation pour  $\Gamma = \Gamma_0(N)$  : la hauteur naïve  $\log \max(|p|, |q|)$  est bornée trivialement en  $O(2^N)$ , et expérimentalement de l'ordre de  $N/2$ . Il serait intéressant d'estimer rigoureusement cette taille, ainsi que de la minimiser en changeant l'ordre des opérations ou en utilisant d'autres opérations de base. Nous n'avons pas non plus d'application dans laquelle calculer un système normalisé serait plus avantageux qu'un système de Farey unimodulaire. Nous sommes donc intéressés par toute suggestion.

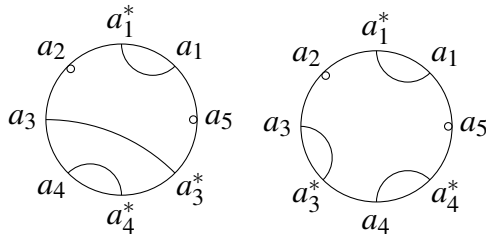
## A Exemples

Donnons quelques exemples que l'on peut déduire des implémentations dans Pari/GP. Le groupe  $\Gamma$  est toujours le sous-groupe de congruence  $\Gamma_0(N)$  pour  $N > 1$ . Dans le cas où le symbole de Farey étendu unimodulaire n'est pas normalisé, nous donnons aussi un symbole de Farey étendu normalisé. La syntaxe GP est

```
mspolygon(N,0)\\ système de Farey unimodulaire
mspolygon(N,1)\\ système de F normalisé
```

$$\Gamma_0(2) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} \underset{a_2}{\smile} 1, \quad \Gamma_0(3) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} \underset{a_2}{\smile} 1, \quad \Gamma_0(4) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} 1, \quad \Gamma_0(5) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_3}{\smile} 1$$

$$\Gamma_0(6) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} \underset{a_2}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} 1, \quad 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\smile} 1$$

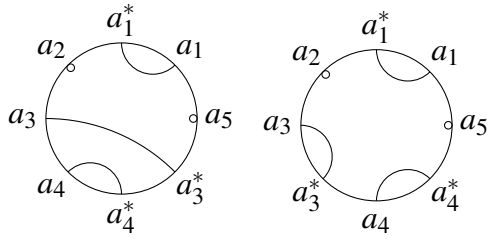


$$\Gamma_0(7) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_3}{\smile} 1$$

$$\Gamma_0(8) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\smile} 1$$

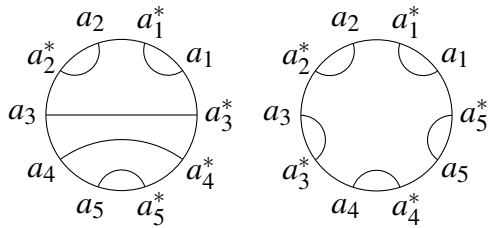
$$\Gamma_0(9) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\smile} 1$$

$$\Gamma_0(10) : 1 \underset{a_1}{\underbrace{\infty}} \underset{a_1^*}{\underbrace{0}} \underset{a_2}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \underset{a_3}{\underbrace{\frac{2}{5}}} \underset{a_4}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \underset{a_4^*}{\underbrace{\frac{3}{5}}} \underset{a_3^*}{\underbrace{\frac{2}{3}}} \underset{a_5}{\underbrace{1}}, \quad 1 \underset{a_1}{\underbrace{\infty}} \underset{a_1^*}{\underbrace{0}} \underset{a_2}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \underset{a_3}{\underbrace{\frac{2}{5}}} \underset{a_3^*}{\underbrace{\frac{3}{7}}} \underset{a_4}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \underset{a_4^*}{\underbrace{\frac{2}{3}}} \underset{a_5}{\underbrace{1}}$$

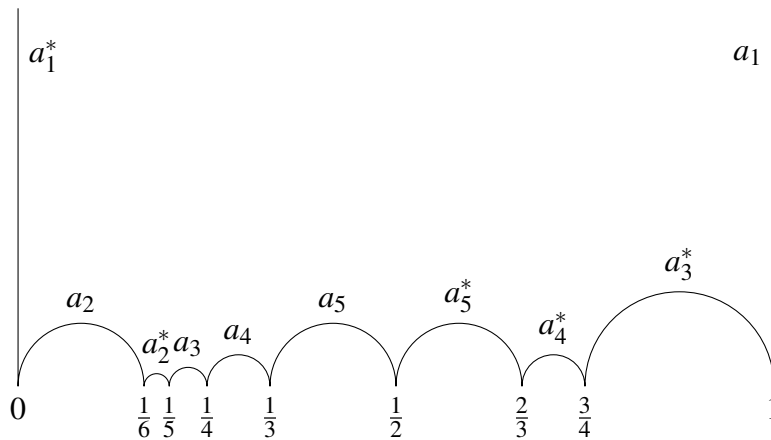


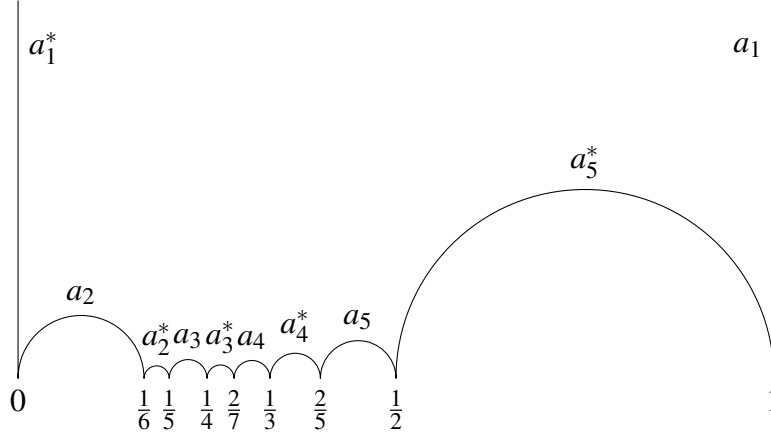
$$\Gamma_0(11) : 1 \underset{a_1}{\underbrace{\infty}} \underset{a_1^*}{\underbrace{0}} \underset{a_2}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \underset{a_3}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \underset{a_3^*}{\underbrace{\frac{2}{3}}} \underset{a_3^*}{\underbrace{1}}$$

$$\Gamma_0(12) : 1 \underset{a_1}{\underbrace{\infty}} \underset{a_1^*}{\underbrace{0}} \underset{a_2}{\underbrace{\frac{1}{6}}} \underset{a_2^*}{\underbrace{\frac{1}{5}}} \underset{a_3}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \underset{a_4}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \underset{a_5}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \underset{a_5^*}{\underbrace{\frac{2}{3}}} \underset{a_4^*}{\underbrace{\frac{3}{4}}} \underset{a_3^*}{\underbrace{1}}, \quad 1 \underset{a_1}{\underbrace{\infty}} \underset{a_1^*}{\underbrace{0}} \underset{a_2}{\underbrace{\frac{1}{6}}} \underset{a_2^*}{\underbrace{\frac{1}{5}}} \underset{a_3}{\underbrace{\frac{1}{4}}} \underset{a_3^*}{\underbrace{\frac{2}{7}}} \underset{a_4}{\underbrace{\frac{1}{3}}} \underset{a_4^*}{\underbrace{\frac{2}{5}}} \underset{a_5}{\underbrace{\frac{1}{2}}} \underset{a_5^*}{\underbrace{1}}$$



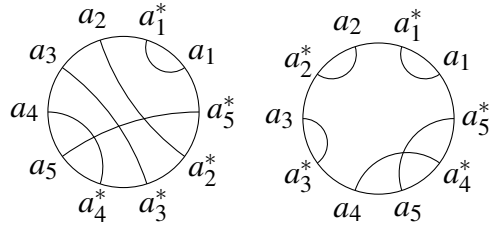
On voit sur ce dernier symbole de Farey étendu que  $X_0(12)$  est de genre 0, n'a pas de points elliptiques et a 4 pointes (les pointes  $p$  autres que 0 sont en bijection avec les chemins  $aa^*$  allant de 0 à 0 en passant par  $p$ ).





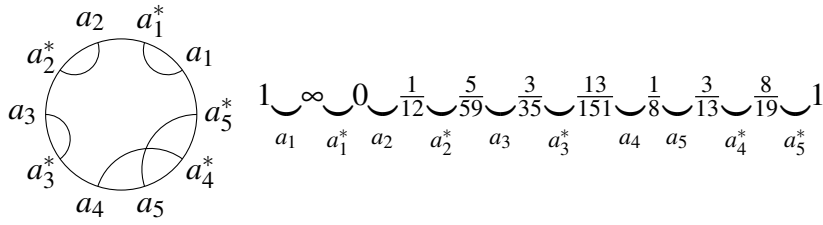
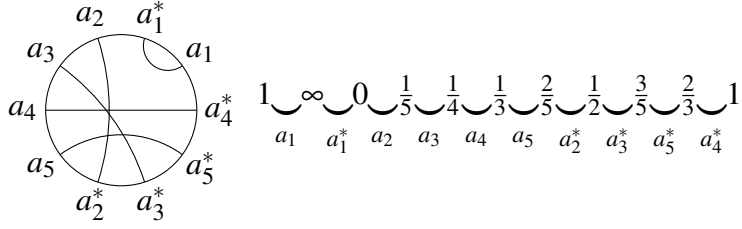
$$\Gamma_0(13) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} 0 \underset{a_2}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_4}{\smile} \underset{a_5}{\smile} 1$$

$$\Gamma_0(14) : 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} 0 \underset{a_2}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_4}{\smile} \underset{a_5}{\smile} \underset{a_4^*}{\smile} \underset{a_3^*}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_5^*}{\smile} 1, \quad 1 \underset{a_1}{\smile} \underset{a_1^*}{\smile} 0 \underset{a_2}{\smile} \underset{a_2^*}{\smile} \underset{a_3}{\smile} \underset{a_3^*}{\smile} \underset{a_4}{\smile} \underset{a_5}{\smile} \underset{a_4^*}{\smile} \underset{a_5^*}{\smile} 1$$

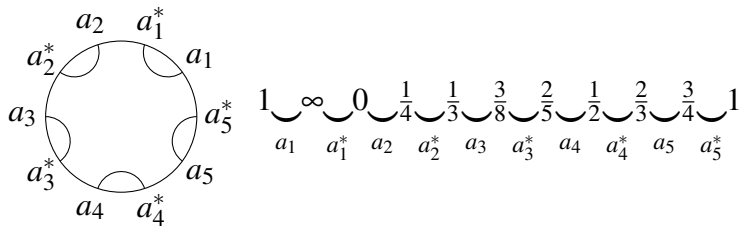
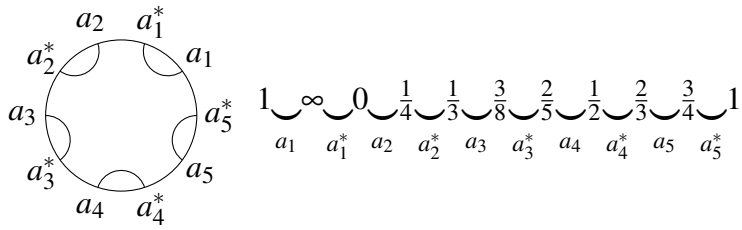


Les arcs  $a_4$  and  $a_5$  du deuxième symbole de Farey étendu se projettent dans  $X_0(14)$  en des lacets et donnent une base symplectique de  $H_1(X_0(14), \mathbb{Z})$  pour le produit d'intersection. Les arcs  $a_4$  et  $a_5$  sont de type hyperbolique, les arcs  $a_1, a_2$  et  $a_3$  sont de type parabolique.

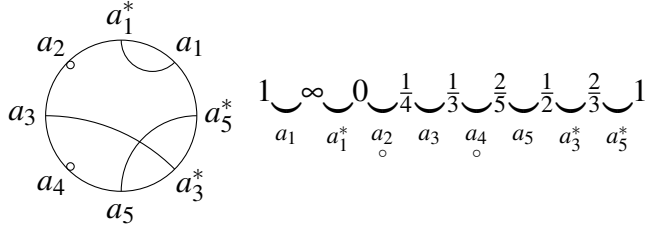
$$-N = 15$$



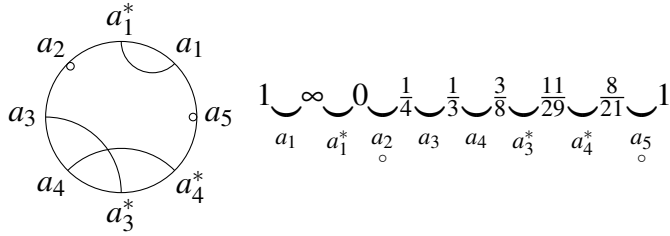
$$-N = 16$$



$$-N = 17$$

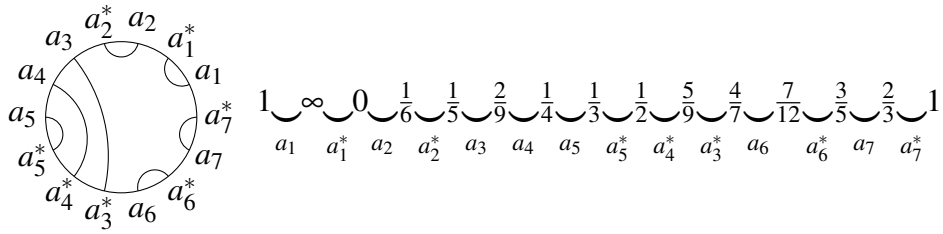


$$1 \underbrace{\quad}_{a_1} \underbrace{\infty}_{a_1^*} \underbrace{0}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3} \underbrace{\frac{2}{5}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_4} \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_4^*} \underbrace{\quad}_{a_5} \underbrace{\quad}_{a_5^*} 1$$

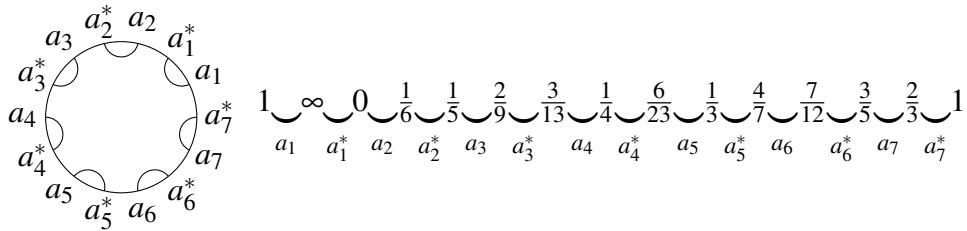


$$1 \underbrace{\quad}_{a_1} \underbrace{\infty}_{a_1^*} \underbrace{0}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3} \underbrace{\frac{3}{8}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{11}{29}}_{a_4} \underbrace{\frac{8}{21}}_{a_4^*} \underbrace{\quad}_{a_5} \underbrace{\quad}_{a_5^*} 1$$

$$-N = 18$$

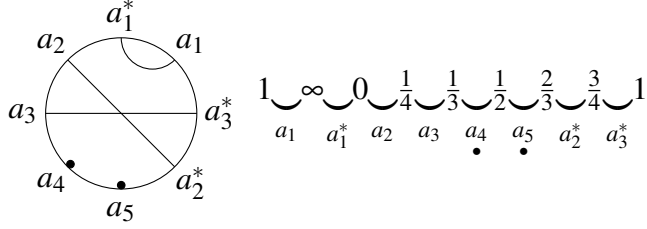


$$1 \underbrace{\quad}_{a_1} \underbrace{\infty}_{a_1^*} \underbrace{0}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{6}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_3} \underbrace{\frac{2}{9}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_4} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_4^*} \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_5} \underbrace{\frac{5}{9}}_{a_5^*} \underbrace{\frac{4}{7}}_{a_6} \underbrace{\frac{7}{12}}_{a_6^*} \underbrace{\frac{3}{5}}_{a_7} \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_7^*} \underbrace{\quad}_{a_1} 1$$

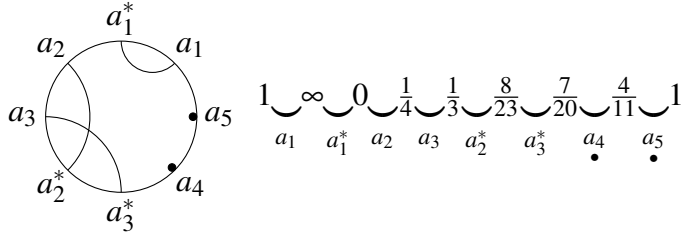


$$1 \underbrace{\quad}_{a_1} \underbrace{\infty}_{a_1^*} \underbrace{0}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{6}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_3} \underbrace{\frac{2}{9}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{3}{13}}_{a_4} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_4^*} \underbrace{\frac{6}{23}}_{a_5} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_5^*} \underbrace{\frac{4}{7}}_{a_6} \underbrace{\frac{7}{12}}_{a_6^*} \underbrace{\frac{3}{5}}_{a_7} \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_7^*} \underbrace{\quad}_{a_1} 1$$

$$-N = 19$$

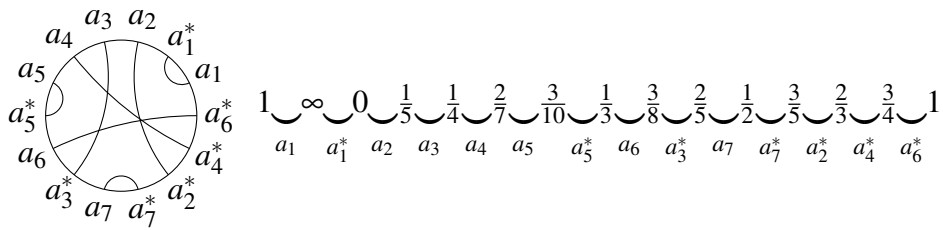


$$1 \underbrace{\infty}_{a_1} \underbrace{0}_{a_1^*} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3} \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_4} \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_5} \underbrace{\frac{3}{4}}_{a_2^*} \underbrace{1}_{a_3^*}$$

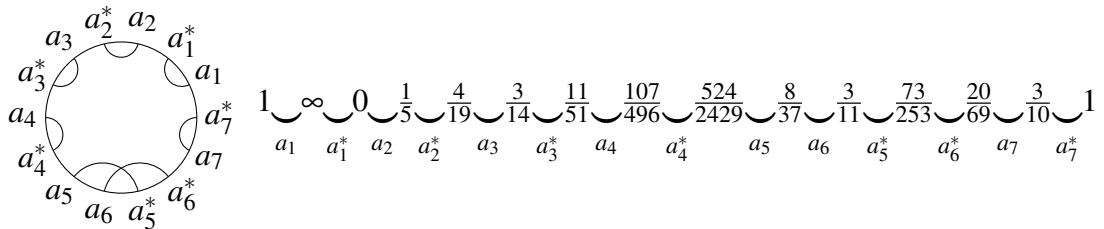


$$1 \underbrace{\infty}_{a_1} \underbrace{0}_{a_1^*} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3} \underbrace{\frac{8}{23}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{7}{20}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{4}{11}}_{a_4} \underbrace{1}_{a_5}$$

$$-N = 20$$

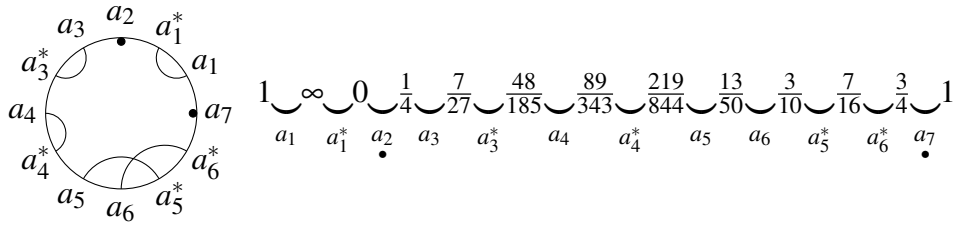
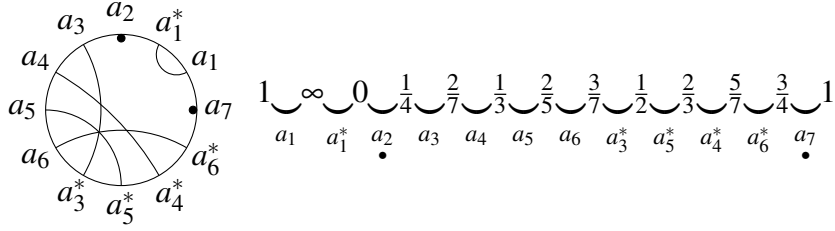


$$1 \underbrace{\infty}_{a_1} \underbrace{0}_{a_1^*} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_3} \underbrace{\frac{2}{7}}_{a_4} \underbrace{\frac{3}{10}}_{a_5} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_5^*} \underbrace{\frac{3}{8}}_{a_6} \underbrace{\frac{2}{5}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_7} \underbrace{\frac{3}{5}}_{a_7^*} \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{3}{4}}_{a_4^*} \underbrace{1}_{a_6^*}$$

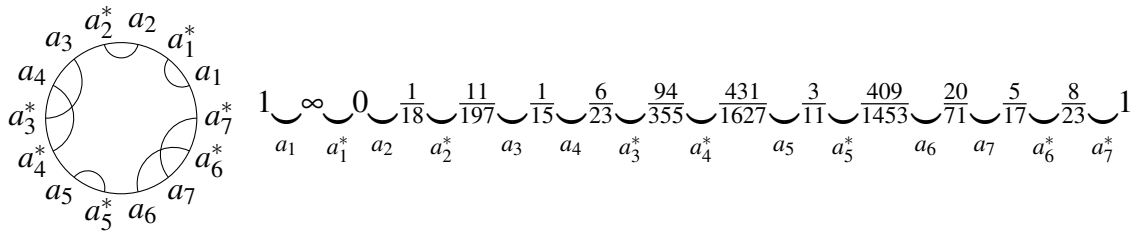
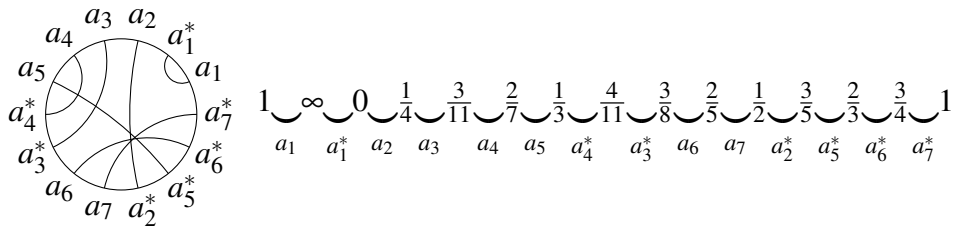


$$1 \underbrace{\infty}_{a_1} \underbrace{0}_{a_1^*} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_2} \underbrace{\frac{4}{19}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{3}{14}}_{a_3} \underbrace{\frac{11}{51}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{107}{496}}_{a_4} \underbrace{\frac{524}{2429}}_{a_4^*} \underbrace{\frac{8}{37}}_{a_5} \underbrace{\frac{3}{11}}_{a_6} \underbrace{\frac{73}{253}}_{a_5^*} \underbrace{\frac{20}{69}}_{a_6^*} \underbrace{\frac{3}{10}}_{a_7} \underbrace{1}_{a_7^*}$$

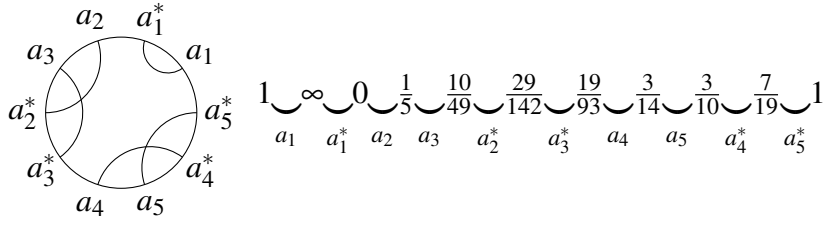
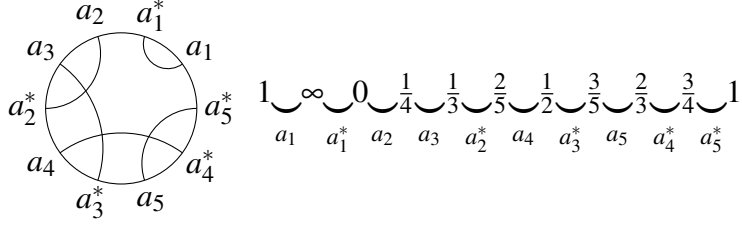
$$-N = 21$$



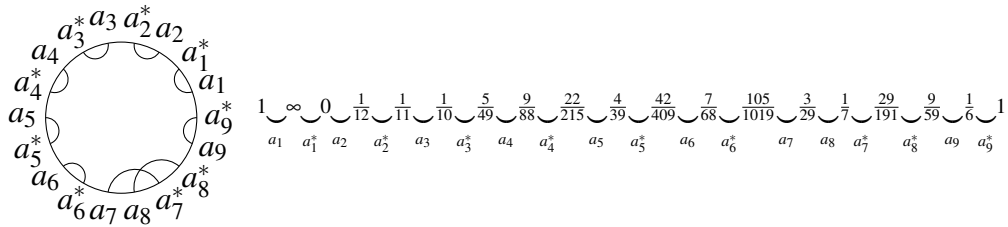
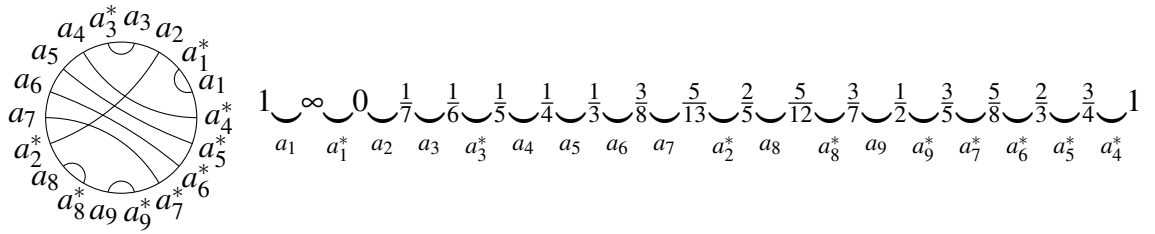
$$-N = 22$$



$$-N = 23$$

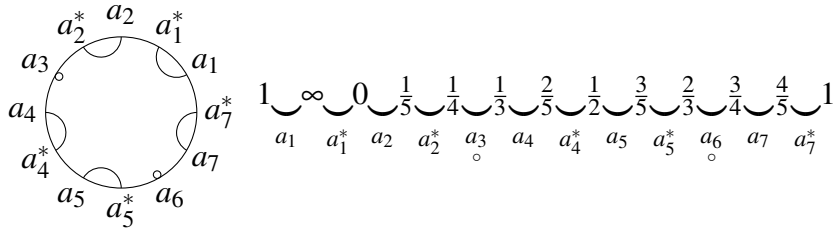
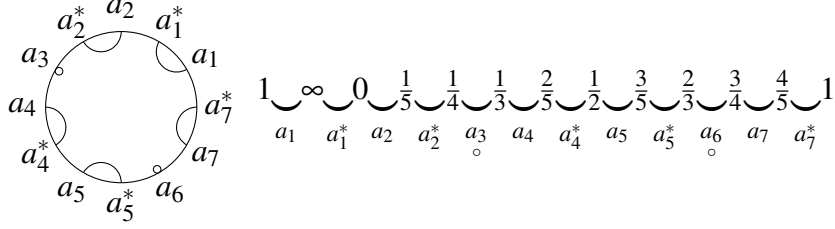


$$-N = 24$$

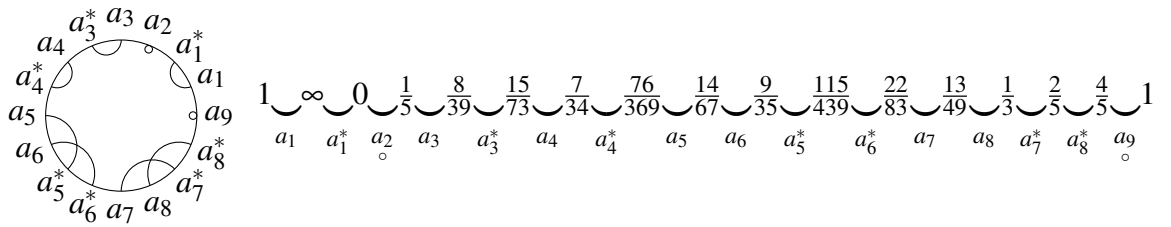
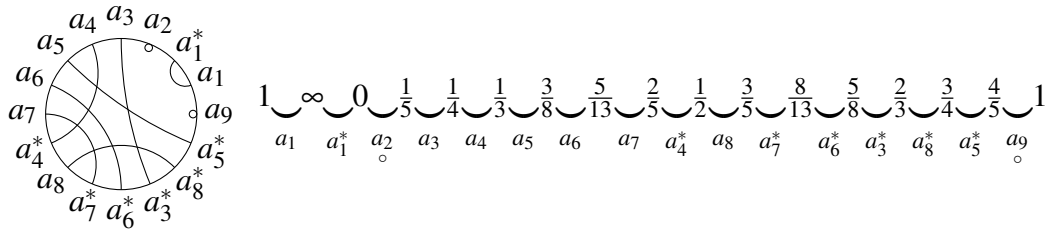




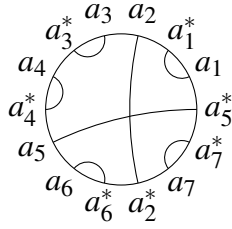
-N = 25



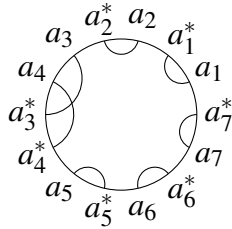
-N = 26



$$-N = 27$$

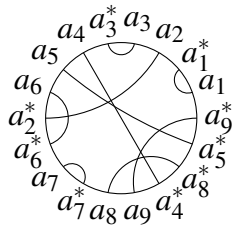


$$1 \underbrace{\infty}_0 \underbrace{0}_{a_1} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_1^*} \underbrace{\frac{2}{9}}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_3} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{2}{5}}_{a_4} \underbrace{\frac{3}{7}}_{a_4^*} \underbrace{\frac{4}{9}}_{a_5} \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_6} \underbrace{\frac{3}{5}}_{a_6^*} \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_7} \underbrace{\frac{3}{4}}_{a_7^*} 1$$

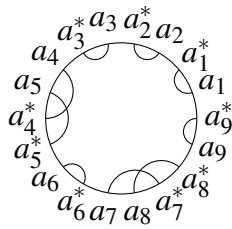


$$1 \underbrace{\infty}_0 \underbrace{0}_{a_1} \underbrace{\frac{1}{6}}_{a_1^*} \underbrace{\frac{3}{17}}_{a_2} \underbrace{\frac{2}{11}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_3} \underbrace{\frac{7}{34}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{48}{233}}_{a_4} \underbrace{\frac{13}{63}}_{a_4^*} \underbrace{\frac{17}{82}}_{a_5} \underbrace{\frac{5}{24}}_{a_5^*} \underbrace{\frac{13}{62}}_{a_6} \underbrace{\frac{2}{9}}_{a_6^*} 1$$

$$-N = 28$$

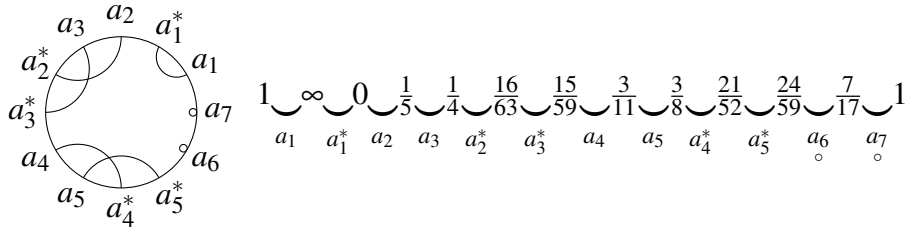
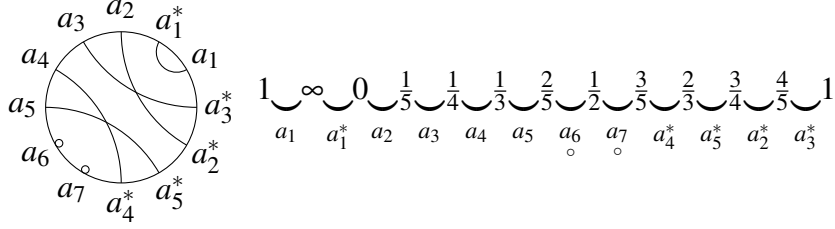


$$1 \underbrace{\infty}_0 \underbrace{0}_{a_1} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_1^*} \underbrace{\frac{3}{14}}_{a_2} \underbrace{\frac{2}{9}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_3} \underbrace{\frac{2}{7}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_4} \underbrace{\frac{2}{5}}_{a_4^*} \underbrace{\frac{3}{7}}_{a_5} \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_6} \underbrace{\frac{4}{7}}_{a_6^*} \underbrace{\frac{3}{5}}_{a_7} \underbrace{\frac{5}{8}}_{a_7^*} \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_8} \underbrace{\frac{5}{7}}_{a_8^*} \underbrace{\frac{3}{4}}_{a_9} \underbrace{\frac{3}{4}}_{a_9^*} 1$$

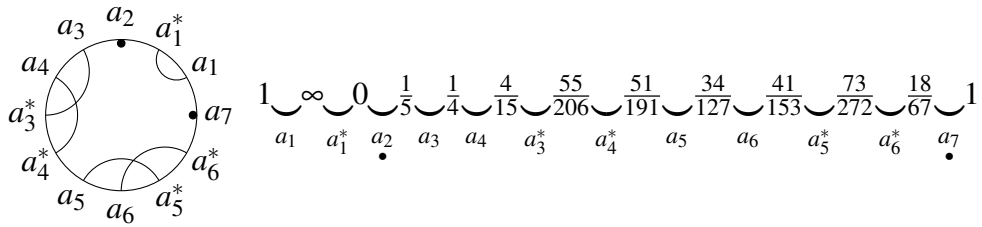
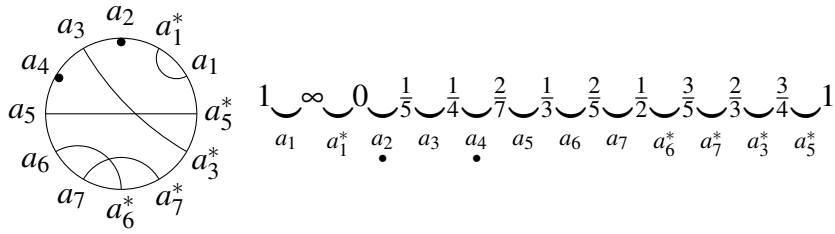


$$1 \underbrace{\infty}_0 \underbrace{0}_{a_1} \underbrace{\frac{1}{24}}_{a_1^*} \underbrace{\frac{7}{167}}_{a_2} \underbrace{\frac{5}{119}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{33}{785}}_{a_3} \underbrace{\frac{1}{19}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{5}{33}}_{a_4} \underbrace{\frac{151}{965}}_{a_4^*} \underbrace{\frac{193}{1233}}_{a_5} \underbrace{\frac{1}{6}}_{a_5^*} \underbrace{\frac{332}{1917}}_{a_6} \underbrace{\frac{3}{17}}_{a_6^*} \underbrace{\frac{8}{39}}_{a_7} \underbrace{\frac{149}{713}}_{a_7^*} \underbrace{\frac{32}{153}}_{a_8} \underbrace{\frac{3}{14}}_{a_8^*} 1$$

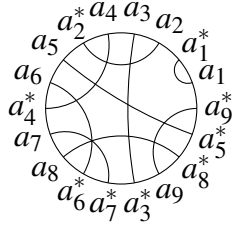
$$-N = 29$$



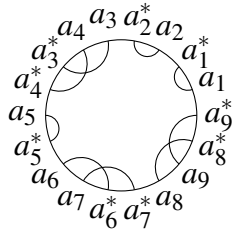
$$-N = 31$$



$$-N = 35$$

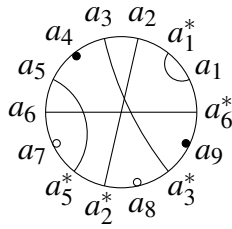


$$1 \underbrace{\infty}_0 \underbrace{0}_{a_1} \underbrace{\frac{1}{6}}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_3} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_4} \underbrace{\frac{3}{11}}_{a_5} \underbrace{\frac{2}{7}}_{a_6} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_7} \underbrace{\frac{2}{5}}_{a_8} \underbrace{\frac{3}{7}}_{a_9} \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_1^*} \underbrace{\frac{4}{7}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{3}{5}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{5}{8}}_{a_4^*} \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_5^*} \underbrace{\frac{5}{7}}_{a_6^*} \underbrace{\frac{3}{4}}_{a_7^*} \underbrace{1}_{a_8^*} \underbrace{1}_{a_9^*}$$

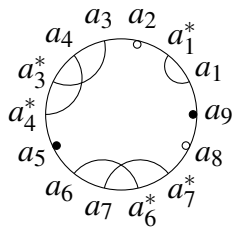


$$1 \underbrace{\infty}_0 \underbrace{0}_{a_1} \underbrace{\frac{1}{7}}_{a_2} \underbrace{\frac{5}{34}}_{a_3} \underbrace{\frac{9}{61}}_{a_4} \underbrace{\frac{4}{27}}_{a_5} \underbrace{\frac{67}{452}}_{a_6} \underbrace{\frac{197}{1329}}_{a_7} \underbrace{\frac{3}{20}}_{a_8} \underbrace{\frac{790}{5251}}_{a_9} \underbrace{\frac{229}{1521}}_{a_1^*} \underbrace{\frac{55}{356}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{214}{1369}}_{a_3^*} \underbrace{\frac{1085}{6931}}_{a_4^*} \underbrace{\frac{8}{51}}_{a_5^*} \underbrace{\frac{5}{27}}_{a_6^*} \underbrace{\frac{14}{53}}_{a_7^*} \underbrace{1}_{a_8^*} \underbrace{1}_{a_9^*}$$

$$-N = 37$$

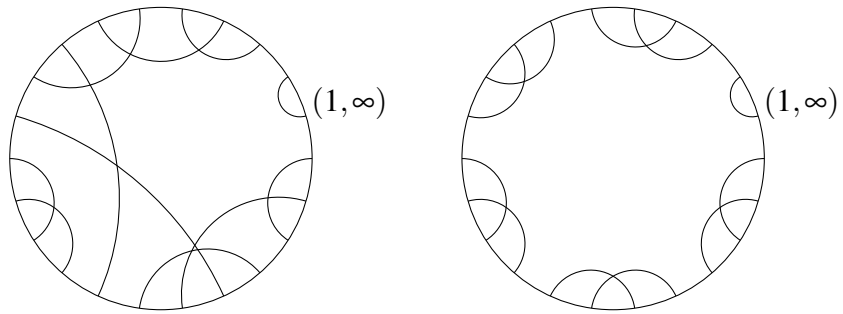


$$1 \underbrace{\infty}_0 \underbrace{0}_{a_1} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_2} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_3} \underbrace{\frac{1}{3}}_{a_4} \underbrace{\frac{3}{8}}_{a_5} \underbrace{\frac{2}{5}}_{a_6} \underbrace{\frac{3}{7}}_{a_7} \underbrace{\frac{1}{2}}_{a_8} \underbrace{\frac{4}{7}}_{a_9} \underbrace{\frac{3}{5}}_{a_1^*} \underbrace{\frac{2}{3}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{3}{4}}_{a_3^*} \underbrace{1}_{a_4^*} \underbrace{1}_{a_5^*}$$

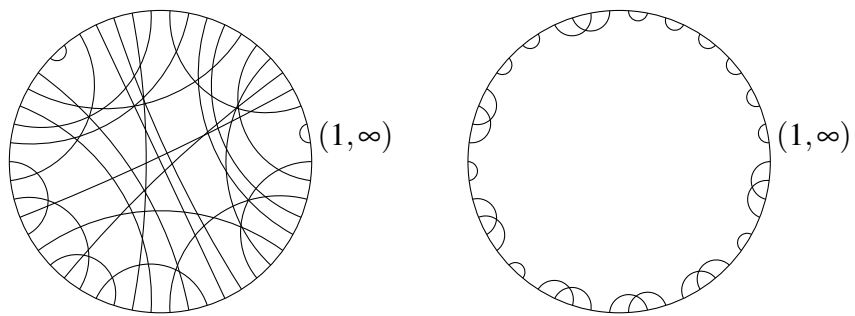


$$1 \underbrace{\infty}_0 \underbrace{0}_{a_1} \underbrace{\frac{1}{6}}_{a_2} \underbrace{\frac{2}{11}}_{a_3} \underbrace{\frac{1}{5}}_{a_4} \underbrace{\frac{1}{4}}_{a_5} \underbrace{\frac{11}{43}}_{a_6} \underbrace{\frac{21}{82}}_{a_7} \underbrace{\frac{10}{39}}_{a_8} \underbrace{\frac{6}{23}}_{a_9} \underbrace{\frac{5}{19}}_{a_1^*} \underbrace{\frac{51}{193}}_{a_2^*} \underbrace{\frac{7}{26}}_{a_3^*} \underbrace{1}_{a_4^*} \underbrace{1}_{a_5^*}$$

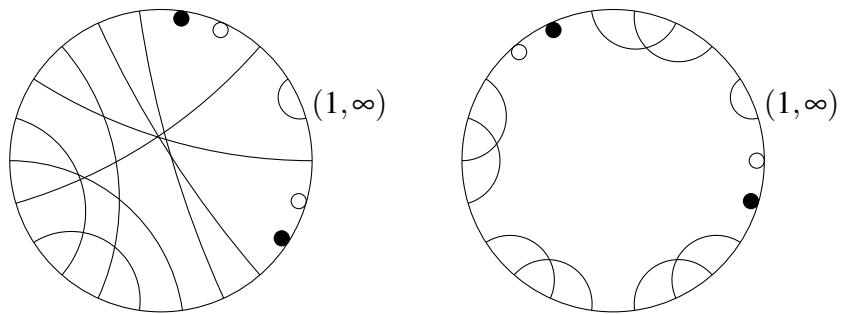
$-N = 59$



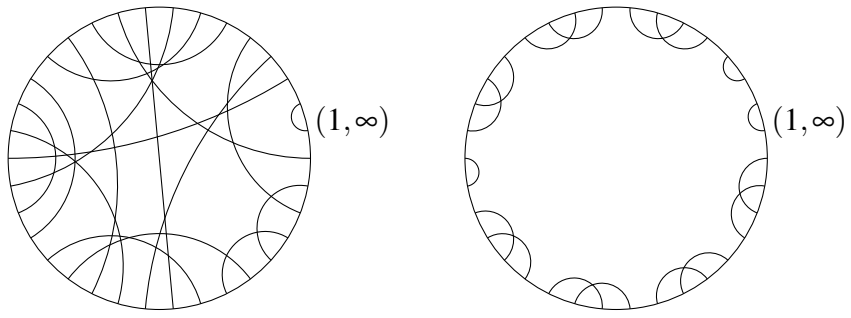
$-N = 60$



$-N = 61$

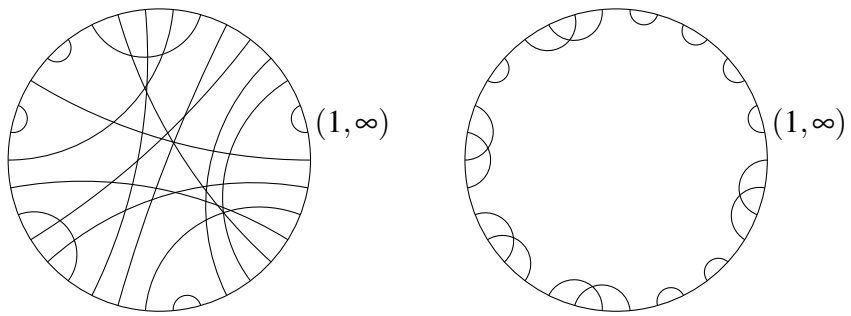


$-N = 62$



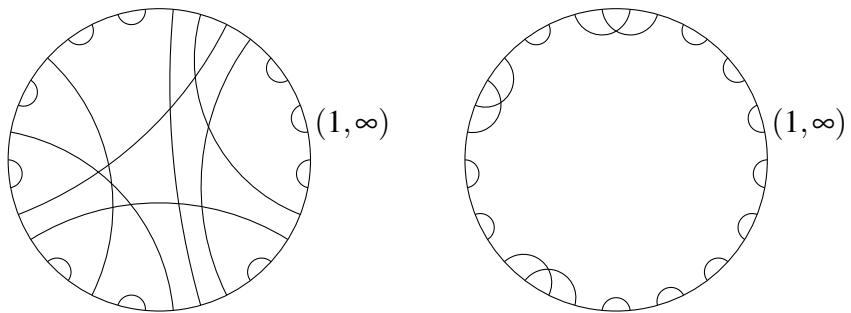

---

-  $N = 63$



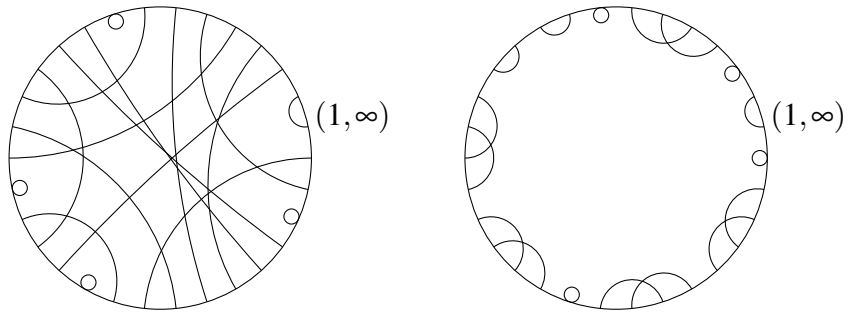

---

-  $N = 64$

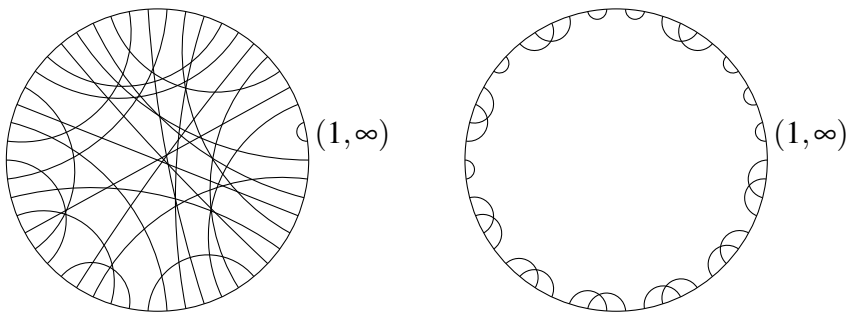



---

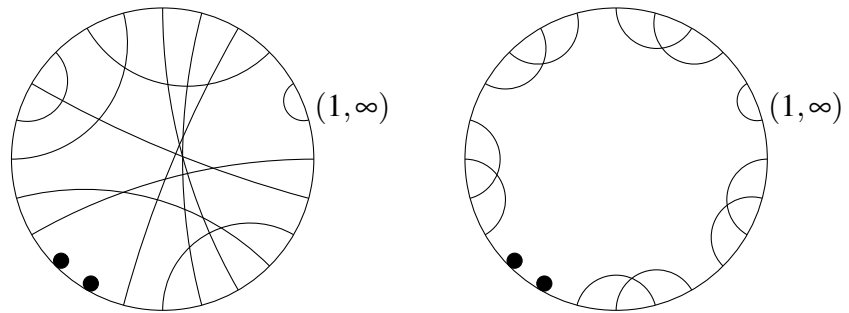
-  $N = 65$



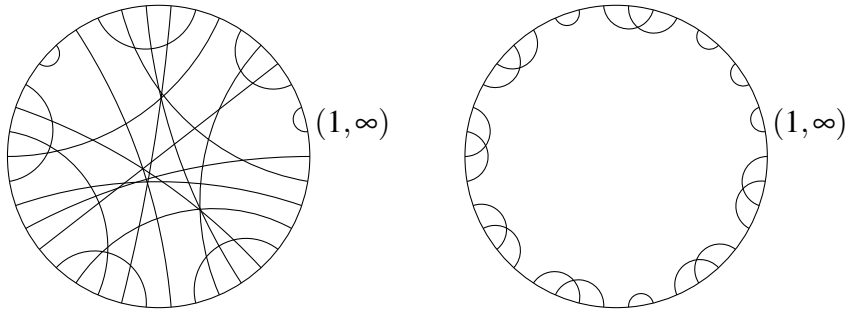
$- N = 66$



$- N = 67$

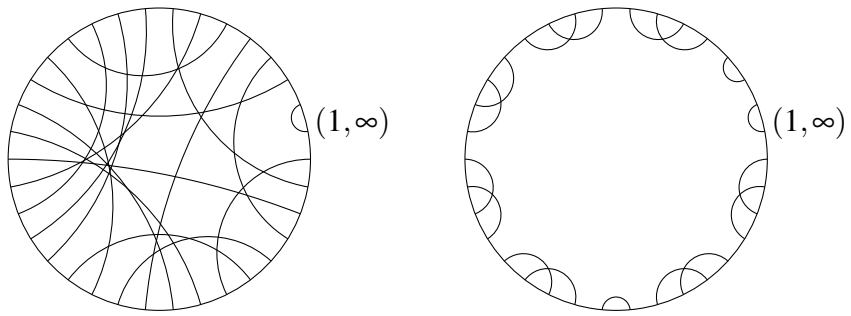


$- N = 68$



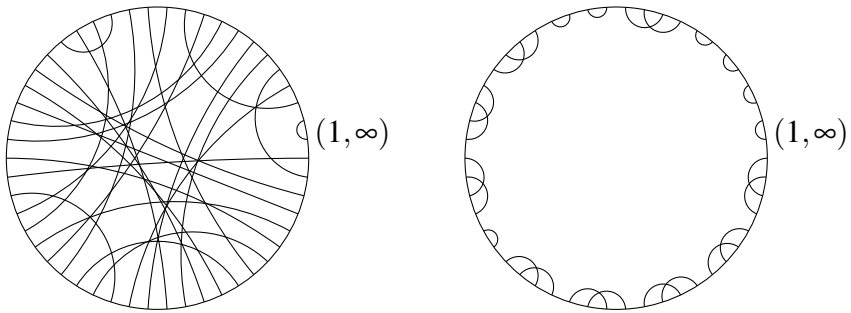

---

$- N = 69$




---

$- N = 70$




---

## Références

- [1] Jean-Benoit Bost, Introduction to Compact Riemann Surfaces, Jacobians, and Abelian Varieties in From number theory to physics (Les Houches, 1989), Springer, pp 64-211



- [2] Ravi S. Kulkarni, An Arithmetic-Geometric Method in the Study of the Subgroups of the Modular Group, *American Journal of Mathematics*, Vol. 113, No. 6. (Dec., 1991), pp. 1053-1133.
- [3] B. Maskit, On Poincaré's Theorem for Fundamental Polygons, *Advances in Math.*, 7 (1971). 219-230.
- [4] The PARI Group, PARI/GP version 2.10.0, Univ. Bordeaux, 2018, <http://pari.math.u-bordeaux.fr>
- [5] Henri Poincaré, Théorie des groupes fuchsien, *Acta Math.* Volume 1 (1882), 1-62.
- [6] Robert Pollack, Glenn Stevens, Overconvergent modular symbols and p-adic L-functions, *Annales scientifiques de l'ENS* 44, fascicule 1 (2011), 1-42
- [7] Carl L. Siegel, *Topics in Complex Function Theory*, vol I, *Elliptic Functions and Uniformization Theory*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 25, Vol. I, 1969.