



HAL
open science

Un résultat de transfert et un résultat d'intégrabilité locale des caractères en caractéristique non nulle

Alexandru Ioan Badulescu

► **To cite this version:**

Alexandru Ioan Badulescu. Un résultat de transfert et un résultat d'intégrabilité locale des caractères en caractéristique non nulle. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2003, 2003 (565), 10.1515/crll.2003.096 . hal-01822261

HAL Id: hal-01822261

<https://hal.science/hal-01822261>

Submitted on 24 Jun 2018

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UN RÉSULTAT DE TRANSFERT ET UN RÉSULTAT D'INTÉGRABILITÉ LOCALE DES CARACTÈRES EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

par Alexandru Ioan BADULESCU¹

Abstract : In this paper we prove the transfer of orbital integrals from an inner form of $GL_n(F)$ to $GL_n(F)$ where F is a local field of positive characteristic. As an application we obtain that the characters of admissible representations are locally integrable on an inner form of $GL_n(F)$.

Math. subj. class. : 20G25-20G05

TABLE DES MATIÈRES

1. Introduction	1
2. Notations, définitions, résultats généraux	2
3. Transfert	5
4. Intégrabilité locale des caractères	20
5. Passage en revue des résultats en caractéristique non nulle	23
6. Bibliographie	24

1. INTRODUCTION

Dans cet article on démontre le théorème de transfert des intégrales orbitales entre GL_n et ses formes intérieures sur un corps local de caractéristique non nulle. Le résultat en caractéristique nulle a déjà été prouvé dans [DKV], et notre démonstration s'en inspire, même si, pour le cas de caractéristique non nulle, on est obligé d'utiliser aussi la théorie des corps proches et certaines constructions développées dans [Ba2].

Soit F un corps local de caractéristique non nulle. Soit n un entier. Posons $G = GL_n(F)$. Soit G' une forme intérieure de G . Si $g \in G$ et $g' \in G'$, alors on dit que g et g' se correspondent si leurs polynômes caractéristiques sont égaux et séparables (i.e. sans racine multiple sur une clôture algébrique de F). On fixe des mesures de Haar sur G et G' telles que le volume des

¹ Alexandru Ioan BADULESCU, Université de Poitiers, UFR Sciences SP2MI, Département de Mathématiques, Téléport 2, Boulevard Marie et Pierre Curie, BP 30179, 86962 FUTUROSCOPE CHASSENEUIL CEDEX
E-mail : badulesc@wallis.sp2mi.univ-poitiers.fr

sous-groupes compacts maximaux soit 1. On identifie les centres de G et G' et on les note indistinctement Z . Il existe une injection de l'ensemble de classes de conjugaison des tores maximaux de G' vers l'ensemble de classes de conjugaison des tores maximaux de G . Pour deux classes C' et C qui se correspondent via cette injection, si on choisit des représentants $T \in C$ et $T' \in C'$, alors il existe un isomorphisme de groupes de T' vers T dont la restriction à Z est l'identité. On peut choisir des mesures de Haar sur T et T' qui se correspondent via cet isomorphisme (elles se correspondent alors pour tout autre choix d'isomorphisme). Avec ce choix de mesures, si f est une fonction localement constante à support compact sur G ou G' , si g est un élément semisimple régulier, alors on note $\Phi(f; g)$ l'intégrale orbitale de f au point g . Nous prouvons dans la section 3 le théorème suivant :

Théorème de transfert. *Si f' est une fonction localement constante à support compact sur G' , il existe une fonction localement constante à support compact f sur G telle qu'on ait*

$$\Phi(f; g) = \Phi(f'; g')$$

pour tous $g \in G$ et $g' \in G'$ qui se correspondent.

Une conséquence de ce résultat est l'intégrabilité locale des caractères des représentations admissibles sur les formes intérieures de GL_n en caractéristique non nulle (section 4). Concernant cette intégrabilité locale des caractères, signalons que Lemaire est en train de rédiger en ce moment la preuve d'un résultat encore plus général.

L'essentiel de ce travail a été réalisé lors d'une thèse de doctorat sous la direction de Guy Henniart et je tiens à le remercier pour l'aide et les conseils qu'il m'a apportés. Je remercie également Colette Moeglin, Hervé Jacquet et Bertrand Lemaire qui ont lu le manuscrit. Je voudrais remercier le rapporteur anonyme car son rapport très précis m'a permis d'améliorer la rédaction de cet article.

2. NOTATIONS, DÉFINITIONS, RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Soient F un corps local non archimédien de caractéristique quelconque et D une algèbre à division centrale sur F de dimension finie d^2 . Soit r un entier strictement positif. On pose $G' = GL_r(D)$. On fixe une paire parabolique minimale standard $(A_0; P_0)$ où A_0 est le tore diagonal et P_0 est le groupe des matrices triangulaires supérieures. Un sous-groupe parabolique P de G' est dit *standard* s'il contient P_0 . P a alors un unique sous-groupe de Levi L qui contient A_0 . La décomposition de Levi $P = LU$ (U radical unipotent de P) est alors dite *standard*. L peut être identifié à un groupe de matrices diagonales par blocs de taille donnée, et c'est ce que nous ferons par la suite. Un tel L sera dit sous-groupe de Levi standard de G' .

Soit Z le centre de G' . Posons $K = GL_r(O_D)$, où O_D est l'anneau des entiers de D . On fixe une mesure de Haar dg (resp. dz) sur G' (resp. Z) telle que le volume de K (resp. $Z \cap K$) soit égal à 1. Soit P un sous-groupe parabolique standard de G' et $P = LU$ sa décomposition de Levi standard. On munit P et U de mesures de Haar invariantes à gauche telles que les volumes de $P \cap K$ et $U \cap K$ soient égaux à 1. Toutes les représentations de G' ou de ses sous-groupes de Levi standard considérées par la suite sont des représentations complexes admissibles et nous omettrons de le préciser. On note $ind_P^{G'}$ le foncteur d'induction parabolique normalisé.

On note $H(G')$ l'espace des fonctions localement constantes à support compact sur G' . Soit P un sous-groupe parabolique standard de G' . On note δ_P le caractère modulaire sur P .

Pour toute $f \in H(G')$, on définit une fonction localement constante à support compact sur L , f^P , par la formule :

$$f^P(l) = \delta_P^{\frac{1}{2}}(l) \int_K \int_U f(k^{-1}luk) dk du$$

pour tout $l \in L$.

Si $g \in G'$, le polynôme caractéristique de g se définit comme dans [Pi], 16.1. On dit que $g \in G'$ est semisimple régulier si son polynôme caractéristique est sans racine multiple sur une clôture algébrique de F . On note G'^{sr} l'ensemble des éléments semisimples réguliers de G' . Si g est semisimple régulier, alors le commutant de g dans G' est un tore maximal T_g . Fixons des mesures de Haar sur tous les tores maximaux de G' de façon à ce que, si deux tores sont conjugués, les mesures se correspondent via cette conjugaison (c'est indépendant du choix de la conjugaison). Si $f \in H(G')$, on définit l'intégrale orbitale de f en g par

$$\Phi(f, g) = \int_{G'/T_g} f(x^{-1}gx) dx$$

où dx est la mesure quotient des mesures fixées plus haut sur G' et T_g . On note $Grot(G')$ le groupe de Grothendieck des représentations admissibles de longueur finie de G' . Si $\pi \in Grot(G')$ on note χ_π le caractère de π (défini sur G'^{sr}).

Si L est un sous-groupe de Levi standard de G' , il est isomorphe à un produit de groupes du même type que G' et les définitions et notations plus haut (élément semisimple régulier, intégrale orbitale etc.) s'étendent de façon évidente à L . Remarquons que $L \cap G'^{sr}$ est un sous-ensemble dense de L^{sr} . Si $g \in L \cap G'^{sr}$, alors on a $T_g \subset L$. Nous avons déjà fixé des mesures sur L et T_g . L'intégrale orbitale en g sur L est définie par rapport à la mesure quotient.

Nous regroupons ici certains résultats classiques qui seront utilisés par la suite. Nous spécifions quand un résultat n'est prouvé à ce jour (à notre connaissance) qu'en caractéristique nulle. Pour les autres nous référons à des

preuves valables indépendamment de la caractéristique. Cette distinction est importante pour le reste de l'article.

Proposition 2.1. *Soit P un sous-groupe parabolique standard de G' . Si π est une représentation admissible de G' et $f \in H(G')$ alors on a*

$$\mathrm{tr} \mathrm{ind}_P^{G'} \pi(f) = \mathrm{tr} \pi(f^P).$$

Démonstration. [La], lemme 7.5.7. □

Proposition 2.2. *Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique standard de G' . Si $f \in H(G')$ alors pour tout $g \in L \cap G'^{sr}$ on a*

$$\Phi(f, g) = D_{L \setminus G}(g)^{-\frac{1}{2}} \Phi(f^P, g),$$

où les mesures sont comme plus haut et $D_{L \setminus G}(g)$ est la valeur absolue normalisée du déterminant de $\mathrm{Ad}(g^{-1}) - \mathrm{Id}$ agissant dans $\mathrm{Lie}(L) \setminus \mathrm{Lie}(G')$.

Démonstration. [La], prop. 4.3.11. □

Proposition 2.3. *Soit $f \in H(G')$. Si pour toute représentation irréductible π de G' on a $\mathrm{tr} \pi(f) = 0$ alors l'intégrale orbitale de f est nulle sur G'^{sr} .*

Démonstration. [DKV], th. A.2.a. La preuve s'applique en toute caractéristique. □

Proposition 2.4. *Supposons que la caractéristique de F est nulle ou sinon $D = F$. Supposons que $f \in H(G')$ est telle que $\Phi(f, g) = 0$ pour tout $g \in G'^{sr}$. Alors on a $\mathrm{tr} \pi(f) = 0$ pour toute représentation irréductible π de G' .*

Démonstration. Ce résultat, connu pour la caractéristique nulle, est vrai dès que les caractères des représentations de G' sont localement intégrables (application de la formule d'intégration de Weyl). Lemaire a prouvé dans [Le1] l'intégrabilité locale des caractères sur $GL_r(F)$ en toute caractéristique. □

On dit que $g \in G'$ est elliptique régulier si le polynôme caractéristique de g est irréductible et sans racine multiple. On note G'_e l'ensemble des éléments elliptiques réguliers de G' . Soit ω un caractère unitaire de Z . On note $L^0(\mathcal{G})$ l'espace des fonctions f localement constantes sur G'

invariantes sous l'action de conjugaison par les éléments de G' , et vérifiant $f(zg) = \omega(z)f(g)$ pour tout $z \in Z$ et tout $g \in G'_e$. On considère le sous-espace $L^2(\mathcal{G})$ de $L^0(\mathcal{G})$ formé de fonctions f telles que

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_e} |W_T|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D_{T \setminus G'}(\bar{t}) |f(\bar{t})|^2 d\bar{t}$$

converge, où \mathcal{T}_e est un ensemble de représentants des classes de conjugaison de tores elliptiques maximaux de G' , $|W_T|$ est le cardinal du groupe de Weyl de T , $d\bar{t}$ est la mesure de Haar pour laquelle le volume de T/Z est 1, T^{reg} est l'ensemble des éléments réguliers de T , et $D_{T \setminus G'}(\bar{t})$ est la valeur

absolue normalisée du déterminant de l'opérateur $Ad(\bar{t}^{-1}) - Id$ agissant sur $Lie(T) \setminus Lie(G')$. On définit un produit scalaire dans $L^2(G'_e; \omega)$ en posant :

$$\langle f_1; f_2 \rangle_e = \sum_{T \in \mathcal{T}_e} |W_T|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(\bar{t}) f_1(\bar{t}) \overline{f_2(\bar{t})} d\bar{t},$$

qui munit $L^2(G'_e; \omega)$ d'une structure d'espace préhilbertien.

Nous rappelons qu'une représentation irréductible π de G' est dite *de carré intégrable* si elle est unitaire et admet un coefficient non nul de carré intégrable sur G/Z . π est dite *essentiellement de carré intégrable* si elle peut s'écrire comme produit tensoriel d'une représentation de carré intégrable par un caractère de G' .

Proposition 2.5. *Pour toute représentation π de G' de carré intégrable et de caractère central ω , la restriction du caractère χ_π de π à G'_e se trouve dans $L^2(G'_e; \omega)$ et les éléments de $L^2(G'_e; \omega)$ ainsi obtenus forment une famille orthonormale complète pour $\langle ; \rangle_e$.*

Démonstration. Classique en caractéristique nulle. Voir [Ba1] cor. 5.2 et [Ba2], cor. 5.13, pour la caractéristique positive. \square

Si $f \in H(G')$ on définit f_ω par la formule

$$f_\omega(g) = \int_Z w(z) f(zg) dz.$$

Proposition 2.6. *Supposons que la caractéristique de F est nulle. Soit $f \in H(G')$. Alors la restriction de l'intégrale orbitale de f_ω à G'_e appartient à $L^2(G'_e, \omega^{-1})$.*

Démonstration. D'après [H-CvD], th.14, chap.8, pour tout T dans \mathcal{T}_e , le produit de l'intégrale orbitale de f_ω et de la fonction $D^{\frac{1}{2}}$ est borné sur T^{reg} . Le module du carré de cette fonction est ainsi borné et donc intégrable sur T^{reg}/Z qui est de mesure 1. Comme \mathcal{T}_e est fini, le résultat s'ensuit. \square

3. TRANSFERT

Soit D une algèbre à division centrale sur F de dimension finie d^2 . Soit r un entier strictement positif. On pose $G' = GL_r(D)$. Soit $n = rd$. On pose $G = GL_n(F)$. Les notations et conventions déjà fixées seront appliquées à G et G' .

Par la suite, la notation $g \leftrightarrow g'$ signifie $g \in G^{sr}$ et g et g' ont le même polynôme caractéristique. Si $g \in G$ nous disons que g se transfère s'il existe $g' \in G'$ tel que $g \leftrightarrow g'$ (c'est le cas si et seulement si g est semisimple régulier et le degré de tout polynôme divisant son polynôme caractéristique est divisible par d). Notons $G_{G'}$ l'ensemble des éléments de G qui se transfèrent. Pour une intégrale orbitale ou le caractère d'une représentation de G nous dirons qu'elle/il est G' -nul(le) si elle/il est nul(le) sur $G_{G'}$. Si L est un sous-groupe de Levi standard de G alors L est l'ensemble des matrices diagonales par blocs de taille donnée. Il correspond donc à une suite d'entiers strictement positifs dont la somme vaut n (les tailles des blocs). On dit que L se

transfère si toutes les tailles des blocs sont divisibles par d . En divisant ces tailles par d on obtient une suite de nombres dont la somme est r . Il existe un unique sous-groupe de Levi standard L' de G' associé à cette suite. On dit alors que L correspond à L' . Si L ne se transfère pas, aucun élément de L^{sr} ne se transfère.

Nous notons \mathbf{JL}_r la correspondance de Jacquet-Langlands généralisée ([Ba3]). C'est un morphisme injectif de groupes

$$\mathbf{JL}_r : \text{Grot}(G') \rightarrow \text{Grot}(G)$$

qui vérifie

$$\chi_{\pi'}(g') = (-1)^{n-r} \chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(g)$$

pour toute $\pi' \in \text{Grot}(G')$ et tous $g \leftrightarrow g'$. Rappelons que les éléments de $\text{Grot}(G)$ dont le caractère est G' -nul forment un sous-groupe de $\text{Grot}(G)$ noté $\mathbf{S}_{G,G'}$. C'est aussi le sous-groupe de $\text{Grot}(G)$ engendré par les représentations qui sont induites à partir d'une représentation irréductible d'un sous-groupe de Levi qui ne se transfèrent pas. En termes de \mathbb{Z} -modules, $\mathbf{S}_{G,G'}$ est un supplémentaire de l'image de \mathbf{JL}_r dans $\text{Grot}(G)$. Sur les tores maximaux de G on fixe des mesures de Haar telles que, si deux tores sont conjugués, les mesures se correspondent par conjugaison (indépendant du choix de cette conjugaison). Sur les tores maximaux de G' on fixe des mesures de Haar associées comme dans l'annexe de [Ba2] à celles fixées sur les tores maximaux de G . Pour résumer, si T est un tore maximal de G et g est un élément semisimple régulier se trouvant dans T , alors $T = T_g$ et T est isomorphe au groupe des éléments inversibles de l'anneau $F[g] \cong F[X]/(P_g)$ où P_g est le polynôme caractéristique de g . Il s'ensuit que, si $g \leftrightarrow g'$, il existe un isomorphisme de T_g sur $T_{g'}$ qui envoie g sur g' et qui préserve le polynôme caractéristique. On utilise ces isomorphismes pour transférer au tores de G' les mesures fixées sur les tores de G . Avec ce choix de mesures il est facile à prouver :

Proposition 3.1. *L'application $i : L^0(G_e, \omega) \rightarrow L^0(G'_e, \omega)$ donnée par $i(f)(g') = f(g)$ pour tout $g \leftrightarrow g'$ induit une isométrie*

$$i : L^2(G_e, \omega) \cong L^2(G'_e, \omega).$$

Si π' est une représentation de carré intégrable de G' de caractère central ω alors on a :

$$i(\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}) = (-1)^{n-r} \chi_{\pi'}$$

où l'on sous-entend les restrictions à G'_e et G_e respectivement.

Si $f \in H(G)$ et $f' \in H(G')$ on dit que f et f' se correspondent et on écrit $f \leftrightarrow f'$ si, pour tout $g \leftrightarrow g'$ on a

$$\Phi(f, g) = \Phi(f', g')$$

et pour tout $g \in G^{sr}$ qui ne se transfère pas on a

$$\Phi(f, g) = 0.$$

Toutes ces notations et conventions seront utilisées aussi sur les sous-groupes de Levi standard de G et G' qui sont des produits de groupes du même type que G et G' .

Dans cette section on démontre le théorème de transfert suivant :

Théorème 3.2. *a) Soit $f' \in H(G')$. Alors il existe $f \in H(G)$ telle que $f \leftrightarrow f'$.*

b) Soit $f \in H(G)$ telle que l'intégrale orbitale de f s'annule sur $G^{sr} \backslash G_{G'}$. Alors il existe $f' \in H(G')$ telle que $f \leftrightarrow f'$.

Démonstration. Le transfert en caractéristique nulle a déjà été prouvé dans [DKV], théorème B.2.c.1.

Soient $f' \in H(G')$ et $f \in H(G)$ telles que $tr\pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$; on écrit $f \in PW_G(f')$ ou $f' \in PW_{G'}(f)$ si $tr\pi'(f') = tr\mathbf{JL}_r(\pi')(f)$ pour tout $\pi' \in Grot(G')$.

Lemme 3.3. *Pour $f \in H(G)$ les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i) *L'intégrale orbitale de f est nulle sur $G^{sr} \backslash G_{G'}$.*
- (ii) *$tr\pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$.*

Démonstration. Un élément g de G^{sr} se trouve dans $G^{sr} \backslash G_{G'}$ si et seulement s'il existe un sous-groupe de Levi standard L de G qui ne se transfère pas tel que g soit conjugué à un élément de L .

Montrons que (i) \Rightarrow (ii). Supposons que f vérifie (i). Si L est un sous-groupe de Levi standard qui ne se transfère pas, si P est le sous-groupe parabolique standard de G dont un sous-groupe de Levi est ce L , alors, par la prop. 2.2, l'intégrale orbitale de f^P est identiquement nulle sur $L \cap G^{sr}$. Comme elle est localement constante sur L^{sr} et que $L \cap G^{sr}$ est dense dans L^{sr} , l'intégrale orbitale de f^P est identiquement nulle sur L^{sr} . Par la prop. 2.4 (cas $D = F$) f^P annule la trace de toute représentation irréductible de L . Par la prop. 2.1 f annule alors la trace de toute représentation induite à partir d'une représentation irréductible de L . Ainsi, (ii) est prouvé.

Montrons maintenant que (ii) \Rightarrow (i). Supposons que f vérifie (ii). Soit $g \in G^{sr} \backslash G_{G'}$. Soit $P = LU$ un sous-groupe parabolique standard de G tel que L ne se transfère pas et L contient un élément x conjugué à g . Alors (ii) implique que f annule la trace de toutes les représentations induites à G à partir d'une représentation irréductible de L . Donc f^P annule la trace de toute représentation irréductible de L (prop. 2.1). La prop. 2.3 implique alors que l'intégrale orbitale de f^P est nulle sur $L \cap G^{sr}$. En particulier $\Phi(f^P; x) = 0$ donc, par la prop. 2.2, $\Phi(f; x) = 0$. Donc $\Phi(f; g) = 0$ car g et x sont conjugués. \square

Lemme 3.4. *([DKV]) a) Si $f' \in H(G')$, alors $PW_G(f') \neq \emptyset$.*

b) Si $f \in H(G)$ est telle que $\text{tr}\pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$, alors $PW_{G'}(f) \neq \emptyset$.

Démonstration. a) Soit $X(F^*)$ le groupe des quasi-caractères non ramifiés de F^* . Ce groupe est naturellement isomorphe à \mathbb{C}^* ([We], prop. 8, VII, 3), ce qui lui confère une structure de variété complexe. Si $X(G)$ est le groupe des caractères non ramifiés de G , alors l'application $\chi \mapsto \chi \circ \det$ réalise un isomorphisme de $X(F^*)$ sur $X(G)$.

Soit L un sous-groupe de Levi standard de G . Les mêmes définitions valent pour L . Si L est le sous-groupe de G formé des matrices diagonales par k blocs de tailles données, alors $X(L)$ est isomorphe à $X(F^*)^k$. La restriction d'un caractère de G à L induit le plongement diagonal de $X(G) \simeq X(F^*)$ dans $X(L) \simeq X(F^*)^k$.

Pour G' on a la même situation, en remplaçant l'application "det" par la norme réduite. Il existe donc un isomorphisme canonique \mathbf{x}_G de $X(G)$ sur $X(G')$ en passant par $X(F^*)$. Si L est un sous-groupe de Levi standard de G qui se transfère et L' est le sous-groupe de Levi standard de G' qui lui correspond on a donc un isomorphisme naturel de groupes \mathbf{x}_L de $X(L)$ dans $X(L')$ qui est un isomorphisme de variétés également.

Soit $f' \in H(G')$. On définit une forme linéaire

$$h : \text{Grot}(G) \rightarrow \mathbb{C}$$

en posant :

- $h(\mathbf{JL}_r(\pi')) = \text{tr}\pi'(f')$ pour tout $\pi' \in \text{Grot}(G')$,
- $h(\pi) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$ et en étendant par linéarité.

Nous voulons montrer que h est une bonne fonction au sens de [DKV], A.5 (voir aussi [BDK]; la définition d'une bonne fonction de [DKV] est équivalente à celle de [BDK]) pour en déduire que h est une fonction trace. Il faut vérifier que

(i) pour tout sous-groupe de Levi standard L de G , pour toute représentation π irréductible de L , la fonction $h_{(L,\pi)} : X(L) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\chi \mapsto h(\text{ind}_L^G(\chi \otimes \pi))$ est une fonction algébrique sur la variété $X(L)$ et

(ii) il existe un nombre fini de couples $\{(L_i, \pi_i)\}_{i \in I}$ où L_i est un sous-groupe de Levi standard de G et π_i est une représentation cuspidale irréductible de L_i tel que $h_{(L,\pi)}$ est identiquement nulle si π n'est pas sous-quotient de $\text{ind}_{L_i}^G \chi \otimes \pi_i$, pour un $i \in I$ et un $\chi \in X(L_i)$.

Les conditions (i) et (ii) sont équivalentes à

(i') pour tout sous-groupe de Levi standard L de G , pour toute représentation essentiellement de carré intégrable π de L , la fonction $h_{(L,\pi)} : X(L) \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $\chi \mapsto h(\text{ind}_L^G(\chi \otimes \pi))$ est une fonction algébrique sur la variété $X(L)$ et

(ii') il existe un nombre fini de couples $\{(L_i, \pi_i)\}_{i \in I}$ où L_i est un sous-groupe de Levi standard de G et π_i est une représentation essentiellement de carré intégrable de L_i tel que $h_{(L,\pi)}$ est identiquement nulle si π n'est pas sous-quotient de $\text{ind}_{L_i}^G \chi \otimes \pi_i$, pour un $i \in I$ et un $\chi \in X(L_i)$.

Les implications $(i) \Rightarrow (i')$ et $(ii') \Rightarrow (ii)$ sont immédiates.

Le fait que $(i') \Rightarrow (i)$ vient de ce que pour tout sous-groupe de Levi standard L , $Grot(L)$ admet pour base l'ensemble (i.e. sans répétitions) de toutes les représentations induites à partir des représentations essentiellement de carré intégrable de sous-groupes de Levi standard de L ([Ze]).

D'autre part on a le

Lemme 3.5. *Soient L un sous-groupe de Levi standard de G et π une représentation cuspidale irréductible de L . Soit A l'ensemble des représentations essentiellement de carré intégrable de G qui sont sous-quotient d'une représentation $ind_L^G \chi \otimes \pi$, $\chi \in X(L)$. Si A est non vide, alors il existe une représentation essentiellement de carré intégrable σ de G telle que $A = \{\chi \otimes \sigma, \chi \in X(G)\}$.*

Démonstration. Découle immédiatement de la classification de Zelevinski. \square

En adaptant ce lemme aux sous-groupes de Levi standard de G il est facile de voir que (ii) implique (ii').

Maintenant, si L' est un sous-groupe de Levi standard de G' et π' une représentation essentiellement de carré intégrable de L' , si L est le sous-groupe de Levi standard de G correspondant à L' et π la représentation essentiellement de carré intégrable de L correspondant à π' par Jacquet-Langlands, on a

$$\mathbf{JL}_r(ind_{L'}^{G'} \chi \otimes \pi') = ind_L^G \chi \otimes \pi.$$

(par les th. 3.2.a et le th. 3.6.a de [Ba3] par exemple). La fonction trace $h' : \pi' \mapsto tr \pi'(f')$ est une bonne fonction sur G' au sens de [DKV], A.5. Ces conditions se traduisent exactement comme dans le cas de G par des conditions du type (i') et (ii') sur G' , en utilisant la classification de Tadič ([Ta]) à la place de celle de Zelevinski ([Ze]). Le bon comportement par rapport à \mathbf{JL}_r mis en évidence dans l'équation plus haut montre alors que h vérifie aussi (i') et (ii').

On applique le théorème de Paley-Wiener à la fonction h . Il existe donc $f \in H(G)$ telle que $h(\pi) = tr \pi(f)$ pour toute $\pi \in Grot(G)$. La fonction f se trouve alors dans $PW_G(f')$.

b) Soit maintenant $f \in H(G)$ telle que $tr \pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G,G'}$. Alors, pour les mêmes raisons,

$$h' : Grot(G') \rightarrow \mathbb{C}$$

définie par

$$h'(\pi') = tr \mathbf{JL}_r(\pi')(f)$$

a les propriétés de Paley-Wiener; une fonction $f' \in H(G')$ associée à h' par le théorème de Paley-Wiener se trouve alors dans $PW_{G'}(f)$. \square

Montrons maintenant la proposition suivante qui, avec le lemme 3.4, implique le théorème 3.2:

Proposition 3.6. (*[DKV] pour la caractéristique nulle*)

Soient $f' \in H(G')$ et $f \in H(G)$. On a

$$f \in PW_G(f') \iff f \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'.$$

Démonstration. Montrons que $f \in PW_G(f') \Rightarrow f \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'$.

1. F est de caractéristique nulle.

Supposons que la caractéristique de F est nulle. On démontre la proposition par récurrence sur n . Soit $f \in PW_G(f')$. On a déjà vu que les intégrales orbitales de f s'annulent sur $G^{sr} \backslash G_{G'}$ (lemme 3.3).

Soit $g \in G_{G'} \backslash G_e$. Alors g est conjugué dans G à un élément h d'un sous-groupe de Levi standard propre L de G . Soit $g' \in G'$, $g' \leftrightarrow g$. Notons P_g ($P_{g'}$, P_h) le polynôme caractéristique de g (de g' , de h). On a $P_g = P_{g'} = P_h$.

Soit L' le sous-groupe de Levi standard de G' qui correspond à L . Écrivons $L = \prod_{i=1}^k GL_{dn_i}(F)$ et $L' = \prod_{i=1}^k GL_{n_i}(D)$. En tant qu'élément de L , h correspond à une suite h_1, \dots, h_k , $h_i \in GL_{dn_i}(F)$. P_h est le produit des polynômes caractéristiques P_{h_i} des h_i . Pour tout i on fixe $h'_i \in GL_{n_i}(D)$ correspondant à h_i . Soit h' l'élément de L' défini par la suite h'_1, \dots, h'_k . Le polynôme caractéristique $P_{h'}$ de h' est le produit des polynômes caractéristiques $P_{h'_i}$ des h'_i . En particulier on a $P_{h'} = P_h = P_{g'}$ et donc $h \leftrightarrow h'$ et h' est conjugué dans G' à g' .

Soient $P = LU$ le sous-groupe parabolique standard de G attaché à L et $P' = L'U'$ le sous-groupe parabolique standard de G' attaché à L' . En appliquant la prop. 2.1 on peut voir que $f^P \in PW_L(f'^{P'})$. Par l'hypothèse de récurrence appliquée à L on a alors

$$\Phi(f^P; h) = (-1)^{n-r} \Phi(f'^{P'}; h').$$

On obtient donc

$$D_{L \backslash G}^{-\frac{1}{2}}(h) \Phi(f; h) = (-1)^{n-r} D_{L' \backslash G'}^{-\frac{1}{2}}(h') \Phi(f'; h')$$

par la prop. 2.2.

Montrons que $D_{L \backslash G}(h) = D_{L' \backslash G'}(h')$. Les n^2 valeurs propres comptées avec multiplicités de $Ad(h)$ agissant dans $Lie(G)$ sont tous les quotients λ_i/λ_j où λ_i et λ_j sont des racines de P_h . Les valeurs propres comptées avec multiplicités de $Ad(h)$ agissant dans $Lie(L)$ sont tous les quotients λ_i/λ_j où λ_i et λ_j sont des racines d'un même P_{h_i} . On a la même situation pour h' et, vu que pour tout i on a $P_{h_i} = P_{h'_i}$, on en déduit que $D_{L \backslash G}(h) = D_{L' \backslash G'}(h')$.

On a donc

$$\Phi(f; h) = (-1)^{n-r} \Phi(f'; h').$$

Comme g est conjugué à h et g' est conjugué à h' on en déduit

$$\Phi(f; g) = (-1)^{n-r} \Phi(f'; g').$$

Cette relation est donc vraie pour tout $g \in G_{G'} \backslash G_e$ et tout $g' \leftrightarrow g$.

Il reste le cas des éléments elliptiques réguliers. Si ω est un caractère unitaire de Z , alors on a

$$\Phi(f_\omega, \cdot) \in L^2(G_e; \omega^{-1}) \text{ et } \Phi(f'_\omega, \cdot) \in L^2(G'_e; \omega^{-1})$$

(prop. 2.6, car nous sommes en caractéristique nulle). D'autre part on a, pour toute représentation de carré intégrable de G' de caractère central ω :

$$\text{tr}\pi'(f') = \text{tr}(\mathbf{J}\mathbf{L}_r(\pi'))(f)$$

car $f \in PW_G(f')$. Posons $\pi = \mathbf{J}\mathbf{L}_r(\pi')$. Par la formule d'intégration de Weyl (nous sommes en caractéristique nulle et les caractères des représentations sont localement intégrables)

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(t) \chi_\pi(t) \Phi(f_\omega; t) dt = \\ \sum_{T' \in \mathcal{T}_{G'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}/Z} D(t') \chi_{\pi'}(t') \Phi(f'_\omega; t') dt' \end{aligned}$$

où \mathcal{T}_G est un ensemble de représentants des classes de conjugaison des tores maximaux de G , $\mathcal{T}_{G'}$ est un ensemble de représentants des classes de conjugaison des tores maximaux de G' et sur T^{reg}/Z (et T'^{reg}/Z) on a mis la mesure quotient. Écrivons $\mathcal{T}_G = \mathcal{T}_{eG} \cup (\mathcal{T}_G \setminus \mathcal{T}_{eG})$ et $\mathcal{T}_{G'} = \mathcal{T}_{eG'} \cup (\mathcal{T}_{G'} \setminus \mathcal{T}_{eG'})$ en partageant les systèmes de représentants des classes de conjugaison des tores maximaux en elliptiques et non elliptiques. Pour tout tore $T \in \mathcal{T}_G \setminus \mathcal{T}_{eG}$ on a deux possibilités :

- ou bien T est un tore elliptique maximal d'un sous-groupe de Levi de G qui ne se transfère pas et alors on a

$$\int_{T^{reg}/Z} \chi_\pi(t) \Phi(f_\omega; t) dt = 0$$

parce qu'on a vu que $\Phi(f_\omega; t) = 0$ si $t \in G^{sr} \setminus G_{G'}$,

- ou bien T est un tore elliptique maximal d'un sous-groupe de Levi propre de G qui se transfère et alors il existe un unique tore $T' \in \mathcal{T}_{G'} \setminus \mathcal{T}_{eG'}$ qui lui correspond et on a

$$\int_{T^{reg}/Z} \chi_\pi(t) \Phi(f_\omega; t) dt = \int_{T'^{reg}/Z} \chi_{\pi'}(t') \Phi(f'_\omega; t') dt'$$

car on a vu un peu plus haut que

$$\Phi(f_\omega; t) = (-1)^{n-r} \Phi(f'_\omega; t')$$

pour tout $t \in G_{G'} \setminus G_e$, $t \leftrightarrow t'$, et on sait par ailleurs que

$$\chi_\pi(t) = (-1)^{n-r} \chi_{\pi'}(t')$$

pour tout $t \leftrightarrow t'$ par la correspondance.

Finalement, l'égalité entre les sommes d'intégrales plus haut peut être simplifiée en ôtant les intégrales le long de tores maximaux non elliptiques

de G et G' . On obtient après cette simplification :

$$\begin{aligned} \sum_{T \in \mathcal{T}_{eG}} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}/Z} D(t) \chi_\pi(t) \Phi(f_\omega; t) dt = \\ \sum_{T' \in \mathcal{T}_{eG'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}/Z} D(t') \chi_{\pi'}(t') \Phi(f'_\omega; t') dt' \end{aligned}$$

En utilisant la prop. 2.6 cette égalité s'écrit :

$$\langle \chi_{\pi'}; \overline{\Phi(f'_\omega; \cdot)} \rangle = \langle \chi_\pi; \overline{\Phi(f_\omega; \cdot)} \rangle .$$

La prop. 3.1 implique alors que les éléments $i(\overline{\Phi(f_\omega; \cdot)})$ et $(-1)^{n-r} \overline{\Phi(f'_\omega; \cdot)}$ de $L^2(\mathcal{G})$ ont le même produit scalaire avec $\chi_{\pi'}$ pour toute représentation de carré intégrable π' de G' de caractère central ω . En utilisant la prop. 2.5 on obtient que $(i(\overline{\Phi(f_\omega; \cdot)}) - (-1)^{n-r} \overline{\Phi(f'_\omega; \cdot)})$ est identiquement nul sur G'_e .

Soient maintenant $g \leftrightarrow g'$ elliptiques réguliers. On a

$$\Phi(f_\omega; g) = (-1)^{n-r} \Phi(f'_\omega; g').$$

D'où

$$\int_Z \omega(z) \Phi(f; zg) = (-1)^{n-r} \int_Z \omega(z) \Phi(f'; zg').$$

Donc la fonction définie sur Z par :

$$u(z) = \Phi(f; zg) - (-1)^{n-r} \Phi(f'; zg')$$

vérifie $\int_Z \omega(z) u(z) dz = 0$. Cela est vrai pour tout caractère unitaire ω de Z , donc u est identiquement nulle (th. 4.4, chap. 2, [Bo]). En particulier

$$\Phi(f; g) = (-1)^{n-r} \Phi(f'; g').$$

2. F est de caractéristique non nulle.

Supposons que la caractéristique de F est non nulle. Dans ce cas on ne dispose plus de la prop. 2.6 et de l'intégrabilité locale des caractères sur G' et nous ne pouvons plus appliquer la démonstration plus haut. On va montrer le résultat par comparaison avec la caractéristique nulle. Soit E un corps local non archimédien de caractéristique nulle. Notons O_F (resp. O_E) l'anneau des entiers de F (resp. E), et I_F (resp. I_E) l'idéal maximal de O_F (resp. O_E). Nous disons que E et F sont m -proches (pour un entier $m \geq 1$) s'il existe un isomorphisme d'anneaux $\bar{\lambda}_{FE}^m$ de O_F/I_F^m sur O_E/I_E^m (pour tout m on peut trouver un tel corps E). Quand on dira par la suite que F et E sont m -proches, on considèrera tacitement qu'un isomorphisme $\bar{\lambda}_{FE}^m$ est fixé une fois pour toutes. Soit E un corps m -proche de F . Rebaptisons G_F et G'_F les groupes G et G' pour rappeler qu'ils sont définis sur F . Nous avons $G'_F = GL_r(D_F)$ où D_F est une algèbre à division centrale sur F , de dimension

finie d^2 . On note G'_E le groupe $GL_r(D_E)$ où D_E est une algèbre à division centrale sur E qui a le même invariant que D_F . On note G_E le groupe $GL_n(E)$. Notons O_{D_F} l'anneau des entiers de D_F , et I_{D_F} l'idéal maximal de O_{D_F} . On pose $K_{D_F}^0 = GL_r(O_{D_F})$, et, pour tout entier strictement positif l , $K_{D_F}^l = 1 + I_{D_F}^l M_r(O_{D_F})$. On fixe sur G'_F une mesure de Haar telle que le volume de $K_{D_F}^0$ soit 1. Soit f une fonction localement constante à support compact sur G'_F . Nous définissons le *niveau* de f comme étant le plus petit entier l tel que f soit bi-invariante par $K_{D_F}^l$. Notons $H_{D_F}^l$ l'algèbre de Hecke des fonctions localement constantes à support compact de niveau inférieur ou égal à l sur G'_F . Si π est une représentation irréductible de G'_F on appelle niveau de π le plus petit entier l tel que π ait un vecteur non nul fixe sous $K_{D_F}^l$. Adoptons pour G'_E des notations et définitions analogues à celles fixées dans ce paragraphe pour G'_F . Aussi, en particulierisant pour $d = 1$, $D_F = F$, $D_E = E$, les mêmes conventions et notations seront adoptées pour G_F et G_E .

Dans [Ba2] nous montrons que, quel que soit l'entier positif l , il existe un entier m tel que, pour tout corps E m -proche de F , $\bar{\lambda}_{F,E}^m$ induise un isomorphisme d'algèbres $\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m$ de $H_{D_F}^l$ sur $H_{D_E}^l$. D'où une bijection entre l'ensemble de classes d'équivalence de représentations irréductibles de G'_F de niveau inférieur ou égal à l et l'ensemble de classes d'équivalence de représentations irréductibles de G'_E de niveau inférieur ou égal à l . On utilise pour cet isomorphisme la même notation $\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m$. Nous avons

$$\mathrm{tr} \bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(\pi')(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f')) = \mathrm{tr} \pi'(f')$$

pour toute représentation π' de G'_F de niveau inférieur ou égal à l et toute $f' \in H_{D_F}^l$. Ces résultats avaient été déjà prouvés par Lemaire ([Le1]) dans le cas de G_F . Nous notons $\bar{\zeta}_{F,E}^m$ l'application correspondant à $\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m$ dans le cas $G_F - G_E$.

Lemme 3.7. *Pour tout entier l il existe un entier $m \geq 1$ tel que, si F et E sont m -proches, on ait*

$$(1) \quad \mathbf{C}_E \circ \bar{\zeta}_{F,E}^m(\pi) = \bar{\zeta}_{D_F D_E}^m \circ \mathbf{C}_F(\pi)$$

pour toute représentation essentiellement de carré intégrable π de G_F de niveau inférieur ou égal à l , où \mathbf{C}_F et \mathbf{C}_E désignent les correspondances de Jacquet-Langlands entre G_F et G'_F et entre G_E et G'_E respectivement.

Démonstration. Pour π donnée, on peut trouver m tel que l'équation (1) soit vérifiée par π - ceci a été prouvé dans [Ba2]. Donc, si l'on fixe le niveau et le caractère central de π , alors le résultat découle du fait qu'il y a un nombre fini de tels π . Maintenant, si π vérifie l'équation (1) il en est de même pour $\chi \otimes \pi$ pour tout caractère non ramifié χ de G_F , puisque les correspondances et les applications $\bar{\zeta}_{F,E}^m$ et $\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m$ commutent à cette torsion. Comme, modulo torsion par un caractère non ramifié de G_F , il existe un nombre fini de caractères de Z de niveau inférieur ou égal à l le résultat s'ensuit. \square

Lemme 3.8. *Si $f' \in H(G'_F)$ et $f \in PW_{G_F}(f')$, alors il existe un entier $m \geq 1$ tel que, si E est un corps m -proche de F , alors $\bar{\zeta}_{FE}^m(f) \leftrightarrow (-1)^{n-r} \bar{\zeta}_{D_FD_E}^m(f')$.*

Démonstration. Il nous suffit de montrer que, pour m assez grand, on a

$$\bar{\zeta}_{FE}^m(f) \in PW_{G_E}(\bar{\zeta}_{D_FD_E}^m(f')).$$

Ensuite on utilise le résultat déjà prouvé en caractéristique nulle au point 1. Soient \mathcal{P}_F l'ensemble des sous-groupes paraboliques standard de G_F et \mathcal{P}'_F l'ensemble de sous-groupes paraboliques standard de G'_F . Considérons un entier m suffisamment grand pour que $\bar{\zeta}_{FE}^m(f)$ et $\bar{\zeta}_{D_FD_E}^m(f')$ soient bien définies et qu'on ait à la fois les conditions suivantes :

i) pour tout $P_F \in \mathcal{P}_F$ de décomposition de Levi standard $P_F = L_F U_F$, $\bar{\zeta}_{FE}^m(f^{P_F})$ est bien définie et pour tout $P'_F \in \mathcal{P}'_F$ de décomposition de Levi standard $P'_F = L'_F U'_F$, $\bar{\zeta}_{D_FD_E}^m(f'^{P'_F})$ est bien définie,

ii) pour tout $P_F \in \mathcal{P}_F$ on a $\bar{\zeta}_{FE}^m(f^{P_F}) = \bar{\zeta}_{FE}^m(f)^{P_E}$ et pour tout $P'_F \in \mathcal{P}'_F$ on a $\bar{\zeta}_{D_FD_E}^m(f'^{P'_F}) = \bar{\zeta}_{D_FD_E}^m(f')^{P'_E}$,

iii) pour deux sous-groupes de Levi standard, L_F de G_F et L'_F de G'_F , qui se correspondent, en notant \mathbf{C}_F la correspondance entre les représentations essentiellement de carré intégrable de L_F et L'_F , et \mathbf{C}_E la correspondance entre les représentations essentiellement de carré intégrable de L_E et L'_E , on a

$$\mathbf{C}_E \circ \bar{\zeta}_{FE}^m(\pi) = \bar{\zeta}_{D_FD_E}^m \circ \mathbf{C}_F(\pi)$$

pour toute représentation essentiellement de carré intégrable π de L_F de niveau inférieur ou égal à celui de f^{P_F} .

Un tel m existe grâce aux faits suivants :

i) les cardinaux de \mathcal{P}_F et \mathcal{P}_E sont finis,

ii) à la page 1053 de [Le2], Lemaire montre la relation $\bar{\zeta}_{FE}^m(f^{P_F}) = \bar{\zeta}_{FE}^m(f)^{P_E}$ pour un m assez grand, dans le cas de G_F , et le même calcul s'applique à G'_F .

iii) le lemme 3.7.

Soit L_F un sous-groupe de Levi standard de G_F qui ne se transfère pas. Soit σ une représentation essentiellement de carré intégrable de L_F . On a alors (d'après la prop. 2.1, et puisque $tr\pi(f) = 0$ pour tout $\pi \in \mathbf{S}_{G_F, G'_F}$):

$$tr(ind_{P_E}^{G_E} \bar{\zeta}_{FE}^m(\sigma))(\bar{\zeta}_{FE}^m(f)) = tr\bar{\zeta}_{FE}^m(\sigma)(\bar{\zeta}_{FE}^m(f)^{P_E}) =$$

$$tr\bar{\zeta}_{FE}^m(\sigma)(\bar{\zeta}_{FE}^m(f^{P_F})) = tr\sigma(f^{P_F}) = tr(ind_{P_F}^{G_F} \sigma)(f) = 0.$$

Soient maintenant L_F et L'_F deux sous-groupes de Levi standard qui se correspondent, σ est une représentation essentiellement de carré intégrable de L_F et $\sigma' = \mathbf{C}_F(\sigma)$ la représentation essentiellement de carré intégrable

de L'_F qui lui correspond. Soient P_F et P'_F les sous-groupes paraboliques standard de G_F et G'_F associés à L_F et L'_F . On a la suite des trois égalités suivantes, où pour la première et la troisième on utilise le calcul ci-dessus, et pour avoir celle du milieu, “passage de G_F à G'_F ”, on utilise que $f \in PW_{G_F}(f')$:

$$\begin{aligned} & tr(ind_{P_E}^{G_E} \bar{\zeta}_{F_E}^m(\sigma))(\bar{\zeta}_{F_E}^m(f)) = tr(ind_{P'_F}^{G'_F} \sigma)(f) = \\ & = tr(ind_{P'_F}^{G'_F} \sigma')(f') = tr(ind_{P'_E}^{G'_E} \bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(\sigma'))(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f')). \end{aligned}$$

On a trouvé donc

$$tr(ind_{P_E}^{G_E} \bar{\zeta}_{F_E}^m(\sigma))(\bar{\zeta}_{F_E}^m(f)) = 0$$

si P_E ne se transfère pas et

$$tr(ind_{P_E}^{G_E} \bar{\zeta}_{F_E}^m(\sigma))(\bar{\zeta}_{F_E}^m(f)) = tr(ind_{P'_E}^{G'_E} \bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(\sigma'))(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f'))$$

si P_E se transfère en P'_E et σ' correspond à σ (car P_E se transfère si et seulement si P_F se transfère). Comme sur chaque groupe l'ensemble des représentations induites à partir de représentations essentiellement de carré intégrable est une base du groupe de Grothendieck ([Ze], [Ta]), on a bien $\bar{\zeta}_{F_E}^m(f) \in PW_{G_E}(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f'))$. Par conséquent, E étant de caractéristique nulle, $\bar{\zeta}_{F_E}^m(f) \leftrightarrow (-1)^{n-r} \bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f')$ par le point 1 précédent. \square

Il est difficile de “relever localement” les intégrales orbitales sur G' en caractéristique nulle comme l'a fait Lemaire pour G . Nous allons utiliser un cas particulier. Nous allons montrer que, si on a $f' \in H(G'_F)$ et $g' \in G'_F$ tels que $\Phi(f'; g') = 0$, et cela parce que le support de f' ne rencontre pas l'orbite de g' dans G'_F , alors, pour un m assez grand, cette situation topologique se relève. Combiné à la prop. 3.9 (ci-dessous) ce résultat nous suffira.

Si G est un groupe et A est une partie de G , on note $Ad_G(A)$ l'ensemble formé des conjugués dans G des éléments de A . Si X est un espace topologique et f est une fonction sur X , on note $S(f)$ le support de f .

Proposition 3.9. *Soient $f' \in H(G'_F)$ et $f \in PW_{G_F}(f')$. Si $S(f') \subset G'^{sr}_F$, alors on a bien $f \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'$.*

Démonstration. Le lemme suivant est un “fait connu” pour les spécialistes d'intégrales orbitales. N'ayant pas de référence j'en donne la preuve.

Lemme 3.10. *Si $f' \in H(G'_F)$ est telle que $S(f') \subset G'^{sr}_F$, alors il existe $f \in H(G_F)$ telle que $S(f) \subset G^{sr}_F$ et $f \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'$.*

Démonstration. Soit $g' \in G'^{sr}_F$, on dit qu'un voisinage V' de g' est de type HC s'il existe

- un voisinage ouvert compact U' de g' dans le tore $T_{g'}$ tel qu'il n'existe pas dans U' deux éléments distincts conjugués sous G'_F et
- un voisinage ouvert compact W' de 1 dans $G/T_{g'}$

tels que l'application $F_{U', W'} : U' \times W' \rightarrow G'$ donnée par $(u, w) \mapsto w^{-1}uw$

réalise un homéomorphisme de $U' \times W'$ sur V' (remarquons que $F_{U',W'}$ est bien définie). Par le théorème de submersion de [H-C], tout $g \in G_F^{sr}$ admet une base de voisinages de type HC (et un ensemble de ce type est toujours ouvert compact contenu dans G_F^{sr}). On peut donc trouver $g'_1, g'_2, \dots, g'_k \in S(f')$ et une partition V'_1, V'_2, \dots, V'_k de $S(f')$ tels que V'_i est un voisinage de type HC de g'_i et de plus f' est constante sur V'_i . Les ensembles $Ad_{G'_F}(V'_i)$ forme alors une partition du support de l'intégrale orbitale de f' , et cette dernière est constante sur chaque $Ad_{G'_F}(V'_i)$ (*). Écrivons $V'_i \cong U'_i \times W'_i$ comme plus haut. Soient $g_i \in G_F$ tels que $g_i \leftrightarrow g'_i$ pour tout i . Pour tout i on fixe un isomorphisme $j_i : T_{g'_i} \cong T_{g_i}$ comme dans le troisième paragraphe de la section 3 et on pose $U_i = j_i(U'_i)$. Comme j_i préserve le polynôme caractéristique, il est clair que l'ensemble de tous les éléments de G_F correspondant aux éléments de $Ad_{G'_F}(V'_i)$ est $Ad_{G_F}(U_i)$ (**). Soit W un voisinage ouvert compact de 1 dans G_F/T_{g_i} . L'intégrale orbitale de la fonction caractéristique 1_i de $F_{U_i, W}(U_i \times W)$ est un multiple de la fonction caractéristique de $Ad_{G_F}(U_i)$ (***) . Il résulte de (*), (**) et (***) qu'une combinaison linéaire des 1_i vérifiera la condition imposée à f dans le lemme. \square

Maintenant, si f' et f sont comme dans le lemme, en utilisant l'intégrabilité locale des caractères sur G_F^{sr} et G_F^{sr} en caractéristique non nulle, on obtient facilement par la formule d'intégration de Weyl que $f \in PW_{G_F}(f')$. Soit $h \in PW_{G_F}(f')$. Par la prop. 2.3, les intégrales orbitales de f et h sont égales sur G_F^{sr} . Par conséquent $h \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'$ et la proposition est prouvée. \square

Soit E un corps local non archimédien s -proche de F . Soient π_F et π_E des uniformisantes de F et E dont les classes se correspondent par l'isomorphisme $\bar{\lambda}_{FE}^s$. Si $P \in E[X] \setminus \{0\}$ ou $P \in F[X] \setminus \{0\}$, on note $v(P)$ la valeur minimale des valuations des coefficients de P . Si $P, Q \in E[X] \setminus \{0\}$ on dit que P et Q sont s -proches si $v(Q) = v(P)$ et l'image de $\pi_E^{-v(P)}(P - Q)$ dans $(O_E/I_E^s)[X]$ est nulle. Soit $R \in F[X]$ tel que $v(R) = 0$. L'image de R dans $(O_E/I_E^s)[X]$ est par définition l'élément de $(O_E/I_E^s)[X]$ obtenu en appliquant $\bar{\lambda}_{FE}^s$ coefficient par coefficient à l'image de R dans $(O_F/I_F^s)[X]$. Si $P \in E[X] \setminus \{0\}$ et $R \in F[X] \setminus \{0\}$ on dit que P et R sont s -proches si $v(P) = v(R)$ et les images de $\pi_E^{-v(P)}P$ et $\pi_F^{-v(R)}R$ dans $(O_E/I_E^s)[X]$ sont égales. Rappelons que, si U est un ensemble ouvert et compact de G'_F et 1_U est la fonction caractéristique de U , si $m \geq 1$ est un entier et E est un corps m -proche de F tel que $\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(1_U)$ est bien définie, alors $\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(1_U)$ est la fonction caractéristique d'un ensemble ouvert et compact V de G'_E et on pose $\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(U) = V$.

Lemme 3.11. *Soit $g' \in G'_F^{sr}$. Soit $f' \in H(G'_F)$. Supposons qu'on ait*

$$S(f') \cap Ad_{G'_F}(g') = \emptyset.$$

Alors il existe un voisinage $V(g')$ de g' et un entier m tel qu'on ait, pour tout corps local E m -proche de F :

$$S(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f')) \cap Ad_{G'_E}(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(V(g'))) = \emptyset.$$

Il existe aussi un s tel que, si E est m -proche de F et y est un élément de G'_E dont le polynôme caractéristique est s -proche de celui de g' , alors

$$\Phi(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f'); y) = 0.$$

Démonstration. Comme $Ad_{G'_E}(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(V(g'))) \neq \bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(Ad_{G'_F}(V(g')))$, le problème n'est pas trivial. Je dois utiliser certains résultats techniques de [Ba2]. Soit s tel que le polynôme caractéristique $P_{g'}$ de g' ne soit s -proche du polynôme caractéristique d'aucun élément de $S(f')$ (un tel s existe parce que $S(f')$ est compact, que $S(f') \cap Ad_{G'_F}(g') = \emptyset$ et que l'application polynôme caractéristique est continue).

Appliquons la prop. 4.10 de [Ba2] à s et g' : il existe un voisinage $V(g')$ de g' et un entier $m_{g'}$ tel que, si E est $m_{g'}$ -proche de F , si $x \in \bar{\zeta}_{D_F D_E}^{m_{g'}}(V(g'))$, le polynôme caractéristique de x est s -proche de $P_{g'}$.

Pour tout $t \in S(f')$, appliquons la prop. 4.10 de [Ba2] à s et à t . On trouve une famille $\{V(t); m_t\}_{t \in S(f')}$ où, pour tout t , $V(t)$ est un voisinage ouvert et compact de t et pour tout corps E m_t -proche de F , si $x \in \bar{\zeta}_{D_F D_E}^{m_t}(V(t))$, le polynôme caractéristique de x est s -proche de celui de t . Les ouverts $V(t)$ couvrent le compact $S(f')$: on en extrait une famille finie $\{V(t_1), V(t_2) \dots V(t_p)\}$ qui recouvre $S(f')$.

On pose maintenant

$$m = \max\{m_{g'}, m_{t_1}, m_{t_2} \dots m_{t_p}\}.$$

Alors, si E est un corps local m -proche de F ,

- le polynôme caractéristique de tout élément de $\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(V(g'))$ est s -proche de $P_{g'}$,
- le polynôme caractéristique de tout élément de $\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(S(f')) = S(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f'))$ est s -proche du polynôme caractéristique d'un élément de $\{t_1, t_2 \dots t_p\}$, mais
- aucun des polynômes caractéristiques des t_i , $1 \leq i \leq p$, n'est s -proche de $P_{g'}$.

Cela prouve que $S(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f')) \cap Ad_{G'_E}(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(V(g'))) = \emptyset$.

Aussi, si y est un élément de G'_E dont le polynôme caractéristique est s -proche de $P_{g'}$, alors le polynôme caractéristique de y ne peut être s -proche d'aucun des polynômes caractéristiques des éléments de $\{t_1, t_2 \dots t_p\}$. Donc $y \notin Ad_{G'_E}(S(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f')))$ et

$$\Phi(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f'); y) = 0.$$

□

Lemme 3.12. Avec l'hypothèse $f \in PW_{G_F}(f')$, si $g' \in G'_F{}^{sr}$ est tel que

$$Ad_{G'_F}(g') \cap S(f') = \emptyset$$

alors, si $g \leftrightarrow g'$, on a

$$\Phi(f; g) = (-1)^{n-r} \Phi(f'; g') = 0.$$

Démonstration. Soit P_g le polynôme caractéristique de g , et donc de g' .

Soient m_1 et s comme dans le lemme 3.11 : si E est un corps local m_1 -proche de F , pour tout $x \in G'_E$ dont le polynôme caractéristique est s -proche de P_g on a :

$$\Phi(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^{m_2}(f'); x) = \Phi(f'; g') = 0.$$

Soit m_2 tel que, si E est un corps local m_2 -proche de F , pour tout $x \in \bar{\zeta}_{F E}^{m_2}(K_F^{m_2} g K_F^{m_2})$ on ait :

$$\Phi(\bar{\zeta}_{F E}^{m_2}(f); x) = \Phi(f; g).$$

C'est possible par un théorème de Lemaire, [Le2], page 1042. Quitte à augmenter m_2 on peut supposer que tout élément x de $\bar{\zeta}_{F E}^{m_2}(K_F^{m_2} g K_F^{m_2})$ a un polynôme caractéristique P_x s -proche de P_g ([Ba2], prop. 4.10).

Soit m_3 tel que, si E est un corps local m_3 -proche de F , on ait :

$$\bar{\zeta}_{F E}^{m_3}(f) \leftrightarrow (-1)^{n-r} \bar{\zeta}_{D_F D_E}^{m_3}(f').$$

C'est possible par le lemme 3.8.

Posons

$$m = \max\{m_1; m_2; m_3\}.$$

Soit E un corps local de caractéristique nulle m -proche de F . Soit x un élément semisimple régulier de $\bar{\zeta}_{F E}^m(K_F^m g K_F^m)$ qui de plus se transfère en un élément $y \in G'_E$. On a alors :

$$\Phi(f; g) = \Phi(\bar{\zeta}_{F E}^m(f); x) = (-1)^{n-r} \Phi(\bar{\zeta}_{D_F D_E}^m(f'); y) = (-1)^{n-r} \Phi(f'; g') = 0,$$

ce qu'il fallait démontrer. \square

On achève maintenant la démonstration de la première implication de l'équivalence de la proposition 3.6 dans le cas de caractéristique non nulle. On enlève les indices F puisqu'on a fini avec les corps proches. Soient $g \in G^{sr}$ et $g' \in G'^{sr}$ tels que $g \leftrightarrow g'$. Montrons qu'on a

$$\Phi(f; g) = (-1)^{n-r} \Phi(f'; g').$$

L'élément g' étant semisimple régulier, $Ad_{G'}(g')$ est un fermé et donc $Ad_{G'}(g') \cap S(f')$ est un compact (inclus dans G'^{sr}). L'ensemble G'^{sr} est un ouvert donc il existe un sous-ensemble compact et ouvert X inclus dans G'^{sr} et qui contient $Ad_{G'}(g') \cap S(f')$ (prendre un voisinage ouvert et compact dans G'^{sr} de chaque point de $Ad_{G'}(g') \cap S(f')$ et en extraire un nombre fini qui couvre $Ad_{G'}(g') \cap S(f')$).

On note f'_1 la restriction de f' à X .

On pose $f'_2 = f' - f'_1$. On a clairement $S(f'_2) = S(f') \setminus X$.

Finalement on a obtenu :

$$f' = f'_1 + f'_2$$

où $f'_1 \in H(G')$ est à support dans G'^{sr} et $S(f'_2) \cap Ad_{G'}(g') = \emptyset$.

On a en particulier

$$\Phi(f'; g') = \Phi(f'_1; g').$$

Soient maintenant $f_1 \in PW_G(f'_1)$ et $f_2 \in PW_G(f'_2)$. Alors, comme on avait $f \in PW_G(f')$, la fonction $f - f_1 - f_2$ annule la trace de toute représentation de G et par la prop. 2.3 son intégrale orbitale est nulle sur G'^{sr} . En particulier,

$$\Phi(f; g) = \Phi(f_1; g) + \Phi(f_2; g).$$

Par le lemme 3.9,

$$\Phi(f_1; g) = (-1)^{n-r} \Phi(f'_1; g')$$

car $S(f'_1) \subset G'^{sr}$. Par le lemme 3.12,

$$\Phi(f_2; g) = 0$$

car $S(f'_2) \cap Ad_{G'}(g') = \emptyset$. On a donc

$$\Phi(f; g) = (-1)^{n-r} \Phi(f'; g').$$

En conclusion, $f \in PW_G(f') \Rightarrow f \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'$ en toute caractéristique.

Montrons maintenant que, réciproquement, $f \leftrightarrow (-1)^{n-r} f' \Rightarrow f \in PW_G(f')$. Supposons que $f \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'$. Soit $h \in PW_G(f')$ (il en existe un par le lemme 3.4). On vient de voir qu'on a alors $h \leftrightarrow (-1)^{n-r} f'$. On en déduit que les intégrales orbitales de h et de f sont égales sur G'^{sr} . Les caractères des représentations de G sont localement intégrables ([Le1]), on obtient donc que h et f ont la même trace sur toute représentation de G . Comme $h \in PW_G(f')$ on en déduit que $f \in PW_G(f')$. \square

Corollaire 3.13. *a) Si π' est une représentation essentiellement de carré intégrable de G' alors tout pseudocoefficient de π' correspond à tout pseudocoefficient de $\mathbf{JL}_r(\pi')$.*

Démonstration. Si $\pi = \mathbf{JL}_r(\pi')$, si $f_{\pi'}$ est un pseudocoefficient de π' et f_{π} est un pseudocoefficient de π , alors on a $f_{\pi} \in PW_G(f_{\pi'})$ et on applique la prop. 3.6. \square

Corollaire 3.14. *Le groupe G' a la propriété : si π' est une représentation de carré intégrable de G' et $f_{\pi'}$ est un pseudocoefficient de π' , alors pour tout $g \in \mathcal{G}$*

$$\chi_{\pi'}(g) = \overline{\Phi(f_{\pi'}; g)}.$$

Démonstration. C'est classique en caractéristique nulle. Nous l'avons prouvé pour $G = GL_n(F)$ en caractéristique non nulle dans [Ba1]. On transfère le résultat de G vers G' en utilisant le corollaire précédent et la correspondance de Jacquet-Langlands. Remarquons que ce résultat n'a pas été utilisé pour montrer l'orthogonalité des caractères sur G' dans [Ba2], et qu'il n'est pas non plus une conséquence directe de cette orthogonalité. \square

4. INTÉGRABILITÉ LOCALE DES CARACTÈRES

Le transfert de toutes les représentations et de toutes les fonctions de G' vers G , transfert compatible avec la trace, nous permet de prouver que l'intégrabilité locale des caractères sur G' est une conséquence de l'intégrabilité locale des caractères pour G (prouvée dans [Le1]). On montre donc le théorème suivant :

Théorème 4.1. *Soit $\pi' \in E(G')$ et soit $f' \in H(G')$. Alors la fonction $\chi_{\pi'} f'$ est intégrable sur G'^{sr} et on a*

$$\text{tr } \pi'(f') = \int_{G'^{sr}} \chi_{\pi'}(g') f'(g') dg'.$$

Démonstration. Posons $S(f')^{sr} = S(f') \cap G'^{sr}$. Soit $\{H_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante d'ouverts compacts dont la réunion est $S(f')^{sr}$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $K_n = \text{Ad}_{G'}(H_n) \cap S(f')^{sr} = \text{Ad}_{G'}(H_n) \cap S(f')$. Comme $\text{Ad}_{G'}(H_n)$ est fermé (image réciproque par PC de $PC(H_n)$, où PC est l'application polynôme caractéristique) et $S(f')$ est compact, K_n est aussi compact. Il est ouvert car intersection de deux ouverts. Nous avons obtenu une nouvelle suite croissante d'ouverts compacts $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ dont la réunion est $S(f')^{sr}$ et qui vérifient de plus:

$$g \in K_n \Rightarrow \text{Ad}_{G'}(g) \cap S(f') \subset K_n.$$

Pour tout n , notons f'_n la restriction de f' à K_n . Soit $f \in PW_G(f')$ et pour tout n , $f_n \in PW_G(f'_n)$.

Montrons d'abord que $\int_{G'^{sr}} |\chi_{\pi'}(g') f'(g')| dg'$ converge. On peut supposer que f' est à valeurs réelles positives. C'est alors le cas de toutes les f'_n . Supposons par l'absurde que $\int_{G'^{sr}} |\chi_{\pi'}(g') f'(g')| dg' = \infty$. En appliquant le théorème B, page 112 de [Ha], on trouve qu'on doit avoir forcément :

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G'^{sr}} |\chi_{\pi'}(g') f'_n(g')| dg' = \infty.$$

Mais, pour tout n , le support de f'_n contenu dans G'^{sr} et on peut appliquer la formule d'intégration de Weyl à la fonction localement constante à support compact $|\chi_{\pi'} f'_n|$. On trouve, avec les notations de la section précédente :

$$(2) \quad \int_{G'^{sr}} |\chi_{\pi'}(g') f'_n(g')| dg' = \sum_{T' \in \mathcal{T}_{G'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}} D(t') |\chi_{\pi'}(t')| \Phi(|f'_n|; t') dt' =$$

$$\sum_{T' \in \mathcal{T}_{G'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}} D(t') |\chi_{\pi'}(t')| \Phi(f'_n; t') dt'.$$

Mais on peut écrire

$$(3) \quad \sum_{T' \in \mathcal{T}_{G'}} |W(T')|^{-1} \int_{T'^{reg}} D(t') |\chi_{\pi'}(t')| \Phi(f'_n; t') dt' = \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(t)| |\Phi(f_n; t)| dt$$

puisque

- $\Phi(f_n; t) = 0$ si $t \in G^{sr} \setminus G_{G'}$ et $|\Phi(f_n; t)| = \Phi(f'_n; t')$ si $t \in G_{G'}$ et $t \leftrightarrow t'$ par la proposition 3.6 (il y a une valeur absolue à cause du signe $(-1)^{n-r}$; $\Phi(f'_n; t')$ est toujours positive)

- pour tout $t \leftrightarrow t'$, $|\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(t)| = |\chi_{\pi'}(t')|$ et $D(t) = D(t')$

- l'homéomorphisme fixé entre des tores qui se correspondent respecte la mesure.

Les relations (1), (2) et (3) impliquent alors que

$$(4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(g)| |\Phi(f_n; g)| dg = \infty.$$

Maintenant, pour tout $g \in G^{sr}$, ou bien $g \notin G_{G'}$ et alors on a

$$\Phi(f_n; g) = \Phi(f; g) = 0,$$

ou bien $g \in G_{G'}$ et alors, si $g' \in G'$ est tel que $g \leftrightarrow g'$, on a

$$|\Phi(f_n; g)| = \Phi(f'_n; g') \leq \Phi(f'; g') = |\Phi(f; g)|.$$

Par conséquent $|\Phi(f_n; g)| \leq |\Phi(f; g)|$ pour tout $g \in G^{sr}$, et, comme D est une fonction positive on a :

$$(5) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(t)| |\Phi(f_n; t)| dt \leq \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(t)| |\Phi(f; t)| dt.$$

Mais, du fait de l'intégrabilité locale des caractères sur G on a par la formule de Weyl

$$(6) \quad \sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(t)| |\Phi(f; t)| dt \leq \\ \sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(t)| |\Phi(|f|; t)| dt = \int_{G^{sr}} |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(g)| |f(g)| dg < \infty.$$

Les formules (5) et (6) impliquent l'existence d'un nombre réel qui borne supérieurement

$$\sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(t)| |\Phi(f_n; t)| dt$$

pour tout n . C'est en contradiction avec (4) ce qui prouve que $\int_{G'^{sr}} |\chi_{\pi'}(g') f'(g')| dg'$ converge.

Montrons maintenant qu'on a bien

$$\text{tr} \pi'(f') = \int_{G'^{sr}} \chi_{\pi'}(g') f'(g') dg'.$$

Montrons d'abord qu'on a

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr} \mathbf{JL}_r(\pi')(f_n) = \text{tr} \mathbf{JL}_r(\pi')(f).$$

On a

$$\text{tr} \mathbf{JL}_r(\pi')(f_n) = \sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) \chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(t) \Phi(f_n; t) dt$$

et

$$\text{tr} \mathbf{JL}_r(\pi')(f) = \sum_{T \in \mathcal{T}_G} |W(T)|^{-1} \int_{T^{reg}} D(t) \chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(t) \Phi(f; t) dt.$$

Considérons l'espace topologique $X = \coprod_{T \in \mathcal{T}_G} T^{reg}$. Munissons X de la mesure dx suivante : pour chaque tore $T \in \mathcal{T}_G$ on prend sur T^{reg} la mesure de Haar $dx = |W(T)|^{-1} dt$ où dt est la mesure fixée au début sur T . Or, la suite de fonctions $(D \chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')} \Phi(f_n; \cdot))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions intégrables sur l'espace X qui tend simplement vers la fonction $D \chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')} \Phi(f; \cdot)$. La suite de fonctions $(|D \chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')} \Phi(f_n; \cdot)|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions bornée par la fonction $|D \chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')} \Phi(f; \cdot)|$. La fonction $|D \chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')} \Phi(f; \cdot)|$ est intégrable sur X (on l'a vu plus haut, $\int_X |D(x) \chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')}(x) \Phi(f; x)| dx \leq \int_{G'^{sr}} |\chi_{\mathbf{JL}_r(\pi')} f|(g) dg < \infty$). On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée (th. D, page 110, [Ha]). On trouve bien $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr} \mathbf{JL}_r(\pi')(f_n) = \text{tr} \mathbf{JL}_r(\pi')(f)$ qui n'est autre que (7).

Pour tout n , $f_n \in PW_G(f'_n)$, donc $\text{tr} \mathbf{JL}_r(\pi')(f_n) = \text{tr} \pi'(f'_n)$.

On a $f \in PW_G(f')$ donc $\text{tr} \mathbf{JL}_r(\pi')(f) = \text{tr} \pi'(f')$.

Donc, en appliquant (7), on trouve

$$(8) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{tr} \pi'(f'_n) = \text{tr} \pi'(f').$$

Mais, pour tout n , $S(f'_n) \subset G'^{sr}$ et donc

$$\text{tr} \pi'(f'_n) = \int_{G'^{sr}} \chi_{\pi'}(g') f'_n(g') dg'$$

et on trouve en combinant avec (8)

$$(9) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G'^{sr}} \chi_{\pi'}(g') f'_n(g') dg' = \text{tr} \pi'(f').$$

Maintenant, la suite de fonctions intégrables $(\chi_{\pi'} f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction $\chi_{\pi'} f'$ sur G'^{sr} . Aussi, pour tout n on a $|\chi_{\pi'} f'_n| \leq |\chi_{\pi'} f'|$

sur G'^{sr} et on a montré que cette dernière fonction était intégrable sur G'^{sr} . En appliquant à nouveau le théorème de convergence dominée, on trouve que

$$(10) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{G'^{sr}} \chi_{\pi'}(g') f'_n(g') dg' = \int_{G'^{sr}} \chi_{\pi'}(g') f'(g') dg'.$$

Finalement, les relations (9) et (10) impliquent :

$$\text{tr } \pi'(f') = \int_{G'^{sr}} \chi_{\pi'}(g') f'(g') dg'.$$

□

5. PASSAGE EN REVUE DES RÉSULTATS EN CARACTÉRISTIQUE NON NULLE

Cet article est le dernier d'une série d'articles visant à démontrer en caractéristique non nulle des résultats déjà connus en caractéristique nulle. Il fait suite à [Ba1], [Ba2] et [Ba3]. Les résultats en question sont la correspondance de Jacquet-Langlands et le transfert des intégrales orbitales, ainsi que l'intégrabilité locale des caractères, l'orthogonalité des caractères et l'irréductibilité des induites des représentations de carré intégrable pour les formes intérieures de GL_n . Les preuves sont souvent longues car elles utilisent la construction des corps proches, et en plus tous ces résultats et des variantes plus faibles de ces résultats sont achevés au cours des démonstrations. C'est pourquoi je liste plus bas les résultats définitifs avec les références.

Pour toute forme intérieure de $GL_n(F)$, F un corps local de caractéristique non nulle, ont lieu les résultats suivants :

1) les caractères des représentations admissibles sont localement intégrables ([Le1] pour GL_n , le présent article pour les autres) ;

2) il y a orthogonalité des caractères pour les représentations de carré intégrable avec caractère central fixé ([Ba1] pour GL_n et [Ba2] pour les autres) ;

3) pour un bon choix de mesures, il y a égalité sur l'ensemble des éléments elliptiques réguliers entre le caractère d'une représentation de carré intégrable et le conjugué de l'intégrale orbitale d'un de ses pseudocoefficients ([Ba1] pour GL_n et le présent article pour les autres) ;

4) l'induite parabolique d'une représentation de carré intégrable est irréductible ([Ba3]).

On a aussi

5) correspondance de Jacquet-Langlands ([Ba2]) et

6) transfert des intégrales orbitales entre GL_n et ses formes intérieures (le présent article).

Je rappelle que 4, 5 et 6 ont été prouvés en caractéristique nulle dans [DKV]. Les points 1, 2 et 3 sont classiques pour tout groupe réductif en caractéristique nulle suite aux travaux de Harish-Chandra, Kazhdan, Howe et Clozel.

6. BIBLIOGRAPHIE

- [Ba1] A.I.Badulescu, Orthogonalité des caractères pour GL_n sur un corps local de caractéristique non nulle, *Manuscripta Math.* 101 (2000), 49-70.
- [Ba2] A.I.Badulescu, Correspondance de Jacquet-Langlands en caractéristique non nulle, prépublication Univ. Poitiers no. 155, juin 2001, à paraître dans *Ann. Sci. de l'Éc. Norm. Sup.* consultable à <http://arxiv.org>, math.GR/0201142.
- [Ba3] A.I.Badulescu, Correspondance de Jacquet-Langlands étendue à toutes les représentations, *prépublication no. 161*, Univ. Poitiers, 2001, consultable à <http://arxiv.org>, math.GR/0201117.
- [BDK] J.Bernstein, P.Deligne, D.Kazhdan, Trace Paley-Wiener Theorem for reductive p -adic groups, *J. Analyse Math.* 47 (1986), 180-192.
- [Bo] Bourbaki, *Théories spectrales, Chap.1-2*, Hermann, Paris.
- [DKV] P.Deligne, D.Kazhdan, M.-F.Vignéras, Représentations des algèbres centrales simples p -adiques, *Représentations des groupes réductifs sur un corps local*, Hermann, Paris 1984.
- [Ha] P.R.Halmos, *Measure Theory*, University Series in Higher Mathematics, VAN NOSTRAND.
- [H-C] Harish-Chandra, A submersion principle and its applications, *Proc.Indian Acad.Sc.* 90 (1981), 95-102.
- [H-CvD] Harish-Chandra, G. van Dijk, *Harmonic Analysis on Reductive p -adic Groups*, *L.N.M.*, Springer-Verlag, 1970.
- [La] G.Laumon, *Cohomology with compact support of Drinfeld modular varieties*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 41 (1996, Cambridge University Press.
- [Le1] B.Lemaire, Intégrabilité locale des caractères-distributions de $GL_N(F)$ où F est un corps local non-archimédien de caractéristique quelconque, *Compos. Math.* 100 (1996), 41-75.
- [Le2] B.Lemaire, Intégrales orbitales sur $GL(N)$ et corps locaux proches, *Ann.Inst. Fourier* 46 (1996), 1027-1056.
- [Pi] R.S.Pierce, *Associative algebras*, Grad. Texts in Math. 88, Springer-Verlag.
- [Ta] M.Tadič, Induced representations of $GL(n; A)$ for a p -adic division algebra A , *J. Reine angew. Math.* 405 (1990), 48-77.
- [We] A.Weil, *Basic Number Theory*, Classics in Math., Springer-Verlag 1973.
- [Ze] A.Zelevinski, Induced representations of reductive p -adic groups II, *Ann. Sci. ENS* 13 (1980), 165-210.