



HAL
open science

Dans les pas de Joseph Fourier, quelques mots sur son oeuvre et son héritage en géométrie spectrale

Olivier Lablée

► **To cite this version:**

Olivier Lablée. Dans les pas de Joseph Fourier, quelques mots sur son oeuvre et son héritage en géométrie spectrale. 2018. hal-01827960

HAL Id: hal-01827960

<https://hal.science/hal-01827960v1>

Preprint submitted on 2 Jul 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DANS LES PAS DE JOSEPH FOURIER, QUELQUES MOTS SUR SON OEUVRE ET SON HÉRITAGE EN GÉOMÉTRIE SPECTRALE

OLIVIER LABLÉE

A l'occasion du 250^{ème} anniversaire de la naissance de Joseph Fourier (1768-1830), ces quelques notes ont pour vocation à mettre en lumière la portée des travaux de Fourier. Son oeuvre publiée en 1822 sous le titre : *Théorie analytique de la chaleur* [Fou] constitue à elle seule un incroyable legs scientifique, en particulier en mathématiques. Dans la première section du présent article, nous allons décrire une partie de l'oeuvre de Fourier et voir comment à partir d'un problème de physique particulier sont apparus plusieurs concepts mathématiques fondamentaux devenus aujourd'hui universels et d'une grande profondeur. On présentera ainsi la naissance des très célèbres séries de Fourier et on évoquera aussi la fameuse transformée de Fourier. La seconde partie de l'article dresse un rapide panorama sur les séries de Fourier et la transformée de Fourier telles que nous les connaissons et utilisons aujourd'hui, on insistera sur les places centrales qu'elles occupent au sein même des mathématiques actuelles. Enfin la dernière partie de cet article est une invitation à un domaine de recherche mathématique se situant dans la partie centrale du paysage des mathématiques actuelles. Plus précisément, à travers un exemple très simple, on proposera une application moderne et profonde de l'héritage de Fourier située à la croisée des chemins de la géométrie riemannienne, de la théorie spectrale, des systèmes dynamiques, de la physique mathématique, etc... Ce domaine c'est *la géométrie spectrale*. Cet article est aussi l'occasion de rendre hommage à deux mathématiciens, le premier c'est Jean-Pierre Kahane (1926-2017) spécialiste imminent de l'analyse de Fourier et le second mathématicien qui nous a quitté très récemment c'est le regretté Marcel Berger (1927-2016), spécialiste et contributeur hors norme en géométrie riemannienne.

Notation. Dans cet article on utilisera en permanence les notations suivantes : si X désigne un espace mesuré, l'espace de Lebesgue $L^p(X)$ pour un exposant $1 \leq p < \infty$ est défini par :

$$L^p(X) := \left\{ f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ mesurable}; \int_X |f(x)|^p dx < +\infty \right\}$$

avec la norme associée : $\|f\|_{L^p} := (\int_X |f(x)|^p dx)^{1/p}$ qui confère à $L^p(X)$ une structure d'espace de Banach. Un cas important est $p = 2$, on a alors une structure d'espace de Hilbert avec le produit scalaire : $\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_X f(x) \overline{g(x)} dx$; on a alors $\|f\|_{L^2} = \sqrt{\int_X |f(x)|^2 dx}$. Enfin, on utilisera aussi l'espace de Banach :

$$L^\infty(X) := \{ f : X \rightarrow \mathbb{C}; f \text{ mesurable}; f \text{ est bornée presque partout sur } X \}$$

avec la norme $\|f\|_{L^\infty} := \sup_{x \in X} |f(x)|$.

Cet article fait partie d'un projet spécial en l'honneur du 250^{ième} anniversaire de la naissance de Fourier, qui est publié au *Bulletin de l'Union des Professeurs de classes préparatoires Scientifiques* dans le numéro 262 (Printemps 2018).

1. L'OEUVRE DE FOURIER : LE TRAITÉ ANALYTIQUE DE LA CHALEUR

1.1. Le temps des premières équations aux dérivées partielles. Avant de s'intéresser au problème de la propagation de la chaleur et aux travaux de Fourier, il est important de replacer cette oeuvre dans un contexte plus général. Ce contexte est celui d'un problème antérieur à celui du problème de la chaleur, c'est *le problème des cordes vibrantes*. Le problème des cordes vibrantes, connu aujourd'hui au moyen de *l'équation des ondes*, a connu historiquement une véritable crise entre différents célèbres mathématiciens. Les personnages clés de cette histoire sont d'Alembert, qui est le premier à donner une équation de ce problème en 1747-1748, puis ensuite c'est le génial Euler qui proposa des conditions élargies pour les hypothèses données par d'Alembert. Quelques années plus tard, c'est D. Bernoulli qui proposa un point de vue différent, pour lui les cordes émettent avant tout un son, donc des harmoniques et par voie de fait des fonctions trigonométriques. Puis, intervient ensuite Lagrange qui unifie les travaux d'Alembert et d'Euler tout en s'opposant très farouchement aux idées de Bernoulli. Historiquement, il s'agit d'un moment très important : c'est le début de l'analyse des équations aux dérivées partielles et les prémices de l'analyse fonctionnelle.

1.2. Fourier : préfet, physicien et mathématicien. Laissons quelques instants les cordes vibrantes pour revenir à notre personnage principal Joseph Fourier. Donnons d'abord quelques éléments biographiques de notre héros. Joseph Fourier naquit en 1768 à Auxerre, après une scolarité en école militaire, son génie fut repéré par Monge, Fourier devint un des premiers professeurs à la toute nouvelle école Polytechnique. Il fit ensuite la campagne d'Égypte de Bonaparte, puis il fut par la suite nommé préfet de l'Isère en 1802. En particulier, c'est Fourier qui, à Grenoble rencontra, influença et encouragea d'une certaine manière le jeune Champollion aux études et lui donna aussi le goût à l'égyptologie. Dans son rôle de préfet Fourier eut un rôle capital pour le département de l'Isère : assainissement des marais de Bourgoin-Jallieu, ouverture du col du Lautaret qui est un véritable trait d'union entre les Alpes du nord et les Alpes de sud. Tout en étant préfet, il écrivit son oeuvre maîtresse : *Théorie analytique de la chaleur*. Le sujet de ce mémoire est la compréhension de l'évolution temporelle de la diffusion de la chaleur sur un objet physique solide. Ce mémoire fut soumis en 1807 à l'académie des sciences et dès 1811 il commence des correspondances avec Laplace et Lagrange concernant son mémoire. En 1817, il devient membre de l'académie des sciences, et il fallut attendre 1822 pour que Fourier devienne secrétaire perpétuel de l'académie et que son mémoire soit publié. Pour plus de détails on conseille la lecture du superbe ouvrage de J. Dhombres et J. B. Robert [**Dh-Ro**] : *Fourier, créateur de la physique mathématique*.

1.3. Le traité analytique de la chaleur. La traité de la chaleur est une oeuvre de 500 pages comportant 9 grands chapitres. On va essayer de décrire les passages les plus fondamentaux de cette oeuvre, en l'espèce on va évoquer uniquement les trois premiers chapitres. Le traité commence par une partie introductive nommée *Discours préliminaire*, cette partie de texte est philosophiquement intéressante, Fourier y expose sa vision des sciences et en particulier des mathématiques. Pour lui l'étude des phénomènes naturels est la principale source des découvertes mathématiques. Le chapitre I du mémoire est dédié à l'aspect physique, il y introduit les principaux éléments physiques nécessaires à cette étude. Dans le chapitre II,

Fourier introduit la fameuse équation de la chaleur qui décrit la dynamique de la chaleur sur un corps solide $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{K}{CD} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)$$

où K, CD sont des constantes physiques, et $u : (x, t) \mapsto u(x, t)$ est la fonction donnant la température du solide au point $x \in \Omega$ et à l'instant t . La précédente équation est aussi complétée par des conditions de bord et une condition initiale en temps. Fourier décrit notamment cette formule sur des exemples particuliers de corps solides : anneau, sphère, prisme, etc ... Dans le chapitre III, certainement la plus belle partie de son oeuvre, Fourier considère l'étude détaillée d'une "lame" homogène très mince de largeur finie et de longueur infinie. Plus précisément (à notations et échelle près par rapport au texte original) : on se donne une "lame" très mince de largeur finie égale à par exemple π et de longueur infinie sur laquelle on suppose que la température sur la largeur vaut une valeur constante, disons 1, et sur les bords verticaux la valeur 0. En notant par (x, y) , avec $0 \leq x \leq \pi$ et $0 \leq y < +\infty$, les coordonnées d'un point de la lame, Fourier établit que la température de la lame au point (x, y) est décrite par la fonction $u(x, y)$ qui vérifie l'équation stationnaire :

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

avec les conditions de bord précédentes, en l'espèce :

$$\begin{cases} u(x, 0) = 1 \text{ pour } 0 \leq x \leq \pi \\ u(0, y) = u(\pi, y) = 0 \text{ pour } 0 \leq y < +\infty. \end{cases}$$

La première étape de Fourier pour résoudre ce problème est d'utiliser la *méthode de séparation des variables* : il cherche alors une solution sous la forme $u(x, y) = f(x)g(y)$, il en suit facilement que $f''(x)g(y) + f(x)g''(y) = 0$; et donc $-f''(x)/f(x) = g''(y)/g(y)$. Les variables x et y étant indépendantes, il existe alors une constante λ telle que pour tout couple (x, y) on ait l'équation

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda$$

qui se réécrit comme le système d'équations différentielles linéaires homogènes suivant :

$$\begin{cases} f'' + \lambda f = 0 \\ g'' - \lambda g = 0. \end{cases}$$

Commençons par la première équation : il convient de distinguer trois cas suivant le signe de λ .

Cas où $\lambda = 0$: La fonction f est alors affine : $f(x) = ax + b$, avec a, b des constantes réelles. En utilisant les conditions de bords $f(0) = f(\pi) = 0$, il vient immédiatement que f est nulle.

Cas où $\lambda < 0$: On a alors que $f(x) = ae^{\sqrt{-\lambda}x} + be^{-\sqrt{-\lambda}x}$, avec là aussi a, b des constantes réelles. Encore une fois, les conditions de bords nous amène à conclure que f est nulle. Il nous reste à voir le dernier cas.

Cas où $\lambda > 0$: L'expression de la fonction f est ici trigonométrique et elle s'exprime sous la forme : $f(x) = a \cos(\sqrt{\lambda}x) + b \sin(\sqrt{\lambda}x)$, avec a, b des constantes

réelles. Les conditions de bords nous fournissent le système $a = 0$ et $b \sin(\sqrt{\lambda}\pi) = 0$; étant entendu que l'on cherche une solution f non-nulle, on choisira bien évidemment la constante $b \neq 0$. Le nombre λ doit alors vérifier la condition $\sqrt{\lambda} = k$ avec $k \geq 1$ (car on suppose que $\lambda > 0$); i.e. $\lambda = k^2, k \geq 1$. Cela signifie que pour tout entier $k \geq 1$, nous avons une famille de solutions pour la fonction f (associée à la variable physique x): $x \mapsto b_k \sin(kx)$ avec b_k une constante réelle.

L'autre équation du système, à savoir $g'' - \lambda g = 0$, se résout facilement aussi, avec donc $\lambda > 0$ (qui est le seul cas pertinent): $g(y) = Ae^{\sqrt{\lambda}y} + Be^{-\sqrt{\lambda}y}$; dans cette égalité Fourier impose que $A = 0$ pour ne pas avoir une solution physiquement irréaliste (température infinie), et $B = 1$ pour la condition de bord en $y = 0$. Il reste alors $g(y) = e^{-\sqrt{\lambda}y}$. Lors de la résolution de f est apparu une infinité de choix pour $\lambda : \lambda = k^2, k \geq 1$; on a donc aussi une famille de solutions g (associée à la variable physique y): $y \mapsto e^{-ky}$. Fourier, en utilisant le principe de superposition, écrit alors que la fonction

$$u(x, y) = e^{-y}b_1 \sin(x) + e^{-2y}b_2 \sin(2x) + \dots + e^{-ky}b_k \sin(kx) + \dots$$

est une solution générale de l'équation (1.1). Puis pour l'autre condition de bord : $u(x, 0) = 1$ pour $0 \leq x \leq \pi$, Fourier écrit alors la surprenante égalité :

$$(1.2) \quad 1 = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \dots + b_k \sin(kx) + \dots$$

cette égalité quelque peu mystérieuse est appelée une décomposition en *série trigonométrique*. Fourier, s'intéresse ensuite au calcul des valeurs des constantes b_1, b_2, \dots . Dans un premier temps, il dérive terme à terme un grand nombre de fois l'égalité, il fixe alors ensuite $x = 0$ dans les équations obtenues et obtient ainsi un système linéaire infini. Toujours dans ce chapitre III, précisément dans une section nommée *Développement d'une fonction arbitraire en séries trigonométriques*, Fourier donne une autre méthode plus directe du calcul de ces fameux coefficients. Cette méthode d'une grande beauté constitue en réalité les prémices de formules bien connues de nos jours en analyse hilbertienne. Fourier met notamment en lumière que :

$$\int_0^\pi \sin(kx) \sin(nx) dx = 0 \text{ si } n \neq k; \text{ et } \int_0^\pi \sin^2(nx) dx = \frac{\pi}{2}.$$

D'ailleurs, il est bon de signaler que la notation intégrale avec des bornes \int_a^b est écrite pour la première fois à cette occasion. Revenons au calcul des coefficients b_1, b_2, \dots , Fourier multiplie l'équation (1.2) par $\sin(x)$ et intègre entre 0 et π , il obtient d'abord que $\int_0^\pi \sin(x) dx = b_1 \frac{\pi}{2}$, puis par induction, en multipliant par $\sin(kx)$ et intégrant toujours entre 0 et π il vient $\int_0^\pi \sin(kx) dx = b_k \frac{\pi}{2}$. Résumons la situation : la solution générale de notre problème de lame mince est donnée par la fonction :

$$u(x, y) = e^{-y}b_1 \sin(x) + e^{-2y}b_2 \sin(2x) + \dots + e^{-ky}b_k \sin(kx) + \dots$$

où les conditions aux bord ont conduit à l'égalité :

$$1 = b_1 \sin(x) + b_2 \sin(2x) + \dots + b_k \sin(kx) + \dots$$

et les coefficients sont donnés par la formule intégrale remarquable suivante :

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(kx) dx \quad (k \geq 1).$$

Observons que si l'on modifie par exemple la longueur de lame, où même si on définit la variable x sur un intervalle symétrique, on obtient des séries trigonométriques avec par exemple uniquement des cosinus ou bien à la fois des sinus

et cosinus. D'ailleurs, Fourier affirme que si on remplace dans la condition de bord la valeur constante 1 par une fonction f quelconque définie sur un intervalle $[-T/2, T/2]$ on a alors :

$$(1.3) \quad f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \left(\frac{2\pi}{T} kx \right) + b_k \sin \left(\frac{2\pi}{T} kx \right) \right)$$

avec les expressions intégrales des coefficients :

$$(1.4) \quad \begin{cases} a_0 = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) dt, \\ a_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos \left(\frac{2\pi}{T} kt \right) dt, \quad k \geq 1 \\ b_k = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin \left(\frac{2\pi}{T} kt \right) dt, \quad k \geq 1. \end{cases}$$

Toujours dans cet incroyable chapitre III, Fourier s'intéresse par la suite à la question de l'asymptotique des coefficients

$$\int_0^{T/2} f(t) \cos \left(\frac{2\pi k}{T} t \right) dt$$

avec une période $T \rightarrow +\infty$, l'entier $k \rightarrow +\infty$ simultanément de sorte que le rapport $\frac{k}{T}$ soit constant. De manière heuristique, en considérant la "variable" $y := \frac{k}{T}$, le passage du cas discret au continu pour les coefficients prennent alors l'allure suivante : $\int_0^{+\infty} f(t) \cos(2\pi yt) dt$ où y n'est plus considéré ici comme un paramètre entier mais comme un nombre réel. Fourier écrit alors que l'expression de la série trigonométrique associée en version "continue" devient :

$$(1.5) \quad f(x) = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \cos(y(x-t)) f(t) dy dt.$$

Il ajoute d'ailleurs que pour tout indice p on a les expressions des dérivées :

$$f^{(2p)}(x) = (-1)^p \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^{2p} \cos(y(x-t)) f(t) dy dt;$$

et pour le cas impair :

$$f^{(2p+1)}(x) = (-1)^p \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{+\infty} y^{2p+1} \sin(y(x-t)) f(t) dy dt.$$

La formule (1.5) est juste extraordinaire, cette formule prouve bien encore une fois à quel point Fourier était un visionnaire. Cette égalité est en fait la formule d'inversion de la transformée de Fourier ! Transformée mathématique qui deviendra notamment la porte d'entrée entre deux paradigmes : le monde des variables "positions" et celui des variables "impulsions". Les travaux de Fourier furent accueillis avec une certaine réserve par ses contemporains, on lui reprocha un manque général de rigueur et on lui reprocha surtout d'avoir laissé deux affirmations sans preuves : la question de la convergence des séries trigonométriques et la question du sens à donner à l'écriture intégrale des coefficients. En particulier Lagrange manifesta une opposition assez manifeste envers Fourier. En réalité, Fourier est le seul et premier à comprendre vraiment les séries trigonométriques et les formules qu'il propose consistent de manière indubitable un programme de recherche qui deviendra et reste encore aujourd'hui une source d'inspiration et de questions pour les mathématiciens. Pour plus de détails sur l'aspect historique, voir le livre de J. Dhombres et J. B. Robert [Dh-Ro].

2. LES SÉRIES ET LA TRANSFORMÉE DE FOURIER : UN PANORAMA ACTUEL

2.1. Les notations modernes. Avant de continuer, donnons une notation actuelle et bien pratique des séries de Fourier : soit f une fonction définie sur $[-T/2, T/2]$, la *série de Fourier* associée à f est :

$$f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{ni\omega x}$$

où la *pulsation* est $\omega := \frac{2\pi}{T}$, et les coefficients complexes sont donnés par la formule

$$c_n := \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ni\omega t} dt.$$

Ici, la notation \sim signifie juste qu'il s'agit de la série de Fourier associée à f . La relation entre les coefficients complexes c_n et les coefficients réels "historiques" a_n, b_n est la suivante : $a_0 = c_0$, pour $n \geq 1$ on a $a_n = c_n + c_{-n}$ et $b_n = i(c_n - c_{-n})$.

2.2. Les difficiles questions de convergence. La délicate question de la convergence ponctuelle de la série trigonométrique est en grande partie résolue par P. G. Lejeune Dirichlet. En 1829, il franchit un pas décisif en donnant une démonstration rigoureuse de la convergence d'une série de Fourier, il prouve en particulier que si f est continue et monotone par morceaux sur $[-T/2, T/2]$, alors sa série de Fourier converge ponctuellement vers la fonction régularisée $f_{\text{reg}} : x \mapsto \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ sur ce segment, ce qui signifie que pour tout $x \in [-T/2, T/2]$

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left| f_{\text{reg}}(x) - \sum_{n=-N}^N c_n e_n(x) \right| = 0.$$

Si on enlève l'hypothèse de monotonie qu'avons nous ? Par exemple si f est une fonction continue et 2π -périodique, est-on sûr que sa série de Fourier associée converge de partout vers f sur \mathbb{R} ? De manière assez inattendue, la réponse est négative : en effet il peut y avoir une divergence de la série en certains points : c'est d'ailleurs du Bois-Reymond en 1873 qui donna le premier contre exemple corroborant ceci.

Concernant les fonctions $f \in L^1(\mathbb{T})$, \mathbb{T} étant un tore de dimension 1¹, le *lemme de Riemann-Lebesgue* assure déjà que les coefficients de Fourier tendent vers zéro pour $n \rightarrow +\infty$, ce qui est la condition nécessaire de base pour l'éventuelle convergence de la série, mais que dire de plus ? Contre toute attente, Kolmogoroff [Kol] en 1926 surprit toute la communauté mathématique en construisant une fonction $f \in L^1(\mathbb{T})$ dont la série de Fourier associée diverge en tout point de \mathbb{T} .

En 1966, Kahane et Katznelson [Ka-Ka] ont prouvé que la série de Fourier d'une fonction continue et périodique peut diverger sur tout ensemble donné de mesure de Lebesgue nulle. La même année, Carleson [Car] prouva un résultat fondamental : pour toute fonction $f \in L^2(\mathbb{T})$, \mathbb{T} étant un tore, la série de Fourier associée converge presque partout vers la fonction f . La convergence presque partout signifie que la mesure de Lebesgue des points où il n'y a pas convergence ponctuelle est de mesure nulle. Un an plus tard, Hunt [Hun] généralisa ce résultat pour des fonctions $f \in L^p(\mathbb{T})$ avec $p > 1$.

Il existe aussi un autre mode de convergence moins rigide que celui de la convergence presque partout, c'est la convergence en norme L^2 (dite aussi convergence

1. Les fonctions définies sur un tel tore sont donc périodiques de période la longueur de tore.

quadratique) : la série de Fourier converge au sens L^2 si :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{k=-N}^N \langle f, e_k \rangle_{L^2} e_k \right\|_{L^2}^2 = 0;$$

on abordera en détails ce mode de convergence en section 2.5

2.3. L'existence des coefficients intégraux. Pour utiliser les formules de Fourier, il faut évidemment comprendre le sens à donner aux formules intégrales des coefficients. C'est Riemann qui fut le premier à comprendre la réelle portée des travaux de Fourier, d'ailleurs dès 1854, Riemann s'intéressa lui aussi à l'étude des séries trigonométriques et c'est à cette occasion qu'il introduisit sa fameuse intégrale. Cette influence majeure se retrouve aussi dans la théorie de l'intégration de Lebesgue (datant de 1907), en effet une des premières applications de Lebesgue concerne encore une fois les séries trigonométriques. De manière générale, les travaux sur les séries trigonométriques ont jouées un rôle majeur dans le développement des mathématiques. Par exemple pour la notion de convergence uniforme avec les travaux de E. Heine ; on peut aussi citer la théorie des ensembles de G. Cantor de 1930, et bien évidemment, l'incorruptible théorie des distributions de L. Schwartz de 1950.

2.4. Des séries à la transformée de Fourier. Reprenons maintenant avec des notations modernes l'heuristique de Fourier pour faire apparaître la formulation continue des séries trigonométriques. Considérons une fonction f définie sur $[-T/2, T/2]$, sa série de Fourier est $f(x) \sim \sum_{n \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_n e^{\frac{2\pi i n x}{T}} \Delta T$, avec $\Delta T := \frac{1}{T}$, et où les coefficients complexes associés sont : $c_n = \frac{1}{T} \tilde{c}_n$ où $\tilde{c}_n := \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-ni\omega t} dt$. En définissant le nombre $\omega_n := \frac{2\pi}{T} n$ et en considérant formellement la variable " $\xi := \frac{n}{T}$ " (rappelons que l'on s'intéresse à la limite $T \rightarrow +\infty$ et $n \rightarrow +\infty$), le coefficient \tilde{c}_n "devient" dans la nouvelle variable continue ξ :

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi\xi t} dt,$$

quant à l'expression de la série de Fourier elle devient ($\Delta T \rightarrow 0$) l'écriture intégrale suivante :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi) e^{2i\pi x \xi} d\xi.$$

Les aficionados de l'analyse harmonique auront reconnu la transformée de Fourier et la formule d'inversion, en effet la dernière égalité se réécrit $f(x) = \hat{\hat{f}}(-x)$. Cette égalité signifie qu'en appliquant deux fois la transformée de Fourier sur une fonction, on récupère, à une symétrie près, la fonction de départ ; en d'autres termes, si on connaît la transformée de Fourier d'une certaine fonction f , on peut déterminer complètement la fonction f de départ. Fourier utilisa cette transformation en vue de résoudre l'équation de la chaleur sur un ensemble non borné. D'ailleurs Poisson en 1815 construisit sur cette base *la solution fondamentale de la chaleur*.

2.5. Approche hilbertienne et convergence quadratique. On va présenter un point de vue plus algébrique sur les séries de Fourier, c'est le point de vue hilbertien. Le début de cette approche est due à Parseval qui démontra que dans le cas d'une

fonction de carré sommable sur $[-\pi, \pi]$, on a

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt$$

où encore une fois $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-nit} dt$. Cette égalité de Parseval est une merveille et servira véritablement de pilier dans la théorie des *espaces de Hilbert*. Pour la comprendre mieux, utilisons à nouveau des notations et des concepts modernes : si on note par \mathbb{T} le tore unidimensionnel de longueur 2π , on lui associe l'*espace de Lebesgue* usuel $L^2(\mathbb{T})$, que l'on peut munir du *produit scalaire* :

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx;$$

la *norme* associée est : $\|f\|_{L^2}^2 = \langle f, f \rangle_{L^2}$. Ce produit scalaire confère à $L^2(\mathbb{T})$ une structure d'espace complet : c'est un *espace de Hilbert*. Introduisons aussi la famille de fonctions $(x \mapsto e_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx})_{n \in \mathbb{Z}}$. Le coefficient de Fourier c_n d'une fonction f s'écrit alors $c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \langle f, e_n \rangle_{L^2}$; et la série de Fourier devient quant à elle

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{inx} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle_{L^2} e_n(x).$$

La formule de Parseval assure la convergence des séries de Fourier au sens L^2 : on a

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, e_n \rangle_{L^2} e_n$$

ce qui signifie que

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \left\| f - \sum_{k=-N}^N \langle f, e_k \rangle_{L^2} e_k \right\|_{L^2}^2 = 0.$$

La seconde conséquence fondamentale de la formule est qu'elle établit le fait que l'espace $L^2(\mathbb{T})$ est isométrique à l'espace de Hilbert²

$$\ell^2(\mathbb{Z}) := \left\{ (a_n)_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}}; \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 < +\infty \right\}$$

où le produit scalaire associé est : $\langle u_n, v_n \rangle_{\ell^2} := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} u_n \overline{v_n}$. En effet l'application suivante

$$\begin{cases} L^2(\mathbb{T}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}) \\ f \longmapsto (\langle f, e_n \rangle_{L^2})_n \end{cases}$$

est une *transformation unitaire* (i.e. une isométrie linéaire surjective). De facto, la famille de fonctions $(e_n)_n$ est une base hilbertienne de l'espace de Lebesgue $L^2(\mathbb{T})$. En 1912, Plancherel établit la version continue de la formule de Bessel, il montre que pour une fonction f bornée, intégrable et à support compact :

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 dx.$$

Cette égalité a elle aussi un sens très remarquable et une profondeur importante.

2. Cet espace introduit en 1904 par David Hilbert lui même, est fondamental en analyse Hilbertienne.

2.6. La puissante transformée de Fourier. La transformée de Fourier est d'une telle utilité, efficacité et beauté qu'on va présenter ici, dans un langage actuel, les points les plus étonnants et caractéristiques de cette transformation. L'espace idéal de la transformée de Fourier est l'espace de Schwartz³ :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \left\{ f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}); \forall (k, \ell) \in \mathbb{N}^2, x \mapsto x^k f^{(\ell)}(x) \in L^\infty(\mathbb{R}) \right\}$$

cet espace possède une structure d'algèbre unitaire commutative stable par dérivation et par multiplication par des fonctions polynomiales. D'un point de vue topologique $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R})$ (d'ailleurs dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$, $p \geq 1$). En outre cet espace est stable par transformée de Fourier. La transformée de Fourier peut être alors considérée comme l'application linéaire suivante :

$$\mathcal{F} : \begin{cases} \mathcal{S}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}) \\ f \longmapsto \widehat{f}, \end{cases}$$

où pour tout $x \in \mathbb{R}$, on utilisera la convention suivante :

$$\widehat{f}(x) := \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-2i\pi x t} dt.$$

Avec le simple changement de variable ($t \rightsquigarrow -t$) on observe simplement que pour toute fonction f de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$(2.1) \quad \overline{\widehat{f}(x)} = \int_{\mathbb{R}} \overline{f(t)} e^{2i\pi x t} dt = \widehat{\overline{f}}(-x).$$

Les propriétés de dérivabilité de la transformée de Fourier sont remarquables, en effet si f désigne une fonction $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et k, ℓ deux entiers, on dispose d'une part de :

$$(2.2) \quad \widehat{f^{(\ell)}}(x) = (-2\pi i)^\ell \widehat{t^\ell f}(x);$$

et d'autre part on a aussi

$$(2.3) \quad \widehat{f^{(k)}}(x) = (2i\pi x)^k \widehat{f}(x).$$

En d'autres termes, on a un lien précis entre l'action de dériver une fonction et l'action de la multiplier par un monôme. C'est d'ailleurs grâce à ces deux formules qu'on vérifie que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est stable par la transformée de Fourier. Ces deux formules s'obtiennent facilement avec la formule d'intégration par parties et en utilisant le théorème de dérivation sous le signe intégral de Lebesgue. Continuons la présentation des propriétés phares de la transformée de Fourier, par l'utilisation du théorème de Fubini-Lebesgue on montre que pour deux fonctions f, g dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a la relation⁴ :

$$(2.4) \quad \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) g(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x) \widehat{g}(x) dx.$$

3. Espaces nommés ainsi par Alexander Grothendieck en l'honneur de Laurent Schwartz.

4. Attention cette égalité ne signifie pas que la transformée de Fourier est un opérateur symétrique, en effet :

$$\langle \widehat{f}, g \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x) \overline{g(x)} dx \neq \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\widehat{g}(x)} dx = \langle f, \widehat{g} \rangle_{L^2}.$$

Présentons maintenant un exemple très classique et utile de calcul de transformée de Fourier : le cas des *fonctions gaussiennes*. Soit $a > 0$ un nombre réel fixé, et considérons la fonction gaussienne $\psi_a(t) := e^{-a\pi t^2}$ appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et vérifie l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $\psi_a'(t) + 2a\pi t\psi_a(t) = 0$; ensuite, en appliquant la transformée de Fourier sur cette égalité et en utilisant les propriétés de dérivations mentionnées auparavant, on obtient une nouvelle équation différentielle qu'on intègre facilement, et on conclut alors sans trop d'efforts que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$(2.5) \quad \widehat{e^{-a\pi t^2}}(x) = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-\frac{\pi x^2}{a}}.$$

Il est notable que la transformée de Fourier d'une gaussienne est encore une gaussienne. Enfin, on dispose aussi du fait que la transformée de Fourier \mathcal{F} est une bijection de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dans lui-même et la bijection réciproque est donnée par :

$$(\mathcal{F}^{-1}f)(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{2i\pi x t} dx;$$

en d'autres termes l'égalité $f(x) = \hat{f}(-x)$ est vraie pour tout x réel. La formule de Plancherel stipule que pour tout couple de fonctions f, g in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ on a l'égalité $\langle f, g \rangle_{L^2} = \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2}$; en particulier nous avons :

$$(2.6) \quad \int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(x)|^2 dx.$$

Avant de conclure, il est important de rappeler aussi que la transformée de Fourier possède un lien fort avec *le produit de convolution*. Le produit de convolution d'une fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ par une autre fonction $g \in L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$ est défini par

$$(2.7) \quad (f \star g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y) dy.$$

Ce produit existe bien, en effet en utilisant le théorème de Fubini ainsi que l'inégalité de Hölder on montre que pour tout $x \in \mathbb{R}$ presque partout, la fonction $y \mapsto f(x-y)g(y)$ appartient à l'espace $L^1_y(\mathbb{R})$; on prouve aussi que la fonction $f \star g$ appartient à l'espace $L^p_x(\mathbb{R})$ et on a la majoration : $\|f \star g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}$. Avec un changement de variable on constate que le produit de convolution \star est commutatif (quand celà à un sens). Une utilisation importante du produit de convolution est de prouver que l'espace des fonctions \mathcal{C}^∞ à supports compacts $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ est dense dans tous les espaces $L^p(\mathbb{R})$ avec $1 \leq p \leq \infty$. Pour les détails sur le produit \star et les résultats de densité, voir par exemple [Bré]. Le lien intime entre le produit de convolution et la transformée de Fourier réside dans l'égalité suivante : si $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ alors

$$(2.8) \quad \mathcal{F}(f \star g) = (\mathcal{F}f)(\mathcal{F}g);$$

de plus, si les fonctions $\mathcal{F}f, \mathcal{F}g$ et $f \star g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$, on a aussi :

$$(2.9) \quad \mathcal{F}f \star \mathcal{F}g = \mathcal{F}(f \star g).$$

En conclusion, il est alors manifeste que la transformée de Fourier réalise une transformation unitaire de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ (pour la norme $L^2(\mathbb{R})$). Pour finir, abordons rapidement comment prolonger notre transformée de l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ à l'espace $L^2(\mathbb{R})$.

Attendu que la transformée de Fourier \mathcal{F} est un opérateur borné $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, et que $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$, il existe un unique opérateur borné $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ tel que la restriction de \mathcal{F} à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ coïncide avec la transformée de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. D'ailleurs, ce prolongement conserve ses propriétés cardinales : \mathcal{F} réalise aussi une transformation unitaire de $L^2(\mathbb{R})$.

2.7. Une belle égalité : la formule sommatoire de Poisson. La formule sommatoire de Poisson est l'ancêtre des *formules de traces*, cette égalité est une merveille de synthèse à elle seule. Considérons une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ fixée et introduisons la fonction $F(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k)$. Attendu que f est une fonction de l'espace de Schwartz, il est manifeste que la série F est absolument convergente et vérifie une condition de 1-périodicité. La théorie des séries de Fourier nous assure la décomposition :

$$F(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{2i\pi n x}$$

avec $c_n = \int_0^1 F(t) e^{-2i\pi n t} dt$. En conséquence nous obtenons :

$$\begin{aligned} c_n &= \int_0^1 \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(t+k) \right) e^{-2i\pi n t} dt = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\int_0^1 f(t+k) e^{-2i\pi n t} dt \right) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} f(u) e^{-2i\pi n u} du = \widehat{f}(n) \end{aligned}$$

On déduit alors la formule $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x+k) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n) e^{2i\pi n x}$; et dans le cas particulier où $x = 0$, on a la formule synthétique : dite *formule sommatoire de Poisson* :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(k) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\ell).$$

Quelques références bibliographiques. La référence majeure sur les séries de Fourier est l'ouvrage de A. Zygmund [Zyg]. Parmi les autres références classiques on a par exemple : [Eval], [Li-Lo], [St-We], [Rud], [Tay]. Le livre de J. P. Kahane et P. G. Lemarié-Rieusset [Ka-Le] propose aussi un excellent panorama sur les séries de Fourier et les ondelettes.

3. UNE APPLICATION GÉOMÉTRIQUE : LA FORMULE DE TRACE SUR UN TORE PLAT

L'objectif de cette dernière partie est de présenter une application moderne de l'héritage de Fourier qui s'insère dans une discipline se trouvant à la frontière entre la géométrie riemannienne et la théorie spectrale, qu'on appelle : la *géométrie spectrale*. Pour comprendre en profondeur la géométrie spectrale il est bien évidemment nécessaire d'être parfaitement à l'aise avec tous les concepts de géométrie riemannienne, en conséquence pour que le présent propos puisse être aisément présenté, on va travailler uniquement sur un cas concret possédant une géométrie très simple : c'est l'exemple du tore plat de dimension deux. Avant de commencer à travailler sur cet exemple, il est tout de même important de présenter une vision globale et motivante des questions qu'on souhaite aborder à travers le prisme de cet exemple particulier.

3.1. **Quelques généralités sur le spectre du laplacien.** Le *laplacien* (euclidien) fut introduit la première fois par P.-S. Laplace (1749-1827) en mécanique céleste (la notation Δ fut d'ailleurs introduite par G. Lamé). Dans l'espace euclidien tridimensionnel ambiant, le laplacien est l'opérateur différentiel :

$$\Delta : \begin{cases} \mathcal{C}^2(U) \longrightarrow \mathcal{C}^0(U) \\ f \longmapsto \Delta f := \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}, \end{cases}$$

où U désigne par exemple un ouvert de \mathbb{R}^3 . Cet opérateur est fondamental et incontournable en physique, en particulier dans les nombreux processus de diffusion, par exemple :

- En mécanique des fluides : les *équations de Navier-Stokes* ;
- en théorie du potentiel et en gravité (avec des potentiels Newtoniens) : *équations de Laplace* ;
- en propagation de la chaleur : *l'équation de la chaleur* ;
- en physique ondulatoire : *l'équation des ondes* ;
- en physique quantique : *l'équation de Schrödinger* ;

Le laplacien apparaît aussi en :

- en imagerie ;
- en finance : les *équations de Black-Scholes*
- etc ...

Et bien sûr cet opérateur est central au sein même des mathématiques, il est utile :

- en analyse des EDP ;
- dans les systèmes dynamiques intégrables classiques et quantiques ;
- pour le chaos quantique ;
- en géométrie et topologie des variétés ;
- en probabilité : *le mouvement brownien* ;
- pour les flots géométriques, comme par exemple le fameux *flot de Ricci*. C'est au début des années 80 que R. Hamilton a introduit ce fameux flot, qui est en réalité une équation d'évolution géométrique non linéaire cousine de l'équation de la chaleur. Le point culminant de l'utilisation de ce flot date de 2002-2003, où G. Perelman prouva d'une manière incroyable et étourdissante la très célèbre *conjecture de Poincaré* et également la plus générale *conjecture de géométrisation* de W. Thurston.
- Etc ...

Revenons à l'étude du laplacien, un excellent angle d'attaque est le point de vue spectral. Motivons cette affirmation avec notre exemple favori issu de la physique : le problème de la chaleur. Pour un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, la propagation de la chaleur vérifie l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - \Delta u(x, t) = 0$$

avec éventuellement une condition de bord et une condition initiale. Le principe de résolution à *la Fourier* est le même que celui du problème statique pour la lame mince : on cherche une solution sous la forme $u(x, t) = f(x)\varphi(t)$ et il vient alors immédiatement la question suivante : chercher les couples (λ, f) , λ étant un scalaire et f une fonction non nulle vérifiant :

$$-\Delta f = \lambda f;$$

avec aussi une condition de bord pour les fonctions f (dans le cas où on a un bord bien sur). Dans un langage plus précis, on s'intéresse au *spectre de l'opérateur* $-\Delta$. Précisons les définitions : on dira qu'un scalaire λ est une *valeur propre* de $-\Delta$ s'il

existe au moins une fonction non nulle f définie sur Ω (avec éventuellement une condition de bord) telle que $-\Delta f = \lambda f$; dans ce cas on dira que f est une *fonction propre* associée à λ , et l'ensemble $\ker(\lambda I_d + \Delta)$ est le *sous-espace propre* associé. La *multiplicité* de λ est la dimension de l'espace $\ker(\lambda I_d + \Delta)$. Pour finir le *spectre* de $-\Delta$ est défini comme étant l'ensemble des valeurs propres de $-\Delta$. Dans le cas du laplacien sur un domaine borné Ω (qu'on supposera sans bord⁵ pour simplifier) on dispose du théorème spectral suivant : le spectre de l'opérateur $-\Delta$ est uniquement constitué d'une suite de valeurs propres réelles isolées :

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \dots$$

telle que $\lambda_k \rightarrow +\infty$ pour $k \rightarrow +\infty$. De plus, chaque valeur propre possède une multiplicité finie. Dans la notation présentée ici les valeurs propres sont comptées avec leurs multiplicités, d'ailleurs $0 = \lambda_0 < \lambda_1$ signifie que la première valeur propre est nulle et simple. Ce théorème spectral demeure vrai si Ω possède un bord (on a plus forcément que $\lambda_0 = 0$). Il est manifeste que le spectre dépend donc du domaine Ω , en particulier de ses propriétés géométriques et topologiques. Il y a par conséquent un lien profond entre la suite de valeurs propres $(\lambda_k)_k$ et la géométrie du domaine Ω . Il n'y a pas de méthodes générales pour calculer un spectre d'opérateur linéaire; même dans le cas du laplacien sur un domaine simple le calcul est souvent difficile, et finalement on dispose de peu d'exemples où l'on peut expliciter complètement le spectre. Voici tout de même un exemple intéressant et in fine très profond : celui du *tore plat* (en dimension deux).

3.2. Le tore plat. Avant toute chose une question liminaire s'impose, à savoir comment construire le tore plat en dimension deux? Soient $a, b > 0$ deux nombres réels fixés et considérons le réseau⁶ $\Gamma := a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$. Dire qu'un vecteur x du plan appartient à Γ signifie qu'il existe un couple de nombres entiers n, m tels que $x = (na, mb)$. Le tore plat associé à ce réseau est alors simplement défini comme l'espace quotient : $\mathbb{T} := \mathbb{R}^2/\Gamma$, la relation d'équivalence sous-jacente est la suivante : $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \Gamma$. Cet espace quotient est naturellement muni d'une topologie métrique : $d_{\mathbb{T}}(\bar{x}, \bar{y}) := \min_{x, y} d(x, y)$ où x est un représentant de \bar{x} et y un de \bar{y} . Cet espace est compact. Pour une image plus concrète du tore plat \mathbb{T} , on peut le voir comme le rectangle $[0, a] \times [0, b]$ avec un recollement des bords verticaux entre-eux et un recollement des bords horizontaux entre-eux : une sorte de domaine à la "Pac-Man". Une fonction sur \mathbb{T} c'est donc une fonction sur \mathbb{R}^2 qui est a -périodique en la première variable et b -périodique en la seconde. Si on munit \mathbb{T} de la structure riemannienne héritée de celle de \mathbb{R}^2 sa courbure sectionnelle est alors nulle, c'est la raison du terme *tore plat*.

3.3. Séries de Fourier sur le réseau Γ . La théorie des séries de Fourier se généralise assez naturellement aux cas des fonctions de plusieurs variables. En particulier dans le cas du réseau $\Gamma = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ évoqué précédemment, pour toute fonction $u \in L^2(\mathbb{T})$, on a la décomposition, au sens L^2 :

$$u = \sum_{\gamma \in \Gamma^*} c_{\gamma} e_{\gamma}$$

où $\Gamma^* := \{x \in \mathbb{R}^2; \forall \gamma \in \Gamma, \langle x, \gamma \rangle \in \mathbb{Z}\}$ désigne le réseau dual de Γ ; avec ici $c_{\gamma} := \int_{\mathbb{T}} u(t) e^{-2i\pi\gamma \cdot t} dt$, et où $e_{\gamma}(t) := e^{2i\pi\gamma \cdot t}$; ici $\gamma \cdot t$ désigne le produit scalaire euclidien entre les vecteurs γ et t . Dans notre cas, comme (a, b) est une \mathbb{Z} -base de Γ , le réseau

5. Comme par exemple une sphère, un tore.

6. Un réseau est un sous-groupe discret de $(\mathbb{R}^2, +)$

dual Γ^* est directement donné par $\Gamma^* = \frac{1}{a}\mathbb{Z} \oplus \frac{1}{b}\mathbb{Z}$. Il en suit alors que $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$ est une \mathbb{Z} -base de Γ^* , ainsi la famille

$$\left(e_{n,m} : (x,y) \mapsto e^{\frac{2i\pi nx}{a} + \frac{2i\pi my}{b}}\right)_{n,m \in \mathbb{Z}}$$

est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$: toute fonction $u \in L^2(\mathbb{T})$ se décompose alors de la manière suivante

$$u = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} e_{n,m}.$$

3.4. Le spectre du tore. Intéressons nous dès lors au spectre de ce tore \mathbb{T} . Soit λ une valeur propre du laplacien sur \mathbb{T} , par définition il existe alors une fonction $u \in L^2(\mathbb{T})$, $u \neq 0$ telle que $-\Delta u - \lambda u = 0$. Par la théorie L^2 des séries de Fourier le système de fonctions $\left(e_{n,m} : (x,y) \mapsto e^{\frac{2i\pi nx}{a} + \frac{2i\pi my}{b}}\right)_{n,m \in \mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{T})$ formée de vecteurs propres du laplacien, en effet pour tout couple $n, m \in \mathbb{Z}$:

$$-\Delta e_{n,m} = 4\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) e_{n,m}$$

La fonction u se décompose alors sur la base de Fourier de la manière suivante $u = \sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} e_{n,m}$. Ainsi l'équation $-\Delta u - \lambda u = 0$ devient :

$$\sum_{n,m \in \mathbb{Z}} c_{n,m} \left(4\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right) - \lambda\right) e_{n,m} = 0,$$

comme $u \neq 0$ il existe alors au moins un couple d'entiers (n_0, m_0) tel que $c_{n_0, m_0} \neq 0$; ainsi $\lambda = 4\pi^2 \left(\frac{n_0^2}{a^2} + \frac{m_0^2}{b^2}\right)$. In fine on a bien :

$$\text{Spec}(\mathbb{T}) = \left\{4\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right), n, m \in \mathbb{Z}\right\}.$$

3.5. Un autre spectre ! celui des longueurs. Notre tore plat possède aussi un autre spectre, qu'on appelle *le spectre des longueurs*. Le spectre des longueurs est défini comme étant l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques de \mathbb{T} . Le spectre des longueurs est compté avec les multiplicités des longueurs, la multiplicité d'une longueur étant le nombre de classes d'homotopies de lacets du tore représentées par une géodésique périodique de cette longueur. De facto, dans notre cas, en l'espèce celui du tore plat, les géodésiques sont exactement les droites paramétrées par le flot de point initial l'origine : $\varphi_t = (t, \alpha t)$, α étant donc la pente de la droite. On cherche ici les géodésiques périodiques du tore, ce sont ici des droites qui s'enroulent sur le tore, pour cela il faut chercher si le flot associé est périodique : il faut donc prouver qu'il existe un temps T tel que $(T, \alpha T) \in a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$, c'est-à-dire que

$$\begin{cases} T = ak, k \in \mathbb{Z} \\ \alpha T = b\ell, \ell \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

En particulier, pour que ce temps T puisse exister il est nécessaire que $\alpha \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Supposons cette condition vérifiée : écrivons $\alpha \frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ où n, m sont des entiers relatifs supposés premiers entre eux, il vient alors immédiatement que le flot est périodique, en effet avec $T = am$ on a bien $\varphi_{am} = (am, nb) \in a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$. En conclusion : les géodésiques périodiques sur le tore $\mathbb{T} = \mathbb{R}^2/\Gamma$ sont les droites de la forme

$\varphi_t = (t, \alpha t)$ avec la condition de rationalité⁷ $\alpha \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Dans ce cas, la longueur de la géodésique associée à cette condition de rationalité $\alpha \frac{a}{b} = \frac{n}{m} \in \mathbb{Q}$ est égale à $\sqrt{m^2 a^2 + n^2 b^2}$. Ainsi, le spectre des longueurs du tore est donné par :

$$\mathcal{L}(\mathbb{T}) = \left\{ \sqrt{k^2 a^2 + \ell^2 b^2}, (k, \ell) \in \mathbb{Z}^2 \right\}.$$

3.6. Une passerelle entre les deux spectres. La formule sommatoire de Poisson présentée en Partie 2 se généralise en plusieurs variables, pour le cas qui nous intéresse celui de la dimension deux, pour une fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, la formule de Poisson sur le réseau $\Gamma = a\mathbb{Z} \oplus b\mathbb{Z}$ est :

$$\sum_{k \in \Gamma} f(k) = \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} \sum_{\ell \in \Gamma^*} \widehat{f}(\ell)$$

où Γ^* est le réseau dual de Γ . Le volume du réseau Γ est ici ab et on a aussi que $\text{Vol}(\Gamma^*) = \frac{1}{\text{Vol}(\Gamma)} = \frac{1}{ab}$. Un calcul classique de transformée de Fourier à deux variables similaire au calcul effectué en Partie 2 assure que la transformée de Fourier de la fonction gaussienne :

$$f(x) = e^{-\alpha \|x\|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$$

où $\alpha > 0$, est donnée par $\widehat{f}(\xi) = \frac{\pi}{\alpha} e^{-\frac{\pi^2 \|\xi\|^2}{\alpha}}$. Dès lors, en appliquant la formule de Poisson sur cette gaussienne, on obtient :

$$\sum_{x \in \Gamma} e^{-\alpha \|x\|^2} = \frac{1}{ab} \frac{\pi}{\alpha} \sum_{y \in \Gamma^*} e^{-\frac{\pi^2 \|y\|^2}{\alpha}}$$

puis en remplaçant le réseau Γ par son dual Γ^* on a :

$$\sum_{x \in \Gamma^*} e^{-\alpha \|x\|^2} = \frac{\pi ab}{\alpha} \sum_{y \in \Gamma} e^{-\frac{\pi^2 \|y\|^2}{\alpha}}$$

car $\Gamma^{**} = \Gamma$ et $\text{vol}(\Gamma^*) = \frac{1}{\text{vol}(\Gamma)}$. En particulier, avec le choix $\alpha := 4\pi^2 t$, où $t > 0$, on dispose de l'égalité suivante :

$$\sum_{x \in \Gamma^*} e^{-4\pi^2 t \|x\|^2} = \frac{ab}{4\pi t} \sum_{y \in \Gamma} e^{-\frac{\|y\|^2}{4t}}.$$

Du fait que le spectre de \mathbb{T} est $\left\{ 4\pi^2 \left(\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2} \right), n, m \in \mathbb{Z} \right\}$, on obtient finalement la formule de trace suivante :

$$\sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} e^{-\lambda t} = \frac{\text{Vol}(\Gamma)}{4\pi t} \sum_{\ell \in \mathcal{L}(\mathbb{T})} e^{-\frac{\ell^2}{4t}}.$$

Dans cette égalité le terme de droite correspond à la partie géométrique du tore (volume, dimension,...), alors que le terme de gauche contient les informations spectrales. Cette égalité recèle aussi le très puissant paradigme de l'analyse semi-classique ... L'essence de l'analyse semi-classique est de relier les formalismes mathématiques de la mécanique hamiltonienne classique (structure géométrique commutative) et de la mécanique quantique (algèbre d'opérateurs non-commutative). Dans l'exemple du tore, les longueurs des géodésiques périodiques sont effectivement des quantités classiques, elles correspondent aux longueurs des trajectoires classiques du flot hamiltonien $H(x, \xi) = |\xi|_{g(x)}^2 / 2$ défini sur l'espace des phases du fibré cotangent T^*M , alors que le spectre $\text{Spec}(\mathbb{T})$ correspond

7. Notons que si $\alpha \frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ le flot n'est pas périodique mais il remplit densément le tore.

aux niveaux d'énergies de l'hamiltonien quantique $-\Delta_g$. En outre la fonction de gauche dans la précédente formule de trace est omniprésente en géométrie spectrale, cette fonction s'appelle la *fonction spectrale de répartition* de \mathbb{T} , on la note souvent :

$$Z_{\mathbb{T}}(t) := \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} e^{-\lambda t}.$$

Cette série est uniformément convergente sur \mathbb{R}_+^* , et dès lors il est évident que $t \mapsto Z_{\mathbb{T}}(t)$ est continue et décroissante sur \mathbb{R}_+^* , avec $\lim_{t \rightarrow +\infty} Z_{\mathbb{T}}(t) = 0$ (car $0 \in \text{Spec}(\mathbb{T})$). Le principal intérêt de cette fonction réside d'une part dans le fait que $Z_{\mathbb{T}}$ détermine complètement le spectre de \mathbb{T} , et d'autre part que cette fonction est reliée à la *distribution spectrale de densité*

$$D_{\mathbb{T}}(t) := \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} \delta_{\lambda}$$

où δ_{λ} est la masse de Dirac au point λ (au sens des distributions). En effet, au sens des distributions, on a pour tout $t > 0$

$$\widehat{D}_{\mathbb{T}}(t) = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} \widehat{\delta}_{\lambda} = \sum_{\lambda \in \text{Spec}(\mathbb{T})} e^{-2\pi i t \lambda} = Z_{\mathbb{T}}(2\pi i t).$$

3.7. Généralisation : le spectre d'une variété riemannienne.

Le laplacien riemannien et son spectre. Il est important de signaler qu'il existe une généralisation de l'étude des valeurs propres du laplacien pour les *variétés riemanniennes*. En *géométrie riemannienne*, l'*opérateur de Laplace-Beltrami* est la généralisation du laplacien de \mathbb{R}^n . Pour une fonction f de classe \mathcal{C}^2 à valeurs réelles défini sur une variété riemannienne (M, g) , et pour $\phi : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ une carte locale de la variété M , l'opérateur de Laplace-Beltrami, ou plus simplement laplacien de (M, g) , appliqué à la fonction f est donné par la formule locale :

$$\Delta_g f = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sqrt{|g|} g^{jk} \frac{\partial (f \circ \phi^{-1})}{\partial x_k} \right)$$

où $|g| = \det(g_{ij})$ et $g^{jk} = (g_{jk})^{-1}$. Cet opérateur joue un très grand rôle au sein même des mathématiques : son spectre est un invariant géométrique majeur. En 1949, S. Minakshisundaram et Å. Pleijel ont écrit le premier article sur $-\Delta_g$ dans le cas d'une variété riemannienne compacte (M, g) . En particulier, ils prouvent que le spectre de $-\Delta_g$ est uniquement constitué d'une suite de valeurs propres de multiplicités finies s'accumulant en $+\infty$:

$$0 \leq \lambda_1(M) < \lambda_2(M) \leq \dots \leq \lambda_k(M) \leq \dots$$

On appelle cette suite *le spectre de la variété* (M, g) . Durant les années 1949-1954, H. Maass, et plus tard A. Selberg ont beaucoup étudié le spectre de $-\Delta_g$ dans le cas des surfaces compactes. Plus tard, beaucoup de géomètres, motivés par le célèbre livre de M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet [BGM], se sont alors intéressés à cet invariant spectral. L'étude du laplacien, et plus particulièrement de son spectre, est un carrefour entre la théorie spectrale, l'analyse harmonique, la géométrie différentielle et même la théorie des groupes. De facto, il y a deux problématiques majeures liées au spectre du laplacien $-\Delta_g$:

- (1) *Les problèmes directs* : étant donnée une variété riemannienne (M, g) , que dire du spectre de l'opérateur $-\Delta_g$? L'objectif est, à géométrie fixée, de pouvoir calculer, ou à défaut de donner des propriétés sur le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$.

- (2) *Les problèmes inverses* : étant donné le spectre de l'opérateur $-\Delta_g$, que dire géométriquement de (M, g) ?

Les problèmes directs. Concernant la première problématique il y a disons deux sous thèmes classiques :

- Le premier concerne le bas du spectre : on s'intéresse aux plus petites valeurs propres de l'opérateur $-\Delta_g$, qui ont beaucoup d'applications en topologie.
- Le second est l'étude de l'asymptotique des grandes valeurs propres : c'est le domaine de l'*analyse semi-classique*.

L'exemple de base de problème aux grandes valeurs propres est la formule asymptotique de Weyl. Pour le laplacien dans un domaine rectangulaire Ω de \mathbb{R}^2 avec des conditions de Dirichlet aux bords, le physicien P. Debye conjectura que le nombre de valeurs propres $\mathcal{N}(\lambda)$ inférieures à un réel positif λ , vérifie l'équivalence, pour $\lambda \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{N}(\lambda) \sim \frac{\text{Vol}(\Omega)}{4\pi} \lambda$$

où $\text{Vol}(\Omega)$ est l'aire du rectangle Ω . En 1911, H. Weyl démontra cette conjecture. Ce résultat se généralise pour les variétés riemanniennes compactes, c'est la *formule asymptotique de Weyl* :

$$\#(\{k \in \mathbb{N}, \lambda_k(M) \leq \lambda\}) \underset{\lambda \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{B_n \text{Vol}(M, g)}{(2\pi)^n} \lambda^{\frac{n}{2}}$$

où $B_n := \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$ est le volume de la boule unité fermée de $(\mathbb{R}^n, \text{can})$. En particulier, on a aussi :

$$\lambda_k(M) \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} \left(\frac{(2\pi)^n}{B_n \text{Vol}(M, g)} \right)^{\frac{2}{n}} k^{\frac{2}{n}}.$$

Les problèmes inverses. Le principe cardinal de la problématique inverse est le suivant : à partir de la donnée unique du spectre du laplacien $-\Delta_g$, quelles informations géométriques sur la variété (M, g) peut-on connaître ? Un des premiers à formaliser mathématiquement cette question est sans doute L. Green en 1960. Cette question remonte à H. Weyl en 1911-1912 pour un cas particulier de surface. La question fut ensuite largement popularisée par Mark Kac [**Kac**] en 1966 dans son célèbre article "Can one hear the shape of a drum?"⁸, le sens précis de cette question est le suivant : pour le laplacien riemannien, une suite de valeurs propres (un ensemble d'harmoniques du tambour) caractérise-t-elle, à isométrie près, la variété de départ (la géométrie du tambour) ? Il est connu que si deux variétés sont isométriques, elles sont alors isospectrales (c'est-à-dire ont le même spectre). Mais qu'en est-il de la réciproque ?

C'est finalement en 1964, que le génial mathématicien J. Milnor a répondu par la négative au problème ; en effet, dans son célèbre article [**Mil**] il donne la construction d'une paire de tores plats de dimension 16 isospectraux mais non isométriques ! Depuis, de nombreux autres exemples ont été trouvés, à commencer par T. Sunada [**Sun**], qui en 1985 donne une méthode de construction systématique de variétés isospectrales non isométriques. C. Gordon et E.N. Wilson [**Go-Wi**] ont aussi donné en 1984 une méthode de construction de déformations continues de variétés. L'histoire ne s'arrête pas là, d'autres méthodes de construction apparaissent, comme par exemple la méthode de transplantation de P. Bérard [**Bér1**], [**Bér2**] etc... En 1992, C. Gordon, D. Webb et S. Wolpert [**GW**] donnent le premier

8. "Peut-on entendre la forme d'un tambour?"

exemple de deux domaines plans non isométriques, mais ayant tout de même un spectre commun pour le laplacien avec conditions de Neumann ou de Dirichlet.

Nonobstant le fait que le spectre du laplacien $(\lambda_k(M))_k$ ne caractérise pas intégralement la variété de départ (M, g) , la donnée du spectre permet tout de même d'obtenir un grand nombre d'informations géométriques. En effet si (M, g) désigne une variété riemannienne compacte de dimension n , on dispose de la fameuse *égalité de Minakshisundaram-Pleijel* : pour tout $t > 0$ on a :

$$(3.1) \quad Z_M(t) := \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-t\lambda_k(M)} \underset{t \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \left(a_0 + a_1 t + \dots + a_k t^k + \dots \right)$$

où :

$$a_0 = \text{Vol}(M, g)$$

et

$$a_1 = \frac{1}{6} \int_M \text{Scal}_g d\mathcal{V}_g.$$

L'expression du terme a_2 est :

$$a_2 = \frac{1}{360} \int_M \left(2|R|^2 - 2|\text{Ric}|^2 + 5\text{Scal}_g^2 \right) d\mathcal{V}_g,$$

où Scal_g est la *courbure scalaire*, et Ric est la *courbure de Ricci*, et R désigne le *tenseur de courbure de Riemann*. Le calcul des autres coefficients a_k pour $k \geq 2$ est très difficile et est de facto inutile. Dans le cas des surfaces (i.e. $\dim(M) = 2$), la *formule de Gauss-Bonnet* donne :

$$a_1 = \frac{\pi}{3} \chi(M)$$

où $\chi(M)$ est la *caractéristique d'Euler-Poincaré* de M . En conséquence, pour toute surface fermée⁹ M on a :

$$Z_M(t) = \frac{\text{Vol}(M, g)}{4\pi t} + \frac{\chi(M)}{12} + \frac{\pi t}{60} \int_M K^2 d\mathcal{V}_g + P(t)t^2$$

où $t \mapsto P(t)$ est une fonction bornée sur M .

Une conséquence fondamentale de l'égalité de Minakshisundaram-Pleijel réside dans le fait que le spectre de la variété (M, g) détermine :

- la dimension de la variété ;
- le volume de la variété ;
- l'intégrale de la courbure scalaire Scal_g sur la variété. En particulier, si M et M' sont des surfaces, alors $\chi(M) = \chi(M')$.

C'est assez surprenant pour le signaler mais la preuve de l'égalité (3.1) repose sur l'équation de la chaleur sur la variété (M, g) , plus précisément sur la construction d'une solution de cette équation. Cette résolution utilise un concept fondamental qui est celui du *noyau de la chaleur* de M . La théorie du noyau de la chaleur sur une variété riemannienne est d'une grande profondeur et permet d'analyser finement la relation entre la géométrie de M , son spectre et les processus de diffusion agissant sur cette variété.

La donnée du spectre du laplacien fournit aussi d'autres invariants géométriques, comme par exemple le spectre des longueurs d'une variété. Le spectre des longueurs d'une variété riemannienne est l'ensemble des longueurs des géodésiques périodiques. En 1973, Y. Colin de Verdière [Col1], [Col2] montre que dans le cas compact, modulo une hypothèse de généricité toujours vérifiée à courbure sectionnelle négative, le spectre du laplacien détermine complètement le spectre

9. I.e. une surface compacte et sans bord.

des longueurs. La technique utilisée par Y. Colin de Verdière repose sur les formules de traces. Ces dernières s'utilisent dans un cadre beaucoup plus général que celui du laplacien. Le principe formel des formules de traces est le suivant : considérons d'abord un opérateur linéaire H non-borné sur un Hilbert ayant un spectre discret : $\text{Spec}(H) = \{\lambda_k, k \geq 1\}$, et puis une fonction f "sympathique". La formule de trace consiste alors à calculer la trace de l'opérateur $f(H)$ de deux façons différentes :

- la première façon, lorsque que cela a un sens, avec les valeurs propres de l'opérateur linéaire $f(H)$:

$$\text{Tr}(f(H)) = \sum_{k \geq 1} f(\lambda_k).$$

- La seconde façon, avec le noyau de Schwartz de l'opérateur $f(H)$: si $f(H)\varphi(x) = \int_M K_f(x, y)\varphi(y) dy$, alors :

$$\text{Tr}(f(H)) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

Ainsi on obtient la formule de trace générale suivante :

$$\sum_{k \geq 1} f(\lambda_k) = \int_M K_f(x, x) dx.$$

La difficulté réside alors dans le choix de la fonction f , d'une part pour légitimer ces formules, et d'autre part pour arriver à en tirer des informations spectro-géométriques. Les choix de fonctions f les plus courants sont : $f(x) = e^{-xt}$ où $t \geq 0$ (fonction de la chaleur); $f(x) = \frac{1}{x^s}$, où $s \in \mathbf{C}$, avec $\text{Re}(s) > 1$ (fonction zêta de Riemann); $f(x) = e^{-\frac{ix}{\hbar}}$ où $t \geq 0$ (fonction de Schrödinger); etc ... Pour une référence récente sur les formules de traces en géométrie voir [Col3].

Quelques références bibliographiques. Pour une introduction complète à la géométrie riemannienne les livres [GHL] et [DoC] constituent un excellent support. Le stratosphérique livre de M. Berger [Ber] est une magnifique bible moderne de la géométrie riemannienne. Les principales références sur la géométrie spectrale sur les variétés riemanniennes sont le livre mythique de M. Berger, P. Gauduchon et E. Mazet [BGM], le livre de P. Bérard [Bér3], celui de I. Chavel [Cha], celui de S. Rosenberg [Ros]. Pour une référence plus récente, on pourra consulter le livre [Lab].

RÉFÉRENCES

- [Bér1] P. BÉRARD, *Transplantation et isospectralité I*, Math. Ann. 292 : 547-559, 1992.
- [Bér2] P. BÉRARD, *Transplantation et isospectralité II*, J. London Math. Soc. 48 : 565-576, 1993.
- [Bér3] P. BÉRARD, *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1207, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [BGM] M. BERGER, P. GAUDUCHON & E. MAZET, *Le Spectre d'une Variété Riemannienne*, Lectures Notes in Mathematics 194, Springer-Verlag 1971.
- [Ber] M. BERGER, *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, Berlin Heidelberg NewYork, 2002.
- [Bré] H. BRÉZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer, 2010.
- [Car] L. CARLESON, *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*, Acta Math. Volume 116, 135-157, 1966.
- [Cha] I. CHAVEL, *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Press, Orlando, 1984.
- [Col1] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques I*, Compositio Mathematica, 27 : 80-106, 1973.

- [Col2] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectre du Laplacien et longueurs des géodésiques périodiques II*, Compositio Mathematica, 27 : 159-184, 1973.
- [Col3] Y. COLIN DE VERDIÈRE, *Spectrum of the Laplace operator and periodic geodesics : thirty years after*, Ann. Inst. Fourier. 57 (7) : 2429-2463, 2008.
- [Dh-Ro] J. DHOMBRES & J. B. ROBERT, *Fourier, créateur de la physique mathématique*, collection « Un savant, une époque », Belin, 1998.
- [DoC] M. DO CARMO, *Riemannian Geometry*, Birkhauser, Basel, 1992.
- [Eva] L. C. EVANS, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics 19, American Mathematical Society, 2nd Edn. 2010.
- [Fou] J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, par M. Fourier, F. Didot père et fils (Paris), 1822.
- [GHL] S. GALLOT, D. HULLIN & J. LAFONTAINE, *Riemannian Geometry*, Universitext Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [Go-Wi] C. GORDON & E.N. WILSON, *Isospectral deformations on compact manifolds*, J. Diff. Geom. 19 : 241-256, 1984.
- [GWW] C. GORDON, D. WEBB & S. WOLPERT, *Isospectral plane domains and surfaces via Riemannian orbifolds*, Inventiones Mathematicae 110 : 1-22, 1992.
- [Hun] R.A. HUNT, *On the convergence of Fourier series*, in *Orthogonal Expansions and Their Continuous Analogues*. Proceeding of the Conference Held at Southern Illinois University (Edwardsville, IL, April 27-29, 1967), Southern Illinois Univ. Press, Carbondale, pp. 235-255, 1968.
- [Kac] M. KAC, *Can one hear the shape of a drum ?*, Amer. Math. Monthly, 73 (4), 1-23, 1966.
- [Ka-Ka] J. P. KAHANE & Y. KATZNELSON, *Sur les ensembles de divergence des séries trigonométriques*. Studia Mathematica 26 : 305-306. J. P. Kahane. 1966.
- [Ka-Le] J. P. KAHANE & P. G. LEMARIÉ-RIEUSSET, *Séries de Fourier et ondelettes*, Cassini, Nouvelle bibliothèque mathématique, 1998.
- [Kol] A. KOLMOGOROV, *Une contribution à l'étude de la convergence des séries de Fourier*, Fund. Math. 5, 1924.
- [Lab] O. LABELLÉ, *Spectral Theory in Riemannian Geometry*, EMS Textbooks in Mathematics, European Mathematical Society, 2015.
- [Li-Lo] H. LIEB & L. LOSS, *Analysis*, American Math. Soc., Providence RI, 2001.
- [Mil] J. MILNOR, *Eigenvalues of the Laplace operator on certain manifolds*, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America 51 : 542, 1964.
- [Ros] S. ROSENBERG, *The Laplacian on a Riemannian Manifold*, London Mathematical Society, Student Texts 31 Cambridge University Press, 1997.
- [Rud] W. RUDIN : *Real and Complex Analysis*, Mc Graw Hill, New York, 1974.
- [Sun] T. SUNADA, *Riemannian covering and isospectral manifolds*, Ann. of Math. 121 : 169-186, 1985.
- [St-We] E. M. STEIN & G. WEISS, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1971.
- [Tay] M. E. TAYLOR, *Noncommutative Harmonic Analysis*, Mathematical Surveys and Monographs, AMS, 1986.
- [Zyg] A. ZYGMUND, *Trigonometric Series, 3rd edition Foreword by Robert Fefferman*, Cambridge University Press, 2015.