



**HAL**  
open science

## La Convexité en Statique

Jean Jacques Moreau

► **To cite this version:**

Jean Jacques Moreau. La Convexité en Statique. Aubin, J. - P. Analyse Convexe et Ses Applications, Springer-Verlag, 1974, 978-3-662-00638-2. hal-01824368

**HAL Id: hal-01824368**

**<https://hal.science/hal-01824368>**

Submitted on 27 Jun 2018

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# LA CONVEXITE EN STATIQUE

J. J. MOREAU

Institut de Mathématiques

Université des Sciences et Techniques du Languedoc

MONTPELLIER

## 1. INTRODUCTION

La Mécanique semble être le premier domaine scientifique où l'on ait fait un usage précis du concept d'ensemble convexe. Il s'agissait de formuler la condition d'équilibre, dans le champ de la pesanteur, d'un solide posé sur un plan horizontal : cette condition, assez anciennement connue (17ème siècle semble-t-il ; cf. [2], t. II, p. 227) est que la verticale du centre de gravité rencontre l'enveloppe convexe de l'ensemble des points d'appui. On a là un exemple typique de problème de statique avec liaisons unilatérales. C'est d'ailleurs l'étude des liaisons unilatérales en dynamique qui a motivé, initialement, l'intérêt de l'auteur pour les ensembles et fonctions convexes (naissance de la cavitation dans un fluide parfait incompressible ; cf. [9], [10]).

On sait, d'autre part, le rôle essentiel joué par la dualité des espaces vectoriels dans la théorie moderne de la convexité. Justement, c'est là une structure omniprésente en Mécanique aussi, bien que les exposés traditionnels ne l'explicitent pas nettement. Il est constant d'associer à chaque configuration éventuelle d'un système mécanique un espace vectoriel  $\mathcal{Y}$ , de dimension infinie si le système est de liberté infinie, dont les éléments constituent, au moins d'un point de vue formel, les valeurs possibles de la vitesse du système s'il vient à passer par la configuration en question. Grossièrement parlant,  $\mathcal{Y}$  est l'espace vectoriel tangent au point considéré de la variété des configurations du système, mais on n'aura généralement pas besoin de préciser cette assertion. Par la forme bilinéaire puissance, notée dans la suite  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , l'espace  $\mathcal{Y}$  est mis en dualité avec un autre espace vectoriel  $\mathcal{F}$ , dont les éléments constituent, en un sens général, des forces susceptibles d'agir sur le système dans la configuration envisagée. Ces deux espaces sont habituellement construits de manière que la dualité soit séparante, au moins dans  $\mathcal{F}$  ; nous donnons quelques explications là dessus au § 3 ci-après. La traditionnelle méthode des travaux virtuels, ou des puissances virtuelles, n'est pas autre chose que la mise en oeuvre de cette dualité.

Ce simple cadre permet déjà une analyse utile des lois de résistance. On pourra consulter [13] et [14], où l'auteur souligne que les lois physiques qui se trouvent relier une des forces, soit  $f \in \mathcal{F}$ , subies par le système, à sa vitesse,

$v \in \mathcal{V}$ , ont très usuellement la forme  $-f \in \partial \phi(v)$ , avec  $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  convexe. La considération de la multiapplication,  $v \mapsto \partial \phi(v)$  suscite une mentalité nouvelle dans l'étude du frottement (cf. [13]) ou de la plasticité, avec ou sans écrouissage (cf. [1], [16], [17], [18], [21], [22], [23], [24]). Les pionniers de la théorie de la plasticité avaient déjà reconnu l'importance de certaines propriétés de convexité. Certes, les relations entre force et vitesse révélées par l'expérience brute ne sont pas toujours sous-différentielles ; pourtant, certains se demandent si la prééminence de lois de cette forme n'aurait pas une signification thermodynamique, dans une nouvelle approche systématique des phénomènes irréversibles.

La mise en place de ce formalisme des paires d'espaces appelle immédiatement certaines démarches de style algébrique. Banalement, constituer un système par conjonction de plusieurs autres, se reflète dans la construction des espaces  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{F}$  comme produits des espaces respectivement associés aux systèmes constituants. Inversement, la mise en dualité de sous-espaces et d'espaces quotients de  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{F}$  peut avoir une signification mécanique précise, sans nécessairement correspondre à la définition d'un sous-système du système mécanique considéré (cette idée, déjà explicitée dans [13] est largement développée dans [1], [20], [21]).

## 2. SOMMAIRE

Il ne sera question ici que de statique, pour des systèmes mécaniques dont l'ensemble des configurations éventuelles, noté  $\mathcal{U}$ , est muni d'une structure d'espace vectoriel.

Tel est notamment le cas dans un nombre considérable de situations de mécanique appliquée, où une approximation linéaire est employée au niveau de la cinématique (ou plutôt de la géométrie) : le système est supposé présenter seulement une évolution "de petite amplitude" au voisinage d'une configuration de référence, laquelle constitue le zéro de l'espace vectoriel. Reconnaître cette structure vectorielle de  $\mathcal{U}$  ne fait que codifier le langage traditionnel de la mécanique appliquée, où l'on parle couramment de "superposer" de petits déplacements : il s'agit là de l'opération d'addition dans  $\mathcal{U}$  ; la notion de déplacements "proportionnels", qui correspond à la multiplication d'un élément de  $\mathcal{U}$  par un scalaire est également traditionnelle.

Alors, pour toute configuration du système, l'espace des vitesses  $\mathcal{V}$  s'identifie avec  $\mathcal{U}$ , en dualité avec un espace  $\mathcal{F}$  indépendant de la configuration ; la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  exprime aussi bien un travail qu'une puissance, selon que le premier facteur est un déplacement ou une vitesse.

Nous intitulons loi statique une relation formulée entre la configuration  $u \in \mathcal{U}$  du système et l'une, soit  $f \in \mathcal{F}$ , parmi les forces qu'il subit s'il vient à présenter ladite configuration. En pratique, le système étudié sera soumis conjointement à plusieurs lois de cette sorte : la formulation de chacune d'elles résume

un des phénomènes physiques auquel le système participe. La considération de telles relations entre configuration et force n'est d'ailleurs pas restreinte à la statique ; dans l'étude de problèmes d'évolution, les lois en question pourront se trouver dépendre du temps.

S'il existe une fonction  $W : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que la loi statique considérée s'écrive  $-f = \text{grad } W(u)$  (gradient "faible" ou différentielle de Gâteaux de la fonction  $W$ , au sens de la dualité  $\mathcal{U}, \mathcal{F}$ ) on dit classiquement que la fonction  $W$  est un potentiel de la loi statique. En pratique, la fonction  $W$  est presque toujours convexe ; l'importance de ce fait a été fréquemment soulignée, surtout à la suite de R. HILL [ 6 ] [ 7 ]. Des explications à ce sujet sont données au § 5. La conséquence principale de cette convexité est que l'élément  $\text{grad } W(u)$  constitue le sous-différentiel de la fonction  $W$  au point  $u$ , de sorte que la loi statique considérée s'écrit de façon équivalente  $-f \in \partial W(u)$ .

La notion mécanique de liaison est généralement mal connue des non-spécialistes. La caractérisation d'une liaison exige fondamentalement plus que la simple donnée du sous-ensemble constitué dans  $\mathcal{U}$  par les configurations que cette liaison permet : il est indispensable de posséder aussi des informations sur les forces de liaison (ou réactions) que doit mettre en oeuvre le dispositif par lequel la liberté du système se trouve restreinte, informations qu'on peut appeler les conditions sthéniques de la liaison. On construit facilement des exemples comparatifs de liaisons ayant la même condition géométrique, c'est-à-dire permettant le même ensemble de configurations, mais conduisant à des mouvements différents pour les systèmes qui y sont soumis : par exemple, dès 1922, H. BEGHIN (Thèse, Paris) insistait sur la distinction entre liaisons de contact et liaisons d'asservissement, concept aujourd'hui plus actuel que jamais.

L'objet des § 6 et 7, est de faire voir que les liaisons de contact traditionnellement qualifiées de "parfaites" ou "sans frottement", qu'elles soient bilatérales ou unilatérales, constituent des lois statiques au sens que nous venons de dire. Et, dans le cadre de la géométrie linéarisée qui nous occupe ici, la constatation fondamentale est qu'une loi statique de cette sorte, relation entre la configuration  $u \in \mathcal{U}$  et la force de liaison  $r \in \mathcal{F}$ , a la forme  $-r \in \partial \psi_C(u)$ , où  $\psi_C$  est la fonction indicatrice de l'ensemble  $C$  des configurations permises par la liaison, partie convexe fermée de  $\mathcal{U}$ .

Si l'on compare avec la loi statique  $-f \in \partial W(u)$  rencontrée tout à l'heure, on voit qu'un formalisme unique se trouve englober à la fois les lois de force classiques à potentiel convexe et les liaisons parfaites, bilatérales ou unilatérales : ce sont toutes des lois statiques décrites au moyen du sous-différentiel d'une fonction convexe à valeurs dans  $]-\infty, +\infty]$  ; nous disons que cette fonction est un sur-potentiel de la loi en question (ce fut là d'ailleurs la motivation même de l'auteur pour formaliser la notion de sous-différentiel).

On dispose ainsi d'un instrument extrêmement bien adapté à la mise en oeuvre du programme suivant :

1° Caractérisation des  $u \in \mathcal{U}$  qui sont configurations d'équilibre, par des propriétés de minimum.

2° Par passage aux fonctions polaires, au sens de la dualité  $\mathcal{U} \langle \cdot, \cdot \rangle \mathcal{F}$ , caractérisation analogue de la valeur d'équilibre de la force impliquée dans telle ou telle des lois statiques auxquelles le système est conjointement soumis (cela s'appelle traditionnellement une approche "statique" du problème de l'équilibre, par opposition avec la recherche directe de la configuration, intitulée approche "cinématique").

3° Caractérisation simultanée des deux éléments précédents par une propriété de col concernant une fonction définie sur le produit  $\mathcal{U} \times \mathcal{F}$ .

Tel est l'objet des § 9 et 10. Comme les systèmes rencontrés dans la pratique sont toujours soumis conjointement à plusieurs lois statiques, il existe dans chaque situation mécanique un nombre assez grand de manières d'utiliser les Propositions de ces paragraphes. Il est par ailleurs très usuel, au stade même de la définition des lois statiques, de voir s'introduire, à côté de la paire d'espaces en dualité  $\mathcal{U}, \mathcal{F}$ , au moins une autre paire (espace de déformation et espace de contrainte, eux aussi en dualité) liée à la première par un couple d'application linéaires mutuellement adjointes. Cela diversifie encore plus les manières d'exploiter les Propositions en question. L'exemple simple d'un treillis de barres, développé pour conclure ce rapport, illustre cette diversité.

### 3. VITESSE ET FORCE

Contrairement au sentiment qu'on a pu avoir dans le courant du 19ème siècle, et encore présent chez beaucoup de non-spécialistes, la Mécanique classique (c'est-à-dire la Mécanique ni relativiste ni quantique) est loin aujourd'hui de constituer une doctrine déductive, déroulée mathématiquement à partir d'axiomes unitaires. Les "principes", tels qu'il sont traditionnellement présentés, ne sont proprement applicables qu'aux systèmes finis de points matériels. Ils interviennent ensuite seulement comme guides, lors d'une élaboration inductive de chapitres plus évolués.

Que l'on songe, par exemple à la théorie du milieu continu le plus simple : ce milieu occupe un ouvert  $\Omega$  de l'espace à trois dimensions et son état de "contrainte intérieure" est décrit par une fonction définie sur cet ouvert, à valeurs tensorielles d'ordre 2, soit  $x \mapsto \sigma_{ik}(x)$ . Rappelons qu'on arrive à cette conception au moyen de considérations basées sur un découpage du milieu continu par des surfaces régulières et en admettant que les actions exercées l'une sur l'autre par les deux portions du milieu que sépare une telle surface sont représentables par des densités superficielles de force. Partant de là, en postulant les différentiabilités utiles, on réussit à inférer d'une manière tout-à-fait plausible les équations aux dérivées partielles de la statique ou de la dynamique du milieu. Lorsqu'il s'agit, après cela, de savoir si le théorème de l'énergie cinétique et le théorème des

puissances virtuelles sont vrais pour le système mécanique formé par un tel milieu, tout ce qu'on peut faire est de poser une définition ad hoc de la "puissance des efforts intérieurs", assurant la validité de ces deux énoncés, à savoir

$$(3. 1) \quad - \int_0 \sum_{i,k} \sigma_{ik}(x) \dot{\epsilon}_{ik}(x) dx ,$$

où  $\dot{\epsilon}_{ik}(x)$  représente le tenseur "vitesse de déformation" au point  $x$ . Au stade ultérieur des relations avec la thermodynamique, on postulera que le travail obtenu en intégrant cette puissance par rapport au temps est bien justiciable des énoncés thermodynamiques traditionnels.

On émerge de cette phase inductive obligé d'admettre que les "efforts" susceptibles d'agir sur un système mécanique ne sont pas toujours représentables par les vecteurs force de la mécanique naïve, ni même par des répartitions continues de tels vecteurs. Les "efforts intérieurs" dont on vient d'avoir à définir la puissance sont tout autre chose que les forces exercées l'une sur l'autre par les deux portions de milieu que sépare une surface choisie : ces dernières forces, affectant respectivement les deux faces en contact, consistent en deux répartitions dont les densités surfaciques vectorielles sont opposées ; cela leur donne une puissance nulle pour tout mouvement tel que le champ vectoriel des vitesses soit continu.

Cette formalisation des milieux continus tridimensionnels suffit pour beaucoup d'applications. Toutefois, d'autres chapitres de la Mécanique envisagent des milieux continus, à une, deux ou trois dimensions, dont les efforts intérieurs sont définis de manière plus compliquée ; on sera amené aussi à prendre en compte des discontinuités (ondes de choc), etc...

Bref, on doit accepter la Mécanique d'aujourd'hui comme une réunion de chapitres fermement reliés entre eux par certaines idées directrices, mais sans véritable fondement axiomatique unitaire. L'auteur estime cette constatation rassurante : elle prouve que la Mécanique est bien vivante ; l'axiomatisation est, en effet, plutôt un travail d'arrière-garde ; une science en développement déborde bien vite toute axiomatique qu'on essaie de lui imposer.

Parmi ces idées directrices communes à divers chapitres de la Mécanique figurent des méthodes mathématiques comme celles qui font l'objet du présent rapport. Insister sur la généralité de ces méthodes ne constitue en aucune façon une formulation de "principes" de la Mécanique.

Nous avons dit dans l'introduction qu'à chaque configuration éventuelle du système étudié, le mécanicien associait un espace vectoriel  $\mathcal{V}$  dont les éléments constituent, d'un point de vue formel, les valeurs possibles de la vitesse du système s'il vient à passer par cette configuration. Cet espace peut être construit, selon les situations, de façons très diverses. Pour les systèmes unidimensionnels envisagés au § 11 ci-après, l'élément générique de  $\mathcal{V}$  est simplement une vitesse d'allongement, mesurée par un réel, ce qui donne à  $\mathcal{V}$  la dimension un. Dans d'autres cas  $\mathcal{V}$  est un espace de champs vectoriels définis sur le système  $S$  lui-

même : l'élément générique  $v$  de  $\mathcal{V}$  est alors une application, associant à chaque particule  $s$  de  $\mathcal{S}$ , l'élément  $\vec{v}(s)$ , vecteur vitesse de cette particule relativement à un certain repère. Mais dans d'autre cas aussi, selon la structure géométrique dont  $\mathcal{S}$  aura été équipé, il pourra être plus indiqué de définir  $v$  comme un champ tensoriel de "vitesses de déformation", ou bien encore (dans la schématisation unidimensionnelle de la flexion des poutres) comme une fonction numérique "vitesse de courbure", etc... Bref  $\mathcal{V}$  sera, de façon générale, un espace fonctionnel et sa construction précise se trouvera souvent infléchie par le désir d'obtenir des théorèmes d'existence de solutions pour les problèmes posés (cette existence n'est peut être pas aussi importante qu'il semblerait ; cf. [21] où B. NAYROLES suggère une problématique plus souple).

Soulignons qu'une même situation physique pourra généralement être appréhendée de plusieurs manières, impliquant des choix différents de l'espace  $\mathcal{V}$  (cf. § 13 ci-après).

Parallèlement à la construction de l'espace  $\mathcal{V}$  est effectuée celle de l'espace  $\mathcal{F}$  des forces. Une première exigence est que, pour tout  $v \in \mathcal{V}$  et tout  $f \in \mathcal{F}$ , soit définie la puissance  $\langle v, f \rangle$ , forme bilinéaire mettant les deux espaces dualité.

C'est dans un sens généralisé que les éléments de  $\mathcal{F}$  sont baptisés forces (pour éviter des confusions avec l'acception restreinte traditionnelle du terme, l'auteur proposait, dans [15], d'utiliser pour les éléments de  $\mathcal{F}$  l'appellation de dynames). Ces éléments sont impliqués dans l'énoncé d'informations concernant les "actions" (extérieures ou intérieures) auxquelles le système est soumis. Chacune de ces informations, constituant ce qu'on peut appeler une loi de force, relie à tel ou tel élément descriptif du mouvement éventuel du système, une parmi les forces que le système "subit". Les systèmes étudiés sont pratiquement toujours soumis conjointement à plusieurs lois de force, soit  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$ . Le principe des vitesses virtuelles formule comme suit une condition nécessaire et suffisante pour que la configuration étudiée  $u$  soit une configuration d'équilibre du système c'est-à-dire pour que l'immobilité dans la configuration en question soit un mouvement observable : il existe des éléments  $f_1, f_2, \dots, f_n$  de  $\mathcal{F}$  respectivement compatibles, selon les lois  $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \dots, \mathcal{L}_n$ , avec l'immobilité du système dans la configuration  $u$  et tels que

$$(3. 2) \quad \forall v \in \mathcal{V} : \sum_{i=1}^n \langle v, f_i \rangle = 0 .$$

Un tel principe ne peut évidemment être vrai, en tant que condition suffisante d'équilibre, que si l'espace  $\mathcal{V}$  (ensemble de vitesses considérées comme "admissibles") est assez gros. A notre connaissance il n'a jamais été formulé de critère précis, ayant valeur de loi physique, et permettant de juger s'il en est bien ainsi ; c'est pourquoi, dans l'état actuel, si "principe" il y a, c'est plutôt un principe de conduite : lors de l'élaboration de chaque chapitre de la Mécanique, une des premières tâches sera de définir un espace  $\mathcal{V}$  assurant la validité de

l'énoncé précédent. L'efficacité d'une telle attitude est soulignée notamment par P. GERMAIN [5].

Il sera généralement commode, quoique non indispensable, de supposer que la dualité instituée par la forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  est séparante dans  $\mathcal{F}$ , c'est-à-dire que la forme linéaire  $v \mapsto \langle v, f \rangle$  est nulle pour tout  $v \in \mathcal{V}$  (si et) seulement si  $f$  est le zéro de  $\mathcal{F}$ . On pourra toujours se ramener à ce cas en remplaçant, si besoin est,  $\mathcal{F}$  par un espace quotient. L'exemple le plus classique est celui de la mécanique des solides parfaits : pour chaque configuration éventuelle d'un tel solide, l'espace  $\mathcal{V}$  est l'ensemble des champs vectoriels  $s \mapsto \vec{v}(s)$  définis sur le solide et équiprojectifs ; on sait que cet espace a la dimension 6 (du moins dans le cas régulier où tous les éléments du solide ne sont pas alignés). Un élément  $f$  de  $\mathcal{F}$  se présente a priori comme une famille de forces au sens élémentaire, appliquées au solide, ou, plus généralement comme, une répartition de forces qu'on peut décrire comme une mesure vectorielle ; notons  $d\vec{f}$  cette mesure. La puissance d'une telle répartition de forces se définit classiquement par

$$\langle v, f \rangle = \int \vec{v}(s) \cdot d\vec{f}(s) .$$

L'ensemble  $\mathcal{F}$  de ces mesures formant un espace vectoriel de dimension infinie, la dualité avec  $\mathcal{V}$  ne saurait être séparante. La démarche traditionnelle est de considérer le sous-espace  $\mathcal{F}_0$  des répartitions de forces qui sont équivalentes à zéro en ce sens qu'elles donnent une puissance nulle pour tout  $v \in \mathcal{V}$ . Alors l'espace quotient  $\mathcal{F}/\mathcal{F}_0$  se trouve en dualité séparante avec  $\mathcal{V}$  ; les éléments de cet espace quotient s'appellent classiquement torseurs.

Si la dualité est séparante dans  $\mathcal{F}$ , la condition d'équilibre (3. 2) équivaut à

$$(3. 3) \quad \sum_{i=1}^n f_i = 0 .$$

#### 4. SYSTEMES MECANIQUES VECTORIELS

Dans toute la suite de ce rapport, on se restreint au cas d'un système mécanique dont l'ensemble  $\mathcal{U}$  des configurations éventuelles est muni d'une structure d'espace vectoriel sur le corps des réels. C'est le cas dans un nombre considérable de problèmes de mécanique appliquée, traités par le moyen de l'approximation des petits mouvements : on admet que le système considéré s'écarte "peu" d'une configuration de référence laquelle constitue le zéro de  $\mathcal{U}$  ; en vertu de quoi toutes les relations cinématiques invoquées seront remplacées par des relations affines "tangentes". Appelons systèmes mécaniques vectoriels les schémas ainsi obtenus (et non pas systèmes mécaniques linéaires, car les problèmes posés à leur sujet ne sont pas nécessairement linéaires).

Etant donné un mouvement du système, c'est-à-dire une application  $t \mapsto u$  d'un intervalle de temps dans l'espace  $\mathcal{U}$ , la vitesse  $v$  est, par définition, la dérivée  $\dot{u}$  de cette application, dérivée prise au sens d'une topologie à spécifier. De la sorte, l'espace des vitesses  $\mathcal{V}$ , que le paragraphe précédent associait à chaque configuration éventuelle d'un système mécanique, s'identifie à  $\mathcal{U}$  lui-même ; c'est donc désormais le même espace quelle que soit la configuration considérée. Corrélativement l'espace vectoriel  $\mathcal{U}$  se trouve mis en dualité, par la forme bilinéaire notée toujours  $\langle \dots \rangle$ , avec un espace vectoriel de "forces"  $\mathcal{F}$ , le même pour toutes les configurations. Pour  $v \in \mathcal{U}$  et  $f \in \mathcal{F}$ , le scalaire  $\langle v, f \rangle$  constitue la puissance de la force  $f$  correspondant à la vitesse éventuelle  $v$  du système. Mais ici on peut aussi bien interpréter tout élément de  $\mathcal{U}$ , notons-le cette fois  $\delta u$ , comme un déplacement, auquel cas  $\langle \delta u, f \rangle$  constitue le travail de la force  $f$  correspondant à ce déplacement. Noter un tel déplacement  $\delta u$ , plutôt que simplement  $u$ , est conforme à la tradition et suggestif, mais il est bien entendu que, vu la structure vectorielle de  $\mathcal{U}$ , déplacements et configurations ont la même nature algébrique. Observons en outre que cette identification de l'espace des vitesses  $\mathcal{V}$  avec l'espace vectoriel  $\mathcal{U}$  des déplacements ou configurations suppose implicitement que l'unité de temps a été spécifiée. En pratique il restera tout de même possible de contrôler les calculs par des vérifications d'homogénéité ; distinguer  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{V}$  alourdirait inutilement le formalisme.

### Loi statique

Appelons loi statique une relation formulée entre la configuration  $u \in \mathcal{U}$  du système et l'une, soit  $f \in \mathcal{F}$ , parmi les forces qu'il se trouve subir s'il vient à passer par ladite configuration. En pratique une telle relation résume l'étude de phénomènes physiques auxquels le système considéré participe.

Cette relation peut toujours s'écrire sous la forme

$$f \in R(u) \quad ,$$

où  $u \mapsto R(u)$  représente une multiapplication de  $\mathcal{U}$  dans  $\mathcal{F}$ , à valeurs éventuellement vides.

La considération de telles lois n'est pas limitée à l'étude de problèmes d'équilibre et la multiapplication  $R$  peut éventuellement dépendre du temps.

### Equilibre

Pour la recherche des configurations d'équilibre du système (cf. § précédent) il n'y a naturellement pas à prendre en compte les phénomènes mettant en jeu des forces s'annulant lors de toute immobilité éventuelle de ce système (par exemple les résistances de type visqueux, fonctions linéaires de la vitesse  $\dot{u}$ ). Ces phénomènes mis à part, supposons que toutes les lois de force auquel le système est conjointement soumis consistent en  $n$  lois statiques, définies par les multiapplications  $R_1, R_2, \dots, R_n$ . La condition d'équilibre (3. 2) donne alors : un  $u \in \mathcal{U}$  est

configuration d'équilibre si et seulement si il existe  $f_1, f_2, \dots, f_n$  dans  $\mathcal{F}$  tels que  $f_i \in R_i(u)$  et que

$$(4. 1) \quad \forall u \in \mathcal{U} : \sum_{i=1}^n \langle u, f_i \rangle = 0$$

Si la dualité entre  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{F}$  est séparante dans  $\mathcal{F}$ , la propriété (4. 1) équivaut à la nullité de la somme des  $f_i$ ; alors la notion usuelle de somme de multiapplications donne : un  $u \in \mathcal{U}$  est configuration d'équilibre si et seulement si

$$(4. 2) \quad 0 \in R_1(u) + R_2(u) + \dots + R_n(u)$$

## 5. POTENTIEL CLASSIQUE

On dit que la loi statique  $f \in R(u)$  admet une fonction  $W : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$  comme potentiel si l'ensemble  $R(u)$  consiste, pour chaque  $u \in \mathcal{U}$ , en un seul élément égal à  $-\text{grad } W(u)$ , gradient faible (ou "de Gâteaux") de la fonction  $W$  au point  $u$  au sens de la dualité  $\mathcal{U} \langle \dots \rangle \mathcal{F}$ . On suppose dans la suite que cette dualité est séparante dans  $\mathcal{F}$ .

### Exemple banal.

Loi statique  $u \mapsto R(u) = \{f_0\}$  où  $f_0 \in \mathcal{F}$  est une force donnée, indépendante de la configuration  $u$ ; une telle loi est usuellement appelée une charge; elle admet pour potentiel la fonction linéaire  $u \mapsto -\langle u, f_0 \rangle$ .

### Stabilité énergétique et convexité.

Considérons le problème de l'équilibre du système soumis, à l'exclusion de toute autre loi de force, à la conjonction des deux lois suivantes : une loi statique de potentiel  $W$  et une charge donnée  $f_0$ . Un  $u_0 \in \mathcal{U}$  est configuration d'équilibre si et seulement si

$$(5. 1) \quad f_0 - \text{grad } W(u_0) = 0 \quad ,$$

ce qui équivaut à dire que la fonction numérique

$$\phi : u \mapsto W(u) - \langle u, f_0 \rangle$$

admet un gradient nul au point  $u_0$ . Supposant qu'il en est ainsi, considérons une droite issue de  $u_0$

$$D = \{u \in \mathcal{U} : u = u_0 + \xi \alpha \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}\}$$

( $\alpha$  élément fixé non nul de  $\mathcal{U}$ ) ; la restriction  $\phi|_D$  possède une dérivée nulle au point  $u_0$ .

Soit une évolution différentiable du système sur  $D$ , c'est-à-dire une application différentiable d'un intervalle de temps  $[t_0, t_1]$  dans  $D$ , faisant passer  $u$  de  $u_0$  à  $u_1$ . Le travail total des deux forces précédentes (il serait plus correct de dire : travail des deux lois statiques) est, par définition, l'intégrale

$$\int_{t_0}^{t_1} \langle \dot{u}(t), f_0 - \text{grad } W(u(t)) \rangle dt = \phi(u_0) - \phi(u_1) \quad .$$

Si  $u_0$  n'est pas, pour la restriction  $\phi|_D$ , un point de minimum, au moins local, il existe sur  $D$  des choix de  $u_1$ , arbitrairement voisins de  $u_0$ , tels que le travail ci-dessus soit strictement positif.

De façon équivalente, on peut considérer que chaque valeur  $u(t)$  de l'évolution ci-dessus est configuration d'équilibre du système soumis, outre les deux lois précédentes, à une charge supplémentaire ou commande  $a(t) \in \mathcal{F}$

$$a(t) = - f_0 + \text{grad } W(u(t)) \quad .$$

Alors  $\phi(u_0) - \phi(u_1)$  est le travail de cette commande au cours de l'évolution inverse sur  $D$ , ramenant  $u$  de  $u_1$  en  $u_0$ . L'existence de points tels que  $u_1$ , arbitrairement voisins de  $u_0$  et pour lesquels ce travail soit strictement positif s'énoncera très naturellement en disant que la configuration d'équilibre  $u_0$  n'est pas énergétiquement stable ; bref, en prenant en considération l'ensemble des droites issues de  $u_0$  on est conduit à poser :

DEFINITION. On dira que la configuration d'équilibre  $u_0$  est énergétiquement stable si  $u_0$  est point interne d'une partie  $\omega$  de  $\mathcal{U}$  telle que la restriction  $\phi|_\omega$  atteigne son inf au point  $u_0$  (minimum non nécessairement strict).

Tout point de  $\mathcal{U}$  peut s'identifier à la configuration d'équilibre  $u_0$  ci-dessus, simplement en choisissant  $f_0$  conformément à (5. 1). On dira que  $W$  est un potentiel stable si, pour tout  $u_0 \in \mathcal{U}$ , l'équilibre en question est énergétiquement stable. S'il en est ainsi on obtient que la restriction de  $W$  à toute droite telle que  $D$  est une fonction différentiable d'une variable réelle, localement minorée en chaque point par sa fonction affine tangente : cela entraîne élémentairement que ladite restriction est convexe, d'où la convexité de  $W$  sur  $\mathcal{U}$ . De ce fait le gradient de  $W$  est aussi sous-gradient et la fonction  $W$  appartient à l'ensemble  $\Gamma(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  des fonctions convexes, s.c.i. au sens des topologies compatibles avec la dualité  $\mathcal{U} \langle \dots \rangle \mathcal{F}$ . En conclusion :

PROPOSITION. Une fonction  $W : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ , faiblement différentiable au sens de la dualité  $\mathcal{U} \langle \dots \rangle \mathcal{F}$ , est un potentiel stable si et seulement si cette fonction est convexe.

S'il en est ainsi, le sous-différentiel de la fonction convexe  $W$  au point  $u$  se réduit au singleton  $\{\text{grad } W(u)\}$ , ce qui fait que la loi statique considérée s'écrit de façon équivalente

$$(5. 2) \quad - f \in \partial W(u) \quad .$$

## 6. LIAISON AFFINE PARFAITE

Envisageons le cadre le plus simple pour la mise en oeuvre de l'approximation des petits mouvements. Le système matériel  $S$  considéré est un ensemble,

usuellement infini, d'éléments appelés particules. Un repère  $E$  est supposé choisi, espace homogène euclidien de dimension  $3$  ; notons  $\vec{E}$  l'espace vectoriel associé, espace des vecteurs libres de  $E$ . Une configuration de  $S$  par rapport à  $E$  est une application de  $S$  dans  $E$  ; notons  $p$  le point de  $E$  qui est l'image de telle particule  $s \in S$  par cette application : on dit que  $p$  est la position de  $s$  dans  $E$  (ou "relativement à  $E$ ") pour la configuration considérée du système. Soit  $p_0$  la position de  $s$  dans  $E$  lorsque  $S$  se trouve présenter la configuration privilégiée  $u_0$  intitulée, selon le contexte, configuration "de référence", ou "naturelle", ou "vierge", etc... La particule  $s$  étant spécifiée, toute configuration  $u \in \mathcal{U}$  fournit donc une valeur du vecteur  $\overrightarrow{p_0 p} \in \vec{E}$ . L'approximation des petits mouvements consiste à munir  $\mathcal{U}$  d'une structure d'espace vectoriel dont  $u_0$  constitue le zéro et à remplacer, pour chaque particule  $s \in S$ , l'application  $u \mapsto \overrightarrow{p_0 p}$  par une application linéaire  $\vec{\ell}_s : \mathcal{U} \rightarrow \vec{E}$  qui lui est, en un certain sens, tangente.

Répetons qu'il s'agit là seulement du cadre le plus simple ; les exemples développés à la fin de ce rapport feront comprendre qu'on peut être amené à représenter les configurations d'un système  $S$  par d'autres objets mathématiques que des applications de  $S$  dans  $E$ , notamment par des fonctions définissant l'état de déformation et à mettre en oeuvre, là aussi, des approximations linéaires.

Etudions dans le cadre présent, un exemple typique de liaison bilatérale sans frottement : On suppose qu'une certaine particule  $s$  de  $S$  est guidée dans une surface donnée  $S = \{x \in E : h(x) = 0\}$  avec  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ , fonction continûment différentiable de gradient non nul en tout point de  $S$ .

La condition géométrique (ou, si l'on veut, cinématique) de cette liaison s'écrit  $h(p) = 0$  et l'approximation des petits mouvements remplace cette condition par la relation affine tangente

$$h(p_0) + \overrightarrow{p_0 p} \cdot \text{grad } h(p_0) = 0$$

(le point  $\cdot$  représente la multiplication scalaire dans  $\vec{E}$ ), de sorte que l'ensemble des configurations  $u$  permises apparaît comme une sous-variété affine de  $\mathcal{U}$ , soit

$$\mathcal{L} = \{u \in \mathcal{U} : h(p_0) + \vec{\ell}_s(u) \cdot \text{grad } h(p_0) = 0\}$$

Pour continuer, faisons les hypothèses que l'application  $\vec{\ell}_s : \mathcal{U} \rightarrow \vec{E}$  est surjective et en outre qu'elle est continue pour les topologies sur  $\mathcal{U}$  compatibles avec la dualité  $\mathcal{U} \langle \dots \rangle \mathcal{F}$ . On peut exprimer ces hypothèses en disant que  $s$  est une particule de  $S$  régulière par rapport à l'usage de  $\mathcal{U}$  comme espace des configurations de  $S$ . La variété affine  $\mathcal{L}$  est alors fermée, de codimension  $1$  ; bref

$$(6.1) \quad \mathcal{L} = U + a$$

où  $a$  désigne un élément convenablement choisi de  $\mathcal{U}$  et

$$(6.2) \quad U = \{u \in \mathcal{U} : \vec{\ell}_s(u) \cdot \text{grad } h(p_0) = 0\},$$

espace vectoriel de codimension  $1$  dans  $\mathcal{U}$ , fermé pour les topologies compatibles avec la dualité  $\mathcal{U} \langle \dots \rangle \mathcal{F}$ .

Parler de liaison signifie ici qu'un dispositif agit de manière adaptée à chaque circonstance pour maintenir, quoi qu'il advienne, la condition  $p \in S$ . Dans l'hypothèse d'un maintien par contact, cette action de contrainte ou réaction se résume en une simple force au sens de la physique élémentaire, appliquée à la particule  $s$  elle-même, de grandeur vectorielle  $\vec{R} \in \vec{E}$  a priori inconnue. Le mode d'emploi du formalisme  $\mathcal{U} \times \mathcal{F}$  représente cette force par l'élément  $r$  de  $\mathcal{F}$  tel que, pour tout  $\delta u \in \mathcal{U}$ , le crochet  $\langle \delta u, r \rangle$  fournisse le travail de la force, c'est-à-dire

$$(6.3) \quad \langle \delta u, r \rangle = \vec{\lambda}_s(\delta u) \cdot \vec{R}.$$

L'existence de ce  $r$  est assurée par l'hypothèse de continuité de  $\vec{\lambda}$ .

Faire, de plus, l'hypothèse que le contact est sans frottement signifie que le vecteur  $\vec{R}$ , a priori inconnu, est, en tout état de cause, normal au point  $p$  à la surface  $S$ . Dans les cas usuels d'emploi de l'approximation des petits mouvements, le déplacement  $p_0 p$  est petit devant les rayons de courbure de la surface  $S$ ; si l'on confond les directions des normales en  $p$  et  $p_0$ , on commet de la sorte une erreur du même ordre que celles déjà commises. L'hypothèse de non-frottement se traduit alors par l'implication

$$\delta \vec{p} \cdot \text{grad } h(p_0) = 0 \Rightarrow \delta \vec{p} \cdot \vec{R} = 0$$

pour  $\delta \vec{p} \in E$ . Parce que l'application  $\vec{\lambda}_s$  est supposée surjective et vu (6.3), cela équivaut à

$$\vec{\lambda}_s(\delta u) \cdot \text{grad } h(p_0) \Rightarrow \langle \delta u, r \rangle = 0$$

pour  $\delta u \in \mathcal{U}$ . Autrement dit, en appelant  $V$  le sous-espace de  $\mathcal{F}$  orthogonal à l'espace  $U$  défini en (6.2),

$$(6.4) \quad r \in V.$$

Inversement, on supposera que toute valeur de  $\vec{R}$  normale à  $S$  peut effectivement être assurée par le dispositif qui maintient la particule dans  $S$ : cela veut dire, d'une part, que le maintien est bilatéral (on peut concevoir  $s$  comme guidé entre deux surfaces parallèles infiniment voisines) et, d'autre part, qu'aucun seuil de rupture ne limite la capacité du dispositif. Nous résumons ces hypothèses inverses en disant que la liaison parfaite est ferme (cf. [15], tome II, § 9.2).

A ce moment, toutes les informations qu'on possède sur la liaison sont résumées dans  $u \in \mathcal{L}$ ,  $r \in V$ ; autrement dit, la paire  $(u, r)$  appartient au sous-ensemble  $\mathcal{L} \times V$  de  $\mathcal{U} \times \mathcal{F}$ : cela constitue bien une loi statique, dans le sens précisé au § 4, c'est-à-dire une relation entre la configuration éventuelle  $u \in \mathcal{U}$  et l'une, soit  $r \in \mathcal{F}$ , parmi les forces que le système subit. On trouve immédiatement que cette relation équivaut à

$$(6.5) \quad -r \in \partial \psi_{\mathcal{L}}(u)$$

(le signe  $-$  est ici sans importance, puisque le second membre est un espace vectoriel). Se rappeler que le sous-différentiel  $\partial \psi_{\mathcal{L}}(u)$  est vide si  $u \notin \mathcal{L}$ .

Si le système est soumis conjointement à une famille finie de liaisons de la sorte précédente, on constate que cette conjonction de lois statiques se résume

encore sous la forme (6. 5),  $\mathcal{L}$  désignant toujours une variété affine fermée pour les topologies compatibles avec la dualité.

D'une façon générale, on pourra appeler liaison affine parfaite, toute loi statique définie de cette manière par une variété affine fermée quelconque, de codimension non nécessairement finie dans  $\mathcal{U}$ .

## 7. LIAISON UNILATERALE PARFAITE

Avec les mêmes notations que dans le paragraphe précédent, supposons ici que la particule  $s$  du système  $S$ , au lieu d'être maintenue bilatéralement dans la surface  $S$ , est confinée par un bloc solide impénétrable dont  $S$  est la frontière. La fonction  $h$  utilisée pour la représentation de  $S$  est supposée choisie de façon que l'ensemble des valeurs permises pour la position  $p$  de  $s$  s'écrive  $\{p \in E : h(p) \geq 0\}$ . Si on utilise la même procédure de linéarisation que tout à l'heure, l'ensemble des valeurs permises pour  $u$  s'écrit

$$(7. 1) \quad \mathcal{D} = \{u \in \mathcal{U} : \vec{\mathcal{L}}_s(u) \cdot \text{grad } h(p_0) \geq 0\},$$

demi-espace fermé dans  $\mathcal{U}$  admettant la variété affine  $\mathcal{L}$  pour frontière.

Là encore, la formulation de tout problème d'équilibre ou de mouvement du système exige des informations concernant la grandeur vectorielle  $\vec{R} \in \vec{E}$  de la force que le bloc doit, selon les circonstances, exercer sur la particule  $s$ .

1° Cette réaction  $\vec{R}$  est nulle si  $s$  ne touche pas le bloc, c'est-à-dire si l'inégalité en (7. 1) est satisfaite de manière stricte. Donc, si on représente  $\vec{R}$  par l'élément  $r$  de  $\mathcal{F}$ , conformément à (6. 3), on a l'implication

$$(7. 2) \quad u \in \text{int } \mathcal{D} \Rightarrow r = 0.$$

2° Lorsque  $s$  est au contact du bloc, faisons encore l'hypothèse de non-frottement, c'est-à-dire que  $\vec{R}$  est normal à  $S$  au point  $p$ , position de  $s$ . Mais, de plus, l'unilatéralité du contact impose maintenant que le vecteur  $\vec{R}$  soit dirigé vers la région permise, c'est-à-dire dans le sens de  $\text{grad } h(p)$ . En termes de travail cela s'exprime par l'implication

$$\delta \vec{p} \cdot \text{grad } h(p) \geq 0 \Rightarrow \delta \vec{p} \cdot \vec{R} \geq 0 \quad \text{pour } \delta \vec{p} \in \vec{E}.$$

A nouveau, l'approximation des petits mouvements nous conduit à remplacer  $\text{grad } h(p)$  par  $\text{grad } h(p_0)$ ; comme, d'autre part, l'application  $\vec{\mathcal{L}}_s$  a été supposée surjective, l'implication ci-dessus équivaut à

$$\vec{\mathcal{L}}(\delta u) \cdot \text{grad } h(p_0) \geq 0 \Rightarrow \langle \delta u, r \rangle \geq 0 \quad \text{pour } \delta u \in \mathcal{U}.$$

Plus commodément posons  $u' = u + \delta u$ ; puisque, dans ce cas du contact, on a  $u \in \mathcal{L}$  l'implication équivaut à

$$(7. 3) \quad \forall u' \in \mathcal{D} : \langle u' - u, r \rangle \geq 0.$$

Il se trouve que cette dernière condition entraîne automatiquement (7. 2); en effet, si  $u \in \text{int } \mathcal{D}$ , la différence  $u' - u$ , pour  $u' \in \mathcal{D}$ , peut, à un facteur positif près, s'identifier à tout élément de  $\mathcal{U}$ .

La condition géométrique  $u \in \mathcal{D}$  de la liaison, jointe à la condition sthénique (7. 3) se résument visiblement dans l'écriture

$$(7. 4) \quad -r \in \partial \psi_{\mathcal{D}}(u) .$$

Comme tout à l'heure, la liaison est déclarée ferme si inversement toute valeur de  $r$  vérifiant cette condition peut être fournie par le dispositif réalisant la liaison : cela veut dire ici que le bloc solide est assez résistant pour que la force  $\vec{R}$ , normale et dirigée dans le sens précisé plus haut, puisse prendre, selon les circonstances, des valeurs arbitrairement grandes.

On observe à nouveau que la conjonction d'une famille finie de lois statiques de cette sorte, correspondant respectivement à des demi-espaces fermés  $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \dots, \mathcal{D}_n$  de l'espace  $\mathcal{U}$ , équivaut à la loi statique

$$(7. 5) \quad -r \in \partial \psi_C(u) ,$$

où  $C$  désigne l'intersection de ces  $n$  demi-espaces (ensemble convexe fermé, éventuellement vide).

On est conduit par là plus généralement à appeler liaison convexe parfaite, toute loi statique de la forme (7. 5) où  $C$  désigne une partie convexe de  $\mathcal{U}$ , fermée pour les topologies compatibles avec la dualité.

Les liaisons affines parfaites étudiées au paragraphe 6 en sont évidemment un cas particulier.

## 8. SURPOTENTIELS

On considère, comme dans les paragraphes précédents, un système mécanique dont l'ensemble des configurations  $\mathcal{U}$  est un espace vectoriel ; on suppose que la dualité de  $\mathcal{U}$  avec  $\mathcal{F}$  est séparante dans  $\mathcal{F}$ .

Nous disons qu'une loi statique admet une fonction  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  pour surpotentiel si cette loi consiste dans la relation suivante entre la configuration  $u \in \mathcal{U}$  et une force  $f \in \mathcal{F}$  :

$$-f \in \partial \phi(u) .$$

En particulier, lorsqu'une loi statique admet une fonction  $W$  pour potentiel,  $W$  se trouve être aussi surpotentiel si et seulement si cette fonction est convexe ; on a expliqué au § 5 que c'était très usuellement le cas.

L'autre exemple fondamental est celui d'une liaison convexe parfaite telle qu'on l'a présentée au § 7 : c'est une loi statique admettant pour surpotentiel la fonction indicatrice  $\psi_C$  de l'ensemble des configurations permises par la liaison. Si l'on prend, en particulier, pour  $C$  une variété affine, cette forme inclut le cas des liaisons bilatérales sans frottement, telles qu'elles apparaissent dans le cadre de l'approximation des petits mouvements (cf. § 6).

Rassembler lois de force traditionnelles et liaisons dans un formalisme unique est l'objet essentiel du présent rapport.

Supposons le système soumis conjointement à  $n$  lois statiques admettant les surpotentiels respectifs  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ . La somme  $f$  des  $n$  forces  $f_1, f_2, \dots, f_n$  impliquées dans ces  $n$  lois est reliée à la configuration  $u$  par

$$(8.1) \quad -f \in \partial\phi_1(u) + \partial\phi_2(u) + \dots + \partial\phi_n(u) ,$$

ce qui constitue la loi résultante des  $n$  lois ; banalement cette relation implique

$$(8.2) \quad -f \in \partial(\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n)(u) .$$

Mais (8.2) n'est équivalent à (8.1) que sous réserve de conditions assurant, pour les  $n$  fonctions  $\phi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , l'additivité des sous-différentiels.

Rappelons une condition suffisante usuelle pour cela (cf. [11]). :

Certaines des fonctions  $\phi_i$  sont faiblement différentiables partout dans  $\mathcal{U}$  ; il existe un point  $u_0 \in \mathcal{U}$  en lequel les autres, sauf éventuellement une, sont finies et continues (pour une topologie compatible avec la dualité de  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{F}$ ) ; la dernière fonction est finie au point  $u_0$ .

Dans ce cas, la loi statique résultante admet la fonction  $\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$  comme surpotentiel.

### Equilibre

Si toutes les lois de force auquel le système est soumis (mises à part, éventuellement, des forces s'annulant en cas d'immobilité) se résument en une unique loi statique admettant le surpotentiel  $\phi$ , un élément  $u$  de  $\mathcal{U}$  est une configuration d'équilibre si et seulement si  $0 \in \partial\phi(u)$ , ce qui signifie que  $u$  est un point de minimum de la fonction  $\phi$ .

Dans le cas, par contre, d'une conjonction de lois statiques en nombre fini, de surpotentiels  $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ , la situation est moins simple : de ce que (8.1) implique (8.2), on conclut que toute configuration d'équilibre minimise la somme  $\phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_n$  ; mais la réciproque est subordonnée à des hypothèses complémentaires assurant l'additivité des sous-différentiels, telles que celle formulée plus haut.

## 9. SYSTEME SOUMIS A DEUX LOIS STATIQUES ; DUALITE

On suppose dans ce paragraphe que (mises à part, éventuellement, des actions s'annulant en cas d'immobilité) le système considéré est soumis conjointement à deux lois statiques de surpotentiels  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , appartenant à  $\Gamma_0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$  (c'est-à-dire des fonctions convexes, à valeurs dans  $]-\infty, +\infty]$ , autres que la constante  $+\infty$  et s. c. i. pour les topologies compatibles avec la dualité).

Par exemple,  $\phi_1$  sera le potentiel, convexe, d'une loi statique de type traditionnel et  $\phi_2$  sera le surpotentiel  $\psi_C$  d'une liaison convexe parfaite. Conformément à l'argumentation du paragraphe précédent, toute configuration d'équilibre de ce système minimise la fonction  $\phi_1 + \psi_C$ , c'est-à-dire que c'est un point de  $C$  minimisant la restriction de  $\phi_1$  à cet ensemble et, en particulierisant la condition énoncée au paragraphe précédent, on obtient que chacune des hypothèses suivantes est suffisante pour que la réciproque soit vraie :

1° La fonction  $\phi_1$  est faiblement différentiable partout sur  $\mathcal{U}$ , c'est-à-dire que c'est un potentiel au sens classique.

2° Il existe un point dans l'intérieur de  $C$  où la fonction  $\phi_1$  prend une valeur finie.

3° Il existe un point dans  $\mathcal{U}$  en lequel la fonction  $\phi_1$  est finie et continue, et qui appartient à  $C$  ("continue" ou "intérieur" sont naturellement entendus au sens d'une topologie compatible avec la dualité  $\mathcal{U} \langle \dots \rangle \mathcal{F}$ ).

Intéressons-nous maintenant aux deux forces  $f_1 \in -\partial \phi_1(u)$  et  $f_2 \in -\partial \phi_2(u)$  impliquées respectivement dans les deux lois statiques et qui, à l'équilibre, ont une somme nulle. Déterminer  $f_1$ , ou aussi bien  $f_2$  qui lui est opposé, indépendamment de la configuration d'équilibre  $u$  correspondante s'appelle traditionnellement une approche statique du problème de l'équilibre (il vaudrait mieux dire approche sthénique).

On suppose expressément que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  appartiennent à  $\Gamma_0(\mathcal{U}, \mathcal{F})$ ; on note  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  leurs fonctions polaires respectives, éléments de  $\Gamma_0(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ ; on note  $\hat{\gamma}_1$  la fonction  $f \mapsto \gamma_1(-f)$  (c'est la fonction polaire de  $\hat{\phi}_1 : u \mapsto \phi_1(-u)$ ). Alors :

PROPOSITION. Un point  $f_1$  de  $\mathcal{F}$  est une solution du problème d'équilibre au sens précisé ci-dessus si et seulement si

$$(9. 1) \quad 0 \in \partial \hat{\gamma}_1(f_1) + \partial \gamma_2(f_1) .$$

En effet,  $f_1 \in \mathcal{F}$  est valeur d'équilibre si et seulement si il existe  $u \in \mathcal{U}$  tel que  $-f_1 \in \partial \phi_1(u)$  et  $f_1 \in \partial \phi_2(u)$ ; or ces deux conditions équivalent respectivement à  $-u \in \partial \hat{\gamma}_1(f_1)$  et  $u \in \partial \gamma_2(f_1)$ .

REMARQUE. Un point  $f_1$  vérifiant (9. 1) minimise la fonction  $\hat{\gamma}_1 + \gamma_2$  sur  $\mathcal{F}$ ; la réciproque est vraie si  $\hat{\gamma}_1$  et  $\gamma_2$  satisfont une condition d'additivité des sous-différentiels.

De telles caractérisations extrémales des forces à l'équilibre sont connues depuis longtemps, du moins pour un système soumis à des liaisons affines parfaites. Ce cas rentre dans le formalisme ci-dessus : si  $\phi_2$  est la fonction indicatrice de la variété affine  $\mathcal{L} = a + U$  (avec  $a \in \mathcal{U}$  et  $U$  sous-espace vectoriel de  $\mathcal{U}$ ; cf. § 6) on trouve, en appelant  $V$  le sous-espace de  $\mathcal{F}$  orthogonal à  $U$

$$\gamma_2(f) = \langle a, f \rangle + \psi_V(f) = \begin{cases} \langle a, f \rangle & \text{si } f \in V \\ +\infty & \text{si } f \notin V \end{cases} .$$

Par ailleurs, dans les exemples les plus classiques,  $\phi_1$  est le potentiel d'une loi d'élasticité linéaire, c'est-à-dire une forme quadratique  $\geq 0$  sur  $\mathcal{U}$ . On trouve alors élémentairement que  $\hat{\gamma}_1$ , égal à  $\gamma_1$ , est une forme quadratique sur  $\mathcal{F}$  (du moins en un sens généralisé : forme quadratique positive finie sur un sous-espace de  $\mathcal{F}$ , prolongée avec la valeur  $+\infty$  hors de ce sous-espace; cf. [8]). Ce cas des formes quadratiques donne lieu à une propriété spéciale : si  $-f \in \partial \phi_1(u)$ , on a

$\phi_1(u) = \hat{\gamma}_1(f)$  ; de la sorte  $\hat{\gamma}_1$  apparaît comme "expression de l'énergie élastique en fonction de la force". Cette particularité ne subsiste pas en élasticité non linéaire ; on peut toutefois se demander quelle doit être la forme de la fonction  $\phi_1$  (supposée par exemple sous-différentiable en tout point de  $\mathcal{U}$ ) pour qu'il existe une fonction  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que l'on ait l'implication

$$-f \in \partial\phi_1(u) \Rightarrow \hat{\gamma}_1(f) = g(\phi_1(u))$$

ce qui reliera encore la valeur de  $\hat{\gamma}_1$  à celle de l'"énergie". Comme

$$-f \in \partial\phi_1(u) \Rightarrow \hat{\gamma}_1(f) = - \langle u, f \rangle - \phi_1(u)$$

on est ramené à une analyse faite par l'auteur [14] à propos de la puissance dissipée dans une loi de résistance. En se limitant pour simplifier au cas usuel où  $0 \in \partial\phi_1(0)$  on trouve la caractérisation suivante de la fonction  $\phi_1$  : elle doit être quasi-homogène, c'est-à-dire que ses ensembles de niveau sont homothétiques les uns des autres par rapport à l'origine ; une propriété équivalente est que la "direction" de  $f$  dépend seulement de celle de  $u$ . C'est ce qui a lieu le plus souvent en pratique.

#### 10. PROPRIÉTÉ DE COL

Les deux approches : recherche de  $u$  ou recherche de  $f_1$ , présentées au paragraphe précédent pour le problème de l'équilibre d'un système à deux surpotentiels, constituent ce qu'on peut appeler une paire de problèmes en dualité, même lorsque, par manque de conditions assurant l'additivité des sous-différentiels, ces deux problèmes ne sont pas strictement équivalents à des minimisations de fonctions numériques.

Il est aujourd'hui banal d'observer que les solutions respectives de deux tels problèmes forment, si on les accouple, les solutions d'un problème de point selle pour une certaine fonction définie sur un espace produit.

C'est ce qui est obtenu encore ici ; on notera que la Proposition ci-dessous ne suppose pas de condition d'additivité de sous-différentiels.

PROPOSITION. Soit  $L$  la fonction concave-convexe définie sur le produit  $\mathcal{U} \times \mathcal{F}$  par

$$L(u, f) = \langle u, f \rangle + \hat{\gamma}_1(f) - \phi_2(u)$$

(avec la convention  $\infty - \infty = -\infty$  ou, aussi bien, la convention  $\infty - \infty = +\infty$ ). Un point  $u_0 \in \mathcal{U}$  est configuration d'équilibre pour le système défini au paragraphe 9, avec  $f_1 = -f_2 \in \mathcal{F}$  comme force associée, si et seulement si  $(u_0, f_1)$  est point-selle de valeur finie pour  $L$ , c'est-à-dire si  $L(u_0, f_1)$  est finie et

$$(10. 1) \quad \forall u \in \mathcal{U}, \quad \forall f \in \mathcal{F} : L(u, f_1) \leq L(u_0, f_1) \leq L(u_0, f)$$

Démonstration. Supposons que  $u_0$  soit configuration d'équilibre, avec  $f_1 (= -f_2)$  comme force associée par la première des deux lois statiques ; on a  $-u_0 \in \partial\hat{\gamma}_1(f_1)$ , ce qui signifie

$$(10. 2) \quad \forall f \in \mathcal{F} : - \langle u_0, f - f_1 \rangle + \hat{\gamma}_1(f_1) \leq \hat{\gamma}_1(f)$$

et  $f_1 \in \partial\phi_2(u_0)$ , ce qui signifie

$$(10. 3) \quad \forall u \in \mathcal{F} \quad : \quad \langle u - u_0, f_1 \rangle + \phi_2(u_0) \leq \phi_2(u)$$

Ajouter le réel  $-\phi_2(u_0)$  aux deux membres de (10. 2) fournit la seconde des inégalités (10. 1) ; ajouter le réel  $\hat{\gamma}_1(f_1)$  aux deux membres de (10. 3) fournit la première.

Inversement, supposer  $L(u_0, f_1)$  fini entraîne que  $\phi_2(u_0)$  et  $\hat{\gamma}_1(f_1)$  sont finis : le calcul ci-dessus peut alors être effectué à rebours pour déduire (10. 2) et (10. 3) de (10. 1).

REMARQUE. Echanger les rôles de  $\phi_1$  et  $\phi_2$  fournit une fonction  $L$  toute différente. Comme, dans les situations pratiques, il y a habituellement plusieurs manières de classer les lois statiques subies par le système en deux groupes représentés respectivement par deux surpotentiels  $\phi_1$  et  $\phi_2$ , comme, d'autre part le schéma à deux espaces  $\mathcal{U}, \mathcal{F}$  peut habituellement être mis en oeuvre de plusieurs manières (cf. § 13 ci-après), cette proposition engendre un grand nombre de propriétés de col caractérisant l'équilibre en élastostatique.

Pour d'autres voies d'investigation systématique de propriétés variationnelles en mécanique on pourra consulter [25], [26] et [27].

## 11. EXEMPLES UNIDIMENSIONNELS

On considère dans ce paragraphe un système  $S$  dont la configuration se trouve spécifiée par une unique variable numérique :  $S$  sera, par exemple, une barre rectiligne ou un fil, dans la mesure où on s'intéresse seulement à la distance entre les extrémités. Notons  $\ell_0 + e$  cette distance ; en d'autres termes,  $e$  représente l'allongement de la barre ou du fil par rapport à un certain état de référence dans lequel la longueur est  $\ell_0$ . Comme nous nous occupons uniquement ici de statique, l'état de contrainte du système est suffisamment décrit par la tension  $s$ . Pour l'application du principe des travaux virtuels à un tel système il est classique que le travail des efforts intérieurs, pour un accroissement d'allongement  $\delta e$ , doit être pris égal à  $-s \delta e$ . Ainsi le schéma général des paragraphes précédents s'applique en prenant, comme espace vectoriel  $\mathcal{U}$ , une copie de  $\mathbb{R}$  dont  $e$  ou  $\delta e$  constitue l'élément générique, et comme espace vectoriel  $\mathcal{F}$  une autre copie de  $\mathbb{R}$  dont  $s$  est l'élément générique ; ces deux espaces vectoriels de dimension 1 sont mis en dualité par la forme bilinéaire

$$(11. 1) \quad \langle e, s \rangle = -e s$$

Le signe "moins" vient simplement de ce que nous nous conformons à l'habitude, commune en mécanique des solides, de mesurer l'état de contrainte par un nombre positif lorsque c'est proprement un état de tension, par un nombre négatif lorsque c'est une compression. Ce signe n'a rien à voir avec le fait que l'"effort" en question est intérieur au système : dans notre formalisme, les efforts intérieurs sont, au sens

général, des "forces" comme les autres.

Ce cadre permet la formulation des lois de comportement de systèmes unidimensionnels usuels.

### 1° Elasticité ordinaire

On suppose dans ce cas que la tension  $s$  est une fonction continue strictement croissante de l'allongement  $e$ , soit  $s = j(e)$  ou  $s = \theta'(e)$ , en notant  $\theta$  une primitive de  $j$ ; remarquer que  $\theta$  est alors une fonction convexe. Soit  $e_0$  une valeur particulière de  $e$  et soit  $s_0 = \theta'(e_0)$ . La fonction affine

$$e \mapsto (e - e_0) s_0 + \theta(e_0)$$

est tangente à la fonction  $\theta$  au point  $e_0$ ; or, relativement à la dualité définie par la forme bilinéaire (11. 1), la pente de cette fonction affine est  $-s_0$ . Autrement dit la relation  $s = \theta'(e)$  peut s'écrire

$$-s = \text{grad } \theta(e) ,$$

ce qui signifie que la fonction  $\theta$  est potentiel de cette loi statique, donc aussi bien sur-potentiel, vu la convexité.

Comme nous avons supposé la fonction  $\theta' = j$  continue et strictement croissante, elle possède une fonction inverse  $j^{-1}$  définie sur l'intervalle  $I$ , ensemble des valeurs de  $j$  (intervalle non nécessairement fermé ni borné). La caractérisation de  $e$  et  $-s$  comme points conjugués relativement à la paire de fonctions duales  $\theta, \theta^*$

$$\theta(e) + \theta^*(-s) = \langle e, -s \rangle$$

permet de calculer  $\theta^*$  par la relation

$$\theta^*(-s) = s j^{-1}(s) - \theta [j^{-1}(s)] ,$$

valable pour tout  $s$  dans  $I$ . La fonction  $\theta^*$  prend la valeur  $+\infty$  hors de l'adhérence de  $-I$ .

### 2° Fil élastique

Si le système est un fil élastique de longueur au repos  $l_0$ , la relation entre allongement et tension s'écrit à nouveau  $s = j(e)$ , avec une fonction  $j$  qui prend la valeur zéro pour  $e \leq 0$ . Une primitive  $\theta$  de  $j$  est sur-potentiel de cette loi statique; sa fonction duale  $\theta^*$  relativement à la forme bilinéaire (11. 1) prend la valeur  $+\infty$  sur  $]0, +\infty]$ ; les valeurs de  $\theta^*(-s)$  pour  $s$  parcourant l'ensemble des valeurs de  $j$ , se construisent comme dans l'exemple précédent, si  $j$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .

### 3° Fil inextensible

C'est, par rapport au précédent, un cas frontière; on suppose que  $l_0$  est la longueur propre de ce fil et que la charge de rupture est infinie, on trouve que la relation entre  $e$  et  $s$  admet pour sur-potentiel

$$\theta(e) = \begin{cases} +\infty & \text{si } e > 0 \\ 0 & \text{si } e \leq 0 \end{cases}$$

c'est-à-dire la fonction indicatrice de l'ensemble  $C = ]-\infty, 0]$ , partie convexe fermée de  $\mathcal{U} = \mathbb{R}$ . Cette loi statique est donc une liaison convexe parfaite. La fonction duale  $\theta^*$  est la fonction indicatrice du sous-ensemble  $] -\infty, 0]$  de  $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ .

Le lecteur pourra formaliser d'autres exemples de systèmes unidimensionnels, par exemple un ressort à boudin, enclos dans un guide tubulaire pour éviter le flambement ; la longueur  $l_0 + e$  ne peut pas descendre en dessous de la valeur qu'elle a lorsque les spires du ressort sont jointives. La relation correspondante entre  $e$  et  $s$  équivaut à la conjonction d'une loi d'élasticité ordinaire et d'une liaison convexe parfaite. Cela donne un modèle élémentaire de système élastique de compressibilité limitée ; la théorie des milieux continus de ce type (exemple : le caoutchouc-mousse) a été fondée par W. PRAGER ; pour l'étude de problèmes aux limites concernant un tel milieu, voir [3].

## 12. UN SYSTEME COMPOSE

On prend pour  $S$  un treillis de barres, dont les extrémités sont articulées les unes aux autres par des joints sphériques. Les joints sont représentés par  $n$  points  $A_1, A_2, \dots, A_n$  qu'on appellera les noeuds du treillis. Quitte à imaginer des barres fictives, de tension essentiellement nulle, on peut supposer qu'il existe une barre, notons-la  $B_{ij}$ , entre chaque paire de noeuds  $A_i$  et  $A_j$  (avec  $i < j$  pour éviter les répétitions), soit  $\frac{n(n-1)}{2}$  barres en tout. Le comportement de chaque barre est traité comme unidimensionnel ; notons  $s_{ij}$  la tension de la barre  $B_{ij}$  et par  $e_{ij}$  son allongement relativement à la longueur qu'elle a dans l'état "zéro" du système.

Chaque configuration du système  $S$  est complètement déterminée par les positions correspondantes des  $n$  noeuds relativement à un repère tridimensionnel  $\mathcal{E}$  ; ces positions peuvent être définies par la donnée des  $n$  vecteurs  $\vec{x}_i \in \mathcal{E}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , spécifiant les déplacements subis respectivement par les  $A_i$  comparativement aux positions qu'ils ont dans la configuration zéro. On introduit donc l'espace vectoriel  $X$ , de dimension  $3n$ , dont l'élément générique  $x$  est le  $n$ -uplet  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ .

Les déplacements  $\vec{x}_i$  sont traités comme "infinitésimales" par rapport aux longueurs des diverses barres, ce qui permet de linéariser les relations géométriques. Notons  $\vec{\alpha}_{ij}$ , pour  $i < j$ , le vecteur unité de la droite orientée  $A_i A_j$  (considérée dans la configuration zéro ; mais cette précision est sans importance puisque les barres ne présentent que des rotations infinitésimales). L'allongement de la barre  $B_{ij}$  est relié à  $x$  par

$$(12. 1) \quad e_{ij} = \vec{\alpha}_{ij} \cdot (\vec{x}_j - \vec{x}_i)$$

(le point représente le produit scalaire de l'espace vectoriel euclidien  $\mathcal{E}$ ).

Un effort extérieur est un  $n$ -uplet de forces  $(\vec{y}_1, \vec{y}_2, \dots, \vec{y}_n)$  respectivement appliquées aux  $n$  noeuds  $A_i$  (dans ce qui suit on ne prendra pas en compte

la pesanteur) ; ce n-uple, noté  $y$ , constitue l'élément générique d'un espace vectoriel  $Y$ , de dimension  $3n$ . Les espaces vectoriels  $X$  et  $Y$  sont mis en dualité séparante par la forme bilinéaire

$$(12. 2) \quad \langle\langle x, y \rangle\rangle = \sum_{i=1}^n \vec{x}_i \cdot \vec{y}_i,$$

laquelle exprime le travail de l'effort extérieur  $y$  pour un déplacement  $x$  de l'ensemble des noeuds.

La formulation du problème de l'équilibre du système  $S$  demande qu'on spécifie les lois statiques auxquelles ce système est assujetti. Elles sont de deux sortes :

Certaines concernent des efforts extérieurs ; par exemple des charges données peuvent être appliquées à certains des noeuds ; ou bien certains noeuds peuvent être soumis à des liaisons, bilatérales ou unilatérales ; ou bien encore certains noeuds sont assujettis à des lois statiques reliant à leurs positions certaines des foces qu'il subissent. Tout cela pourra se décrire globalement dans le formalisme de la paire d'espaces  $X, Y$  par une relation entre  $x$  et  $y$ . Dans des cas usuels, cette relation s'écrira au moyen d'un surpotentiel  $\zeta : X \rightarrow \vec{R}$  :

$$(12. 3) \quad - y \in \partial \zeta(x)$$

au sens de la dualité définie par (12. 2).

Les autres lois statiques, dites intérieures, concernent le comportement des barres, en termes d'allongements  $e_{ij}$  et de tensions  $s_{ij}$ . On considèrera donc l'espace  $E$ , de dimension  $\frac{n(n-1)}{2}$ , dont l'élément générique, noté  $e$ , est le système des nombres  $e_{ij}$ , avec  $i < j$  et l'espace  $S$ , de même dimension, dont l'élément générique  $s$  est constitué par les  $s_{ij}$ , avec  $i < j$ . D'après ce qui a été dit au paragraphe précédent, le travail d'un système d'efforts  $s \in S$ , pour un accroissement  $e \in E$  des allongements, est

$$(12. 4) \quad [e, s] = - \sum_{i < j} e_{ij} s_{ij}$$

forme bilinéaire plaçant les espaces  $E$  et  $S$  en dualité séparante. Ne pas oublier le signe "moins" qui fait que cette dualité n'est pas la dualité naturelle de  $\frac{n(n-1)}{2}$  avec lui-même.

On suppose des lois de comportement concernant individuellement chaque barre, respectivement caractérisées comme au § 11 par des surpotentiels  $\theta_{ij}$ , c'est-à-dire que, au sens de la dualité qui avait été définie alors, on a

$$(12. 5) \quad - s_{ij} \in \partial \theta_{ij}(e_{ij})$$

pour toute paire d'indices  $i$  et  $j$  tels que  $i < j$ . On vérifie immédiatement que si on définit sur  $E$  la fonction  $e \mapsto \theta(e)$  par

$$\theta(e) = \sum_{i < j} \theta_{ij}(e_{ij})$$

ces  $\frac{n(n-1)}{2}$  relations équivalent à

$$(12. 6) \quad - s \in \partial \theta(e)$$

au sens de la dualité établie entre  $E$  et  $S$  par (12. 4).

D'après la définition des vecteurs  $\vec{\alpha}_{ij}$ , le noeud  $A_i$  subit la force  $s_{ij} \vec{\alpha}_{ij}$  de la part de chaque barre  $B_{ij}$ ,  $j > i$ , et la force  $-s_{ji} \vec{\alpha}_{ji}$  de la part de chaque barre  $B_{ji}$ ,  $j < i$ . Donc, si on note  $\vec{y}_i$  la somme des forces extérieures subies par  $A_i$  (c'est-à-dire des forces ne provenant pas des barres), la mécanique élémentaire donne comme conditions d'équilibre des  $n$  noeuds, pour chaque  $i$ ,

$$(12. 7) \quad \vec{y}_i + \sum_{j>i} s_{ij} \vec{\alpha}_{ij} - \sum_{j<i} s_{ji} \vec{\alpha}_{ji} = 0 \quad .$$

Notons  $D : X \rightarrow E$  l'application linéaire  $x \mapsto e$  définie par (12. 1). Au sens des deux dualités  $X \ll \langle \cdot, \cdot \rangle \gg Y$  et  $E [ \cdot, \cdot ] S$ , la transposée  $D^* : S \rightarrow Y$  de  $D$  est par définition telle que

$$(12. 8) \quad \forall x \in E, \forall s \in S : [Dx, s] = \langle\langle x, D^* s \rangle\rangle \quad .$$

En identifiant terme à terme les deux membres, développés conformément aux définitions de  $[ \cdot, \cdot ]$  et  $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ , on obtient que l'élément  $D^* s \in Y$  consiste dans le  $n$ -uplet des vecteurs  $(D^* s)_i \in \vec{E}$  exprimés pour chaque  $i$  par

$$(D^* s)_i = \sum_{j>i} s_{ij} \vec{\alpha}_{ij} - \sum_{j<i} s_{ji} \vec{\alpha}_{ji} \quad .$$

Le système des  $n$  conditions d'équilibre (12. 7) prend donc la forme

$$(12. 9) \quad y + D^* s = 0 \quad .$$

La définition (12. 8) de  $D^*$  fait que cette condition équivaut au "principe des travaux virtuels", à savoir

$$(12. 10) \quad \forall x \in X : \langle\langle x, y \rangle\rangle + [Dx, s] = 0$$

(pour alléger, on écrit simplement  $x$ , au lieu de  $\delta x$ ).

### 13. MODALITES DIVERSES D'UTILISATION DU FORMALISME GENERAL

Le formalisme  $\mathcal{U} \langle \cdot, \cdot \rangle \mathcal{F}$  des paragraphes 4 à 10 peut être appliqué de plusieurs manières au système que l'on vient de décrire.

#### 1° Méthode des gros espaces

Appelons ainsi la méthode consistant à utiliser la paire  $(x, e)$ , notée  $u$ , comme l'élément spécifiant la configuration du système. L'espace vectoriel  $\mathcal{U}$  est de la sorte constitué par le produit  $X \times E$ ; l'espace  $\mathcal{F}$  correspondant sera le produit  $Y \times S$  dont l'élément générique  $f$  est une paire  $(y, s)$ . La forme bilinéaire

$$\langle u, f \rangle = \langle\langle x, y \rangle\rangle + [e, s]$$

qui met  $\mathcal{U}$  et  $\mathcal{F}$  en dualité séparante exprime de façon générale le travail total de l'effort extérieur  $y$  et de la famille de tensions  $s$  lorsque le déplacement des noeuds est  $x$  et la famille des accroissements d'allongement  $e$ .

Evidemment, puisque les  $e_{ij}$  sont essentiellement les allongements résultant, selon (12. 1), des déplacements  $\vec{x}_i$  des noeuds,  $u$  ne peut parcourir la totalité de  $\mathcal{U}$ , mais seulement le sous-espace

$$U = \{ (x, e) \in X \times E : e = D x \} .$$

Formellement, on peut interpréter cette restriction de liberté comme une liaison parfaite au sens du § 6.

En effet, si  $y \in Y$  est l'effort extérieur total et  $s \in S$  la famille des tensions des barres, la condition d'équilibre (12. 9) ne consiste pas dans l'annulation de l'élément  $f = (y, s)$  de l'espace  $\mathcal{F}$  mais seulement dans l'exigence que cet élément appartienne au sous-espace

$$V = \{ (y, s) \in Y \times S : y + D^* s = 0 \} .$$

Or  $V$  est exactement le sous-espace de  $\mathcal{F}$  orthogonal à  $U$  (ce fait n'est pas autre chose que l'équivalence des conditions (12. 9) et (12. 10)). La condition (12.9) exprime l'existence de  $r \in V$  tel que  $f + r = 0$ . Interpréter cet élément  $r$  comme la réaction associée à la liaison dont la condition géométrique est  $u \in U$  est bien conforme à la définition d'une liaison affine parfaite selon le §6.

En fait, la conception de (12. 1) comme traduisant une liaison est ici physiquement claire. L'usage du produit  $X \times E$  en tant qu'espace des configurations équivaut à considérer le système comme la conjonction des sous-systèmes suivants : les noeuds  $A_i$ , dont les configurations sont décrites par les  $\vec{x}_i$ , et les barres, dont les états respectifs sont décrits par les  $e_{ij}$ . La liaison en question consiste tout simplement à relier les extrémités des barres aux noeuds. Toutefois, notre but en développant cet exemple d'un système de barres, est surtout de préparer le lecteur à l'étude des milieux continus : dans ce cas, le  $n$ -uplet  $x = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  sera remplacé par un champ de vecteurs "déplacement" défini sur une région de l'espace et la famille  $e$  des  $\frac{n(n-1)}{2}$  réels  $e_{ij}$  fera place à un champ de tenseurs "déformation" défini sur cette même région. Le rôle de la relation  $e = D x$  sera tenu par la relation de compatibilité géométrique entre déplacements et déformations. A nouveau cette relation pourra, formellement, s'interpréter comme une liaison parfaite ; mais il ne semble pas raisonnable de chercher à en visualiser la réalisation.

Pour une présentation des milieux continus dans le cadre algébrique même de ce rapport, on consultera [19], [20], [21]. Naturellement, le passage à la dimension infinie soulève des difficultés d'analyse fonctionnelle. Par exemple, l'équivalence des  $\frac{n(n-1)}{2}$  relations (12. 5) avec l'écriture (12. 6) est ici un aspect banal de la dualité des espaces produits. Par contre, le cas continu, amène à la théorie des fonctionnelles convexes intégrales et de leur dualité, ouverte par R. T. ROCKAFELLAR. Le lecteur trouvera par exemple dans [3] et [4] des précisions sur les espaces fonctionnels à mettre en oeuvre dans des questions de ce genre.

Supposons que la conjonction des lois statiques concernant les efforts externes (y compris, éventuellement, des liaisons auxquelles les noeuds sont soumis) soit globalement décrite par un surpotentiel  $\zeta \in \Gamma_0(X, Y)$ , c'est-à-dire que la force extérieure totale  $y \in Y$  est reliée à la configuration  $x \in X$  de l'ensemble des noeuds par

$$(13. 1) \quad - y \in \partial \zeta(x) ,$$

au sens de la dualité  $X \ll \langle \cdot, \cdot \rangle Y$ . Supposons par ailleurs le comportement des barres résumé sous la forme (12. 6). En définissant sur l'espace produit  $X \times E$  une fonction  $\phi$  par

$$\phi(u) = \zeta(x) + \theta(e)$$

on condense (12. 6) et (13. 1) dans l'écriture équivalente

$$(13. 1) \quad - f \in \partial \phi(u)$$

(sous-différentiel au sens de la dualité  $\mathcal{U} \langle \cdot, \cdot \rangle \mathcal{F}$ ) en notant, comme précédemment,  $f = (y, s)$ .

On est ainsi ramené à l'étude de l'équilibre d'un système soumis conjointement à la loi statique (13. 1) et à la liaison parfaite  $- r \in \partial \psi_U(u)$ .

## 2° Elimination de E et S

L'usage d'une certaine paire d'espaces est, en quelque sorte, un langage pour énoncer l'information dont on dispose au sujet de la situation mécanique considérée.

Comme la configuration du présent système est complètement spécifiée par la donnée de l'élément  $x$  de  $X$ , on peut préférer utiliser cet espace comme l'espace des configurations du système et  $Y$  comme seul espace de forces. Dans ce langage, tout effort agissant sur le système devra être décrit par un élément  $y$  de  $Y$ , la règle à observer étant que, pour tout déplacement  $\delta x \in X$ , le travail de cet effort soit exprimé par  $\langle \delta x, y \rangle$ . Ainsi une famille  $s = (s_{ij})$ ,  $i < j$ , de tensions des barres est représentée par l'élément  $y_s \in Y$  tel que

$$\forall \delta x \in X : \langle \delta x, y_s \rangle = [D \delta x, s]$$

c'est-à-dire

$$y_s = D^* s$$

Par suite, la loi statique (12. 6) s'exprime dans ce nouveau langage par

$$(13. 2) \quad - y_s \in D^* (\partial \theta (Dx))$$

On sait que, moyennant des hypothèses usuelles (par exemple l'existence, dans l'ensemble des valeurs de  $D$ , d'un point où la fonction  $\theta$  est finie et continue) on a

$$D^* \circ \partial \theta \circ D = \partial(\theta \circ D)$$

Dans ce cas la loi statique (13. 2) admet, au sens de la dualité  $\langle \langle X, Y \rangle \rangle$ , la fonction  $\theta \circ D$  pour surpotentiel.

De là une nouvelle manière d'appliquer au système mécanique étudié, les méthodes des paragraphes précédents.

## 3° Elimination de X et Y

L'application  $D : X \rightarrow E$  n'est pas injective. Cela signifie que la donnée de l'élément  $e = D(x)$  n'apporte pas assez d'information pour spécifier complètement la configuration du système. On peut cependant désirer déterminer les valeurs d'équilibre de  $e$  ou  $s$  avant celles de  $x$  ou  $y$  ou même s'intéresser seulement à  $e$  ou  $s$  (pour déterminer des seuils de rupture, par exemple). En principe,

l'élimination de  $x$  et  $y$  peut être conduite selon un plan semblable à ce qui a été mis en oeuvre tout à l'heure pour éliminer  $e$  et  $s$ .

Il est mieux en accord avec l'esprit de ce rapport de présenter les choses comme suit : Nous choisissons de traiter seulement des informations énoncées dans le langage de la paire d'espaces en dualité  $E [.,.] S$ . Nous acceptons donc de parler de l'état du système seulement en termes d'allongements : deux états fournissant le même  $e \in E$  seront considérés comme équivalents. Par ailleurs un effort ne pourra être pris en compte que s'il est représenté par un élément  $s_y \in S$ , de manière telle que, pour tout déplacement du système, le travail de cet effort ait l'expression  $[\delta e, s_y]$ . Donc, si l'effort considéré est une force extérieure représentée dans le formalisme antérieur par  $y \in Y$ , le  $s_y$  correspondant doit être tel que

$$(13. 3) \quad \forall \delta x \in X : \quad \langle\langle \delta x, y \rangle\rangle = [D \delta x, s_y] .$$

Un tel  $s_y \in S$  n'existe pas nécessairement : banalement il faut et il suffit pour son existence que  $y$  appartienne au sous-espace  $D^* S$  de  $Y$  (ce sous-espace est l'orthogonal de  $\text{Ker } D$ , au sens de la dualité  $X \langle\langle ., . \rangle\rangle Y$ ). L'impossibilité de représenter dans le langage  $E, S$  des efforts extérieurs n'appartenant pas à  $D^* S$  ne constitue pas un désavantage grave de ce langage. En effet (12. 9) montre que, pour un équilibre, il est nécessaire que la somme des efforts extérieurs appartienne à  $D^* S$ .

Un autre point essentiel pour le maniement du formalisme  $E, S$  est que toutes les valeurs ne sont pas permises pour  $e$  : cet élément appartient nécessairement au sous-espace  $DX$  de  $E$  (sous-espace des états de déformation qui sont "géométriquement compatibles"). D'un autre côté, si  $s_y$  est la somme des éléments de  $S$  représentant les efforts extérieurs, la condition d'équilibre n'est pas  $s + s_y = 0$ , mais (12. 10), qui donne, vu la définition (13. 3) des  $s_y$

$$(13. 4) \quad \forall \delta x \in X : \quad [D \delta x, s + s_y] = 0 .$$

Cela signifie que  $s + s_y$  doit appartenir au sous-espace de  $S$  orthogonal à  $DX$  au sens de la dualité  $[.,.]$  ; on retrouve donc une situation semblable à celle rencontrée dans la méthode des gros espaces :

Une fois traduites dans le langage  $E, S$  les lois statiques auxquelles le système est assujéti, le problème de l'équilibre se traite en considérant la condition  $e \in DX$  comme définissant une liaison parfaite.

#### REFERENCES

- [ 1 ] DEBORDES, O. , NAYROLES, B., Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques, à paraître.
- [ 2 ] DUHEM, P., Origines de la statique, t. II; Hermann, Paris, 1906.
- [ 3 ] DUVAUT, G., LIONS, J.L., Les inéquations en mécanique et en physique ; Dunod, Paris, 1972.
- [ 4 ] EKELAND, I., TEMAM, R., Analyse convexe et problèmes variationnels ; Dunod-Gauthier-Villars, Paris, 1974.

- [ 5 ] GERMAIN, P., Sur l'application de la méthode des puissances virtuelles en mécanique des milieux continus, C.R.Acad. Sci., Sér. A, 274 (1972), 1051-1055.
- [ 6 ] HILL, R., New horizons in the mechanics of solids, J. Mech. Phys. Solids, 5 (1956), 66 - 74.
- [ 7 ] HILL, R., Bifurcation and uniqueness in non-linear mechanics of continua, in : Problems of Continuum Mechanics, 155 - 164; S.I.A.M., Philadelphia, (1961).
- [ 8 ] MAURY, S., Dualité des formes quadratiques positives, Séminaire d'Analyse Unilatérale, Montpellier, 1968, Exposé n° 4 (14 p.).
- [ 9 ] MOREAU, J.J., Principes extrémaux pour le problème de la naissance de la cavitation, J. de Mécanique 5 (1966), 439 - 470.
- [ 10 ] MOREAU, J.J., One-sided constraints in hydrodynamics, in : ABADIE, J., editor, Nonlinear programming, North Holland Pub. Co., 1967, 261 - 279 ; résumé dans : Sur la naissance de la cavitation dans une conduite, C.R.Acad. Sci., 259 (1965), 3948-3950.
- [ 11 ] MOREAU, J.J., Fonctionnelles convexes, Séminaire sur les Equations aux Dérivées Partielles, Collège de France, Paris 1966-67 (multigr. 108 p.).
- [ 12 ] MOREAU, J.J., La notion de sur-potentiel et les liaisons unilatérales en élastostatique, C.R.Acad. Sci., Sér. A, 267 (1968), 954-957.
- [ 13 ] MOREAU, J.J., Convexité et frottement, Université de Montréal, Département d'Informatique, publ. n° 32, 1970 (multigr. 30 p.).
- [ 14 ] MOREAU, J.J., Fonctions de résistance et fonctions de dissipation, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier 1971, Exposé n° 6 (31 p.) résumé dans : Sur les lois de frottement, de plasticité et de viscosité, C.R.Acad. Sci., Sér. A, 271 (1970), 608-611.
- [ 15 ] MOREAU, J.J., Mécanique classique, Vol. I, 1969 ; Vol. II, 1971 ; Masson, Paris.
- [ 16 ] MOREAU, J.J., Sur l'évolution d'un système élasto-visco-plastique, C.R.Acad. Sci., Sér. A, 273 (1971), 118-121.
- [ 17 ] MOREAU, J.J., Systèmes élastoplastiques de liberté finie, Séminaire d'Analyse Convexe, Montpellier, 1973, Exposé n° 12 (30 p.).
- [ 18 ] MOREAU, J.J., On unilateral constraints, friction and plasticity, in : New variational techniques in Mathematical Physics, Lecture Notes, Centro Internazionale Matematico Estivo, 1973, 2<sup>d</sup> session, (200 p.).
- [ 19 ] NAYROLES, B., Quelques applications variationnelles de la théorie des fonctions duales à la Mécanique des solides, J. de Mécanique, 10 (1971), 263-289.
- [ 20 ] NAYROLES, B., Opérations algébriques en Mécanique des structures, C.R.Acad. Sci., Sér. A, 273 (1971), 1075-1078.
- [ 21 ] NAYROLES, B., Point de vue algébrique, convexité et intégrales convexes en Mécanique des solides, in : New variational techniques in Mathematical Physics, Lecture Notes, Centro Internazionale Matematico Estivo, 1973, 2<sup>d</sup> session, (75 p.).
- [ 22 ] NGUYEN, Q.S., Contribution à la théorie macroscopique de l'élasticité avec écrouissage, Thèse, Université de Paris VI, Octobre 1973.
- [ 23 ] NGUYEN, Q.S., Matériaux élasto-visco-plastiques et élastoplastiques à potentiel généralisé, C.R.Acad. Sci., Sér. A, 277 (1973), 915 - 918.
- [ 24 ] NGUYEN, Q.S., HALPHEN, B., Sur les lois de comportement élasto-visco-plastiques à potentiel généralisé, C.R.Acad. Sci., Sér. A, 277 (1973), 319 - 322.

- [25] NOBLE, B., SEWELL, M.J., On dual extremum principles in applied mathematics, University of Wisconsin, Math. Res. Cen. 1119 (1971), publié dans : J. Inst. Math. Applics. 9 (1972), 123 - 193.
- [26] SEWELL, M.J., The governing equations and extremum principles of elasticity and plasticity generated from a single functional, part I, J. Struct. Mech., 2 (1) (1973), 1 - 32 ; part II, ibid. 2 (2) (1973), 135 - 158.
- [27] TONTI, E., On the formal structure of continuum mechanics, Meccanica, 5 (1970), 22 - 30.