



HAL
open science

Interaction Fluide-Structure pour les problèmes de dynamique rapide

Nicolas Aquelet, Mhamed Souli

► **To cite this version:**

Nicolas Aquelet, Mhamed Souli. Interaction Fluide-Structure pour les problèmes de dynamique rapide. Mhamed Souli; Jean-François Sigrist. Interaction Fluide Structure: Modélisation et simulation numérique, Hermès-Lavoisier, 2009, Traité MIM - Mécanique et ingénierie des matériaux. ⟨hal-01826996⟩

HAL Id: hal-01826996

<https://hal.science/hal-01826996v1>

Submitted on 30 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire HAL, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



HAL Authorization

Interaction Fluide-Structure pour les problèmes de dynamique rapide

Nicolas AQUELET et Mhamed SOULI

5.1. Introduction

La dynamique rapide regroupe des phénomènes physiques en grande déformation de courte durée impliquant généralement un fluide et une structure. Le crash, le développement d'un airbag, le tossage d'un navire sont autant d'exemples d'interaction fluide-structure spectaculaires de l'ordre de quelques millisecondes. La simulation numérique a beaucoup apporté à la compréhension de ces phénomènes physiques. Cependant la complexité des simulations numériques actuelles, en dynamique rapide, conduit encore à des problèmes liés au temps de calcul et implicitement aux maillages utilisés pour décrire les géométries. Les grandes déformations impliquent un traitement spécial du maillage. Certaines approches s'affranchissent de la connectivité comme la méthode SPH. D'autres remaillent le domaine de calcul. Ici nous nous intéresserons à la formulation ALE (Arbitrary Lagrange Euler) et, à titre d'illustration, nous l'appliquerons à l'impact hydrodynamique d'un dièdre.

Un impact hydrodynamique définit un choc entre une structure et la surface d'un liquide supposé faiblement compressible (en général de l'eau). Un des impacts hydrodynamiques les plus courants est le tossage dans l'industrie navale : ce phénomène apparaît lorsque la carène d'un navire rentre en contact avec la surface de l'eau avec une vitesse importante. Un autre exemple est le ballotement dans un réservoir partiellement rempli : le liquide contenu interagit avec la paroi interne par vagues successives. La probabilité d'un impact fort augmente naturellement avec la vitesse relative entre

la structure et le fluide. Si la fréquence des impacts croît (par exemple, pour les navires à grandes vitesses "ricochant" sur les vagues), une ruine prématurée par fatigue peut menacer l'intégrité de la structure. Dans des cas extrêmes, la rupture de cette dernière est tout à fait envisageable. Dans ces conditions, il est alors important de savoir prédire les efforts hydrodynamiques appliqués à la structure pour la dimensionner correctement lors de sa conception ou pour prévenir un éventuel endommagement (pour un navire en mer par exemple, la vitesse de progression est diminuée si la fréquence des impacts sévères devient trop importante).

La durée d'une pression d'impact est de l'ordre de quelques millisecondes et elle est aussi très localisée dans l'espace. Les caractéristiques de cette pression locale dépendent essentiellement de l'angle d'incidence α et de la vitesse relative v . Une estimation théorique de la pression maximale peut être effectuée en appliquant la relation suivante obtenue pour un dièdre entrant dans l'eau à vitesse constante :

$$P_{max} = \frac{\pi^2 \rho v^2}{8 \tan(\alpha)^2} \quad (5.1)$$

Ce pic de pression est obtenu aux points d'arrêt. Si on connaît la vitesse tangentielle de ce point le long du dièdre par le théorème de Bernoulli, on peut montrer la relation Eq.(5.1). On remarque que plus l'angle α sera petit, plus l'impact sera violent. Pour un angle de 10° et une vitesse d'impact de l'ordre de $6m/s$, le pic sera de $1.5MPa$ alors que pour 5° , il sera 4 fois plus important. Bien que la relation Eq.(5.1) permet déjà de dimensionner le niveau de pression exercée sur une structure pour une incidence donnée, la complexité d'un problème industriel ne permet pas de se limiter au cadre d'une approche théorique.

Au niveau de la modélisation théorique, le problème d'impact hydrodynamique a fait l'objet de nombreuses études : Von Karman [KAR 29] a été un précurseur dans ce domaine en étudiant l'amerrissage d'hydravions, la théorie de Wagner [WAG 32] est une pierre angulaire dans l'analyse asymptotique des problèmes de perforation de surfaces libres et encore aujourd'hui, ces travaux sont repris comme une référence. Par la suite, d'autres développements théoriques ont suivi et tous sont basés sur des hypothèses restrictives ne permettant pas de traiter un problème industriel réaliste. Avec l'essor des outils numériques, il est possible de lever ces hypothèses en construisant des modèles de plus en plus complexes. Le modèle idéal serait un modèle numérique capable de simuler des impacts hydrodynamiques complets et concrets tout en s'assurant que la précision du calcul n'est pas perdue par la généralité de l'approche. Cependant, il est difficile de concevoir un code généraliste précis sur les différents aspects d'un problème d'impact incluant l'effet "coussin d'air" (l'air est emprisonné entre la structure et le liquide lors de l'impact), la compressibilité du liquide (dans les premiers instants de l'impact, une onde de choc peut être générée), la cavitation (pour des vitesses importantes, la tension dans le liquide peut impliquer un changement de phase), etc...

Pour traiter le problème, une formulation éléments finis en contact est une solution envisageable. Une formulation Lagrangienne pourrait être alors utilisée pour le fluide et pour la structure. Cette approche est simple et précise. Cependant, le maillage Lagrangien a la particularité de suivre le mouvement du matériau de manière à ce que toute particule matérielle initialement présente dans une maille reste dans celle-ci au cours du calcul. Les déformations d'une structure sont, en général, faibles et cette formulation est alors adaptée. Par contre, pour le fluide, de fortes distorsions de mailles apparaissent dans les zones où les mouvements du fluide sont importants. Une autre formulation est alors employée : la formulation Eulérienne pour laquelle le maillage reste fixe et le liquide traverse la grille. A présent, il faut pouvoir coupler ces deux formulations pour traiter le problème d'impact entre la structure et le fluide.

La principale problématique est : comment transmettre correctement les efforts d'interaction entre le modèle Eulérien pour le fluide et le modèle Lagrangien pour la structure ? Les méthodes de couplage mises en œuvre pour répondre à cette question sont appelées couplages Euler/Lagrange. Le premier réflexe est d'imposer, à la frontière du fluide et de la structure, une même cinématique. Par exemple, les vitesses des nœuds Lagrangiens composant la frontière de la structure peuvent être déterminées en interpolant les vitesses Eulériennes des nœuds voisins. Les rôles du "maître" (celui qui impose la vitesse) et de "l'esclave" (celui qui subit) peuvent être inversés en cours de calcul. On peut aussi imposer l'accélération de la même manière. L'inconvénient d'une telle approche est qu'elle est souvent très dissipative : l'énergie totale du système tend à chuter dramatiquement. A la place de cette première approche et pour assurer la conservation de la quantité de mouvement, le champ des forces d'interaction est évalué et appliqué en respectant le principe de l'action et de la réaction. La force d'interaction est estimée par une méthode de pénalité consistant à permettre une légère pénétration entre les deux maillages. Une force de rappel proportionnelle à cette distance est alors évaluée par Eq.(5.2) et elle est appliquée, par symétrie, sur le fluide et la structure.

$$F = -k.d \quad (5.2)$$

où F , d et k sont respectivement la force, la pénétration et une raideur. Cette dernière est l'objet du problème car il est difficile d'estimer sa valeur précisément pour un problème quelconque. Si la raideur est trop faible, les interpénétrations deviendront inacceptables et le fluide traversera la structure. En théorie, la raideur devrait être très grande afin de limiter les pénétrations. Cependant, si la raideur est trop importante, la force de rappel trop grande devant les forces physiques déstabilisera le calcul. Le choix de la raideur est un problème non-linéaire délicat qui dépend des propriétés physiques du fluide et de la structure. Pour le problème de l'impact hydrodynamique, une étude recherchant la raideur optimale pour différents angles d'incidence sera mise en œuvre. L'idée par la suite serait de pouvoir étendre cette analyse à un grand nombre de cas d'impacts.

Le plan est le suivant :

La première partie est consacrée à la formulation ALE permettant de traiter le problème de l'impact hydrodynamique dans un cadre général. La dynamique de la structure est basée sur une approche variationnelle en éléments finis des équations du mouvement. Le fluide est modélisé par une formulation Eulérienne basée sur une méthode "split" permettant de décomposer le pas de calcul en deux cycles : un cycle Lagrangien qui, ne tenant pas compte de la vitesse d'advection, détermine les inconnues du problème par une approche en éléments finis et un cycle d'advection limitant les distorsions issues du premier cycle en ramenant le maillage à sa position initiale. Les variables physiques sont alors projetées, de la configuration déformée à la configuration initiale, par une méthode d'advection. Cette approche est un cas particulier d'une formulation plus générale, la formulation ALE (Arbitrary Lagrange Euler) pour laquelle le maillage, au cours du second cycle, peut être placé à une position arbitraire. Les formulations Eulériennes et ALE sont multi-matériaux : elles ont ainsi la capacité de modéliser l'écoulement de plusieurs fluides dans un même maillage.

La deuxième partie présente le couplage Euler/Lagrange. Il s'agit d'un couplage entre la formulation Eulérienne ou ALE et la structure. Deux algorithmes seront décrits : une méthode par pénalité et une méthode explicite basée sur les multiplicateurs de Lagrange.

La troisième partie est une application de la formulation ALE et du couplage à deux problèmes d'impact hydrodynamique. Le premier problème est un piston écrasant un volume d'eau. On y compare les méthodes de couplage employées. Pour ce problème simple, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est une approche directe et précise de la solution. Par contre, la précision de la méthode par pénalité dépend de la détermination de la raideur de pénalité : trop grande, le calcul peut être instable, trop petite, la pénétration relative devient inacceptable. Lorsqu'une valeur optimale est évaluée, les efforts numériques peuvent être perturbés par des oscillations dont l'origine numérique est liée au couplage. Un effet dissipatif est introduit dans la méthode par pénalité pour amortir ces perturbations. La deuxième application est l'entrée d'un dièdre dans l'eau. L'interaction fluide-structure sera modélisée par la méthode par pénalité. Une base de données pour le paramètre contrôlant la force de couplage est établie. Cette base est construite en estimant l'amplitude de la pression locale exercée sur un dièdre pour différents angles d'incidence. L'idée est d'étendre les résultats obtenus pour une structure ayant une géométrie quelconque.

5.2. Formulation ALE multi-phases

Les formulations ALE multi-matériaux ont été, à l'origine, développées pour résoudre des problèmes impliquant de fortes pressions telles que des explosions (pression supérieure à 1Mbar). A de telles pressions, les contraintes déviatoriques sont très

faibles dans le tenseur des contraintes et sont souvent ignorées. De la même manière, dans cette étude, les forces visqueuses ne seront pas prises en compte. La capacité des formulations multi-matériaux à modéliser de grandes déformations matérielles et à générer de nouvelles surfaces libres permet de résoudre une large gamme de problèmes fortement non linéaires en mécanique des fluides. La formulation Eulérienne est un cas particulier de la formulation ALE. C'est pourquoi cette dernière sera l'objet d'une attention particulière dans cette partie. Une description Eulérienne d'écoulements incompressibles a été développée par Hughes et al [HUG 81] pour résoudre des écoulements à surface libre et des problèmes d'interaction fluide-structure. Cette théorie générale est une base aux approches Lagrangiennes, Eulériennes et ALE. Les auteurs définissent trois domaines pour décrire le mouvement du fluide : un domaine spatial ou Eulérien qui correspond à la configuration courante Ω , un domaine matériel ou Lagrangien correspondant à la configuration initiale Ω_0 enfin un domaine dit de référence ou ALE, Ω_{ale} , qui est un nouveau domaine où la particule est décrite par la variable χ et le temps. Ce domaine représente, en fait, le maillage. On peut remarquer que la formulation Lagrangienne est obtenue lorsque le domaine ALE est Lagrangien, c'est à dire lorsque $\Omega_0 = \Omega_{ale}$. Lorsque le domaine ALE est Ω ($\Omega_{ale} = \Omega$), la description est Eulérienne.

Nous avons vu précédemment que les variables Eulériennes (\vec{x}, t) sont exprimées en fonction des coordonnées de la configuration initiale (\vec{X}, t) :

$$\vec{x} = \vec{\varphi}(\vec{X}, t) \quad (5.3)$$

Cette relation injective donne en fait le mouvement du point matériel. Si une quantité physique, f , est exprimée dans la configuration Eulérienne, on a la relation suivante :

$$f(\vec{x}, t) = f(\vec{\varphi}(\vec{X}, t), t) = f^0(\vec{X}, t) \quad (5.4)$$

La dérivée matérielle $\frac{D}{Dt}$ est une dérivée temporelle prise dans le repère Lagrangien :

$$\dot{f} = \frac{Df^0(\vec{X}, t)}{Dt} = \left(\frac{\partial f^0(\vec{X}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{X}} \quad (5.5)$$

Si on applique la dérivée matérielle à la relation Eq(5.4), on obtient la dérivation suivante :

$$\left(\frac{\partial f^0}{\partial t} \right)_{\vec{X}} = \left(\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \left(\frac{\partial \varphi(\vec{X}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{X}} \cdot \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}} \quad (5.6)$$

Avec Eq.(5.5), on a :

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \frac{D\vec{x}}{Dt} \cdot \nabla_{\vec{x}} f \quad (5.7)$$

$\vec{v} = \frac{D\vec{x}}{Dt}$ représente la dérivée matérielle du mouvement du fluide c'est à dire la vitesse matérielle. Si, à présent, on considère l'application injective $\vec{\psi}$ liant les coordonnées Eulériennes (\vec{x}, t) et les coordonnées ALE $(\vec{\chi}, t)$ (voir Eq.(5.8))

$\vec{\psi}$ représente le déplacement du domaine ALE, Ω_{ale} :

$$\vec{x} = \vec{\psi}(\vec{\chi}, t) \quad (5.8)$$

f s'exprime donc dans le repère ALE sous la forme suivante :

$$f(\vec{x}, t) = f(\vec{\psi}(\vec{\chi}, t), t) = f^{ale}(\vec{\chi}, t) \quad (5.9)$$

La dérivée de $f^{ale}(\vec{\chi}, t)$ prise dans le repère ALE donne :

$$\left(\frac{\partial f^{ale}(\vec{\chi}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} = \left(\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \left(\frac{\partial \psi(\vec{\chi}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} \cdot \frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial \vec{x}}$$

On voit apparaître la vitesse du repère ALE : $\vec{v}_{ale} = \left(\frac{\partial \psi(\vec{\chi}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}}$ D'où :

$$\left(\frac{\partial f^{ale}(\vec{\chi}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} = \left(\frac{\partial f(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \vec{v}_{ale} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f(\vec{x}, t) \quad (5.10)$$

Si on soustrait Eq.(5.7) et Eq.(5.10), on a une relation entre la dérivée par rapport au repère ALE et la dérivée matérielle :

$$\frac{Df}{Dt} = \left(\frac{\partial f^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} + (\vec{v} - \vec{v}_{ale}) \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} f \quad (5.11)$$

On note $\vec{w} = \vec{v} - \vec{v}_{ale}$, la vitesse de convection (différence entre la vitesse du fluide et la vitesse du domaine ALE). Dans la suite, comme Ω_{ale} représente le maillage, \vec{v}_{ale} sera la vitesse du maillage.

Si $\Omega_{ale} = \Omega_0$, $\vec{\chi} = \vec{X}$ et $\vec{\psi}(\vec{\chi}, t) = \vec{\varphi}(\vec{X}, t)$ puisque les applications sont injectives. De ce fait, $\vec{v} = \vec{v}_{ale}$ et obtient la description Lagrangienne avec une vitesse convective nulle ($\vec{w} = \vec{0}$).

Si $\Omega_{ale} = \Omega$, $\vec{\chi} = \vec{x}$ et $\vec{v}_{ale} = \left(\frac{\partial \vec{\psi}(\vec{\chi}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} = \left(\frac{\partial \vec{\psi}(\vec{x}, t)}{\partial t} \right)_{\vec{x}}$. Avec Eq.(5.8), $\vec{v}_{ale} = \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} = \vec{0}$.

On obtient alors la description Eulérienne pour laquelle la vitesse convective est la vitesse matérielle ($\vec{w} = \vec{v}$). A présent, on écrit la formulation ALE forte des équations du mouvement pour le fluide.

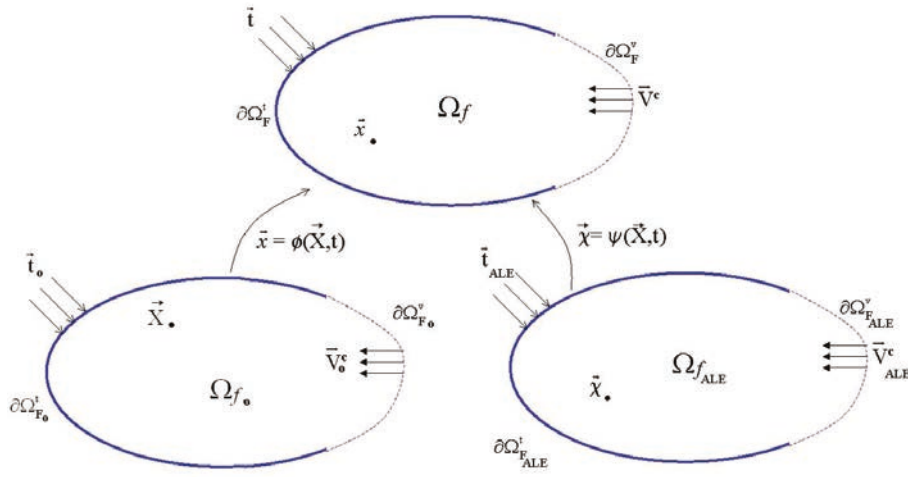


Figure 5.1. *Fluide dans les trois configurations*

5.2.1. *Forme forte*

- Conservation de la masse :

$$\rho(\vec{X}, t)J(\vec{X}, t) = \rho_o(\vec{X})J_o(\vec{X}) = \rho_o(\vec{X}) \quad (5.12)$$

où ρ est la masse volumique, J le jacobien de la transformation ϕ . \vec{X} est la coordonnée de la configuration initiale (on parle aussi de coordonnées Lagrangiennes ou matérielles). Les indices "o" du second membre indiquent que les quantités précédentes sont prises à $t = 0$.

La dérivée matérielle de Eq.(5.12) donne la conservation de la masse pour le fluide :

$$J \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{DJ}{Dt} = 0 \quad (5.13)$$

Comme $\frac{DJ}{Dt} = J \text{div} \vec{v}$, on obtient :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0 \quad (5.14)$$

En substituant Eq.(5.11) dans l'équation précédente, on a l'équation ALE de la conservation de la masse.

$$\left(\frac{\partial \rho^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \vec{w} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \rho = -\rho \text{div} \vec{v} \quad \text{sur } \Omega_F \quad (5.15)$$

- Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho b_i \quad \text{sur } \Omega_s \quad (5.16)$$

où $i, j = 1, 2, 3$, D/Dt représente la dérivée matérielle, v_i , les composantes de la vitesse et x_j celles de la coordonnée de la configuration courante (on parle aussi de coordonnées Eulériennes ou spatiales). σ est le tenseur de contrainte de Cauchy. b_i représente les composantes de la force de volume (gravité).

La conservation de la quantité de mouvement pour le fluide dans le repère ALE est dérivée de Eq.(5.16) en substituant la relation Eq. (5.7) :

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \rho \vec{w} \nabla_{\vec{x}} \vec{v} = \text{div} \sigma + \rho \vec{b} \quad \text{sur } \Omega_F \quad (5.17)$$

- Conservation de l'énergie :

La conservation de l'énergie en ALE suit le même raisonnement que précédemment et on obtient :

$$\rho \left(\frac{\partial e^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \rho \vec{w} \nabla_{\vec{x}} e = \sigma : \mathbf{grad} \vec{v} + \rho \vec{b} \cdot \vec{U} \quad (5.18)$$

- Equation constitutive : Fluide newtonien

$$\sigma_{ij} = 2\mu d_{ij}^{dev} - p\delta_{ij} \quad (5.19)$$

- Conditions aux limites :

$$n_j(\vec{\chi}, t) \sigma_{ji}(\vec{\chi}, t) = t_i(\vec{\chi}, t) \quad \text{sur } \partial\Omega_f^t \quad (5.20)$$

et

$$v_i(\vec{\chi}, t) = v_i^c(\vec{\chi}, t) \quad \text{sur } \partial\Omega_f^v \quad (5.21)$$

où \vec{t} est la traction imposée sur la frontière $\partial\Omega_f^t$ et \vec{v}^c , la vitesse imposée sur la frontière $\partial\Omega_f^v$. Les deux frontières précédentes sont complémentaires comme le précise Fig.5.1. Les efforts de couplage sont appliqués sur la frontière $\partial\Omega_f^t$.

- Conditions initiales :

$$\vec{v}(\vec{\chi}, 0) = \vec{v}_0(\vec{\chi}) \quad (5.22)$$

et

$$\sigma_{ij}(\vec{\chi}, 0) = \sigma_{ij0}(\vec{\chi}) \quad (5.23)$$

5.2.2. Forme faible

Il y a deux approches différentes pour mettre à jour les variables à partir des équations précédentes.

La première résout ces équations en 1 seule étape en mettant en œuvre une forme faible directement à partir de la formulation forte précédente :

$$\int_{\Omega_f} \delta \rho \frac{\partial \rho^{ale}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta \rho \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} d\Omega = - \int_{\Omega_f} \delta \rho w_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} d\Omega \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f} \delta v_i \rho \frac{\partial v_i^{ale}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta v_i \rho w_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} d\Omega &= \int_{\Omega_f} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega \\ &+ \int_{\Omega_f} \delta v_i \rho b_i d\Omega \\ &+ \int_{\partial \Omega_f^t} \delta v_i t_i d\partial \Omega \end{aligned} \quad (5.25)$$

$$\int_{\Omega_f} \delta e \frac{\partial e^{ale}}{\partial t} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta e \rho w_j \frac{\partial e}{\partial x_j} d\Omega = \int_{\Omega_f} \delta e \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta e v_i \rho b_i d\Omega \quad (5.26)$$

où $\delta \rho \in H^1(\Omega_f)$, $\delta v_i \in H^1(\Omega_f)$ et $\delta e \in H^1(\Omega_f)$ sont des fonctions tests.

La deuxième approche, appelée "opérateur split", sépare, dans Eq.(5.15), Eq.(5.17) et Eq.(5.18), les termes Lagrangiens des termes d'advection. Le pas de temps est divisé en deux cycles de calcul : un cycle Lagrangien qui détermine les inconnues physiques du problème et un cycle d'advection qui ramène la solution physique soit sur le domaine ALE fixe (le maillage initial fixe : $\vec{v}_{ale} = \vec{0}$) pour un cycle Eulérien, soit sur une configuration ALE mobile (maillage mobile de vitesse arbitraire \vec{v}_{ale}) dans le cas d'un calcul ALE. Le calcul Lagrangien implique que le maillage se déforme avec le fluide et peut se distordre. La seconde étape permet d'éviter cette distorsion en déplaçant le maillage de manière à préserver la régularité de ce dernier. Le mouvement du maillage est indépendant du mouvement du fluide ce qui entraîne des flux de masse, de quantité de mouvement, d'énergie. Ces flux sont calculées à partir de schémas d'advections de Godunov.

La méthode split est pratique pour diviser des problèmes complexes en une série de problèmes plus simples. La division d'un calcul Eulérien ou ALE en deux phases : une phase Lagrangienne et une phase Eulérienne est une application de cette méthode. Elle est aussi fréquemment utilisée pour construire des algorithmes d'advection 2D ou 3D à partir d'algorithmes 1D. Le pas de calcul d'un écoulement par une formulation Eulérienne ou ALE basée sur un opérateur split procède par les 2 étapes suivantes :

I) La formulation faible de Eq.(5.25) peut être réécrite sous une forme Lagrangienne en utilisant la relation Eq.(5.11) liant la dérivée matérielle ou Lagrangienne à la dérivée donnée dans le repère ALE :

$$\int_{\Omega_f} \delta v_i \rho \frac{Dv_i}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega_f} \frac{\partial \delta v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta v_i \rho b_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_f^t} \delta v_i t_i d\partial\Omega \quad (5.27)$$

$$\int_{\Omega_f} \delta e \frac{De}{Dt} d\Omega = \int_{\Omega_f} \delta e \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega_f} \delta e v_i \rho b_i d\Omega \quad (5.28)$$

La conservation de la masse est une simple équation algébrique. La solution est déterminée dans un cycle Lagrangien comprenant les sous-étapes suivantes :

- 1) Connaissant le champ de contraintes, de pression, et la viscosité de choc à l'instant t^n en chaque élément, les forces aux nœuds sont calculées. On en déduit les accélérations en divisant ces forces par la masse nodale.
- 2) Les accélérations sont intégrées pour donner les vitesses à l'instant $t^{n+1/2}$.
- 3) Les vitesses sont intégrées à leur tour pour fournir le champ de déplacements à l'instant t^{n+1} mettant ainsi à jour la position Lagrangienne du maillage.
- 4) La viscosité de choc artificielle est calculée à partir de $v^{n+1/2}$.
- 5) L'énergie interne est mise à jour.
- 6) La pression est déterminée à partir de l'équation d'état en utilisant la masse volumique et l'énergie interne par unité de volume.
- 7) Un nouveau pas de temps est calculé en se basant sur la condition CFL (Courant Friedrichs Levy).

II) La phase Eulérienne ou d'advection résout le problème hyperbolique de l'advection des grandeurs trouvées dans le cycle précédent quand le maillage est déplacé librement vis à vis du fluide. Les équations de transport sont données en considérant les formes homogènes de Eq.(5.15),Eq.(5.17) et Eq.(5.18) :

$$\left(\frac{\partial \rho^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \vec{w} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \rho = 0 \quad (5.29)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \rho \vec{w} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \vec{v} = 0 \quad (5.30)$$

$$\rho \left(\frac{\partial e^{ale}}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + \rho \vec{w} \vec{\nabla}_{\vec{x}} e = 0 \quad (5.31)$$

Le temps t est fictif : il ne correspond pas au temps physique car les équations de transport ne gouvernent pas la convection physique du fluide. En fait, le mouvement du fluide est figé dans le repère physique et seul le maillage se déplace. Le mouvement des mailles par rapport au fluide entraîne des flux entre les mailles. Les conditions initiales sont données par les valeurs déterminées par le cycle Lagrangien :

$$\rho^{ale}(\chi, 0) = \rho_{lagrangien} \quad (5.32)$$

$$\vec{v}^{ale}(\chi, 0) = \vec{v}_{lagrangien} \quad (5.33)$$

$$e^{ale}(\chi, 0) = e_{lagrangien} \quad (5.34)$$

Ce problème est résolu par une formulation en volumes finis. Il est alors préférable de considérer la forme conservative des équations d'advection. Pour cela, on définit le jacobien de la transformation $\vec{\psi}(\vec{\chi}, t)$ donné par :

$$\left(\frac{\partial J_\psi}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} = J_\psi \text{div}(\vec{v}_{ale}) \quad (5.35)$$

Pour une formulation purement Eulérienne ou purement Lagrangienne, $J_\psi = 1$. Une combinaison linéaire permet d'obtenir les formes conservatives de Eq.(5.29), Eq.(5.30) et Eq.(5.31) en multipliant chacune de ces équations par J_ψ et en factorisant Eq.(5.35) par ρ ou \vec{v} ou e :

$$\left(\frac{\partial \rho J_\psi}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} + J_\psi \text{div}(\rho \vec{w}) = 0 \quad (5.36)$$

$$\left(\frac{\partial \rho \vec{v} J_\psi}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} + J_\psi \text{div}(\rho \vec{w} \otimes \vec{v}) = 0 \quad (5.37)$$

$$\left(\frac{\partial \rho e J_\psi}{\partial t} \right)_{\vec{\chi}} + J_\psi \text{div}(\rho \vec{w} e) = 0 \quad (5.38)$$

On remarquera qu'une grandeur g^{ale} exprimée dans Ω_{ale} peut être donnée dans Ω_f en inversant $\vec{\psi}(\vec{\chi}, t)$: $g^{ale}(\vec{\chi}, t) = g^{ale}(\vec{\psi}^{-1}(\vec{x}, t), t) = g(\vec{x}, t)$. Suivant Eq.(5.36), Eq.(5.37) et Eq.(5.38), le cycle Eulérien projette, sur le nouveau maillage, la solution physique déterminée dans le cycle Lagrangien en procédant par les sous-étapes suivantes :

8) Un nouveau maillage est généré en relaxant le maillage Lagrangien dans un calcul ALE ou en revenant à la configuration fixe initiale dans un calcul Eulérien.

9) Les variables centrées dans l'élément (contrainte, énergie interne,...) sont projetées par un algorithme d'advection de type Godunov.

10) Les vitesses aux nœuds sont projetées à leur tour sur le nouveau maillage par une technique HIS (Half Index Shift) : on crée un nouveau maillage décalé d'un demi-pas dans les 3 directions de manière à ce que les centres des mailles soient les nœuds du maillage original.

Chacune des étapes du cycle Lagrangien et du cycle Eulérien est décrite dans les paragraphes suivants.

5.2.3. Discrétisation en éléments finis : Calcul des grandeurs cinématiques

Pour un maillage d'éléments à 8 nœuds, Ω_f est décomposé en éléments Ω_f^e . Le mouvement du maillage est donné par :

$$\vec{x}(\vec{\xi}, t) = \sum_{I=1}^8 \vec{x}_I(t) N_I(\vec{\xi}) \quad (5.39)$$

où $\vec{\xi}$ et \vec{x}_I représentent les coordonnées de l'élément parent associé et du nœud I respectivement et N_I est la fonction forme définie par :

$$N_I = \frac{1}{8} (1 + \xi \xi_I)(1 + \eta \eta_I)(1 + \zeta \zeta_I) \quad (5.40)$$

avec ξ_I, η_I et ζ_I prenant suivant I les valeurs $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Dans le cadre de cette approximation, les coordonnées ALE sont données par :

$$\vec{\chi}(\vec{\xi}) = \sum_{I=1}^8 \vec{\chi}_I N_I(\vec{\xi}) \quad (5.41)$$

La dérivée matérielle d'une grandeur g donnée par Eq.(5.11) est approximée par :

$$\frac{Dg}{Dt} = \sum_{I=1}^8 \frac{dg_I(t)}{dt} N_I(\vec{\xi}) + w(\vec{\xi}, t) \cdot \vec{\nabla} N_I(\vec{\xi}) g_I(t) \quad (5.42)$$

La forme faible dans le cycle Lagrangien de Eq.(5.27) prend la forme discrétisée ci-dessous ; la conservation de l'énergie requiert un traitement particulier que l'on verra dans un autre paragraphe :

$$\mathbf{M} \frac{D\mathbf{v}}{Dt} + \mathbf{f}_{int} = \mathbf{f}_{ext} \quad (5.43)$$

avec

$$\mathbf{M} = \mathbf{Id} \left[\int_{\Omega_f^e} \rho N_I N_J d\Omega \right] = \mathbf{Id} \left[\tilde{M}_{IJ} \right] \quad (5.44)$$

$$\mathbf{f}_{int} = \left[\int_{\Omega_f^e} \frac{\partial N_I}{\partial x_j} \sigma_{ij} d\Omega \right] \quad (5.45)$$

$$\mathbf{f}_{ext} = \left[\int_{\Omega_f^e} \rho N_I b_i d\Omega + \int_{\partial\Omega_f^e} N_I t_i d\partial\Omega \right] \quad (5.46)$$

$$\mathbf{v} = [\vec{v}_J] \quad (5.47)$$

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left[\frac{D\vec{v}_J}{Dt} \right] \quad (5.48)$$

où \mathbf{Id} est la matrice d'identité de dimension 3. La matrice masse est diagonalisée en sommant les termes d'une ligne de $[\tilde{M}_{IJ}]$:

$$\tilde{M}_{II} = \sum_{J=1}^8 \int_{\Omega_f^e} \rho N_I N_J d\Omega = \int_{\Omega_f^e} \rho N_I \sum_{J=1}^8 N_J d\Omega = \int_{\Omega_f^e} \rho N_I d\Omega \quad (5.49)$$

Les intégrales précédentes sont évaluées avec un point de quadrature au centre de l'élément. Le calcul de la matrice masse avec un point de quadrature permet d'obtenir :

$$\tilde{M}_{II} = \frac{1}{8} \rho Vol(\Omega_f^e) \quad (5.50)$$

où $Vol(\Omega_f^e)$ est le volume de l'élément Ω_f^e . Les accélérations, les vitesses et les nouvelles positions sont déduites de l'équation de quantité de mouvement :

$$\dot{a}_{iI}^n = \frac{(f_{iI}^{ext})^n - (f_{iI}^{int})^n}{\tilde{M}_{II}} \quad (5.51)$$

$$v_{iI}^{n+1/2} = v_{iI}^{n-1/2} + \dot{a}_{iI}^n \Delta t \quad (5.52)$$

$$x_{iI}^{n+1} = x_{iI}^{n-1} + v_{iI}^{n+1/2} \Delta t \quad (5.53)$$

Dans les relations précédentes, on a besoin de connaître le pas de temps du calcul. Il est donné en prenant le minimum des pas de calcul Δt_e déterminés pour chaque élément brique par :

$$\Delta t_e = \frac{L}{Q + (Q^2 + c^2)^{1/2}} \quad (5.54)$$

avec Q , une fonction des coefficients de la viscosité de choc C_0 et C_1 :

$$Q = C_1 c + C_0 L |div(\mathbf{v})| \quad \text{pour } div(\mathbf{v}) < 0 \quad (5.55)$$

Si $div(\mathbf{v}) \geq 0$, alors $Q = 0$. L est une dimension caractéristique de l'élément :

$$L = \frac{Vol(\Omega_f^e)}{A_{max}(\Omega_f^e)} \quad (5.56)$$

où $A_{max}(\Omega_f^e)$ est l'aire de la plus grande face de Ω_f^e . La vitesse du son isentropique, c est définie par :

$$c = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \quad (5.57)$$

avec s l'entropie. Quand s est constante c'est à dire lorsque Ω_f^e n'échange pas de chaleur à travers sa frontière $\partial\Omega_f^e$, on parle aussi de "vitesse du son adiabatique". Les étapes du calcul 1), 2), 3) et 7) ont été décrites. Il reste à évoquer la viscosité de choc (étape 4), et le calcul de l'énergie interne (étape 5) qui servira dans l'équation d'état (étape 6). Détaillons d'abord la viscosité de choc.

5.2.4. Viscosité de choc (*bulk viscosity*)

Il est possible de traiter l'onde de choc comme une frontière interne en appliquant les équations de Rankine-Hugoniot. Cependant, l'onde étant en mouvement par rapport au maillage, l'application des conditions est difficile. La non-linéarité des conditions aux limites implique que le mouvement de la surface de choc est déterminée par les conditions aux limites. Par cette approche, le traitement des ondes de chocs débute à partir d'une configuration arbitraire et la solution est optimisée en bouclant dans un même pas de temps (technique "trial-and-error"). Cette procédure peut être utilisée pour des problèmes simples unidimensionnels mais elle est difficilement applicable à des cas 3D complexes ; de plus elle exige de grands temps de calcul. La méthode proposée par Von Neumann et Richtmyer [NEU 50] permet un traitement automatique des ondes de chocs sans avoir à rechercher la position de l'onde pour appliquer les conditions de chocs. A la traversée d'un choc fort, l'irréversibilité thermodynamique est traduite par une augmentation de l'entropie. L'idée est d'introduire, dans les équations, un terme dissipatif qui traduirait cette irréversibilité. Le choc est alors approché par une surface ayant une épaisseur comparable sinon plus grande que le pas de maille dans la direction de propagation. Le mécanisme de dissipation est représenté par une pression q ajoutée à la pression physique. q est supposée négligeable sauf dans la région des ondes de choc. Cette viscosité artificielle appelée aussi "bulk viscosity" permet d'étendre l'onde de choc sur plusieurs mailles et de vérifier néanmoins les équations de Rankine-Hugoniot à condition que l'épaisseur de l'onde ainsi approximée soit petite devant les autres dimensions du problèmes. En 1D, la viscosité de choc proposée dans [NEU 50] a la forme suivante :

$$q = C_0\rho(\Delta x)^2 (\text{div}(\mathbf{v}))^2 \quad \text{si} \quad \frac{\partial v}{\partial x} < 0 \quad (5.58)$$

et

$$q = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0 \quad (5.59)$$

où C_0 est une constante sans dimension. q est ajoutée à la pression dans la conservation de quantité de mouvement Eq.(5.27) et dans l'équation de l'énergie interne Eq.(5.28). Ainsi, les forces internes de Eq.(5.45) sont déterminées en ajoutant q au terme de pression de σ_{ij} . En 1955, Landshoff [LAN 55] suggère d'ajouter un terme linéaire à q :

$$q = C_0\rho(\Delta x)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + C_1c\rho\Delta x \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{si} \quad \frac{\partial v}{\partial x} < 0 \quad (5.60)$$

et

$$q = 0 \quad \text{si} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \geq 0 \quad (5.61)$$

En 2 et 3 dimensions, la divergence de la vitesse est donnée par d_{ii} , la trace du tenseur taux de déformations, et la longueur caractéristique est la racine carrée de l'aire ou la racine cubique du volume de l'élément Ω_f^e :

$$q = C_0 \rho L^2 \text{div}(\mathbf{v})^2 + C_1 c \rho L \text{div}(\mathbf{v}) \quad \text{si} \quad \text{div}(\mathbf{v}) < 0 \quad (5.62)$$

et

$$q = 0 \quad \text{si} \quad \text{div}(\mathbf{v}) \geq 0 \quad (5.63)$$

Les valeurs prises pour C_0 et C_1 sont 1.5 et 0.06 respectivement. Pour dépasser les limites d'une viscosité scalaire, un tenseur de viscosités peut être développé en évaluant le terme en pression indépendamment de la direction i et en considérant la partie déviatorique comme une fonction linéaire du taux de déformation déviatorique d'_{ij} , la densité et la distance caractéristique L :

$$q_{ij} = (C_0 \rho L^2 \text{div}(\mathbf{v})^2 + C_1 c \rho L \text{div}(\mathbf{v})) \delta_{ij} + C \rho L d'_{ij} \quad (5.64)$$

5.2.5. Calcul de l'énergie interne et de la pression

Comme pour le champ de vitesses, le calcul de l'énergie interne repose sur une intégration en un point de quadrature ce qui simplifie Eq.(5.28). En effet, l'énergie interne, la fonction test δe , ρ , le taux de déformations et le champ de contraintes sont centrés au point de quadrature donc constants dans Ω_f^e . La forme faible Eq.(5.28) devient avec $V = \text{vol}(\Omega_f^e) = \int_{\Omega_f^e} d\Omega$:

$$\delta e \rho \frac{De}{Dt} V = \delta e d_{ij} \sigma_{ij} V + \delta e \rho \vec{g} \vec{v}_{moy}^e V \quad (5.65)$$

avec $\vec{v}_{moy}^e V = \int_{\Omega_f^e} \vec{v} d\Omega$ et $\vec{b} = \vec{g}$, la gravité. Par définition, δe est une fonction test arbitraire et on suppose pour simplifier que les forces à distances b_i sont nulles (dans les applications numériques, la gravité n'est pas en général prise en compte) :

$$\rho \frac{De}{Dt} V = d_{ij} \sigma_{ij} V \quad (5.66)$$

Les tenseurs du second membre sont décomposés en une partie déviatorique d'indice $(.)'$ et une partie moyenne $\frac{1}{3}(\cdot)_{ii}$. En incluant le tenseur des viscosités de choc \mathbf{q} que l'on suppose symétrique, Eq.(5.66) devient :

$$\rho \frac{De}{Dt} V = \left(\frac{1}{3} d_{kk} \delta_{ij} + d'_{ij} \right) \left(\sigma'_{ij} - P \delta_{ij} + q'_{ij} + \frac{1}{3} q_{ii} \delta_{ij} \right) V \quad (5.67)$$

La trace du taux de déformation est égale au taux de déformation volumétrique $\frac{\Delta V}{V\Delta t}$. En introduisant l'énergie interne totale de l'élément $E = \rho eV$, on discrétise Eq.(5.67) sur un schéma de différences finies centrées :

$$E^{n+1} = E^n + \Delta t \left((\sigma'_{ij}{}^{n+1/2} + q'_{ij}{}^{n+1/2}) d'_{ij}{}^{n+1/2} V^{n+1/2} \right) + \left(\frac{1}{3} q_{kk}{}^{n+1/2} - P^{n+1/2} \right) \Delta V^{n+1/2} \quad (5.68)$$

avec

$$\sigma'_{ij}{}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (\sigma'_{ij}{}^n + \sigma'_{ij}{}^{n+1}) \quad (5.69)$$

$$q'_{ij}{}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (q'_{ij}{}^n + q'_{ij}{}^{n+1}) \quad (5.70)$$

$$P'_{ij}{}^{n+1/2} = \frac{1}{2} (P'_{ij}{}^n + P'_{ij}{}^{n+1}) \quad (5.71)$$

L'énergie dépend de la pression à t^{n+1} rendant ainsi Eq.(5.68) implicite puisque la pression dépend de l'énergie par la relation d'état suivante :

$$P(E, \rho) = A_1(\rho) + A_2(\rho) \frac{E}{V} \quad (5.72)$$

L'équation d'état peut être un polynôme de l'énergie interne par unité de volume et du taux relatif de la fraction volumique définie par $\mu = \frac{\rho - \rho_{ref}}{\rho_{ref}}$ où ρ_{ref} est la masse volumique de référence :

$$A_1(\rho) = C_0 + C_1\mu + C_2\mu^2 \quad (5.73)$$

$$A_2(\rho) = C_3 + C_4\mu + C_5\mu^2 + C_6\mu^3 \quad (5.74)$$

où C_i sont des constantes. Les équations d'état pour l'eau et pour l'air considérées dans les applications numériques sont définies respectivement par :

$$P = C_1\mu \quad \text{avec} \quad C_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, 2, \dots, 6 \quad \text{et} \quad C_1 = \rho_{ref} c^2 \quad (5.75)$$

$$P = \frac{\rho}{\rho_{ref}} (\gamma - 1) E \quad \text{avec} \quad C_i = 0 \quad \text{pour} \quad i = 0, \dots, 3, 6 \quad \text{et} \quad C_4 = C_5 = \gamma - 1 \quad (5.76)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques. En utilisant Eq.(5.72), on peut réécrire Eq.(5.68) sous une forme explicite. Une fois E^{n+1} déterminée, Eq.(5.72) donne la pression à t^{n+1} .

Les étapes (1) à (7) du cycle Lagrangien sont complétées : toutes les variables physiques sont connues. Il reste à présent à exécuter le cycle Eulérien (étapes restantes : (8) à (10)) pour limiter les distorsions de mailles.

5.2.6. Méthodes d'advection

Dans le cycle d'advection, pour maintenir des mailles régulières, le maillage est soit replacé à sa position initiale pour un calcul Eulérien, soit déplacé vers une position arbitraire pour un calcul ALE. Le déplacement des mailles est indépendant du mouvement du fluide. De ce fait, des flux de matières entre les mailles sont créés. Ces flux sont caractérisés par le transport des inconnues physiques de la position du maillage donnée par le cycle Lagrangien vers sa nouvelle position. La projection des variables centrées telles que la masse, l'énergie, la quantité de mouvement,... se fait par des algorithmes de transport : par exemple, le schéma décentré (upstream method) est une méthode du premier ordre tandis que la méthode Van Leer est du second ordre. C'est cette dernière qui est utilisée dans les applications numériques. Les méthodes d'advection doivent être précises, stables, conservatives et monotones c'est à dire qu'aucun minimum ou maximum local ne doit être créé par le transport des flux. Les grandeurs centrées dans la maille sont représentées par g et la forme générique des équations hyperboliques Eq.(5.36), Eq.(5.37),Eq.(5.38) gouvernant le transport de ces variables physiques est donnée par :

$$\left(\frac{\partial g J_\psi}{\partial t} \right)_{\vec{x}} + J_\psi \operatorname{div}(g \vec{w}) = 0 \quad (5.77)$$

avec

$$g(\vec{x}, 0) = g_{\text{lagrangien}}(\vec{x}) \quad (5.78)$$

On considère, dans les applications numériques, une formulation Eulérienne : $J_\psi = 1$. En identifiant, dans g , la masse volumique ou la composante i de la quantité de mouvement par unité de volume (ρv_i) ou encore l'énergie interne par unité de volume (ρe), on retrouve Eq.(5.36), Eq.(5.37), et Eq.(5.38) respectivement. Le transport de la quantité de mouvement exige un traitement particulier étant donné que les vitesses sont déterminées aux nœuds de la maille et non au centre de celle-ci. Le transport de g est purement géométrique et la grandeur t n'est pas le temps physique. Ainsi, quand g passe de l'état n à $n + 1$, cette grandeur n'est pas avancée dans le temps : elle est projetée du maillage à l'état n sur le nouveau maillage à l'état $n + 1$. Pour assurer la stabilité des schémas d'advection, le déplacement du maillage dans un pas de temps Δt doit être inférieur à une dimension caractéristique du maillage L . Cette condition est imposée en précisant que le nombre de courant C doit être inférieur à 1 :

$$C = \frac{|\vec{w}| \Delta t}{L} \leq 1 \quad (5.79)$$

Le maillage ne se déplaçant pas sur un pas de temps physique, Δt est arbitraire et $V = \vec{w} \Delta t$ est le volume transporté entre les mailles adjacentes. $f = g \vec{w} \Delta t = gV$ constitue un flux de masse si g est la masse volumique ou un flux d'énergie interne si g est l'énergie interne volumique, ou encore un flux de quantité de mouvement si g représente une quantité de mouvement par unité de volume (ρv_i).

5.2.6.1. Schéma décentré (Donor Cell)

On présente l'algorithme pour une advection en 1D. Bien que cette approche soit du premier ordre, elle respecte les principales caractéristiques d'un algorithme d'advection : elle est stable et monotone. On résoud :

$$g_{j+1/2}^{n+1} = g_{j+1/2}^n + \frac{1}{\Delta x} (f_j - f_{j+1}) \quad (5.80)$$

avec

$$f_j = \frac{1}{2} w_j \Delta t (g_{j-1/2}^n + g_{j+1/2}^n) + \frac{1}{2} |w_j| \Delta t (g_{j-1/2}^n - g_{j+1/2}^n) \quad (5.81)$$

j définit un nœud. $g_{j+1/2}^n$ et $g_{j-1/2}^n$ sont les valeurs de g centrées dans les mailles à droite et à gauche de j respectivement. La valeur de f_j dépend de la valeur de la vitesse au nœud j , w_j :

- Si $w_j > 0$, alors $f_j = w_j g_{j-1/2}^n \Delta t = g_{j-1/2}^n V_j$, le flux de g va de la gauche vers la droite (vers les indices croissants en j)

- Si $w_j < 0$, alors $f_j = w_j g_{j+1/2}^n \Delta t = g_{j+1/2}^n V_j$, le flux de g va de la droite vers la gauche (vers les indices décroissants en j)

L'algorithme de la cellule donneuse est une méthode de Godunov du premier ordre. Van Leer [LEE 77] a introduit une méthode de Godunov d'ordre plus élevé.

5.2.6.2. Algorithme de Van Leer (MUSCL)

L'algorithme d'advection présenté ici est connue aussi sous le nom d'algorithme MUSCL (Monotone Upwind Schemes for Conservation Laws). La méthode de la cellule donneuse suppose que g est constante sur la maille. Van Leer remplace cette distribution constante par morceaux par une distribution d'un ordre plus élevé. Une distribution linéaire par morceaux peut être utilisée :

$$g_{j+1/2}^n(x) = S_{j+1/2}^n (x - x_{j+1/2}^n) + g_{j+1/2}^n \quad (5.82)$$

où x est la coordonnée dans le volume de l'élément, $x_{j+1/2}^n$, la coordonnée du centre de la maille et $S_{j+1/2}^n$, la pente de la droite. Pour assurer la monotonicité, cette pente est limitée par :

$$S_{j+1/2}^n = \frac{1}{2} (sgn(s^L) + sgn(s^R)) \min(|s^L|, |s_{j+1/2}^n|, |s^R|) \quad (5.83)$$

avec

$$S^L = \frac{1}{2\Delta x_{j+1/2}} (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n) \quad (5.84)$$

et

$$S^R = \frac{1}{2\Delta x_{j+1/2}} (g_{j+3/2}^n - g_{j+1/2}^n) \quad (5.85)$$

où $s_{j+1/2}^n$ est une approximation de la pente du second ordre obtenue en interpolant par une parabole les valeurs de g aux centres des 3 mailles adjacentes :

$$s_{j+1/2}^n = \frac{(g_{j+3/2}^n - g_{j+1/2}^n)\Delta x_j^2 + (g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n)\Delta x_{j+1}^2}{\Delta x_{j+1}\Delta x_j(\Delta x_{j+1} + \Delta x_j)} \quad (5.86)$$

avec

$$\Delta x_j = x_{j+1/2}^n - x_{j-1/2}^n \quad (5.87)$$

Un second minimum peut être envisagé en remplaçant Eq.(5.85) et Eq.(5.86) par ce qui suit :

$$S^L = \frac{g_{j+1/2}^n - g_{j-1/2}^n}{x_{j+1/2} - (x_j + \frac{1}{2}\max(0, w_j)\Delta t)} \quad (5.88)$$

$$S^R = \frac{g_{j+3/2}^n - g_{j+1/2}^n}{x_{j+1} - \frac{1}{2}\min(0, w_{j+1}\Delta t) - x_{j+1/2}} \quad (5.89)$$

Le flux f_j au nœud j est alors évalué en utilisant un schéma similaire à la méthode Donor Cell :

$$f_j = \frac{1}{2}w_j(g_j^- + g_j^+)\Delta t + \frac{1}{2}|w_j|(g_j^- - g_j^+)\Delta t \quad (5.90)$$

avec

$$g^- = S_{j-1/2}^n(x^c - x_{j-1/2}^n) + g_{j-1/2}^n \quad (5.91)$$

$$g^+ = S_{j+1/2}^n(x^c - x_{j+1/2}^n) + g_{j+1/2}^n \quad (5.92)$$

et

$$x^c = x_j^n + \frac{1}{2}\Delta t w_j \quad (5.93)$$

On obtient la nouvelle valeur de g , après l'advection, par Eq.(5.80)

$$g_{j+1/2}^{n+1} = g_{j+1/2}^n + \frac{1}{\Delta x}(f_j - f_{j+1}) \quad (5.94)$$

Cette méthode d'advection est adoptée dans les applications numériques. Les autres variables évaluées au centre de la maille lors du cycle Lagrangien sont aussi projetées sur le nouveau maillage par l'algorithme d'advection présenté. Les vitesses n'étant pas centrées dans la maille mais déterminées au nœuds, il faut modifier cet algorithme pour l'adapter à l'advection de la quantité de mouvement.

5.2.6.3. Advection de la quantité de mouvement

La vitesse, contrairement aux autres champs, est évaluée aux nœuds du maillage. La quantité de mouvement est advectée à la place du champ de vitesses pour assurer la conservation de la quantité de mouvement. L'algorithme présenté précédemment doit être modifié pour advecter les quantités de mouvements nodales. L'idée est de décaler d'un demi-pas (dans les trois directions de l'espace pour le cas 3D) les indices de l'algorithme donné par Eq.(5.94). Le premier code à proposer ce concept fut YAQUI

[AMS 73]. De cette manière, les nœuds deviennent les centres d'un maillage fictif sur lequel est appliqué l'algorithme 1D de Van Leer.

$$M'_j v'_j = M_j v_j + (\rho v)_{j-1/2} V_{j-1/2} - (\rho v)_{j+1/2} V_{j+1/2} \quad (5.95)$$

où M_j représente la masse nodale du nœud j du maillage et l'indice $'$ indique une quantité projetée sur le nouveau maillage. L'advection de la masse nodale est interpolée en fonction des masses advectées des centres de mailles : $M'_{j\pm 1/2} = \rho_{j\pm 1/2} V_{j\pm 1/2}$ avec $V_{j\pm 1/2}$ le volume de la maille $j \pm 1/2$; dans le cas 1D, $V_{j\pm 1/2} = \Delta x_{j\pm 1/2}$. On obtient :

$$\begin{aligned} M'_j &= \frac{M'_{j+1/2} + M'_{j-1/2}}{2} \\ &= \frac{1}{2} (M_{j+1/2} + (\rho V)_j - (\rho V)_{j+1} + M_{j-1/2}) \\ &\quad + \frac{1}{2} ((\rho V)_{j-1} - (\rho V)_j) \\ &= M_j + \frac{1}{2} (f_j - f_{j+1} + f_{j-1} - f_j) \end{aligned} \quad (5.96)$$

L'algorithme SALE (Simple Arbitrary Lagrangian Eulerian code) [AMS 81] approxime, dans Eq.(5.95), les quantités de mouvement centrées en prenant simplement la moyenne des quantités de mouvement nodales. La variation de la quantité de mouvement au centre d'une maille ($j + 1/2$) est donnée par $(\rho v)_{j-1/2} V_{j-1/2} - (\rho v)_{j+1/2} V_{j+1/2}$. En prenant la moitié de cette quantité pour chaque élément partageant le nœud j , on obtient la variation de quantité de mouvement de ce nœud :

$$M'_j v'_j = M_j v_j + \frac{1}{2} ((\rho v)_{j-1} V_{j-1} - (\rho v)_{j+1} V_{j+1}) \quad (5.97)$$

L'inconvénient de cet algorithme est qu'il dissipe les chocs parce qu'elle est du premier ordre. Un algorithme du second ordre est obtenue par Margolin [MAR 88] en développant, dans le code SHALE, un schéma similaire à ce qui précède mais en prenant en plus de la moyenne de la quantité de mouvement, la moyenne de sa dérivée. Les algorithmes SALE et SHALE sont monotones par rapport aux variables centrées mais ils n'assurent pas la monotonicité des variables nodales. Pour y remédier, Benson propose une méthode appelée algorithme HIS (Half Index Shift) [BEN 92] dans laquelle il se base sur les analyses précédentes mais en prenant des précautions dans la projection donnant les vitesses nodales en fonction des quantités de mouvement centrées. Il s'assure que la matrice de transformation entre les variables centrées et nodales est diagonale. Dans les applications numériques, l'algorithme HIS est utilisée avec la méthode d'advection de Van Leer pour projeter le champ de vitesses sur le nouveau maillage issu du cycle Eulérien.

Comme les applications numériques sont 2D ou 3D, il est nécessaire d'étendre la méthode de Van Leer 1D, à des problèmes de convection suivant les trois directions de l'espace.

5.2.6.4. Calcul de l'interface dans des problèmes multi-phasiques

Un élément est supposé contenir plusieurs matériaux. Chaque matériau occupe une fraction fv du volume total de l'élément et possède ses propres propriétés et ses propres variables. Une fois obtenue le champ de fractions volumiques dans le maillage, on calcule la position de l'interface en utilisant la méthode de Young [YOU 82]. La méthode de Young est développée pour déterminer les interfaces matérielles dans les éléments multi-matériaux. Pour deux fluides dans un problème 2D, par exemple, la frontière matérielle dans une cellule est calculée en utilisant les fractions volumiques de cette cellule et des 8 voisines (dans un cas 3D, on utiliserait les fractions volumiques de toutes les cellules adjacentes). L'interface est approximée par une droite (un plan en 3D) dont la pente est déterminée par :

$$\vec{n} = \frac{\vec{grad}(fv)}{|\vec{grad}(fv)|} \quad (5.98)$$

où \vec{n} est une normale à la droite (au plan en 3D). Par exemple, dans le cas 2D, on considère un carré de 9 cellules centrées sur la maille $(i + 1/2, j + 1/2)$. La pente est donnée par :

$$\frac{\partial fv}{\partial x} = \frac{fv_{(i+3/2, j+1/2)} - fv_{(i-1/2, j+1/2)}}{x_{(i+3/2, j+1/2)} - x_{(i-1/2, j+1/2)}} \quad (5.99)$$

$$\frac{\partial fv}{\partial y} = \frac{fv_{(i+1/2, j+3/2)} - fv_{(i+1/2, j-1/2)}}{x_{(i+1/2, j+3/2)} - x_{(i+1/2, j-1/2)}} \quad (5.100)$$

avec

$$fv_{(i+3/2, j+1/2)} = \frac{fv_{(i+3/2, j+3/2)} + 2fv_{(i+3/2, j+1/2)} + fv_{(i+3/2, j-1/2)}}{4} \quad (5.101)$$

$$fv_{(i-1/2, j+1/2)} = \frac{fv_{(i-1/2, j+3/2)} + 2fv_{(i-1/2, j+1/2)} + fv_{(i-1/2, j-1/2)}}{4} \quad (5.102)$$

$$fv_{(i+1/2, j+3/2)} = \frac{fv_{(i-1/2, j+3/2)} + 2fv_{(i+1/2, j+3/2)} + fv_{(i+3/2, j+3/2)}}{4} \quad (5.103)$$

$$fv_{(i+1/2, j-1/2)} = \frac{fv_{(i-1/2, j-1/2)} + 2fv_{(i+1/2, j-1/2)} + fv_{(i+3/2, j-1/2)}}{4} \quad (5.104)$$

Ensuite, on ajuste la position de la droite de manière à obtenir la fraction volumique de la cellule centrale : $fv_{(i+1/2, j+1/2)}$. Il suffit d'étendre cette analyse à un cube de 27 éléments pour approximer l'interface matérielle dans un cas 3D. Un test sur la fraction volumique permet de déterminer si l'élément est un élément multi-matériaux ou non. Par exemple un écoulement de surface libre entre l'air et l'eau, si $fv^m = 1$ ou $fv^m = 0$, l'élément contient soit de l'eau, soit de l'air respectivement. Si $0 < fv^m < 1$, l'élément contient la surface libre. Les flux de chaque matériau sont déterminés en fonction de la position de l'interface.

5.2.7. Conclusion

Dans ce paragraphe, on a décrit la formulation ALE multi-matériaux utilisée pour modéliser l'écoulement de surface libre. A présent, l'impact hydrodynamique nécessite une modélisation des interactions entre le fluide et la structure. Une partie de la frontière $\partial\Omega_f^t$ complémentaire de la surface libre est contrainte par le couplage entre la structure et le fluide. Dans la suite, l'algorithme couplant la formulation Lagrangienne et la formulation Eulérienne est présenté. Cette algorithme est aussi applicable à un couplage entre une formulation ALE et une formulation Lagrangienne.

5.3. Couplage Euler/Lagrange

Ce paragraphe est consacré à la description du couplage Euler/Lagrange. On s'intéressera, plus particulièrement, au couplage par pénalité. Cet algorithme repose sur le même principe que le contact par pénalité. Ici, on abordera les particularités de l'algorithme du couplage par pénalité, notamment, la recherche des nœuds fluide et structure en interaction, différente du contact par pénalité puisque pour ce dernier, un contact géométrique existe. Dans le cadre du couplage par pénalité, il n'y a pas de contact géométrique entre deux maillages distincts. En général, le maillage structure est immergé dans une grille Eulérienne et on couple une particule fluide (la particule fluide est assimilée à un nœud) et un élément structure ce qui introduit la notion d'interface matérielle qui correspond à l'interface géométrique rencontrée dans le contact. La méthode de couplage présentée ici peut être qualifiée de couplage mixte car elle ne peut pas être classée clairement comme un couplage monolithique ou un couplage partitionné. Cette méthode a les caractéristiques d'une approche monolithique :

- un code unique pour le fluide et la structure,
- une avancée simultanée de la solution pour le fluide et de la solution pour la structure,

mais aussi les caractéristiques d'un couplage partitionné :

- la force d'interaction est prédite par : $F_s = k.d$ dans lequel k est la raideur du couplage et d le déplacement relatif,
- un schéma d'intégration explicite en temps.

La méthode de couplage est néanmoins plus proche d'un schéma partitionné que d'un schéma monolithique.

Les conditions d'interaction fluide/structure seront d'abord établies et on décrira le couplage par pénalité. Cet algorithme sera, par la suite, l'objet de notre étude dans les applications numériques.

5.3.1. Conditions d'interaction fluide/structure

Pour modéliser numériquement ou mathématiquement l'interaction entre deux corps, les conditions de non-interpénétration ou de contact unilatéral doivent être établies. De

nombreux travaux ont déjà été menés sur ce sujet : [LAU 93a], [LAU 93b], [LAU 94], [LAU 02] [KLA 86], [CUR 95]. Une revue détaillée des lois de frottement de Coulomb, de Shaw, de Tresca,... est présentée dans [oud89]. Le frottement n'est cependant pas pris en compte. Pour distinguer les deux systèmes mécaniques en interaction, un des corps est appelé maître et l'autre esclave. Les termes "cible" et "contacteur" sont parfois utilisés. Une particule de la surface esclave \vec{x}_s est ainsi étudiée par rapport à la surface maître. Le corps esclave est décrit en fonction du maître et une dissymétrie apparaît alors dans la mise en équation du problème du contact. Cependant, il est possible de régler numériquement cette dissymétrie en alternant par des algorithmes nommés "one-pass" ou "two-pass" [BEN 90], le rôle du maître et celui de l'esclave. La particule maître \vec{x}_m la plus proche de \vec{x}_s introduit la notion de vecteur distance [CHE 97] \vec{g} et de distance normale de contact g_n :

$$\vec{g} = \vec{x}_s - \vec{x}_m \quad (5.105)$$

$$g_n = (\vec{x}_s - \vec{x}_m) \cdot \vec{N}_m \quad (5.106)$$

Que l'étude porte sur le maître ou l'esclave, les relations sont écrites de la même manière. La première condition de non- interpénétration peut être alors écrite en fonction de g_n et du champ de déplacement $u(\vec{x}, t)$ sous la forme suivante :

$$g_n(\vec{x}, t) = g_{n0}(\vec{x}) - u_n(\vec{x}, t) \geq 0 \quad \text{pour } \vec{x} \in \Gamma^c \quad (5.107)$$

où Γ^c est la surface de contact commune à l'esclave et au maître ; $g_{n0}(\vec{x})$ est le gap initial, $u_n(\vec{x}, t) = \vec{u}(\vec{x}, t) \cdot \vec{N}$. Une autre condition est la condition de compression :

$$t_n(\vec{x}, t) \leq 0 \quad \text{pour } \vec{x} \in \Gamma^c \quad (5.108)$$

où t_n est la composante normale du vecteur des contraintes de Cauchy du corps esclave ou du corps maître. Les composantes normales esclave et maître sont identiques en module, d'après la loi de l'action et de la réaction qui peut être considérée comme la loi fondamentale en contact. La dernière condition est la condition de contact unitaire liant g_n et t_n :

$$g_n(\vec{x}, t) \cdot t_n(\vec{x}, t) = 0 \quad \text{pour } \vec{x} \in \Gamma^c \quad (5.109)$$

Cette dernière équation indique que si t_n est non-nulle, c'est à dire, si une compression s'exerce à l'interface séparant le maître et l'esclave, alors g_n est nulle et il y a un contact. Inversement, s'il n'y a pas de contact, g_n est non-nulle et aucune pression n'est exercée sur les frontières maître et esclave.

La condition de non-interpénétration n'est respectée qu'approximativement puisque, comme pour le contact par pénalité, une pénétration est autorisée.

5.3.2. Couplage par pénalité et multiplicateurs de Lagrange

Les dénominations "maître" et "esclave" sont, en général, attribuées au fluide et à la structure respectivement. Néanmoins, une inversion des rôles peut être effectuée même en cours de calcul. Aussi parlerons-nous ici directement du fluide et de

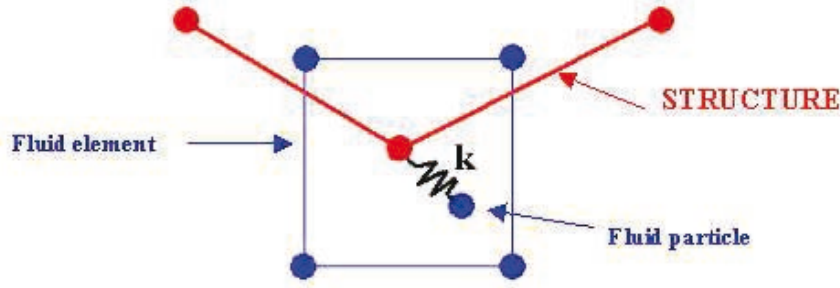


Figure 5.2. Schéma du couplage par pénalité

la structure sans passer par ces dénominations. Le comportement masse-ressort du contact est repris pour construire l'algorithme du couplage par pénalité. La principale différence est l'algorithme de recherche des nœuds en interaction. En effet, contrairement aux algorithmes précédents, il n'y a pas, dans le cadre du couplage, une frontière géométrique franche entre deux maillages distincts : ces derniers ne sont pas mis en "contact". Le couplage est utilisé pour gérer l'interaction fluide/structure entre un maillage Lagrangien, pour la structure, et un maillage Eulérien pour le fluide, le maillage Lagrangien étant immergé dans la grille Eulérienne. De ce fait, il est naturel que la recherche des nœuds du fluide ou de la structure en interaction soit différente de l'algorithme de recherche utilisée dans le contact. Ainsi, on ne vérifie pas la pénétration effective des nœuds esclaves dans le segment maître, donnée, dans le cas du contact, par la distance relative entre les positions Lagrangiennes des nœuds mais la distance relative entre une particule fluide et un point interne de l'élément de la structure. Ces points sont, en général et par défaut, utilisés pour le couplage à la place des nœuds de la structure. La position de ces points dépend de leur nombre. Dans les applications, on considère 4 points par élément et ils sont décalés d'un quart de pas de maille vers l'intérieur de l'élément. Les quantités aux points internes telles que les forces d'interaction, les masses ou les vitesses sont reliées aux quantités nodales par les fonctions de forme N_I . De la même manière, la particule fluide couplée au point interne de la structure peut être assimilée à un nouveau nœud et elle est physiquement liée aux autres nœuds par les fonctions de forme Eulériennes, la force de couplage exercée sur cette particule étant ensuite distribuée aux nœuds de l'élément par l'inverse de ces mêmes fonction de forme. Un déplacement relatif construit à partir des variables Eulériennes est donné par le produit du pas de temps de calcul par la vitesse relative normale à l'élément structure : $\Delta t.(v_{structure}^{n+1/2} - v_{fluide}^{n+1/2})$. La pénétration à chaque cycle est mise à jour par :

$$d^{n+1} = d^n + \Delta t.(v_{structure}^{n+1/2} - v_{fluide}^{n+1/2}) \quad (5.110)$$

Si $d^{n+1} \cdot \vec{n}^s$ où \vec{n}^s est le vecteur normal à la structure, l'algorithme de couplage est amorcé.

Une fois la pénétration déterminée, comme pour le contact par pénalité, une force de rappel, $F_{s \rightarrow f}$ est appliquée sur la particule fluide, la réaction à cette force étant distribuée aux nœuds structures, par les fonctions de formes nodales N_I :

$$N_I F_{f \rightarrow s}^{n+1} = -N_I k \cdot d^{n+1} \quad (5.111)$$

Le gros inconvénient de l'approche par pénalité est la détermination de la raideur. En général, elle est déterminée à partir des masses des points internes de la structure et des masses des particules fluides en interaction. La raideur peut être déterminée de trois manières différentes :

- Hallquist [HAL 98] évalue la raideur comme le rapport entre une masse fonction des nœuds esclaves et maîtres et le pas de temps du calcul au carré, un facteur adimensionnel, pf multiplie ce rapport : $pf \cdot M(m_{maître}, m_{esclave}) / \Delta t^2$. La fonction M dépend de la configuration géométrique des nœuds. Le facteur adimensionnel, pf , est le facteur de pénalité. Comme, dans l'algorithme du contact par pénalité, sa fonction est de régler la raideur du ressort entre la particule fluide et le point interne de la structure. Les efforts d'interaction dépendant de la raideur des ressorts, la difficulté de cette approche est de pouvoir calibrer correctement ce facteur de pénalité pour une modélisation d'un problème d'interaction fluide/structure quelconque.

- Zhong [ZHO 93], dans le cadre des méthodes de contact en éléments finis, détermine la force d'interaction en calculant la force de contact entre deux nœuds en 1D par une méthode de multiplicateurs de Lagrange. Cette approche, similaire à la théorie de Flanagan-Taylor [TAY 87] utilisée dans PRONTO, est implémentée dans un algorithme de contact appelé DENA (Defence Node Algorithm). Il est possible d'adapter son approche au couplage étant donné la similitude du couplage par pénalité avec le contact par pénalité. La particule fluide et le point interne de la structure ont les caractéristiques des nœuds. Ils peuvent ainsi être assimilés aux nœuds utilisés dans la théorie de Zhong. Ainsi, la particule fluide est le nœud contacteur de masse M_f et le point interne de la structure est le nœud cible M_s . On considère un choc frontal entre ces deux nœuds :

$$M_f \frac{dv_f}{dt} = F_f + F_{s \rightarrow f} \quad (5.112)$$

$$M_s \frac{dv_s}{dt} = F_s + F_{f \rightarrow s} \quad (5.113)$$

où F_f et F_s représentent, au temps t^n , les forces nodales sans la force d'interaction $F_{s \rightarrow f} = -F_{f \rightarrow s}$. F_f et F_s contiennent les contributions des autres forces d'interaction au temps t^n qui ne sont pas encore connues. Pour obtenir un schéma explicite, on découple toutes les autres forces des forces d'interaction. Pour un couple contacteur-cible, les forces d'interactions des autres couples sont prises à t^{n-1} . Ainsi, F_f et F_s sont connues à t^n . Puisque le pas de temps est petit, l'erreur commise est acceptable. Après une combinaison linéaire de Eq.(5.112) et Eq.(5.113), on obtient l'équation suivante :

$$\frac{M_s M_f}{M_s + M_f} \frac{d(v_f - v_s)}{dt} = \frac{M_f}{M_s + M_f} F_s + \frac{M_s}{M_s + M_f} F_f + F_{f \rightarrow s} \quad (5.114)$$

Il est possible d'intégrer Eq.(5.114) par une méthode en différences finies centrées :

$$\frac{M_s M_f}{M_s + M_f} \frac{(v_f - v_s)^{n+1/2} - (v_f - v_s)^{n-1/2}}{\Delta t} = -\frac{M_f}{M_s + M_f} F_s + \frac{M_s}{M_s + M_f} F_f + F_{f \rightarrow s} \quad (5.115)$$

La contrainte cinématique de contact impose qu'à t^{n+1} , la pénétration soit nulle : $d^{n+1} = 0$. En incluant Eq.(5.110) dans Eq.(5.115), la force d'interaction appliquée au nœud cible (au point interne de la structure) est donnée par :

$$F_{f \rightarrow s} = \frac{M_s M_f}{M_s + M_f} \left(\frac{(v_s - v_f)^{n-1/2}}{\Delta t} + \frac{d^n}{\Delta t^2} + \frac{F_s}{M_s} - \frac{F_f}{M_f} \right) \quad (5.116)$$

La méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange sera une des méthodes employées pour coupler le fluide et la structure.

- On peut enfin adapter la méthode de pénalité utilisée par des algorithmes de contact [HAL 98] au couplage par pénalité. Considérons l'équation d'état Eq.(5.75) pour un fluide compressible :

$$P = K_f \mu = K_f \frac{\rho - \rho_{ref}}{\rho_{ref}} \quad (5.117)$$

où K_f est le module de compressibilité du fluide.

On suppose qu'il existe un contrôle de volume de volume V_{ref} pour lequel la masse volumique moyenne ρ_{ref} peut être trouvée. Si ce contrôle de volume se déforme avec le fluide du volume V_{ref} au volume V , la masse de ce volume de contrôle est donnée par $\rho_{ref} V_{ref} = \rho V$. La pression est alors réécrite sous la forme suivante :

$$P = K_f \frac{V_{ref} - V}{V} \quad (5.118)$$

or la variation de volume est due au mouvement relatif entre le fluide et la structure supposée rigide : $V_{ref} - V = A_q d$ où d est donnée par Eq.(5.110) et $A_q = Aire(\Omega_s^e)/4$. En fait, A_q est l'aire de l'élément structure divisée par le nombre de points internes (en l'occurrence, dans les applications numériques, il y a 4 points par élément). On retrouve ainsi aisément la force de pénalité en multipliant Eq.(5.117) par A_q et par le paramètre pf :

$$F_{f \rightarrow s} = \frac{pf C_1 A_q^2}{V} d \quad (5.119)$$

avec $C_1 = \rho c^2$ où c représente la vitesse du son et ρ , la masse volumique. Le volume V peut être estimé en considérant que la masse de fluide comprimée est un cylindre de volume $V = L.A_q$ où L est la longueur suivant la directrice de ce cylindre. Pour un

piston ayant une longueur infiniment grande, $L = c\Delta t$ et le volume du fluide accéléré est donné par $A_q c \Delta t_f$ où Δt_f est le pas de temps associé au fluide. Dans le cas du tossage, le domaine fluide Ω_f est effectivement très grand pour limiter les effets des bords de la grille Eulérienne sur la solution et on conserve la définition $L = c\Delta t$. L représente alors la taille caractéristique des mailles Ω_f^e . Ainsi, la raideur peut être évaluée à partir de Eq.(5.117) par la relation suivante :

$$k = \frac{pf\rho c A_q}{\Delta t_f} \quad (5.120)$$

Les méthodes de contact [HAL 98] déterminent la raideur du fluide par Eq.(5.120). Pour la structure, la raideur est donnée par une formulation équivalente :

$$k_s = \frac{pf K A_q}{\max(\text{diagonales} \Omega_s^e)} \quad (5.121)$$

où K_s est le module de compressibilité de la structure. Une raideur équivalente k_{eq} d'un système couplé peut alors être évaluée par :

$$k_{eq} = \frac{k_s k_f}{k_s + k_f} \quad (5.122)$$

avec k_f , la raideur donnée par Eq.(5.120). Le maillage est construit de manière à ce que les mailles du fluide et celles de la structure aient des dimensions équivalentes dans la zone du couplage. Ainsi, les diagonales d'un élément Ω_s^e sont de l'ordre de la longueur caractéristique d'une maille fluide $L = c\Delta t_f$. De ce fait, en posant $K_f = \rho c^2$ dans Eq.(5.120), k_{eq} est du même ordre que $pf \frac{K_s K_f}{K_s + K_f}$. Comme K_s est, en général, grand devant K_f ($K_{acier} = 160GPa$ ou $K_{aluminium} = 70GPa$ devant $K_{eau} = \rho c^2 = 2.25GPa$), k_{eq} est proche de k_f . Ainsi, dans les applications numériques, la raideur du couplage est estimée par Eq.(5.120). La raideur de Eq.(5.120) est calculée par unité d'aire :

$$k = \frac{pf\rho c}{\Delta t_f} \quad (5.123)$$

k représente alors une "densité surfacique de raideur" dont les unités sont $GPa.m^{-1}$. Malgré cette unité, dans la suite, elle est appelée "raideur" pour plus de commodités.

5.3.3. Conclusions

Pour coupler la formulation Lagrangienne et ALE, deux approches sont utilisées et comparées dans la suite : la méthode par pénalité et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Pour la méthode par pénalité, la question qui reste en filigrane est comment déterminer correctement la raideur de pénalité pour calculer un champ de pression physique lors d'un impact hydrodynamique. Nous tentons de répondre à cette question dans la suite.

5.4. Applications numériques

Cette partie présente une étude de deux problèmes qui ont l'avantage de mettre en évidence certaines caractéristiques des méthodes de couplage employées. Pour ces problèmes, la méthode des multiplicateurs de Lagrange est une approche directe et précise de la solution. Par contre, la méthode par pénalité exige un choix portant sur la détermination de la raideur de pénalité : trop grande, le calcul peut être instable, trop petite, la pénétration relative devient inacceptable. De plus, lorsqu'une valeur garantit la proximité avec la solution, les efforts numériques peuvent être perturbés par des oscillations dont l'origine numérique est inhérente au couplage. Pour assurer une comparaison optimale avec les solutions de référence, un effet dissipatif est introduit dans la méthode par pénalité. La première application est un piston écrasant une colonne de fluide à vitesse constante. Les perturbations issues du couplage seront alors mises en évidence et un amortissement numérique est introduit pour éliminer les hautes fréquences. La deuxième application est l'étude de l'entrée d'un dièdre dans l'eau. Les deux précédentes méthodes de couplage sont appliquées. Pour la méthode par pénalité, on se propose d'établir une base de données pour les paramètres contrôlant la force de couplage. Cette base est construite en estimant l'amplitude de la pression locale exercée sur un dièdre pour différents angles d'incidence.

5.4.1. Etude du piston

Un piston comprime une colonne de fluide (une quantité d'eau) à vitesse constante, $v = 5m/s$. La colonne d'eau est, en fait, un cube de $0.5m$ de côté. La pression exercée sur le piston est l'objet de cette étude.

On compare trois cas :

- Un modèle de référence (voir Fig.5.4.1.2) auquel les résultats pourront être comparés, est construit en modélisant le fluide et la structure par une formulation Lagrangienne. Les nœuds de la structure et ceux du fluide sont confondus de sorte que la condition cinématique imposée sur le piston est directement appliquée sur la frontière du fluide.
- Un modèle de couplage où l'algorithme de Zhong gère l'interaction entre une formulation Lagrangienne pour la structure et une formulation Eulérienne pour le fluide (voir Fig.5.4). Le piston est considéré comme rigide.
- Un modèle de couplage par pénalité (voir Fig.5.4) dans lequel la raideur est évaluée à partir de Eq.(5.120) avec $\Delta t = 16.66\mu s$: $k = 900GPa.m^{-1}$. Ici, le facteur de pénalité pf est fixé à 10.

Les courbes de pression exercées sur le piston sont tracées sur Fig.5.5. La méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange converge après quelques oscillations vers la solution de référence. Par contre, la pression obtenue par la méthode par pénalité est fortement oscillante et elle semble osciller autour de la solution recherchée.

5.4.1.1. Origine des oscillations

Pour déterminer l'origine des oscillations, on évalue la fréquence de celles-ci en appliquant, au signal (C) de la Fig.5.5, une transformée de Fourier (FFT). Le spectre présenté sur Fig.5.7 donne une fréquence de 26,7kHz.

Pour vérifier que cette fréquence n'a pas d'origine physique, on reprend Eq.(5.118) en affectant à V et à V_{ref} le volume courant et le volume initial du piston, respectivement. Comme $V = A.D$ où A représente la section du piston et D , la hauteur d'eau, la relation Eq.(5.118) devient :

$$P = K_f \frac{\Delta D}{D} = K_f \frac{\Delta D}{D} \quad (5.124)$$

La valeur initiale D^0 diminue de 10% sur le temps du calcul : 10ms (sur Fig.5.4 et Fig.5.4.1.2, la vitesse du piston est plus importante pour que son déplacement soit visible). La hauteur d'eau finale est de $D^f = 0.45m$ et la raideur équivalente du piston passe de : $\frac{K_f}{D} = \frac{\rho c^2}{D^0} = 4.5GPa.m^{-1}$ à $\frac{K_f}{D} = \frac{\rho c^2}{D^f} = 5GPa.m^{-1}$. En sachant que la masse d'eau par unité d'aire comprimée par le piston est déterminée par ρD , la fréquence propre du piston $freq_p$ est donnée par :

$$freq_p = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\frac{\rho c^2}{D}}{\rho D}} = \frac{c}{2\pi D} \quad (5.125)$$

Cette fréquence est comprise alors dans l'intervalle suivant : [477Hz,530Hz]. Elle correspond au nombre d'aller-retour par seconde parcourus par l'onde dans le piston et elle diffère de la fréquence déterminée par FFT.

A présent, on recherche la fréquence propre du système [$M_f - k - M_s$] représenté sur Fig.5.4.1.2. Le schéma 1 de cette figure représente le principe du couplage : dès qu'il y a une interpénétration entre les masses M_s et M_f , une force de rappel représentée par un ressort de raideur k est appliquée sur les deux masses. Le schéma 2 de Fig.5.4.1.2 est équivalent au schéma 1 pour une masse équivalente $M_{eq} = \frac{M_s M_f}{M_s + M_f}$ et un ressort de raideur k . Cette équivalence est aisément démontrée par la relation Eq.(5.114) résultante de la combinaison de Eq.(5.112) et Eq.(5.113). Les masses des points interne de la structure et des particules fluides sont évaluées par les fonctions de forme N_I et les masses nodales M_I : la modélisation numérique donne une masse équivalente variant de $M_{eq} = 28kg.m^{-2}$ à $M_{eq} = 44kg.m^{-2}$ suivant la position du point interne le long du piston (comme pour la raideur, la masse est en fait une masse par unité d'aire). La fréquence propre du couplage $freq_c$ est alors donnée par :

$$freq_c = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{M_{eq}}} \quad (5.126)$$

La fréquence propre du couplage est alors comprise entre : $freq_c = 22.5kHz$ et $freq_c = 28.5kHz$. Ces valeurs sont très proches de la valeur déterminée sur le spectre fréquentiel de Fig.5.7. Comme cette fréquence est distincte d'une fréquence physique, nous introduisons un amortissement qui filtrera cette fréquence

5.4.1.2. Amortissement numérique

En général, l'amortissement numérique dans les algorithmes altère la simulation du phénomène physique et on recherche à limiter cette dissipation. Ainsi, Piperno et al., dans [S.P 93] tente de compenser les erreurs liées à la dissipation numérique engendrée par leur schéma de couplage. A contrario, ici, on introduit un facteur dissipatif qui permettrait d'atténuer les fortes oscillations mises en évidence dans [COU 02]. Le procédé est simple : au système masse-ressort décrit précédemment, on ajoute un amortisseur comme illustré sur Fig.5.4.1.2. L'équation d'équilibre, Eq.(5.127), des forces numériques de couplage est écrite en fonction du déplacement relatif Z des masses du fluide, m_{fluide} , et de la structure, $m_{structure}$ en interaction :

$$\frac{d^2 Z}{dt^2} + \xi \cdot \frac{dZ}{dt} + \omega^2 \cdot Z \quad (5.127)$$

avec ξ le facteur d'amortissement et $\omega = \sqrt{\frac{k \cdot (M_s + M_f)}{M_s \cdot M_f}}$.

Afin d'optimiser l'amortissement des oscillations numériques indésirables, ξ est fixé à une valeur critique $\xi = 2\omega$. Cet amortissement est aussi nommé "damping". Dès lors, pour vérifier l'efficacité de cette méthode, on traite l'exemple précédent : un piston comprime une colonne de fluide à vitesse constante et on cherche l'évolution de la pression dans le fluide. Deux cas sont considérés : une modélisation du problème du piston reposant sur un couplage en pénalité avec amortissement et une autre modélisation pour laquelle les nœuds du fluide et de la structure sont confondus afin d'assurer un couplage cinématique entre les deux maillages. Les courbes de pressions sont tracées sur Fig.5.4.1.2. La courbe de référence présente des oscillations dont la période correspond au temps mis par l'onde de compression pour se propager dans le fluide, se réfléchir sur la paroi du fond et revenir au piston. Lorsqu'on ajoute un amortissement numérique dans le couplage en pénalité, on voit que la courbe est moins oscillante et qu'elle est proche de la courbe de référence. Ainsi, l'implémentation de l'algorithme de l'amortissement dans le couplage en pénalité permet de limiter les oscillations numériques parasites sans affecter l'évolution physique de la pression.

5.4.2. Entrée dans l'eau d'un dièdre à vitesse constante

Le modèle est un demi-dièdre constitué d'éléments quadrangles en formulation Lagrangienne immergé dans une grille Eulérienne modélisant l'écoulement d'une surface libre séparant l'air et l'eau (voir Fig.5.10). On profite de la symétrie du problème pour réduire, par deux, la taille du domaine de calcul en imposant une condition de

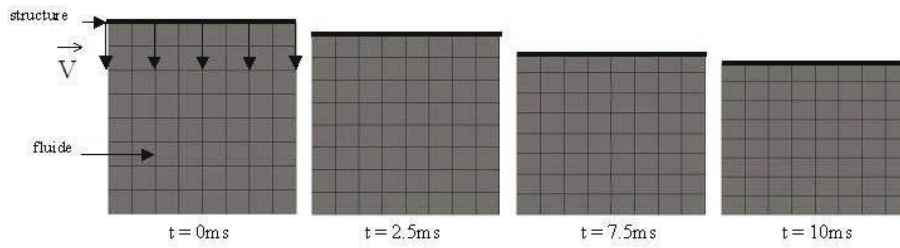


Figure 5.3. *Modèle de référence du piston*

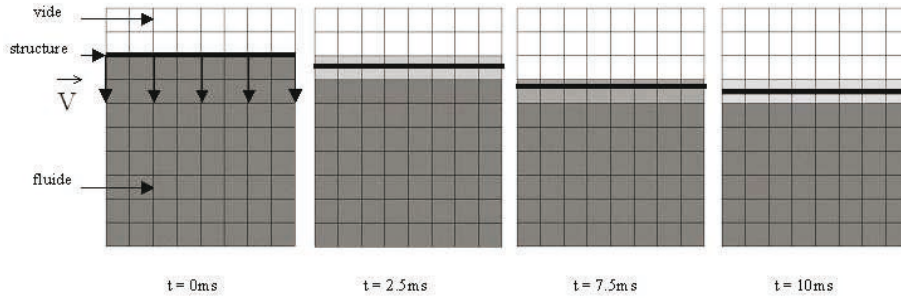


Figure 5.4. *Modèle du piston en couplage*

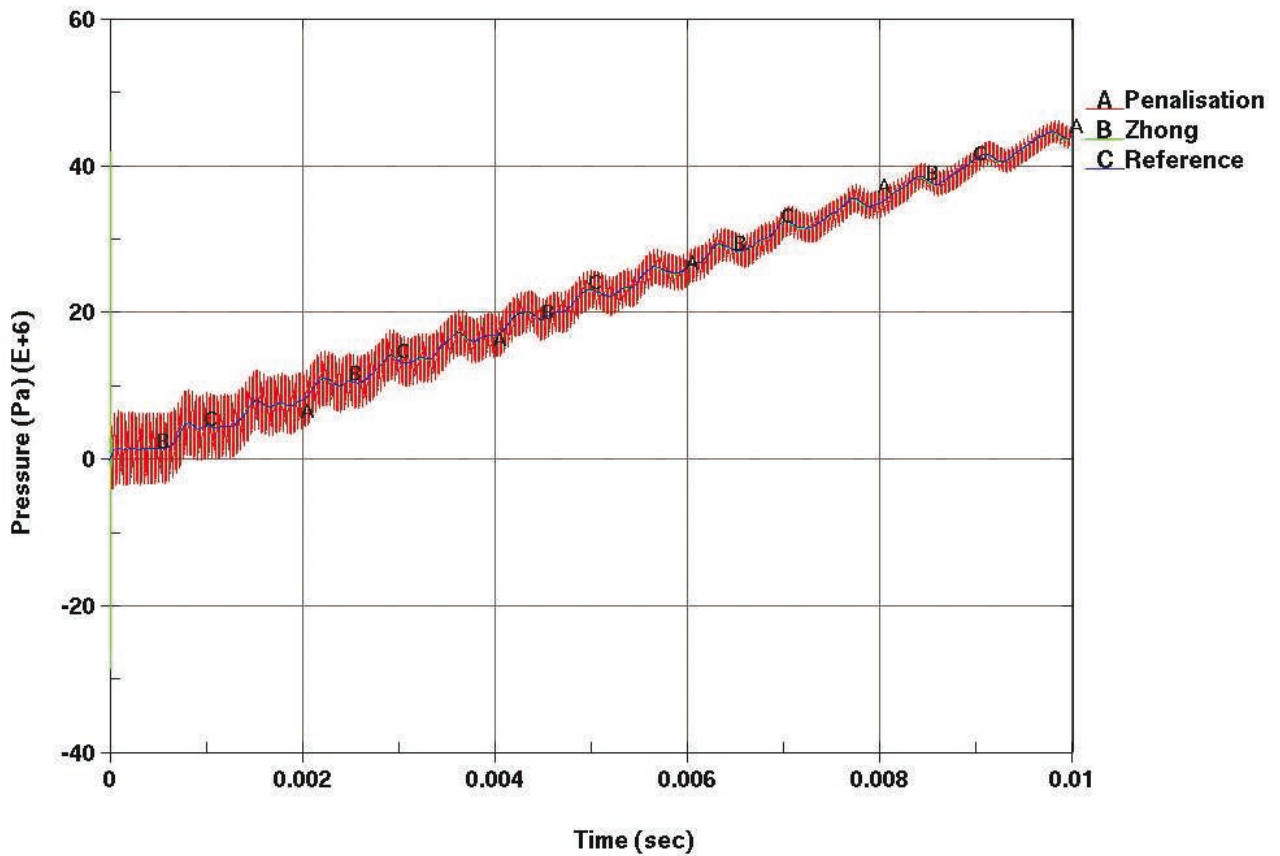


Figure 5.5. *Pressions exercées sur le piston : (A) Couplage par pénalité, (B) Méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange, (C) Courbe de référence*

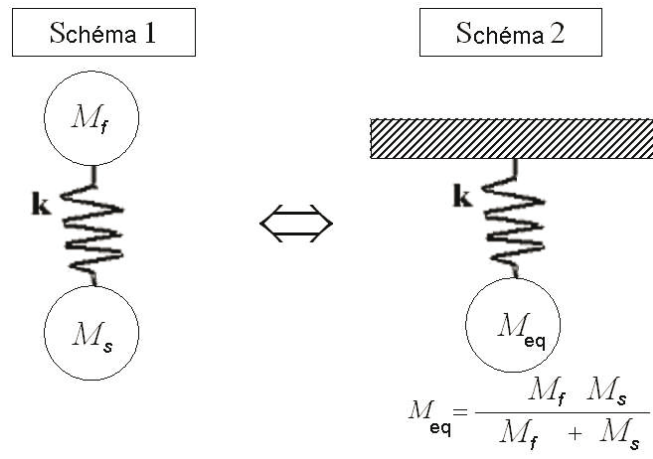


Figure 5.6. Schéma du couplage en pénalité

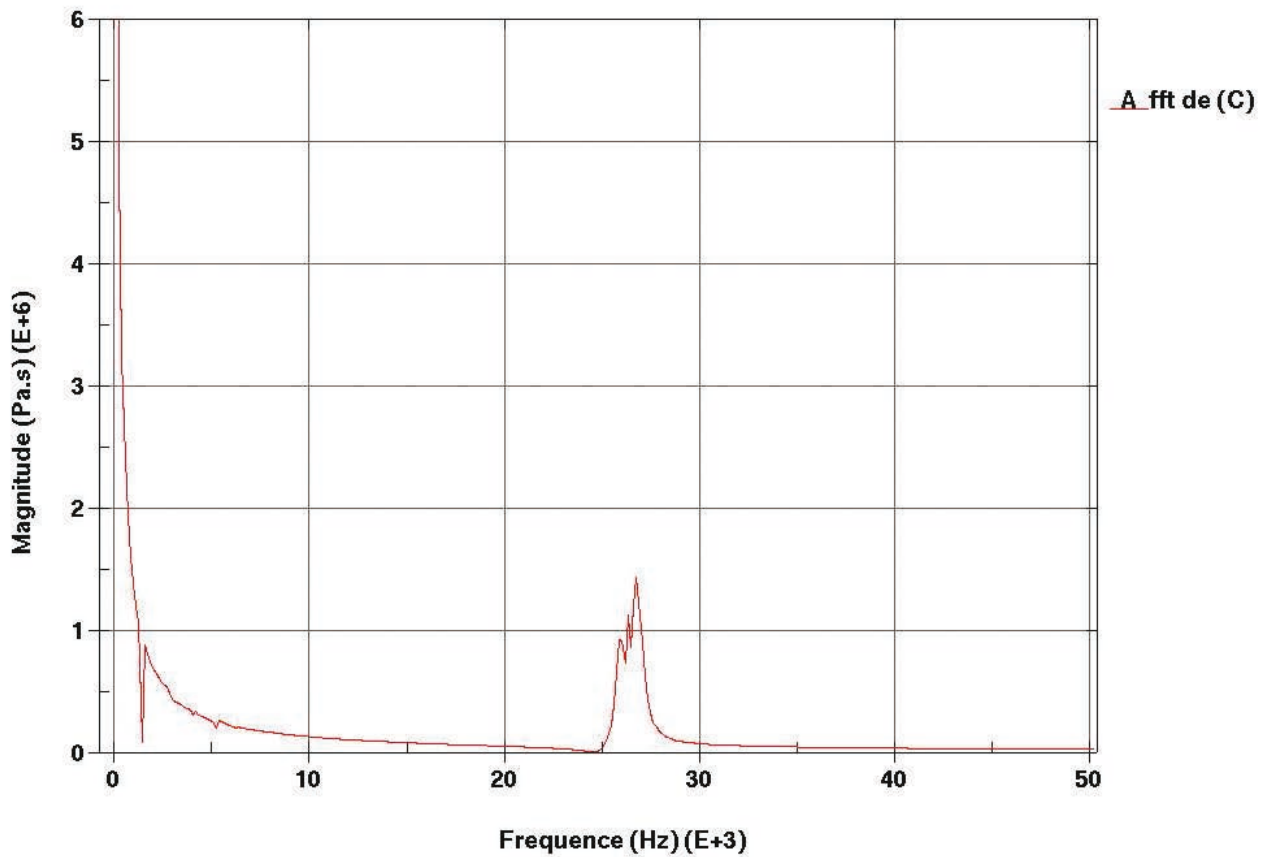


Figure 5.7. Spectre fréquentiel du signal en pression (C) de la figure précédente

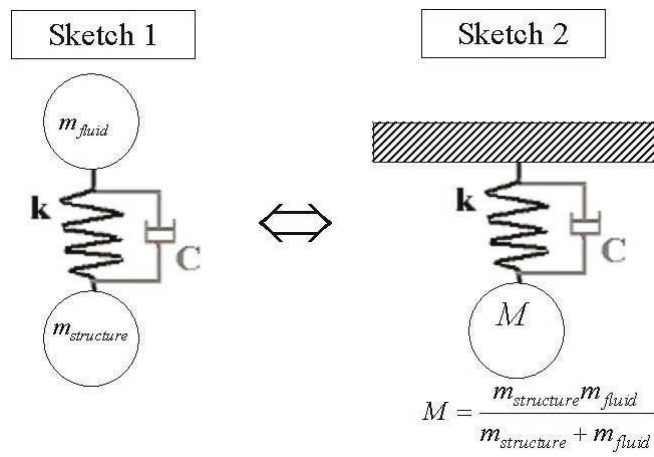


Figure 5.8. Schéma du couplage en pénalité avec amortissement

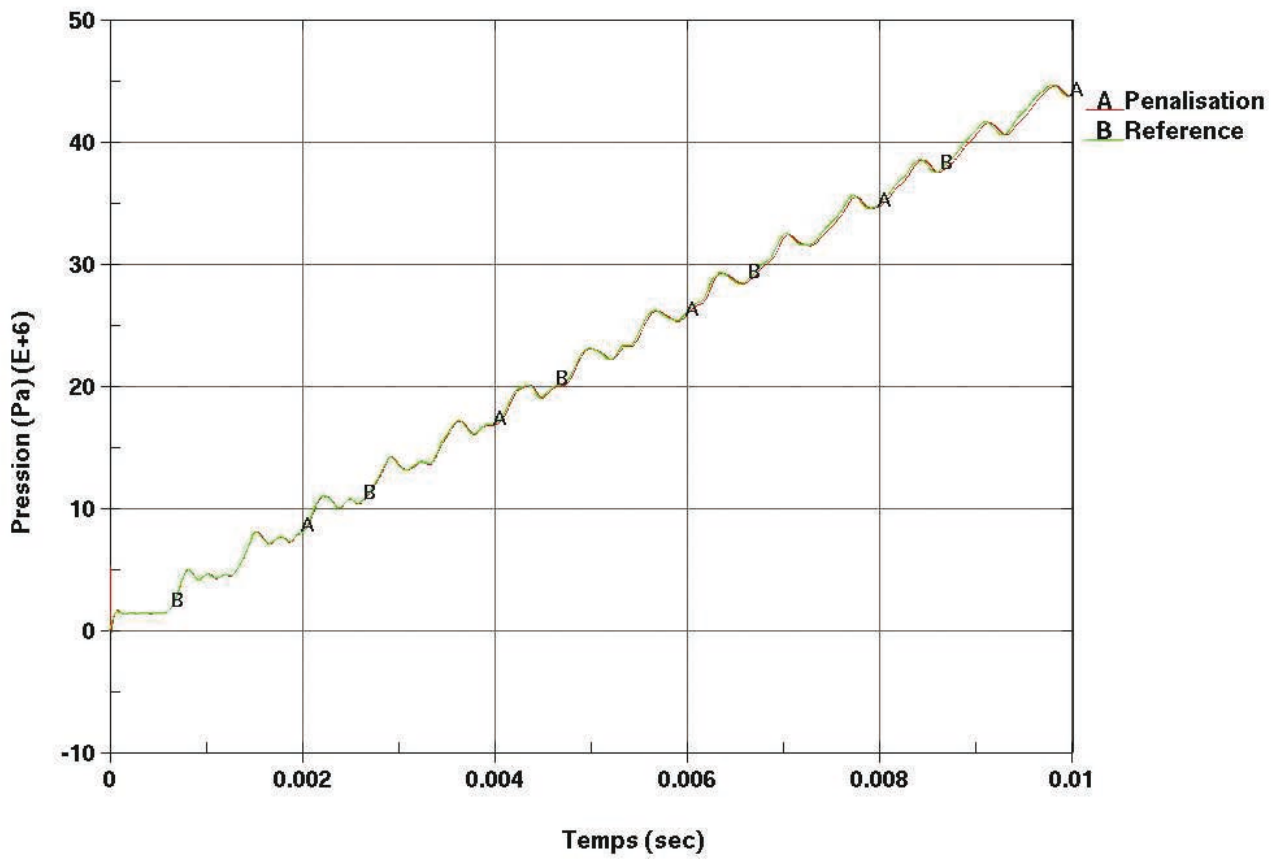


Figure 5.9. Pressions exercées sur le piston : (A) Courbe de référence (B) Couplage par pénalité avec damping

glissement le long de l'axe de symétrie du dièdre. La largeur de ce dernier est de 250mm . La dimension du domaine de calcul a été calibrée afin que les conditions aux frontières n'influencent pas les résultats recherchés. Le dièdre composé de 99 éléments quadrangles sur la partie inclinée entre dans l'eau à vitesse constante et égale à 6150mm/s . Plusieurs angles d'incidence α sont considérés ; de 1° à 30° . Pour chacun de ces angles, on s'intéresse à la pression locale exercée sur la structure.

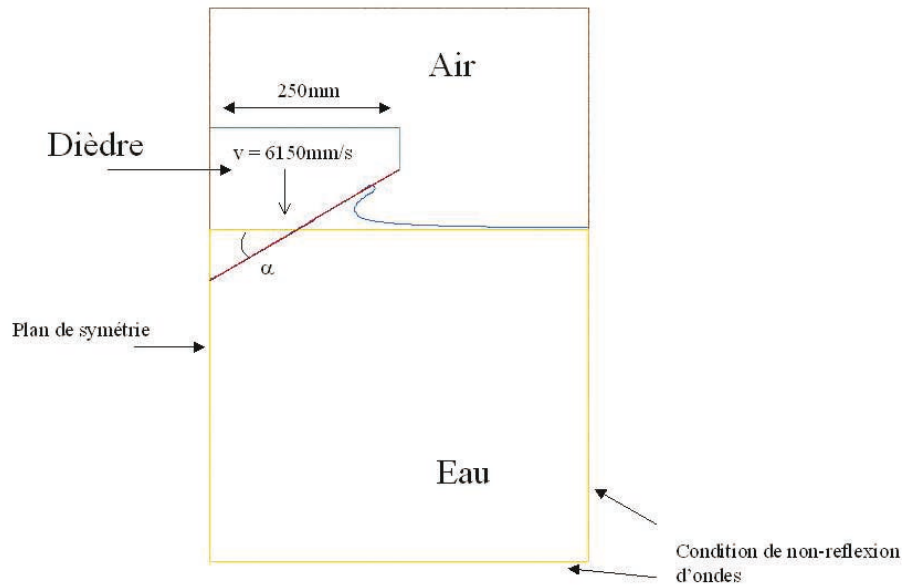


Figure 5.10. Présentation du modèle pour l'entrée du dièdre dans l'eau

Le couplage par pénalité est utilisé pour résoudre le problème 2D du slamming. Pour le calcul de la raideur, on reprend la relation Eq.(5.120) dans laquelle la raideur est donnée par unité de surface mais on continue à la noter raideur pour plus de simplicité.

5.4.2.1. Théorie asymptotique

Les approches asymptotiques ([WAT 86],[wat86],[COI 89],[ZHA 93]) sont nombreuses et découlent de l'analyse de Wagner. Elles ont en commun la décomposition du problème en deux régions, décomposition proposée initialement par Wagner dans [WAG 32] sous les termes de "dynamique d'impact" et "dynamique glissante" (voir Fig.5.11) :

- une région externe, pour $|x| < c(t)$ dans laquelle se développe l'écoulement potentiel d'un doublet c'est à dire l'écoulement autour d'une plaque plane en expansion de demi-longueur $c(t)$,
- une région interne au voisinage de $|x| = c(t)$ limitant le développement d'un jet d'épaisseur constante égale à $V.t.\tan\beta$,

Dans la région externe, les hypothèses permettent d'introduire le potentiel complexe défini par Eq.(5.128) :

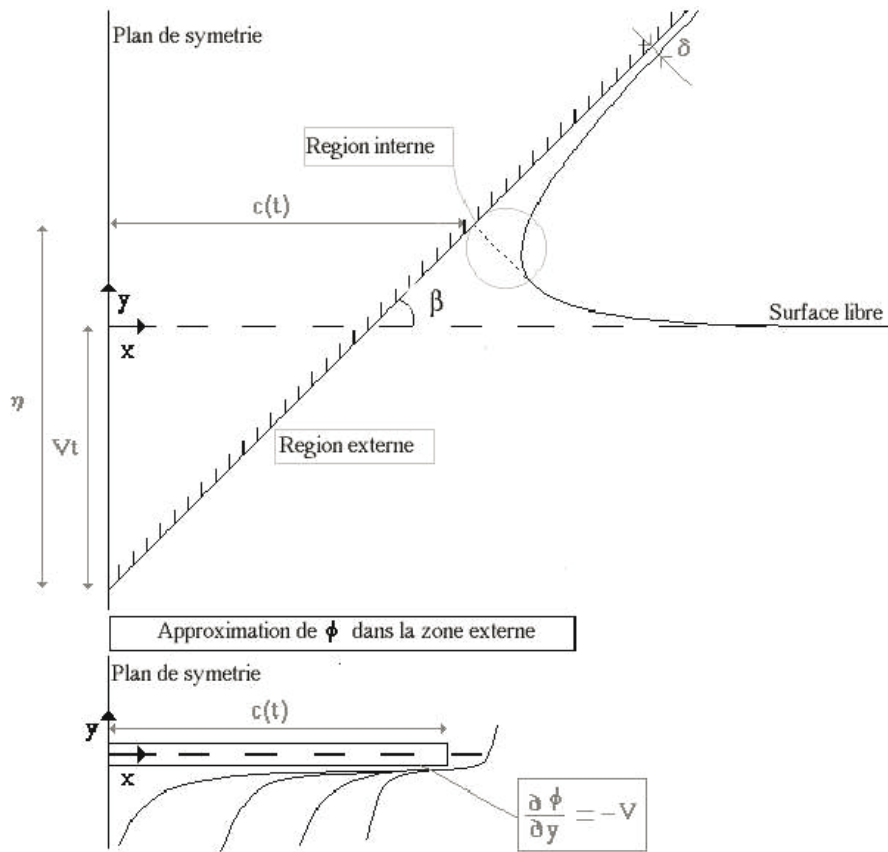


Figure 5.11. Définition de la notation et du système de coordonnées.
Approximation du dièdre par une plaque plane en expansion

$$\phi = -V\sqrt{c^2 - x^2} \quad \text{sur} \quad |x| < c(t) \quad y = 0 \quad (5.128)$$

La pression sur le dièdre dans le domaine externe, p_{out} , est donnée par l'équation de Bernoulli, Eq.(5.129).

$$\begin{aligned} \frac{p_{out}(x)}{\rho} &= -\frac{\partial\phi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left(\vec{\nabla}\phi \right)^2 \\ &= \sqrt{c^2 - x^2} \frac{dV}{dt} + V \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} - \frac{1}{2} \frac{V^2 x^2}{c^2 - x^2} \end{aligned} \quad (5.129)$$

Comme l'angle du dièdre est très ouvert, la longueur Vt est plus petite que $c(t)$. Les ordres de grandeurs des termes quadratiques et du premier ordre de l'équation de Bernoulli entraînent les relations suivantes :

$$\frac{\frac{\partial\phi}{\partial t}}{(\vec{\nabla}\phi)^2} \sim \frac{[Vc/t]}{[V^2]} = \frac{[c]}{[Vt]} \gg 1 \quad (5.130)$$

L'équation de Bernoulli devient alors :

$$\frac{p_{out}}{\rho} = -\frac{\partial\phi}{\partial t} \quad (5.131)$$

$$= V \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} \quad (5.132)$$

On retrouve naturellement le terme central de la relation Eq.(5.129) en négligeant le terme quadratique et en supposant V constante.

La demi-longueur du dièdre immergé, $c(t)$, peut être déterminée par une expression donnant l'élévation de la surface libre $\eta(x, t)$. A partir des conditions aux limites décrites par Fig.5.11, on peut obtenir Eq.(5.133) :

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{Vx}{\sqrt{x^2 - c(t)^2}} - V \quad \text{pour } y = 0, \quad |x| > c(t) \quad (5.133)$$

L'intégration de Eq.(5.133) donne l'élévation de la surface libre $\eta(x, t)$ et l'expression de $c(t)$:

$$c(t) = \frac{\pi V t}{2 \tan(\beta)} \quad (5.134)$$

Dans la région interne, la pression sur la surface du dièdre est trouvée par l'étude locale de l'écoulement du jet par Wagner [WAG 32].

Sa théorie décrit tour à tour la solution dans la zone du jet par la transformation de Schwarz-Christoffel et la solution autour de la plaque en expansion. La solution proposée dans la zone du jet voisine de $x = c$ repose sur le théorème de Schwarz-Christoffel. Après plusieurs transformations, On en déduit ainsi la pression dans la région interne :

$$\frac{p_{in}}{\rho} = 2 \left(\frac{dc}{dt} \right)^2 |\tau|^{\frac{1}{2}} (1 + |\tau|^{\frac{1}{2}})^{-2} \quad \text{pour } 0 < \tau < \infty \quad (5.135)$$

La relation entre la variable intermédiaire $|\tau|$ et la variable physique x est donnée par Eq.(5.136) :

$$x - c = \frac{\delta}{\pi} \cdot (-\ln |\tau| - 4|\tau|^{\frac{1}{2}} - |\tau| + 5) \quad (5.136)$$

δ , l'épaisseur du jet obtenu en raccordant asymptotiquement la solution interne et la solution externe, vaut $\pi V^2 2c [4 \frac{dc}{dt}]^{-2}$. Quand le paramètre $|\tau|$ tend vers 0,1 et ∞ , x tend vers les valeurs ∞ , $c(t)$ et $-\infty$ respectivement. Pour de grandes valeurs de $|\tau|$, les équations Eq.(5.135) et Eq.(5.136) deviennent $2[dc/dt]^2 |\tau|^{-1/2}$ et $-(\delta/\pi)|\tau|$ respectivement. De ce fait, Eq.(5.135) devient

$$\frac{p_{in}}{\rho} \sim V c \left(\frac{dc}{dt} \right) [2c(c - x)]^{-1/2} \quad (5.137)$$

Ainsi, une distribution composite de la pression peut être obtenue en additionnant Eq.(5.135) et Eq.(5.132) et en soustrayant Eq.(5.137) :

$$\begin{aligned} \frac{p}{\rho} = & V \frac{c}{\sqrt{c^2 - x^2}} \frac{dc}{dt} + 2 \left(\frac{dc}{dt} \right)^2 |\tau|^{\frac{1}{2}} (1 + |\tau|^{\frac{1}{2}})^{-2} \\ & - V c \left(\frac{dc}{dt} \right) [2c(c - x)]^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.138)$$

Cette expression de la pression est reprise, dans la suite, pour vérifier les résultats issus de la simulation numérique du tossage d'un dièdre.

5.4.2.2. Effet de l'amortissement numérique

D'abord, on s'intéresse à l'effet du damping pour différents angles d'incidence. La raideur de pénalité est choisie suffisamment grande pour éviter que l'eau ne traverse la structure ("fuites"). Dans la suite, on verra comment la raideur est choisie en fonction de l'angle de pénétration.

L'angle d'entrée dans l'eau est de 4° . On compare les pressions obtenues avec un couplage en pénalité sans effet dissipatif et avec un amortissement numérique. Les pressions sont prises, comme précédemment, au milieu de la partie inclinée du dièdre. Sur Fig.5.12, les courbes d'indice (A) montrent clairement des oscillations qui sont amorties sur les courbes (B) lorsque le damping est introduit dans le couplage. Néanmoins, les raideurs sont importantes pour que ces oscillations apparaissent car les pics de pression devraient, en théorie, être plus petits. En effet, la relation Eq.(5.135) en $|\tau| = 1$ donne le maximum de pression suivant :

$$\frac{P_{max} - P_o}{\frac{1}{2} \rho v^2} = \frac{\pi^2}{4} \cotan(\alpha)^2 \quad (5.139)$$

Pour $\alpha = 4^\circ$, le maximum théorique de pression est $9.8 MPa$. Sur Fig.5.12, le pic atteint $25 MPa$. Si la raideur était plus petite et plus proche de la valeur optimale permettant de retrouver les évolutions physiques, les oscillations seraient plus petites voire inexistantes. Pour $pf = 0.034$, on retrouve le maximum physique et on observe qu'il y a peu de différences entre la pression avec damping et la pression sans damping (voir Fig.5.13). L'effet de l'amortissement numérique introduit dans le couplage par pénalité est aussi très faible si l'angle du dièdre devient grand.

En effet, si l'angle α vaut 20° , les oscillations numériques associées au couplage par pénalité sont tellement faibles qu'on ne voit pas de différences entre les courbes (A) et les courbes (B) sur Fig.5.14. Les pressions avec et sans damping sont quasiment confondues. Par contre, d'autres oscillations apparaissent. L'origine de ces oscillations peut être aisément comprise si on compare les pressions exercées sur deux éléments

voisins de la partie inclinée du dièdre à 20° . Sur Fig.5.15, les évolutions de ces pressions sont liées : à un sommet sur une courbe correspond un creux de pression sur l'autre à un instant fixé. Des ondes transportées par le fluide se déplacent alors le long du dièdre et perturbent les pressions locales. Ces ondes peuvent être visualisées en déterminant l'isocontour à 0.5 de la fraction volumique. Sur Fig.5.16, cet isocontour représente la frontière du domaine fluide sur laquelle sont appliquées les forces d'interaction et indique aussi la pénétration du fluide dans la structure. Cette frontière oscille et ces oscillations se retrouvent dans le champ de pression exercé sur la structure. Pour limiter ces oscillations et pour retrouver des évolutions proches des courbes de référence, il est nécessaire d'étudier et d'adapter le facteur de pénalité.

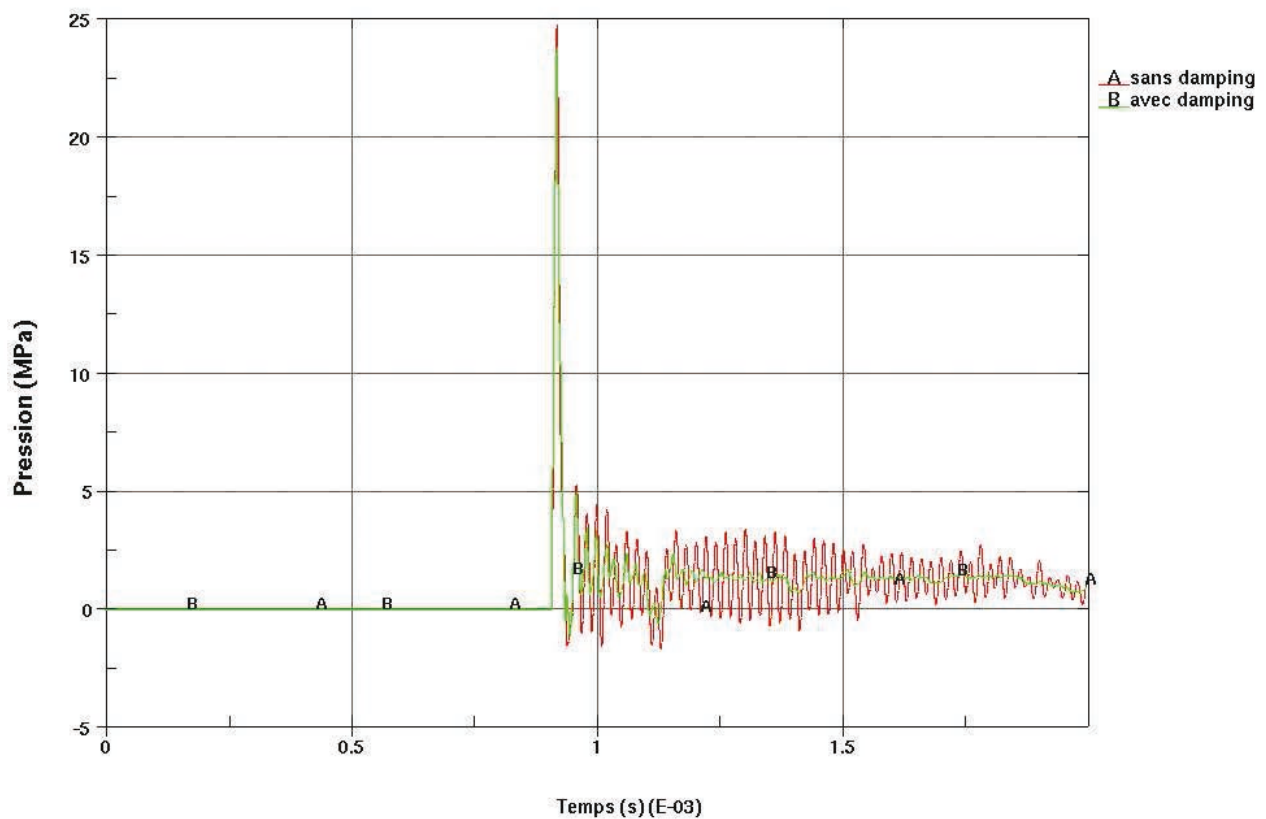


Figure 5.12. Dièdre à 4° : (A) Pression sans damping (B) Pression avec damping

5.4.2.3. Ajustement de la pénalité

Comme l'effort exercé par l'eau sur la structure dépend de l'angle du dièdre α , le facteur de pénalité pf doit être ajusté suivant l'angle α . On établit un tableau donnant pf pour 8 angles compris entre 1° et 30° .

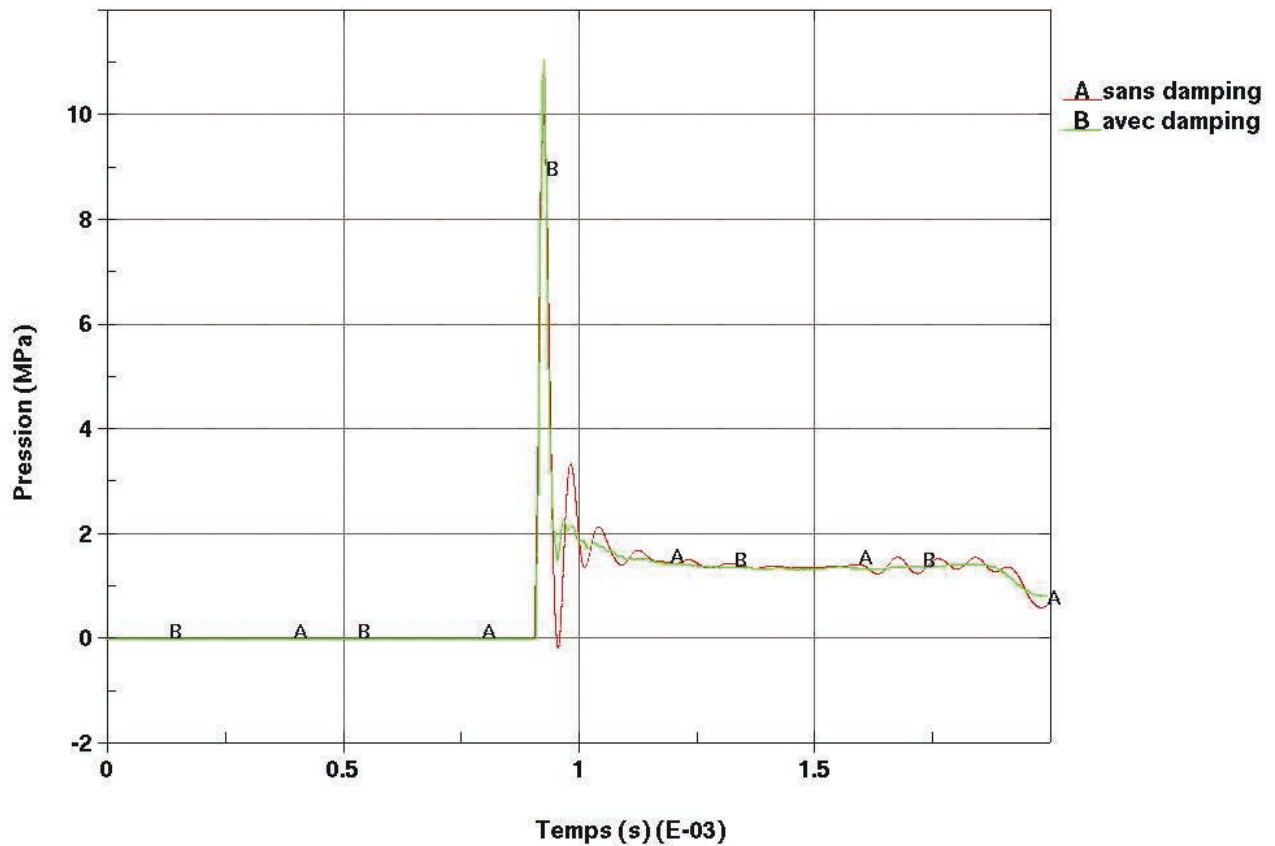


Figure 5.13. Dièdre à 4° avec $pf = 0.034$: (A) Pression sans damping (B) Pression avec damping

| Angle | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 20 | 30 |
|---------|-------|------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| pf | 7 | 0.34 | 0.085 | 0.034 | 0.018 | 0.009 | 0.008 | 0.002 |
| Raideur | 11e+3 | 620 | 103 | 48 | 20 | 9 | 3 | 0.95 |

Tableau 5.1. Valeurs de pf en fonction de l'angle d'incidence α

Les valeurs de pf sont déterminées pour un couplage avec l'eau uniquement. Elles ont été évaluées en cherchant une pression d'interaction la plus proche possible de la solution théorique. Les raideurs de la 2ieme ligne du tableau 5.1 sont déterminées en utilisant la relation Eq.(5.123). Il faut s'assurer que les valeurs de pf ne dépendent pas des paramètres de la modélisation et, en particulier, il faut vérifier l'indépendance de pf vis à vis du maillage employé. Pour cela, on compare les pressions pour 30° dans 3 cas différents :

- Pour un maillage donné et pour une taille de mailles pour le fluide deux fois plus importante que celle de la structure,
- Pour un maillage deux fois plus fin que le maillage précédent en conservant le même

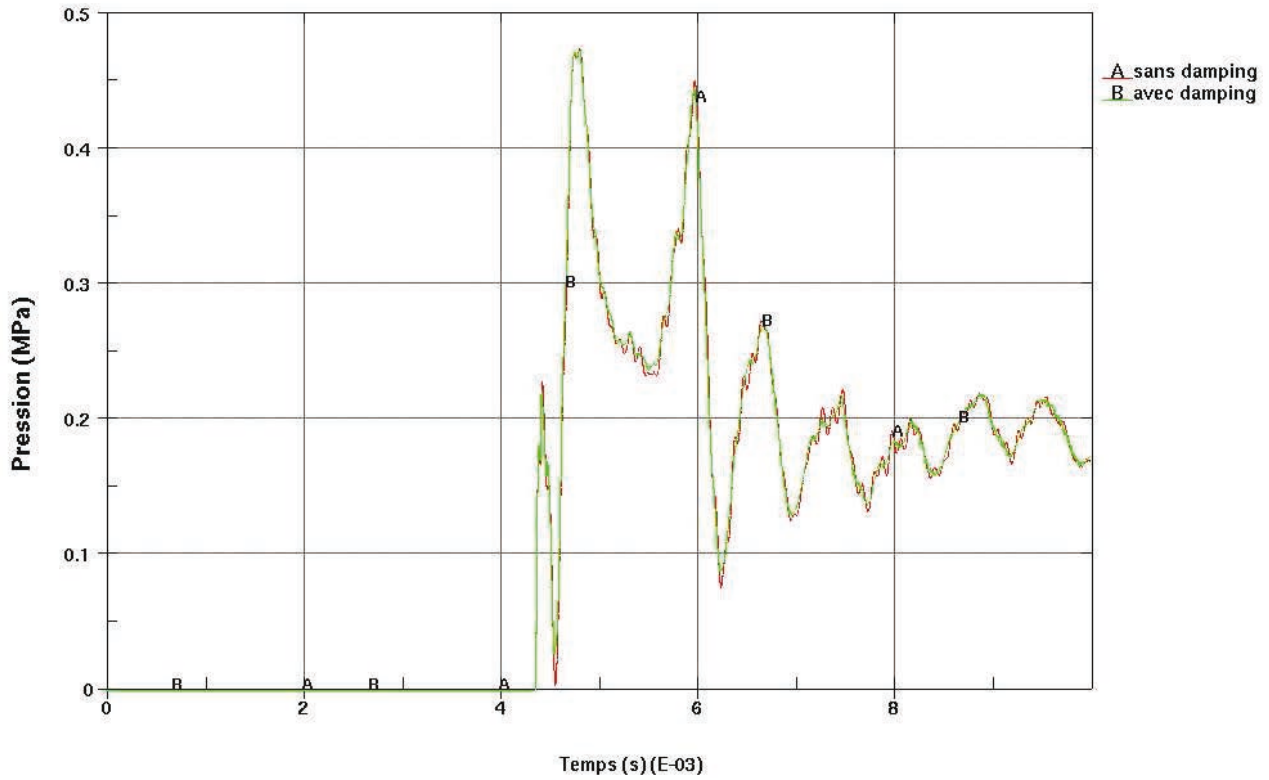


Figure 5.14. Dièdre à 20° : (A) Pression sans damping (B) Pression avec damping

rapport de mailles fluide/structure (1 pour 2),

- Pour un rapport entre les mailles des deux domaines identiques.

Sur Fig.5.17, la comparaison des cas de calcul montre des pressions peu différentes de la pression obtenue avec le maillage initial et les courbes restent proches de la solution théorique.

5.5. Conclusion

Ce chapitre propose une méthode numérique pour résoudre des problèmes d'interaction fluide-structure en grande déformation. Une validation de la méthode sur l'impact hydrodynamique en fut le principal enjeu. Néanmoins, cette approche numérique peut être étendue à d'autres problèmes de dynamique rapide tels que l'explosion sous-marine, le déploiement d'un airbag, etc... Une analyse des efforts d'interaction locaux a été confrontée aux résultats analytiques issus, notamment pour le cas du dièdre, d'une théorie asymptotique supposant un écoulement incompressible, irrotationnel et non-visqueux. La méthode numérique repose sur une formulation ALE basée sur des éléments hexaédriques. Le pas de calcul se fait en deux temps : d'abord un calcul Lagrangien détermine les variables physiques du problème ; ensuite ces champs inconnus sont projetés sur la position initiale par une méthode d'advection. La formulation ALE

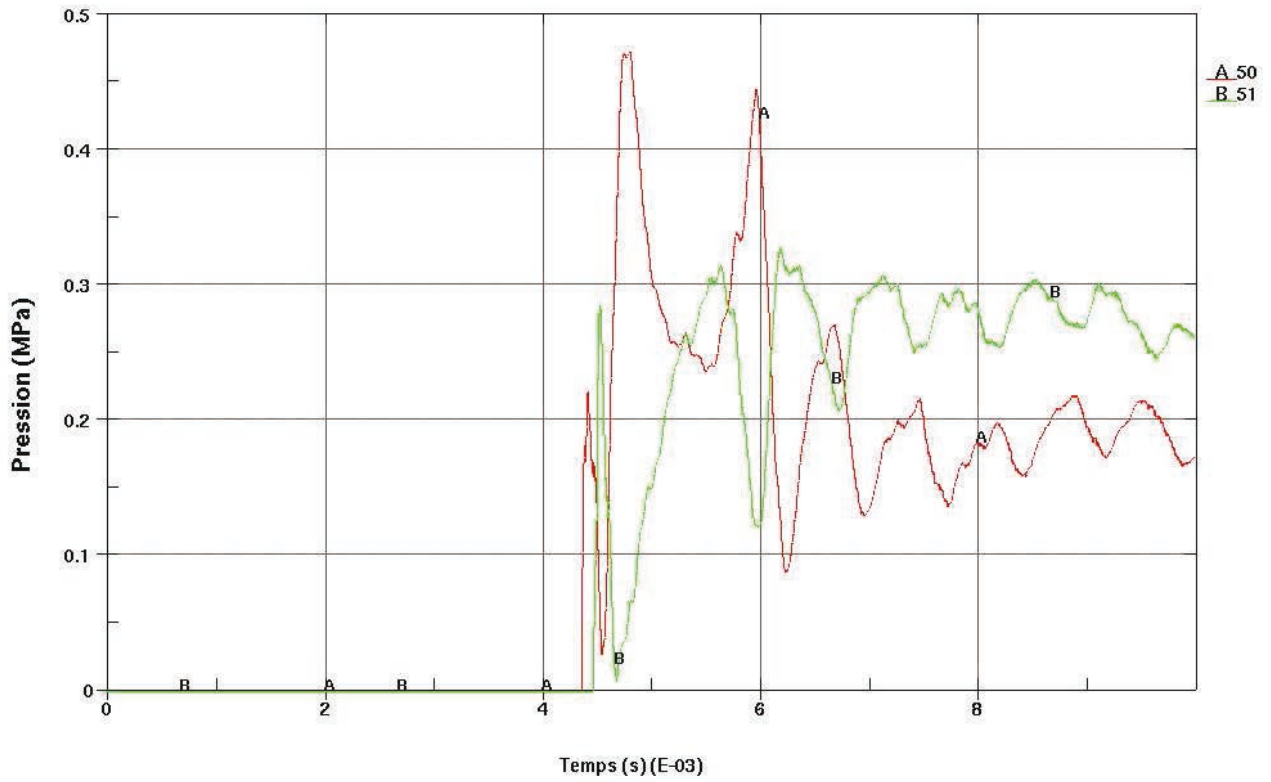


Figure 5.15. *Dièdre à 20° : (A) Pression sur l'élément 50 (B) Pression sur l'élément 51*

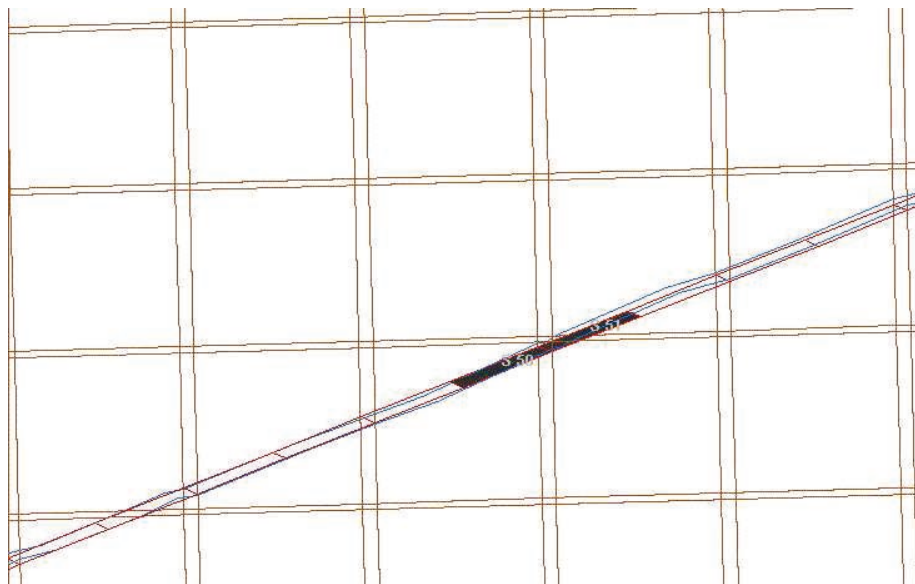


Figure 5.16. *Dièdre à 20° : Isocontour de la fraction volumique à 0.5*

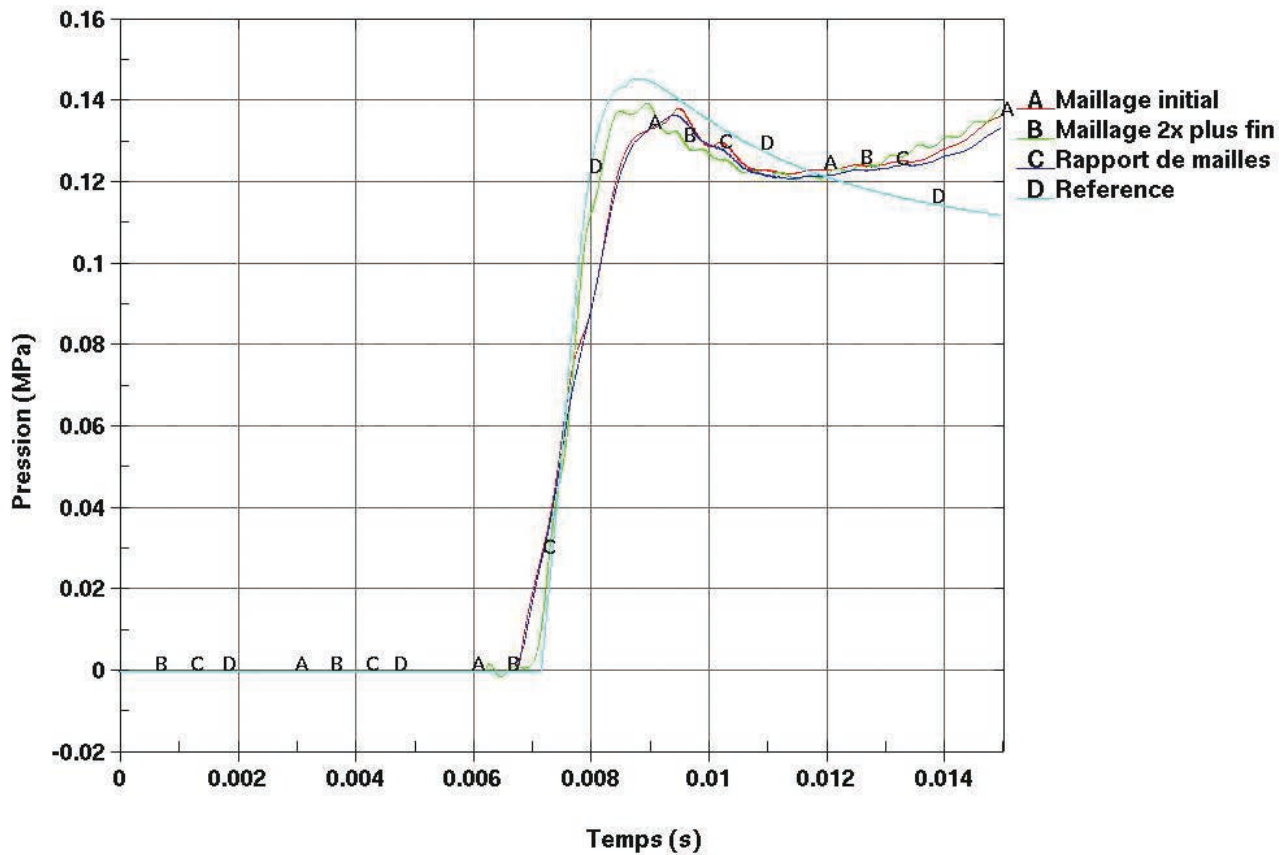


Figure 5.17. Comparaison de la pression exercée sur le dièdre à 30° : (A) Maillage initial (B) Maillage 2 fois plus fin (C) une maille fluide pour une maille structure (D) Courbe de référence

à la capacité de prendre en charge plusieurs fluides dans un même maillage en situant la position des interfaces matérielles par la distribution de la fraction volumique des fluides. La position de l'interface matérielle est déterminée par la méthode de Young. La méthode numérique repose aussi sur un couplage Euler-Lagrange entre la structure et la formulation ALE. Ce couplage calcule les efforts d'interaction en se basant sur 2 approches : la méthode par pénalité et la méthode des multiplicateurs de Lagrange. Ces deux méthodes sont illustrées et comparées sur l'exemple 1D d'un piston. La méthode explicite des multiplicateurs de Lagrange permet de converger rapidement vers la solution pour ces problèmes unidimensionnels. Le couplage par pénalité est tributaire du choix de la raideur et, vis à vis de l'approche directe des multiplicateurs de Lagrange qui n'exige aucun choix de l'utilisateur, la méthode par pénalité apporte plus d'inconvénients que d'avantages pour traiter de simples problèmes 1D. Une raideur trop faible implique des interpénétrations inacceptables et une raideur trop forte perturbe les efforts d'interaction par des oscillations. Néanmoins, dans ce cas, l'évolution moyenne de la pression appliquée à la structure est proche de la solution physique et l'introduction d'un amortissement numérique permet de dissiper l'énergie emmagasinée dans les ressorts de pénalité. Pour la raideur de pénalité ajustée par le paramètre

pf , il est établi une table associant, à chaque incidence d'impact, une valeur de ces paramètres. Cette approche permet, pour une structure quelconque entrant dans l'eau verticalement, d'estimer la raideur associée à chaque partie de la structure ayant une incidence propre avec la surface libre.

5.6. Bibliographie

- [AMS 73] AMSDEN A., HIRT C., YAQUI : An arbitrary Lagrangian-Eulerian computer program for fluid flow at all speeds, Rapport, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973, LA-5100.
- [AMS 81] AMSDEN A., RUPPEL H., HIRT C., SALE : A Simplified ALE computer program for fluid flow and all speeds, Rapport, Los Alamos Scientific Laboratory, 1981.
- [BEN 90] BENSON D., HALLQUIST J., « A single surface contact algorithm for the post-buckling analysis of shell structures », *Comput Methods Appl Mech Eng*, vol. 78, p. 141–163, 1990.
- [BEN 92] BENSON D., « Momentum advection on a staggered mesh », *Journal of Computational Physics*, vol. 100, p. 143–162, 1992.
- [CHE 97] CHERTIER O., Contact et frottement entre solides déformables en grandes déformations, PhD thesis, Université de la Méditerranée, 1997.
- [COI 89] COINTE R., « Two-dimensional water-solid impact », *ASME J.Offshore Mech. Arc. Eng.*, vol. 111, 1989.
- [COU 02] COUTY N., Projet Performances, Innovation, Sécurité et Compétitivité des Navires à passagers ; sous-projet 1 : Grands Navires Rapides, Rapport, Principia Marine, Nantes, France, 2002.
- [CUR 95] CURNIER A., HE Q., KLARBRING A., « Continuum mechanics modelling of large deformation contact with friction », *Contact Mechanics*, p. 145–158, Plenum Press, 1995.
- [HAL 98] HALLQUIST J., *LS DYNA Theoretical Manual*, Livermore Software Technology Corporation, Livermore CA, May 1998.
- [HUG 81] HUGHES T. J. R., STEPHENSON R. S., « Stability of implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis », *Int. J. Engrg. Sci.*, vol. 19, p. 295–302, 1981.
- [KAR 29] VON KARMAN T., « The impact on seaplane floats during landing », *NACA TN*, vol. 321, 1929.
- [KLA 86] KLARBRING A., « A mathematical programming approach to three-dimensional contact problems with friction », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 58, p. 175–200, 1986.
- [LAN 55] LANDSHOFF R., A Numerical Method for treating fluid flow in the presence of shocks, Rapport, Los Alamos Scientific Laboratory, 1955, Rept. LA-1930.

- [LAU 93a] LAURSEN T., SIMO J., « Algorithmic symmetrization of Coulomb frictional problems using augmented Lagrangians », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 108, p. 133–146, 1993.
- [LAU 93b] LAURSEN T., SIMO J., « A Continuum-Based Finite Element Formulation for the Implicit Solution of Multibody, Large Deformation Frictional Contact Problems », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 36, p. 3451–3485, 1993.
- [LAU 94] LAURSEN T., OANCEA V., « Automation and Assessment of augmented Lagrangian method for frictional contact problems », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 61, p. 956–963, 1994.
- [LAU 02] LAURSEN T., PARKER B., « An augmented Lagrangian quasi-newton solver for constrained non linear finite element applications », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 38, p. 3571–3590, 2002.
- [LEE 77] LEER B. V., « Towards the ultimate conservative difference scheme. IV. A new approach to numerical convection », *J. Comput. Phys.*, vol. 23, p. 276-299, 1977.
- [MAR 88] MARGOLIN L., BEASON C., Remapping on the Staggered Mesh, Rapport, Lawrence Livermore National Laboratory, 1988.
- [NEU 50] NEUMANN J. V., RICHTMYER R., « A Method for the Numerical Calculation of Hydrodynamical Shocks », *J. Appl. Phys.*, vol. 21, p. 232–237, 1950.
- [oud89] *Lois de contact et de frottement. Modèles et méthodes numériques en grandes déformations plastiques, Applications à la mise en forme des matériaux et au calcul des structures*, 1989.
- [S.P 93] S. PIPERNO B. L. E. M. L., Analysis and Compensation of Numerical Damping in a one-dimensional Aeroelastic Problem, Rapport, SOPHIA, SOPHIA ANTIPOLIS, 1993.
- [TAY 87] TAYLOR L., FLANAGAN D., PRONTO 2D : A two-dimensional transient solid dynamics program, Rapport, Sandia National Laboratories, 1987, SAND86-0594.
- [WAG 32] WAGNER H., « Über Stoss- und Gleitvorgänge an der Oberfläche von Flüssigkeiten », *ZAMM*, vol. 12, 1932.
- [WAT 86] WATANABE I., « Analytical expression of hydrodynamic impact pressure by matched asymptotic expansion technique », *T. West-Japan Soc. Nav. Arch.*, vol. 71, 1986.
- [wat86] *Theoretical investigation of wave impact loads on ships*, vol. 16, Berkeley, 1986.
- [YOU 82] YOUNGS D., « Time dependent multi-material flow with large fluid distortion », *Numerical Methods for Fluid Dynamics*, p. 273–285, Academic Press, 1982.
- [ZHA 93] ZHAO R., FALTINSEN O., « Water entry of two-dimensional bodies », *JFM*, vol. 246, 1993.
- [ZHO 93] ZHONG Z.-H., *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*, Oxford Science Publications, Oxford, 1993.